

3

Modelos de sinais

A análise dos modelos de sinais a serem utilizados neste trabalho é feita neste capítulo. Os modelos descritos a seguir tentam, na medida do possível, manter a notação utilizada pelo modelo genérico descrito na Seção 2.1. Dois modelos serão analisados, ambos considerando o canal ideal, com ruído aditivo. O primeiro, chamado de **modelo síncrono**, considera que os relógios de todas as portadoras transmitidas estão alinhados no tempo com o relógio do receptor, mantendo assim a condição de ausência de interferência entre símbolos proