4
Estimadores ML para portadoras PSK

O estimador de máxima verossimilhança da DOA de portadoras com modulação PSK proposto neste trabalho é apresentado. O estimador proposto explora a informação estatística *a priori* das fases dos diversos símbolos de uma mesma portadora, já que todos estes símbolos pertencem a uma constelação finita. Assim, espera-se que o desempenho do novo estimador seja superior ao de estimadores sugeridos anteriormente para modelos mais abrangentes.

Neste capítulo, o estimador proposto é derivado para os modelos síncrono e assíncrono, junto com algumas versões para determinados casos particulares em cada modelo. O estimador proposto utiliza os vetores de observações $\mathbf{z}$ nos modelos síncrono e assíncrono descritos em (3-20) e (3-34), respectivamente. Percebe-se que os elementos desconhecidos são as n DOAs, representadas pelas diferenças de fase ω_u, as n amplitudes complexas B_u, os n retardos temporais τ_u (para o modelo assíncrono) e as fases dos símbolos $\phi_i^{(u)}$ que caracterizam a informação contida nas portadoras. Estas fases de símbolos perfazem um total de nN parâmetros adicionais no modelo síncrono e $2nN$ no modelo assíncrono. Cada uma destas fases pode ser modelada como uma v.a. discreta, conforme definido em (3-2). Os demais elementos (ω_u, B_u, τ_u) são tratados como parâmetros desconhecidos.

Se o número de amostras N for muito alto, o número de elementos desconhecidos pode se tornar inaceitável para qualquer aplicação prática. Para contornar este problema, o valor esperado com relação às fases dos símbolos é aplicado na função de verossimilhança antes de se estimar qualquer parâmetro. Desta forma, o número de parâmetros reais a se estimar será sempre igual a $3n$ no modelo síncrono e $4n$ no modelo assíncrono (lembrando que B_u é complexo), independentemente do comprimento da rajada de símbolos gerada por cada portadora. O problema se torna, assim, tangível pelo ponto de vista de implementação computacional.

4.1 Estimador ML–PSK: modelo síncrono

Para o modelo síncrono, o vetor $\mathbf{\Phi}$ de elementos desconhecidos foi definido em (3-26). Além de todas as nN fases de símbolos, tratadas aqui como variáveis aleatórias discretas, este vetor compreende também os parâmetros desconhecidos da portadora, definidos em (3-27) e repetidos aqui por conveniência.

$$\boldsymbol{\varphi} = \left[\begin{array}{ccccccccc} \omega_1 & \cdots & \omega_n & \Re(B_1) & \cdots & \Re(B_n) & \Im(B_1) & \cdots & \Im(B_n) \end{array} \right]^T \quad (4\text{-}1)$$

Observa-se de (3-21) que, dado o vetor $\mathbf{\Phi}$, o vetor de observações $\mathbf{z}$ é gaussiano com média $\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\phi}$ e co-variância $\mathbf{R_n}$ definida em (3-24). Assim,

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{z}|\mathbf{\Phi}}(\mathbf{Z}) &= \frac{1}{(2\pi N_0)^{mN}} \exp\left\{-\frac{1}{2N_0}\left\|\mathbf{Z} - \mathbf{T}\boldsymbol{\phi}\right\|^2\right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi N_0)^{mN}} \exp\left\{ -\frac{1}{2N_0} \sum_{k=1}^{N}\sum_{v=1}^{m} \left| Z_v[k] - \sum_{u=1}^{n} B_u \mathrm{e}^{j[(v-1)\omega_u + \phi_{k-1}^{(u)}]} \right|^2 \right\} \end{aligned} \quad (4\text{-}2)$$

Lembrando que a fdp de ϕ foi dada em (3-2), e tirando o valor esperado de (4-2) com relação a $\boldsymbol{\phi}$, chega-se a

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{z}|\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{Z}) &= \frac{1}{(2\pi N_0)^{mN}} \prod_{k=1}^{N} \mathrm{E}\left[\exp\left\{ -\frac{1}{2N_0}\left\|\mathbf{Z}_k - \mathbf{SB}\boldsymbol{\phi}_{k-1}\right\|^2 \right\} \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi N_0)^{mN}} \prod_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{M^n} \sum_{\ell=1}^{M^n} \exp\left\{ -\frac{1}{2N_0} \left\|\mathbf{Z}_k - \mathbf{SB}\boldsymbol{\phi}^{(\ell)}\right\|^2 \right\} \right) \end{aligned} \quad (4\text{-}3)$$

onde $\mathbf{Z}_k$ é o vetor-coluna de dimensão m contendo as observações de todos os elementos do *array* em $t = kT$, $\boldsymbol{\phi}_k$ é o vetor-coluna de dimensão n que possui todas as fases de modulação em $t = kT$ e $\boldsymbol{\phi}^{(\ell)}$ é a ℓ-ésima permutação possível de n fases de modulação quaisquer em uma constelação M-PSK.

A função de menos-log-verossimilhança $\mathcal{L}$ para o modelo síncrono é então

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi}) = -\ln(p_{\mathbf{z}|\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{Z})) = \text{cte} - \sum_{k=1}^{N} \ln\left(SE[k]\right) \quad (4\text{-}4)$$

onde

$$SE[k] = \sum_{\ell=1}^{M^n} \exp\left\{ -\frac{1}{2N_0} \left\|\mathbf{Z}_k - \mathbf{SB}\boldsymbol{\phi}^{(\ell)}\right\|^2 \right\} \quad (4\text{-}5)$$

representa a k-ésima soma de exponenciais decorrente da aplicação do valor esperado na fdp de $\mathbf{z}$.

As estimativas dos parâmetros relacionados em (4-1) deve minimizar $\mathcal{L}$ em (4-4). Para obter estas estimativas, (4-4) deve ser derivado com relação a cada um dos $3n$ parâmetros em $\boldsymbol{\varphi}$. Ao se igualar estas derivadas a zero, produz-se um sistema homogêneo de $3n$ equações cuja solução é o valor das estimativas ML dos parâmetros em questão. As derivadas de $\mathcal{L}$ com relação aos u-ésimos parâmetros de cada tipo são

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_u} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{SE[k]} \sum_{\ell=1}^{M^n} \frac{1}{N_0} \Im\left\{ \left[\mathbf{Z}_k - \mathbf{S}\mathbf{B}\boldsymbol{\phi}^{(\ell)} \right]^H \mathbf{J}\mathbf{S}_u B_u \mathrm{e}^{j\phi_u^{(\ell)}} \right\} \cdot \mathcal{E}_k^{(\ell)} \tag{4-6}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Re(B_u)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{SE[k]} \sum_{\ell=1}^{M^n} \frac{-1}{N_0} \Re\left\{ \left[\mathbf{Z}_k - \mathbf{S}\mathbf{B}\boldsymbol{\phi}^{(\ell)} \right]^H \mathbf{S}_u \mathrm{e}^{j\phi_u^{(\ell)}} \right\} \cdot \mathcal{E}_k^{(\ell)} \tag{4-7}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Im(B_u)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{SE[k]} \sum_{\ell=1}^{M^n} \frac{1}{N_0} \Im\left\{ \left[\mathbf{Z}_k - \mathbf{S}\mathbf{B}\boldsymbol{\phi}^{(\ell)} \right]^H \mathbf{S}_u \mathrm{e}^{j\phi_u^{(\ell)}} \right\} \cdot \mathcal{E}_k^{(\ell)} \tag{4-8}$$

onde $\mathrm{e}^{j\phi_u^{(\ell)}}$ é o u-ésimo elemento de $\boldsymbol{\phi}^{(\ell)}$, $\mathbf{J}$ é uma matriz diagonal com a forma

$$\mathbf{J} = \mathrm{diag}\Big(\begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & m-1 \end{bmatrix} \Big) \tag{4-9}$$

e o escalar $\mathcal{E}_k^{(\ell)}$ é definido como a ℓ-ésima exponencial de $SE[k]$, ou seja,

$$\mathcal{E}_k^{(\ell)} = \exp\left\{ -\frac{1}{2N_0} \left\| \mathbf{Z}_k - \mathbf{S}\mathbf{B}\boldsymbol{\phi}^{(\ell)} \right\|^2 \right\} \tag{4-10}$$

A complexidade de cada equação, assim como a do estimador, cresce linearmente com N. Este crescimento linear não seria possível se a interferência entre símbolos não houvesse sido eliminada anteriormente, pois o produtório de valores esperados em (4-3) não estaria estatisticamente correto. Ao invés disto, ter-se-ia que o somatório em ℓ possuiria M^{nN} elementos. Mesmo com esta redução de complexidade, este estimador é bastante lento para constelações maiores. Considerando que a complexidade do estimador BPSK com uma única portadora é dada por $\mathcal{C}_s$, tem-se que a complexidade de um estimador M-PSK com n portadoras é pelo menos igual a

$$\frac{nM^n}{2}\,\mathcal{C}_s$$

o que indica que a simulação de situações envolvendo constelações maiores com um número significativo de portadoras pode ser inviabilizada. Percebe-se, então, que o estimador ML-QPSK com duas portadoras será pelo menos quatro vezes mais complexo que o ML-BPSK com duas portadoras. Análises de situações envolvendo um número maior de portadoras tornam-se assim impraticáveis sob o aspecto de demanda computacional. A seguir, estimadores específicos para constelações BPSK e QPSK serão derivados, abrangendo os casos onde o número de portadoras é pequeno (1 ou 2). Com o estimador para 1 portadora, pode-se avaliar o desempenho geral do estimador nas simulações. Com o estimador para 2 portadoras, é possível fazer uma análise do desempenho do mesmo considerando uma das portadoras como um sinal interferente.

4.1.1
Estimadores ML–BPSK para modelo síncrono

Em sistemas BPSK, pode-se explorar a simplicidade e a simetria de modo que o tempo de computação requerido pelas simulações seja reduzido. Nesta seção, apenas os estimadores para $n = 1$ e $n = 2$ portadoras são desenvolvidos. Embora um estimador genérico para sistemas BPSK possa ser desenvolvido, sua velocidade nas simulações seria menor que a dos estimadores desenvolvidos a seguir, pois algumas redundâncias não poderiam ser exploradas.

O limitante de Cramér-Rao para o modelo síncrono de 1 portadora BPSK é apresentado no Apêndice B. Durante o seu cálculo, algumas aproximações precisaram ser realizadas para faixas de interesse específicas (razão sinal-ruído alta) a fim de simplificar as expressões obtidas. Estas mesmas aproximações, no entanto, podem ser utilizadas no estimador desenvolvido a seguir, obtendo-se um estimador subótimo no critério de máxima verossimilhança. Como o enfoque desta tese reside apenas no desenvolvimento de estimadores ML ótimos, este estimador aproximado será apenas apresentado no Apêndice E.

Nos estimadores para 1 portadora, o vetor de parâmetros dado em (4-1) se reduz a

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \omega & \Re(B) & \Im(B) \end{bmatrix}^T \tag{4-11}$$

e as matrizes $\mathbf{S}$ e $\mathbf{B}$ se transformam em um vetor e um escalar, respectivamente. Nos estimadores para 2 portadoras, o vetor $\boldsymbol{\varphi}$ se torna

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \omega_{3-\gamma} & \omega_{\gamma} & \Re(B_{3-\gamma}) & \Re(B_{\gamma}) & \Im(B_{3-\gamma}) & \Im(B_{\gamma}) \end{bmatrix}^T \tag{4-12}$$

onde $\gamma \in \{1, 2\}$. Como a fdp obtida para 2 portadoras é simétrica com relação aos índices dos parâmetros, todo desenvolvimento matemático realizado visa a obter as estimativas dos parâmetros com índice γ, ao invés das suas contrapartes com índice $(3 - \gamma)$.

Para 1 portadora, a função de menos-log-verossimilhança é dada por

$$\mathcal{L}(\omega, B) = \text{cte} + \frac{mN}{2N_0}A^2 - \sum_{k=1}^{N} \ln\cosh\left\{f_k\right\} \tag{4-13}$$

onde $f_k = \frac{1}{N_0}\Re\big[\mathbf{Z}_k^H\mathbf{S}B\big]$. Assim, as derivadas de (4-13) são

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\omega} = \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}\Im\big[\mathbf{Z}_k^H\mathbf{J}\mathbf{S}B\big]\tanh\{f_k\} \tag{4-14}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Re(B)} = \frac{mN}{N_0}\Re(B) - \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}\Re\big[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_k\big]\tanh\{f_k\} \tag{4-15}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Im(B)} = \frac{mN}{N_0}\Im(B) - \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}\Im\big[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_k\big]\tanh\{f_k\} \tag{4-16}$$

Para 2 portadoras, a fdp condicional de (4-3) se torna

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{z}|\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{Z}) = {} & \frac{1}{(2\pi N_0)^{mN}}\prod_{k=1}^{N}\left[\frac{1}{2}\exp\left\{-\frac{1}{2N_0}\left[\mathbf{Z}_k^H\mathbf{Z}_k + m\left(A_\gamma^2 + A_{3-\gamma}^2\right)\right]\right\}\cdot\right.\\ & \cdot\left(\exp\left\{\frac{1}{N_0}\Re\left[\mathbf{Z}_k^H\mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\right]\right\}\cosh\left\{\frac{1}{N_0}\Re\left[\left(\mathbf{Z}_k - \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\right)^H\mathbf{S}_\gamma B_\gamma\right]\right\} + \right.\\ & \left.\left. + \exp\left\{-\frac{1}{N_0}\Re\left[\mathbf{Z}_k^H\mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\right]\right\}\cosh\left\{\frac{1}{N_0}\Re\left[\left(\mathbf{Z}_k + \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\right)^H\mathbf{S}_\gamma B_\gamma\right]\right\}\right)\right] \end{aligned} \tag{4-17}$$

e a função de menos-log-verossimilhança a ser minimizada é

$$\mathcal{L}(\omega_\gamma, B_\gamma) = \text{cte} + \frac{mN}{2N_0}A_\gamma^2 - \sum_{k=1}^{N}\ln\left(g_{k,\gamma}\right) \tag{4-18}$$

onde

$$\begin{aligned} g_{k,\gamma} = {} & \exp\left\{f_k\right\}\cosh\left\{\frac{1}{N_0}\Re\left[\left(\mathbf{Z}_k - \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\right)^H\mathbf{S}_\gamma B_\gamma\right]\right\} + \\ & + \exp\left\{-f_k\right\}\cosh\left\{\frac{1}{N_0}\Re\left[\left(\mathbf{Z}_k + \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\right)^H\mathbf{S}_\gamma B_\gamma\right]\right\} \end{aligned} \tag{4-19}$$

com $f_k = \frac{1}{N_0}\Re\left[\mathbf{Z}_k^H\mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\right]$. As derivadas de (4-18) com relação aos parâmetros de índice γ são

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\omega_\gamma} = \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{g_{k,\gamma}}\Bigg(\Im\left[\left(\mathbf{Z}_k - \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\right)^H \mathbf{J}\mathbf{S}_\gamma B_\gamma\right]\cdot\exp\{f_k\}\cdot$$
$$\cdot\,\mathrm{senh}\left\{\frac{1}{N_0}\Re\left[\left(\mathbf{Z}_k - \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\right)^H \mathbf{S}_\gamma B_\gamma\right]\right\} + \Im\Big[\left(\mathbf{Z}_k + \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\right)^H$$
$$\mathbf{J}\mathbf{S}_\gamma B_\gamma\Big]\cdot\exp\{-f_k\}\cdot\mathrm{senh}\left\{\frac{1}{N_0}\Re\left[\left(\mathbf{Z}_k + \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\right)^H \mathbf{S}_\gamma B_\gamma\right]\right\}\Bigg) \quad (4\text{-}20)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Re(B_\gamma)} = \frac{mN}{N_0}\Re(B_\gamma) - \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{g_{k,\gamma}}\Bigg(\Re\left[\mathbf{S}_\gamma^H\left(\mathbf{Z}_k - \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\right)\right]\cdot\exp\{f_k\}\cdot$$
$$\cdot\,\mathrm{senh}\left\{\frac{1}{N_0}\Re\left[\left(\mathbf{Z}_k - \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\right)^H \mathbf{S}_\gamma B_\gamma\right]\right\} + \Re\left[\mathbf{S}_\gamma^H\left(\mathbf{Z}_k + \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\right)\right]\cdot$$
$$\cdot\exp\{-f_k\}\cdot\mathrm{senh}\left\{\frac{1}{N_0}\Re\left[\left(\mathbf{Z}_k + \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\right)^H \mathbf{S}_\gamma B_\gamma\right]\right\}\Bigg) \quad (4\text{-}21)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Im(B_\gamma)} = \frac{mN}{N_0}\Im(B_\gamma) - \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{g_{k,\gamma}}\Bigg(\Im\left[\mathbf{S}_\gamma^H\left(\mathbf{Z}_k - \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\right)\right]\cdot\exp\{f_k\}\cdot$$
$$\cdot\,\mathrm{senh}\left\{\frac{1}{N_0}\Re\left[\left(\mathbf{Z}_k - \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\right)^H \mathbf{S}_\gamma B_\gamma\right]\right\} + \Im\left[\mathbf{S}_\gamma^H\left(\mathbf{Z}_k + \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\right)\right]\cdot$$
$$\cdot\exp\{-f_k\}\cdot\mathrm{senh}\left\{\frac{1}{N_0}\Re\left[\left(\mathbf{Z}_k + \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\right)^H \mathbf{S}_\gamma B_\gamma\right]\right\}\Bigg) \quad (4\text{-}22)$$

As expressões (4-14)–(4-16) e (4-20)–(4-22) poderiam ser obtidas através de manipulações algébricas em (4-6)–(4-8), pois implementam este mesmo estimador. Apesar de aparentarem maior complexidade, as expressões (4-20)–(4-22) são mais recomendadas para implementação porque foram construídas para serem computacionalmente mais rápidas que (4-6)–(4-8), já que as redundâncias foram eliminadas.

4.1.2
Estimadores ML–QPSK para modelo síncrono

O estimador ML específico para portadoras QPSK com relógios alinhados ao do receptor é desenvolvido nesta seção. Percebe-se que o número de parcelas obtidas com os somatórios de cada expressão do estimador genérico descrito em (4-6)–(4-8) é igual a $N \cdot 4^n$ para um sistema QPSK. Utilizando a constelação QPSK descrita na Seção 3.1, ou seja, com as fases de modulação

ϕ pertencendo ao conjunto $\{\pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}\}$, pode-se tirar proveito da simetria para reduzir o número de parcelas do estimador e melhorar a velocidade do algoritmo.

Mais uma vez, os estimadores serão desenvolvidos para modelos com $n = 1$ ou 2 portadoras. No Apêndice C, o limitante de Cramér-Rao para o modelo síncrono com uma portadora QPSK é derivado. Algumas aproximações foram novamente necessárias para obter-se o valor deste limitante, e estas mesmas aproximações também podem ser utilizadas nas expressões do estimador para uma portadora QPSK desenvolvido a seguir. O estimador subótimo resultante é apresentado no Apêndice E. Este estimador aproximado não será simulado, uma vez que esta tese visa apenas ao desenvolvimento de estimadores ML exatos.

Para 1 portadora QPSK, a função de menos-log-verossimilhança é

$$\mathcal{L}(\omega, B) = \text{cte} + \frac{mN}{2N_0}A^2 - \sum_{k=1}^{N} \ln\left(\cosh\left\{f_{k1}\right\}\right) - \sum_{k=1}^{N} \ln\left(\cosh\left\{f_{k2}\right\}\right) \quad (4\text{-}23)$$

onde $f_{k1} = \frac{1}{\sqrt{2}N_0}\Re\left[\mathbf{Z}_k^H\mathbf{S}B\right]$ e $f_{k2} = \frac{1}{\sqrt{2}N_0}\Im\left[\mathbf{Z}_k^H\mathbf{S}B\right]$. As derivadas de (4-23) são dadas por

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\omega} = \frac{1}{\sqrt{2}N_0}\sum_{k=1}^{N}\left(\Im\left[\mathbf{Z}_k^H\mathbf{J}\mathbf{S}B\right]\tanh\left\{f_{k1}\right\} - \Re\left[\mathbf{Z}_k^H\mathbf{J}\mathbf{S}B\right]\tanh\left\{f_{k2}\right\}\right) \quad (4\text{-}24)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Re(B)} = \frac{mN}{N_0}\Re(B) - \frac{1}{\sqrt{2}N_0}\sum_{k=1}^{N}\Re\left[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_k\right]\tanh\left\{f_{k1}\right\} - \\ - \frac{1}{\sqrt{2}N_0}\sum_{k=1}^{N}\Re\left[j\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_k\right]\tanh\left\{f_{k2}\right\} \quad (4\text{-}25)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Im(B)} = \frac{mN}{N_0}\Im(B) - \frac{1}{\sqrt{2}N_0}\sum_{k=1}^{N}\Im\left[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_k\right]\tanh\left\{f_{k1}\right\} - \\ - \frac{1}{\sqrt{2}N_0}\sum_{k=1}^{N}\Im\left[j\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_k\right]\tanh\left\{f_{k2}\right\} \quad (4\text{-}26)$$

Finalmente, o estimador ML para 2 portadoras QPSK é analisado. Definindo $\mathbf{Z}_k^{(\ell)} = \mathbf{Z}_k \cdot \mathrm{e}^{-j\phi^{(\ell)}}$ e $f_k^{(\ell)} = \exp\left\{\frac{1}{N_0}\Re\left[\mathbf{Z}_k^{(\ell)^H}\mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\right]\right\}$, tem-se que, para $M = 4$ e $n = 2$, a fdp condicional do vetor $\mathbf{z}$ definida em (4-3) pode ser rescrita como

$$p_{\mathbf{z}|\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{Z}) = \frac{1}{(2\pi N_0)^{mN}} \prod_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{16} \sum_{\ell_{3-\gamma}=1}^{4} \sum_{\ell_\gamma=1}^{4} \exp\left\{ \frac{-1}{2N_0} \cdot \left\| \mathbf{Z}_k - \mathbf{S}_{\gamma} B_{\gamma}\, \mathrm{e}^{j\phi^{(\ell_\gamma)}} - \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. -\mathbf{S}_{3-\gamma} B_{3-\gamma}\, \mathrm{e}^{j\phi^{(\ell_{3-\gamma})}} \right\|^2 \right\} \right) = \frac{1}{(2\pi N_0)^{mN}} \prod_{k=1}^{N} \left[\exp\left\{ -\frac{1}{2N_0} \left[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{Z}_k + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left. +m \left(A_{3-\gamma}^2 + A_{\gamma}^2 \right) \right] \right\} \cdot \frac{1}{8} \sum_{\ell_{3-\gamma}=1}^{4} \left(f_k^{(\ell_{3-\gamma})} \sum_{\ell_\gamma=1}^{4} \frac{1}{2} \exp\left\{ \frac{1}{N_0} \Re \left[\left(\mathbf{Z}_k^{(\ell_\gamma)} - \right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\left. -\mathbf{S}_{3-\gamma} B_{3-\gamma}\, \mathrm{e}^{-j\Delta\phi} \right)^H \mathbf{S}_{\gamma} B_{\gamma} \right] \right\} \right) \right]$$

onde $\Delta\phi = \phi^{(\ell_\gamma)} - \phi^{(\ell_{3-\gamma})}$. A última exponencial pode ainda ser alterada para

$$\exp\left\{ \frac{1}{N_0} \Re \left[\left(\mathbf{Z}_k^{(\ell_{3-\gamma})} - \mathbf{S}_{3-\gamma} B_{3-\gamma} \right)^H \mathbf{S}_{\gamma} B_{\gamma}\, \mathrm{e}^{j\Delta\phi} \right] \right\}$$

Considerando então que $\Delta\phi \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, -\frac{\pi}{2}\}$ e que

$$g_{k,\gamma} = \sum_{\ell=1}^{4} f_k^{(\ell)} \left(\cosh\left\{ \frac{1}{N_0} \Re \left[\left(\mathbf{Z}_k^{(\ell)} - \mathbf{S}_{3-\gamma} B_{3-\gamma} \right)^H \mathbf{S}_{\gamma} B_{\gamma} \right] \right\} + \right.$$
$$\left. + \cosh\left\{ \frac{1}{N_0} \Im \left[\left(\mathbf{Z}_k^{(\ell)} - \mathbf{S}_{3-\gamma} B_{3-\gamma} \right)^H \mathbf{S}_{\gamma} B_{\gamma} \right] \right\} \right) \quad (4\text{-}27)$$

obtém-se a seguinte expressão para a função de verossimilhança

$$p_{\mathbf{z}|\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{Z}) = \frac{1}{(2\pi N_0)^{mN}} \prod_{k=1}^{N} \left[\frac{1}{8} \exp\left\{ -\frac{1}{2N_0} \left[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{Z}_k + m \left(A_{\gamma}^2 + A_{3-\gamma}^2 \right) \right] \right\} \cdot g_{k,\gamma} \right] \quad (4\text{-}28)$$

que implica na seguinte função de menos-log-verossimilhança a ser minimizada

$$\mathcal{L}(\omega_\gamma, B_\gamma) = \mathrm{cte} + \frac{mN}{2N_0} A_\gamma^2 - \sum_{k=1}^{N} \ln\left(g_{k,\gamma} \right) \quad (4\text{-}29)$$

cujas derivadas são dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_\gamma} = \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{g_{k,\gamma}}\sum_{\ell=1}^{4} f_k^{(\ell)} \cdot \left(\Im\left[\left(\mathbf{Z}_k^{(\ell)} - \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\right)^H \mathbf{J}\mathbf{S}_\gamma B_\gamma\right] \operatorname{senh}\left\{\frac{1}{N_0}\Re\left(\boldsymbol{\epsilon}_k^{(\ell)}\right)\right\} - \Re\left[\left(\mathbf{Z}_k^{(\ell)} - \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\right)^H \mathbf{J}\mathbf{S}_\gamma B_\gamma\right] \operatorname{senh}\left\{\frac{1}{N_0}\Im\left(\boldsymbol{\epsilon}_k^{(\ell)}\right)\right\}\right) \tag{4-30}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Re(B_\gamma)} = \frac{mN}{N_0}\Re(B_\gamma) - \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{g_{k,\gamma}}\sum_{\ell=1}^{4} f_k^{(\ell)} \cdot \left(\Re\left[\mathbf{S}_\gamma^H\left(\mathbf{Z}_k^{(\ell)} - \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\right)\right] \operatorname{senh}\left\{\frac{1}{N_0}\Re\left(\boldsymbol{\epsilon}_k^{(\ell)}\right)\right\} + \Re\left[j\mathbf{S}_\gamma^H\left(\mathbf{Z}_k^{(\ell)} - \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\right)\right] \operatorname{senh}\left\{\frac{1}{N_0}\Im\left(\boldsymbol{\epsilon}_k^{(\ell)}\right)\right\}\right) \tag{4-31}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Im(B_\gamma)} = \frac{mN}{N_0}\Im(B_\gamma) - \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{g_{k,\gamma}}\sum_{\ell=1}^{4} f_k^{(\ell)} \cdot \left(\Im\left[\mathbf{S}_\gamma^H\left(\mathbf{Z}_k^{(\ell)} - \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\right)\right] \operatorname{senh}\left\{\frac{1}{N_0}\Re\left(\boldsymbol{\epsilon}_k^{(\ell)}\right)\right\} + \Im\left[j\mathbf{S}_\gamma^H\left(\mathbf{Z}_k^{(\ell)} - \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\right)\right] \operatorname{senh}\left\{\frac{1}{N_0}\Im\left(\boldsymbol{\epsilon}_k^{(\ell)}\right)\right\}\right) \tag{4-32}$$

onde $\boldsymbol{\epsilon}_k^{(\ell)} = \left(\mathbf{Z}_k^{(\ell)} - \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\right)^H \mathbf{S}_\gamma B_\gamma$. A análise de constelações maiores não é realizada neste trabalho, pois a demanda computacional destes estimadores seria inviável para aplicações em tempo real. Nas simulações realizadas no próximo capítulo, as expressões (4-14)–(4-16) e (4-20)–(4-22) são utilizadas para obter as estimativas dos parâmetros das portadoras BPSK no modelo síncrono e as expressões (4-24)–(4-26) e (4-30)–(4-32) implementam o estimador para o modelo síncrono com portadoras QPSK.

4.2 Estimador ML–PSK: modelo assíncrono

No modelo assíncrono, o vetor $\mathbf{\Phi}$ definido em (3-39) é formado pelo vetor de fases de modulação $\boldsymbol{\phi}_{\text{vec}}$ e pelo vetor de parâmetros desconhecidos $\boldsymbol{\varphi}$ definido em (3-40) e repetido a seguir.

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \omega_1 & \cdots & \omega_n & \Re(B_1) & \cdots & \Re(B_n) & \Im(B_1) & \cdots & \Im(B_n) & \tau_1 & \cdots & \tau_n \end{bmatrix}^T \tag{4-33}$$

A fdp de $\mathbf{z}$ condicionada ao vetor $\mathbf{\Phi}$ é, de acordo com (3-35), uma gaussiana de média $\mathbf{T} \cdot \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\tau}$ e matriz co-variância $\mathbf{R_n} = 2N_0\mathbf{I}$. Assim,

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{z}|\mathbf{\Phi}}(\mathbf{Z}) &= \frac{1}{(2\pi N_0)^{mN}} \exp\left\{-\frac{1}{2N_0}\left\|\mathbf{Z} - \mathbf{T}\boldsymbol{\phi}\,\boldsymbol{\tau}\right\|^2\right\} \\ &= \frac{1}{(2\pi N_0)^{mN}} \exp\Bigg\{ - \frac{1}{2N_0}\sum_{k=1}^{N}\sum_{v=1}^{m}\Bigg|Z_v[2k] - \\ &-\sum_{u=1}^{n} B_u \mathrm{e}^{j(v-1)\omega_u}\left[\tau_u \exp\{j\,\phi_{2k-2}^{(u)}\} + (1-\tau_u)\exp\{j\,\phi_{2k-1}^{(u)}\}\right]\Bigg|^2\Bigg\} \end{aligned} \tag{4-34}$$

Realizando o valor esperado com relação às fases de modulação, chega-se a

$$p_{\mathbf{z}|\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{Z}) = \frac{1}{(2\pi N_0)^{mN}} \prod_{k=1}^{N}\left(\frac{1}{M^{2n}}\sum_{\ell=1}^{M^{2n}} \exp\left\{-\frac{1}{2N_0}\left\|\mathbf{Z}_{2k} - \mathbf{SB}\,\boldsymbol{\phi}^{(\ell)}\boldsymbol{\tau}\right\|^2\right\}\right) \tag{4-35}$$

onde $\mathbf{Z}_{2k}$ é o vetor m-dimensional contendo as observações de todos os elementos do *array* no instante $t = 2kT$ e $\boldsymbol{\phi}^{(\ell)}$ é a ℓ-ésima permutação possível da matriz de dimensão $n\times 2n$ contendo $2n$ fases de uma constelação M-PSK na forma

$$\boldsymbol{\phi}^{(\ell)}_{n\times 2n} = \begin{bmatrix} \mathrm{e}^{j\phi_{1,1}^{(\ell)}} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathrm{e}^{j\phi_{1,2}^{(\ell)}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{j\phi_{2,1}^{(\ell)}} & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{e}^{j\phi_{2,2}^{(\ell)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{j\phi_{n,1}^{(\ell)}} \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{e}^{j\phi_{n,2}^{(\ell)}} \end{bmatrix}^T \tag{4-36}$$

A função de menos-log-verossimilhança para o modelo assíncrono é

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi}) = -\ln(p_{\mathbf{z}|\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{Z})) = \text{cte} - \sum_{k=1}^{N} \ln\left(SE[2k]\right) \tag{4-37}$$

onde

$$SE[2k] = \sum_{\ell=1}^{M^{2n}} \exp\left\{-\frac{1}{2N_0}\left\|\mathbf{Z}_{2k} - \mathbf{SB}\boldsymbol{\phi}^{(\ell)}\boldsymbol{\tau}\right\|^2\right\} \tag{4-38}$$

representa a $2k$-ésima soma de exponenciais resultante da aplicação do valor esperado na fdp de $\mathbf{z}$ em (4-34). As derivadas da função $\mathcal{L}$ definida em (4-37) com relação aos elementos do vetor $\boldsymbol{\varphi}$ dado em (4-33) fornecem o estimador ML–PSK para o modelo assíncrono. O sistema homogêneo resultante com

$4n$ equações pode ser representado por apenas 4 equações, equivalentes às derivadas com relação aos parâmetros da u-ésima portadora, que são

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_u} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{SE[2k]} \sum_{\ell=1}^{M^{2n}} \frac{1}{N_0} \Im\Big\{ \big[\mathbf{Z}_{2k} - \mathbf{SB}\,\boldsymbol{\phi}^{(\ell)}\boldsymbol{\tau}\big]^H \mathbf{JS}_u B_u \big[\tau_u \mathrm{e}^{j\phi_{u,1}^{(\ell)}} + (1-\tau_u)\mathrm{e}^{j\phi_{u,2}^{(\ell)}}\big]\Big\} \cdot \mathcal{E}_{2k}^{(\ell)} \tag{4-39}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Re(B_u)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{SE[2k]} \sum_{\ell=1}^{M^{2n}} \frac{-1}{N_0} \Re\Big\{ \big[\mathbf{Z}_{2k} - \mathbf{SB}\,\boldsymbol{\phi}^{(\ell)}\boldsymbol{\tau}\big]^H \mathbf{S}_u \big[\tau_u \mathrm{e}^{j\phi_{u,1}^{(\ell)}} + (1-\tau_u)\mathrm{e}^{j\phi_{u,2}^{(\ell)}}\big]\Big\} \cdot \mathcal{E}_{2k}^{(\ell)} \tag{4-40}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Im(B_u)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{SE[2k]} \sum_{\ell=1}^{M^{2n}} \frac{1}{N_0} \Im\Big\{ \big[\mathbf{Z}_{2k} - \mathbf{SB}\,\boldsymbol{\phi}^{(\ell)}\boldsymbol{\tau}\big]^H \mathbf{S}_u \big[\tau_u \mathrm{e}^{j\phi_{u,1}^{(\ell)}} + (1-\tau_u)\mathrm{e}^{j\phi_{u,2}^{(\ell)}}\big]\Big\} \cdot \mathcal{E}_{2k}^{(\ell)} \tag{4-41}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tau_u} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{SE[2k]} \sum_{\ell=1}^{M^{2n}} \frac{1}{N_0} \Re\Big\{ \big[\mathbf{Z}_{2k} - \mathbf{SB}\,\boldsymbol{\phi}^{(\ell)}\boldsymbol{\tau}\big]^H \mathbf{S}_u B_u \big(\mathrm{e}^{j\phi_{u,2}^{(\ell)}} - \mathrm{e}^{j\phi_{u,1}^{(\ell)}}\big)\Big\} \cdot \mathcal{E}_{2k}^{(\ell)} \tag{4-42}$$

onde $\mathrm{e}^{j\phi_{u,1}^{(\ell)}}$ e $\mathrm{e}^{j\phi_{u,2}^{(\ell)}}$ são elementos da matriz $\boldsymbol{\phi}^{(\ell)}$ definida em (4-36), $\mathbf{J}$ é a mesma matriz diagonal definida em (4-9) para o modelo síncrono e $\mathcal{E}_{2k}^{(\ell)}$ é a ℓ-ésima exponencial de $SE[2k]$ que, de acordo com (4-38), vale

$$\mathcal{E}_{2k}^{(\ell)} = \exp\left\{ -\frac{1}{2N_0} \left\| \mathbf{Z}_{2k} - \mathbf{SB}\,\boldsymbol{\phi}^{(\ell)}\boldsymbol{\tau} \right\|^2 \right\} \tag{4-43}$$

Mais uma vez, observa-se que a complexidade apresenta um crescimento linear com N. Embora no modelo assíncrono a IES não tenha sido eliminada, ela foi reduzida a uma única parcela devido à aplicação de um pulso finito no tempo, de duração T. Como o vetor $\mathbf{z}$ é formado apenas por amostras pares, não existem dois elementos deste vetor que sejam formados a partir de símbolos coincidentes, o que transforma o valor esperado de (4-34) no produtório apresentado em (4-35). Percebe-se, no entanto, que a complexidade do estimador no modelo assíncrono (M^{2n} parcelas) cresce de forma quadrática quando comparada a complexidade do modelo síncrono (M^n parcelas). Isto inviabiliza a simulação do sistema QPSK no modelo assíncrono, pois a demanda computacional desta simulação seria pelo menos equivalente, no modelo síncrono, a de um sistema PSK-16. Pode-se analisar este fato também ao se considerar que a complexidade computacional do estimador ML-BPSK com uma portadora para o modelo assíncrono é dada por $\mathcal{C}_a > 2\mathcal{C}_s$, onde o significado de $\mathcal{C}_s$ foi apresentado na Seção 4.1. Desta forma, a complexidade de um estimador M-PSK com n portadoras é pelo menos igual a

$$\frac{nM^{2n}}{2}\,C_s$$

e a carga demandada para simular o estimador ML-BPSK com duas portadoras será pelo menos quatro vezes maior no modelo assíncrono que no modelo síncrono. Percebe-se ainda que, para o modelo assíncrono, o estimador ML-QPSK com duas portadoras será pelo menos 16 vezes mais complexo que o estimador ML-BPSK com duas portadoras, ou pelo menos 64 vezes mais complexo que o ML-BPSK com duas portadoras para o modelo síncrono, o que corrobora a inviabilidade de simular o estimador ML-QPSK para modelo assíncrono. Entretanto, as comparações realizadas no próximo capítulo relativas ao desempenho dos sistemas BPSK e QPSK para o modelo síncrono e dos sistemas BPSK em ambos os modelos discutidos fornecem uma boa idéia do desempenho de um sistema QPSK no modelo assíncrono. Antes destes resultados serem apresentados, porém, estimadores simplificados do modelo assíncrono serão obtidos para os sistemas BPSK apenas.

4.2.1
Estimadores ML–BPSK para modelo assíncrono

Mais uma vez, a simetria dos sistemas BPSK auxiliarão no desenvolvimento de expressões mais eficientes na simulação dos estimadores para o modelo assíncrono. Serão desenvolvidos estimadores para $n = 1$ e $n = 2$ portadoras. O estimador para uma portadora será utilizado para determinar o desempenho do estimador, enquanto que o estimador para duas portadoras fornecerá uma idéia da degradação do desempenho em face de uma portadora interferente.

O limitante de Cramér-Rao do modelo assíncrono para uma portadora BPSK é derivado no Apêndice D. Para que este limitante seja obtido, são necessárias algumas aproximações que também podem ser aplicadas nas expressões do estimador proposto a seguir. O estimador aproximado resultante é desenvolvido no Apêndice E. Conforme já foi dito, esta tese não apresenta resultados de simulações obtidas a partir dos estimadores subótimos apresentados no Apêndice E.

Para $n = 1$ portadora, o vetor de parâmetros desconhecidos $\boldsymbol{\varphi}$ apresentado em (4-33) será reduzido a

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \omega & \Re(B) & \Im(B) & \tau \end{bmatrix}^T \tag{4-44}$$

as matrizes $\mathbf{S}$ e $\mathbf{B}$ serão mais uma vez reduzidas respectivamente a um vetor coluna e a um escalar, o vetor $\boldsymbol{\tau}$ definido em (3-37) apresentará apenas dois elementos, e todos os elementos da matriz $\boldsymbol{\phi}$ definida em (3-36) serão não nulos.

A função de menos-log-verossimilhança $\mathcal{L}$ deste cenário é dada por

$$\mathcal{L}(\omega, B, \tau) = \text{cte} + \frac{mN}{2N_0}A^2 - \sum_{k=1}^{N} \ln\left(g_{2k}\right) \tag{4-45}$$

onde

$$g_{2k} = \cosh\big\{f_{2k}\big\} + \varepsilon_\tau \cdot \cosh\big\{f_{2k}(1-2\tau)\big\} \tag{4-46}$$

com $f_{2k} = \frac{1}{N_0}\Re\big[\mathbf{Z}_{2k}^H \mathbf{S} B\big]$ e $\varepsilon_\tau = \exp\{\frac{2m}{N_0}A^2\tau(1-\tau)\}$. Assim, as derivadas de (4-45) com relação aos elementos de (4-44) são

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{g_{2k}}\Im\big[\mathbf{Z}_{2k}^H \mathbf{J}\mathbf{S}B\big]\cdot g'_{2k} \tag{4-47}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Re(B)} = \frac{mN}{N_0}\Re(B) - \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{g_{2k}}\Big\{&\Re\big[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_{2k}\big]\cdot g'_{2k} + \\ &+4m\tau(1-\tau)\varepsilon_\tau\cosh\big\{f_{2k}(1-2\tau)\big\}\cdot\Re(B)\Big\}\end{aligned} \tag{4-48}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Im(B)} = \frac{mN}{N_0}\Im(B) - \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{g_{2k}}\Big\{&\Im\big[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_{2k}\big]\cdot g'_{2k} + \\ &+4m\tau(1-\tau)\varepsilon_\tau\cosh\big\{f_{2k}(1-2\tau)\big\}\cdot\Im(B)\Big\}\end{aligned} \tag{4-49}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tau} = 2\varepsilon_\tau\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{g_{2k}}\left[f_{2k}\,\text{senh}\big\{f_{2k}(1-2\tau)\big\} - \frac{mA^2}{N_0}(1-2\tau)\cosh\big\{f_{2k}(1-2\tau)\big\}\right] \tag{4-50}$$

onde

$$g'_{2k} = \text{senh}\big\{f_{2k}\big\} + (1-2\tau)\varepsilon_\tau\cdot\text{senh}\big\{f_{2k}(1-2\tau)\big\} \tag{4-51}$$

é a derivada de g_{2k} com relação a f_{2k}. Para duas portadoras, o vetor de parâmetros se torna

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \omega_{3-\gamma} & \omega_{\gamma} & \Re(B_{3-\gamma}) & \Re(B_{\gamma}) & \Im(B_{3-\gamma}) & \Im(B_{\gamma}) & \tau_{3-\gamma} & \tau_{\gamma} \end{bmatrix}^T \quad (4\text{-}52)$$

com $\gamma \in \{1, 2\}$. As funções a seguir são desenvolvidas para simplificar as derivadas nos parâmetros com índice γ. Redefinindo as funções f e ε como

$$f_{2k,\gamma} = \frac{1}{N_0}\Re\big[\mathbf{Z}_{2k}^H \mathbf{S}_{\gamma} B_{\gamma}\big] \qquad f_{1,2} = \frac{1}{N_0}\Re\big[\mathbf{S}_1^H \mathbf{S}_2 B_1^* B_2\big]$$
$$\varepsilon_{\tau_\gamma} = \exp\big\{\tfrac{2m}{N_0} A_\gamma^2 \tau_\gamma (1-\tau_\gamma)\big\}$$

e a função g como

$$\begin{aligned} g_{2k,\gamma} = {} & \exp\Big\{f_{2k,3-\gamma}\Big\} q_{2k,\gamma}^{(1)} + \exp\Big\{-f_{2k,3-\gamma}\Big\} q_{2k,\gamma}^{(2)} + \varepsilon_{\tau_{3-\gamma}} \cdot \\ & \cdot \bigg(\exp\Big\{f_{2k,3-\gamma}(1-2\tau_{3-\gamma})\Big\} q_{2k,\gamma}^{(3)} + \exp\Big\{-f_{2k,3-\gamma}(1-2\tau_{3-\gamma})\Big\} q_{2k,\gamma}^{(4)} \bigg) \end{aligned} \quad (4\text{-}53)$$

onde

$$\begin{aligned} q_{2k,\gamma}^{(1)} &= \cosh\big\{f_{2k,\gamma} - f_{1,2}\big\} + \varepsilon_{\tau_\gamma} \cdot \cosh\big\{(f_{2k,\gamma} - f_{1,2}) \cdot (1-2\tau_\gamma)\big\} \\ q_{2k,\gamma}^{(2)} &= \cosh\big\{f_{2k,\gamma} + f_{1,2}\big\} + \varepsilon_{\tau_\gamma} \cdot \cosh\big\{(f_{2k,\gamma} + f_{1,2}) \cdot (1-2\tau_\gamma)\big\} \\ q_{2k,\gamma}^{(3)} &= \cosh\big\{f_{2k,\gamma} - f_{1,2}(1-2\tau_{3-\gamma})\big\} + \\ & \qquad +\varepsilon_{\tau_\gamma} \cdot \cosh\big\{[f_{2k,\gamma} - f_{1,2}(1-2\tau_{3-\gamma})] \cdot (1-2\tau_\gamma)\big\} \\ q_{2k,\gamma}^{(4)} &= \cosh\big\{f_{2k,\gamma} + f_{1,2}(1-2\tau_{3-\gamma})\big\} + \\ & \qquad +\varepsilon_{\tau_\gamma} \cdot \cosh\big\{[f_{2k,\gamma} + f_{1,2}(1-2\tau_{3-\gamma})] \cdot (1-2\tau_\gamma)\big\} \end{aligned}$$

Então, para este cenário, a função de verossimilhança genérica em (4-35) se torna

$$p_{\mathbf{z}|\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{Z}) = \frac{1}{(2\pi N_0)^{mN}} \prod_{k=1}^{N} \frac{1}{8} \exp\Big\{ -\frac{1}{2N_0}\big[\mathbf{Z}_{2k}^H \mathbf{Z}_{2k} + m\big(A_\gamma^2 + A_{3-\gamma}^2\big)\big]\Big\} \cdot g_{2k,\gamma} \quad (4\text{-}54)$$

com $g_{2k,\gamma}$ definido em (4-53). As derivadas com relação aos parâmetros de índice γ do vetor $\boldsymbol{\varphi}$ definido em (4-52) são obtidas ao minimizar a função de menos-log-verossimilhança dada por

$$\mathcal{L}(\omega_\gamma, B_\gamma, \tau_\gamma) = \text{cte} + \frac{mN}{2N_0} A_\gamma^2 - \sum_{k=1}^{N} \ln\Big(g_{2k,\gamma}\Big) \quad (4\text{-}55)$$

onde 'cte' é uma constante nos parâmetros com índice γ. O estimador é dado pelas derivadas

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\omega_\gamma} = \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{g_{2k,\gamma}}\Bigg[\exp\big\{f_{2k,3-\gamma}\big\}\Im\Big[\big(\mathbf{Z}_{2k} - \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\big)^H\mathbf{J}S_\gamma B_\gamma\Big]q'^{(1)}_{2k,\gamma} +$$
$$+\exp\big\{-f_{2k,3-\gamma}\big\}\Im\Big[\big(\mathbf{Z}_{2k} + \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\big)^H\mathbf{J}S_\gamma B_\gamma\Big]q'^{(2)}_{2k,\gamma} + \varepsilon_{\tau_{3-\gamma}}\cdot$$
$$\cdot\Bigg(\exp\big\{f_{2k,3-\gamma}(1-2\tau_{3-\gamma})\big\}\Im\Big[\big(\mathbf{Z}_{2k} - -\mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}(1-2\tau_{3-\gamma})\big)^H\mathbf{J}S_\gamma B_\gamma\Big]q'^{(3)}_{2k,\gamma} +$$
$$+\exp\big\{-f_{2k,3-\gamma}(1-2\tau_{3-\gamma})\big\}\Im\Big[\big(\mathbf{Z}_{2k} + \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}(1-2\tau_{3-\gamma})\big)^H\mathbf{J}S_\gamma B_\gamma\Big]q'^{(4)}_{2k,\gamma}\Bigg)\Bigg] \tag{4-56}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\Re(B_\gamma)} = \frac{mN}{N_0}\Re(B_\gamma) - \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{g_{2k,\gamma}}\Bigg\{\exp\big\{f_{2k,3-\gamma}\big\}\Bigg(\Re\Big[\mathbf{S}_\gamma^H\big(\mathbf{Z}_{2k} -$$
$$-\mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\big)\Big]q'^{(1)}_{2k,\gamma} + 4m\tau_\gamma(1-\tau_\gamma)\varepsilon_{\tau_\gamma}\cosh\big\{(f_{2k,\gamma} - f_{1,2})\cdot(1-2\tau_\gamma)\big\}$$
$$\Re(B)\Bigg) + \exp\big\{-f_{2k,3-\gamma}\big\}\Bigg(\Re\Big[\mathbf{S}_\gamma^H\big(\mathbf{Z}_{2k} + \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\big)\Big]q'^{(2)}_{2k,\gamma} + 4m\tau_\gamma$$
$$(1-\tau_\gamma)\varepsilon_{\tau_\gamma}\cosh\big\{(f_{2k,\gamma} + f_{1,2})\cdot(1-2\tau_\gamma)\big\}\Re(B)\Bigg) + \varepsilon_{\tau_{3-\gamma}}\cdot$$
$$\cdot\Bigg[\exp\big\{f_{2k,3-\gamma}(1-2\tau_{3-\gamma})\big\}\Bigg(\Re\Big[\mathbf{S}_\gamma^H\big(\mathbf{Z}_{2k} - \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}(1-2\tau_{3-\gamma})\big)\Big]q'^{(3)}_{2k,\gamma} +$$
$$+4m\tau_\gamma(1-\tau_\gamma)\varepsilon_{\tau_\gamma}\cosh\big\{[f_{2k,\gamma} - f_{1,2}(1-2\tau_{3-\gamma})]\cdot(1-2\tau_\gamma)\big\}\Re(B)\Bigg) +$$
$$+\exp\big\{-f_{2k,3-\gamma}(1-2\tau_{3-\gamma})\big\}\Bigg(\Re\Big[\mathbf{S}_\gamma^H\big(\mathbf{Z}_{2k} + \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}(1-2\tau_{3-\gamma})\big)\Big]q'^{(4)}_{2k,\gamma} +$$
$$+4m\tau_\gamma(1-\tau_\gamma)\varepsilon_{\tau_\gamma}\cosh\big\{[f_{2k,\gamma} + f_{1,2}(1-2\tau_{3-\gamma})]\cdot(1-2\tau_\gamma)\big\}\Re(B)\Bigg)\Bigg]\Bigg\} \tag{4-57}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Im(B_\gamma)} = \frac{mN}{N_0}\Im(B_\gamma) - \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{g_{2k,\gamma}}\Bigg\{\exp\big\{f_{2k,3-\gamma}\big\}\Bigg(\Im\Big[\mathbf{S}_\gamma^H\big(\mathbf{Z}_{2k} -$$

$$-\mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\big)\Big]q'^{(1)}_{2k,\gamma} + 4m\tau_\gamma(1-\tau_\gamma)\varepsilon_{\tau_\gamma}\cosh\big\{(f_{2k,\gamma} - f_{1,2})\cdot(1-2\tau_\gamma)\big\}$$

$$\Im(B)\Bigg) + \exp\big\{-f_{2k,3-\gamma}\big\}\Bigg(\Im\Big[\mathbf{S}_\gamma^H\big(\mathbf{Z}_{2k} + \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}\big)\Big]q'^{(2)}_{2k,\gamma} + 4m\tau_\gamma$$

$$(1-\tau_\gamma)\varepsilon_{\tau_\gamma}\cosh\big\{(f_{2k,\gamma} + f_{1,2})\cdot(1-2\tau_\gamma)\big\}\Im(B)\Bigg) + \varepsilon_{\tau_{3-\gamma}}\cdot$$

$$\cdot\Bigg[\exp\big\{f_{2k,3-\gamma}(1-2\tau_{3-\gamma})\big\}\Bigg(\Im\Big[\mathbf{S}_\gamma^H\big(\mathbf{Z}_{2k} - \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}(1-2\tau_{3-\gamma})\big)\Big]q'^{(3)}_{2k,\gamma} +$$

$$+4m\tau_\gamma(1-\tau_\gamma)\varepsilon_{\tau_\gamma}\cosh\big\{[f_{2k,\gamma} - f_{1,2}(1-2\tau_{3-\gamma})]\cdot(1-2\tau_\gamma)\big\}\Im(B)\Bigg) +$$

$$+\exp\big\{-f_{2k,3-\gamma}(1-2\tau_{3-\gamma})\big\}\Bigg(\Im\Big[\mathbf{S}_\gamma^H\big(\mathbf{Z}_{2k} + \mathbf{S}_{3-\gamma}B_{3-\gamma}(1-2\tau_{3-\gamma})\big)\Big]q'^{(4)}_{2k,\gamma} +$$

$$+4m\tau_\gamma(1-\tau_\gamma)\varepsilon_{\tau_\gamma}\cosh\big\{[f_{2k,\gamma} + f_{1,2}(1-2\tau_{3-\gamma})]\cdot(1-2\tau_\gamma)\big\}\Im(B)\Bigg)\Bigg]\Bigg\} \tag{4-58}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tau_\gamma} = 2\varepsilon_{\tau_\gamma}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{g_{2k,\gamma}}\Bigg\{\exp\big\{f_{2k,3-\gamma}\big\}\Bigg((f_{2k,\gamma} - f_{1,2})\cdot\operatorname{senh}\big\{(f_{2k,\gamma} - f_{1,2})\cdot$$

$$\cdot(1-2\tau_\gamma)\big\} - \frac{mA_\gamma^2}{N_0}(1-2\tau_\gamma)\cdot\cosh\big\{(f_{2k,\gamma} - f_{1,2})\cdot(1-2\tau_\gamma)\big\}\Bigg) +$$

$$+\exp\big\{-f_{2k,3-\gamma}\big\}\Bigg((f_{2k,\gamma} + f_{1,2})\cdot\operatorname{senh}\big\{(f_{2k,\gamma} + f_{1,2})\cdot(1-2\tau_\gamma)\big\} -$$

$$-\frac{mA_\gamma^2}{N_0}(1-2\tau_\gamma)\cdot\cosh\big\{(f_{2k,\gamma} + f_{1,2})\cdot(1-2\tau_\gamma)\big\}\Bigg) + \varepsilon_{\tau_{3-\gamma}}\cdot$$

$$\cdot\Bigg[\exp\big\{f_{2k,3-\gamma}(1-2\tau_{3-\gamma})\big\}\Bigg([f_{2k,\gamma} - f_{1,2}(1-2\tau_{3-\gamma})]\cdot\operatorname{senh}\big\{[f_{2k,\gamma} -$$

$$-f_{1,2}(1-2\tau_{3-\gamma})]\cdot(1-2\tau_\gamma)\big\} - \frac{mA_\gamma^2}{N_0}(1-2\tau_\gamma)\cdot\cosh\big\{[f_{2k,\gamma} -$$

$$-f_{1,2}(1-2\tau_{3-\gamma})]\cdot(1-2\tau_\gamma)\big\}\Bigg) + \exp\big\{-f_{2k,3-\gamma}(1-2\tau_{3-\gamma})\big\}\Bigg([f_{2k,\gamma} +$$

$$+f_{1,2}(1-2\tau_{3-\gamma})]\cdot\operatorname{senh}\big\{[f_{2k,\gamma} + f_{1,2}(1-2\tau_{3-\gamma})]\cdot(1-2\tau_\gamma)\big\} -$$

$$-\frac{mA_\gamma^2}{N_0}(1-2\tau_\gamma)\cdot\cosh\big\{[f_{2k,\gamma} + f_{1,2}(1-2\tau_{3-\gamma})]\cdot(1-2\tau_\gamma)\big\}\Bigg)\Bigg]\Bigg\} \tag{4-59}$$

onde

$$
\begin{aligned}
q_{2k,\gamma}^{\prime(1)} &= \operatorname{senh}\big\{ f_{2k,\gamma} - f_{1,2} \big\} + (1-2\tau_\gamma)\cdot\varepsilon_{\tau_\gamma}\cdot \operatorname{senh}\big\{ (f_{2k,\gamma} - f_{1,2})\cdot(1-2\tau_\gamma) \big\} \\
q_{2k,\gamma}^{\prime(2)} &= \operatorname{senh}\big\{ f_{2k,\gamma} + f_{1,2} \big\} + (1-2\tau_\gamma)\cdot\varepsilon_{\tau_\gamma}\cdot \operatorname{senh}\big\{ (f_{2k,\gamma} + f_{1,2})\cdot(1-2\tau_\gamma) \big\} \\
q_{2k,\gamma}^{\prime(3)} &= \operatorname{senh}\big\{ f_{2k,\gamma} - f_{1,2}(1-2\tau_{3-\gamma}) \big\} + \\
&\qquad +(1-2\tau_\gamma)\cdot\varepsilon_{\tau_\gamma}\cdot \operatorname{senh}\big\{ [f_{2k,\gamma} - f_{1,2}(1-2\tau_{3-\gamma})]\cdot(1-2\tau_\gamma) \big\} \\
q_{2k,\gamma}^{\prime(4)} &= \operatorname{senh}\big\{ f_{2k,\gamma} + f_{1,2}(1-2\tau_{3-\gamma}) \big\} + \\
&\qquad +(1-2\tau_\gamma)\cdot\varepsilon_{\tau_\gamma}\cdot \operatorname{senh}\big\{ [f_{2k,\gamma} + f_{1,2}(1-2\tau_{3-\gamma})]\cdot(1-2\tau_\gamma) \big\}
\end{aligned}
$$

são as derivadas de $q_{2k,\gamma}^{(\ell)}$ com relação a $f_{2k,\gamma}$. No próximo capítulo, os resultados obtidos em (4-47)–(4-50) e (4-56)–(4-59) implementam o estimador dos parâmetros das portadoras BPSK no modelo assíncrono para $n = 1$ e $n = 2$ portadoras, respectivamente. Pode-se observar que todas as expressões obtidas nesta seção representam um caso mais geral das obtidas na Seção 4.1.1. Fazendo-se $\tau = 0$, obtém-se alinhamento perfeito entre os relógios das portadoras e do receptor, e todas os estimadores desenvolvidos para o modelo assíncrono se transformam naqueles apresentados no modelo síncrono.

4.2.2
Estimadores ML–QPSK para modelo assíncrono

Conforme discutido na Seção 4.2, o estimador ML para portadoras QPSK no modelo assíncrono é muito complexo computacionalmente para ser implementado e simulado, de modo que seu desempenho não será avaliado no Capítulo 5, ao contrário dos demais estimadores apresentados até então. Desta forma, os detalhes de simplificação e manipulações algébricas para formação de um estimador mais veloz nas simulações não serão realizados nesta seção. Apresenta-se então o estimador em sua forma mais imediata, que é bastante similar à apresentada na Seção 4.2.

A fdp do vetor de observações no instante $t = 2kT$, $\mathbf{z}_{2k}$, condicionada ao vetor de parâmetros desconhecidos $\boldsymbol{\varphi}$ definido em (4-44) para $n = 1$ portadora está ilustrada na Fig. 4.1 e equivale a média aritmética de 16 gaussianas com médias que pertencem ao conjunto

$$
\Big\{[\pm 1 \pm j]\mathbf{S}B/\sqrt{2}\ ;\ [\pm 1 \pm j(1-2\tau)]\mathbf{S}B/\sqrt{2}\ ; \\
[\pm(1-2\tau) \pm j]\mathbf{S}B/\sqrt{2}\ ;\ [\pm(1-2\tau) \pm j(1-2\tau)]\mathbf{S}B/\sqrt{2}\Big\} \quad (4\text{-}60)
$$

e com variâncias idênticas. Desta forma, a fdp condicional de $\mathbf{z}$ definida em

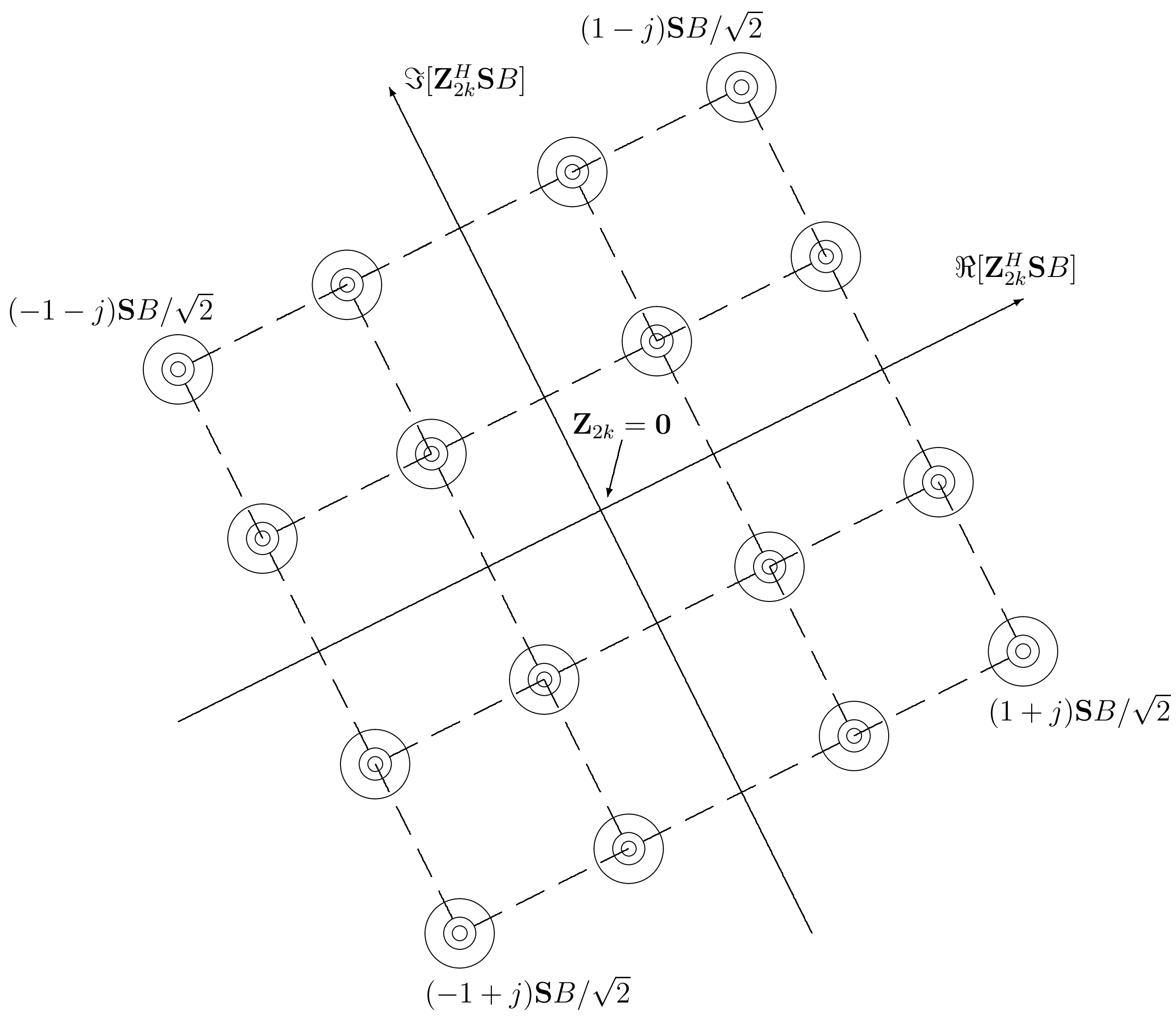

Figura 4.1: Fdp de $\mathbf{z}_{2k}$ condicional a $\boldsymbol{\varphi}$ para sistemas com uma única portadora QPSK no modelo assíncrono.

(4-35) se torna

$$p_{\mathbf{z}|\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{Z}) = \frac{1}{(2\pi N_0)^{mN}} \prod_{k=1}^{N} \left(\frac{1}{16} \sum_{\ell=1}^{16} \exp\left\{ -\frac{1}{2N_0} \left\| \mathbf{Z}_{2k} - \mathbf{S}B\,\boldsymbol{\phi}^{(\ell)}\boldsymbol{\tau} \right\|^2 \right\} \right) \quad (4\text{-}61)$$

com as médias $\mathbf{S}B\,\boldsymbol{\phi}^{(\ell)}\boldsymbol{\tau}$ ilustradas na Fig. 4.1. A função de menos-log-verossimilhança é

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi}) = -\ln(p_{\mathbf{z}|\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{Z})) = \text{cte} - \sum_{k=1}^{N} \ln \left(\sum_{\ell=1}^{16} \mathcal{E}_{2k}^{(\ell)} \right) \quad (4\text{-}62)$$

onde

$$\mathcal{E}_{2k}^{(\ell)} = \exp\left\{ -\frac{1}{2N_0} \left\| \mathbf{Z}_{2k} - \mathbf{SB}\,\boldsymbol{\phi}^{(\ell)}\boldsymbol{\tau} \right\|^2 \right\} \quad (4\text{-}63)$$

já foi definido em (4-43) como a ℓ-ésima exponencial da fdp condicional de

$\mathbf{z}_{2k}$ ilustrada na Fig. 4.1 e definida algebricamente em (4-61). As derivadas de $\mathcal{L}$ dado em (4-62) com relação aos parâmetros da portadora são idênticas às definidas em (4-39)–(4-42) para o estimador genérico do modelo assíncrono, estando a única distinção existente relacionada com a substituição do limite superior do somatório em ℓ pelo seu valor para este caso específico ($M^{2n} = 16$). Para duas portadoras, percebe-se que o somatório em ℓ apresentará 256 parcelas—não convém relacioná-las aqui. Basta intuir que elas surgirão da combinação das 16 médias definidas na Fig. 4.1 para uma portadora (principal) com as mesmas 16 médias, porém definidas agora para a portadora interferente. Assim, a média de cada uma das 256 gaussianas será dada pela soma de dois dos elementos relacionados em (4-60), o primeiro deles definido com $\mathbf{S}_1$, B_1 e τ_1, e o segundo com $\mathbf{S}_2$, B_2 e τ_2.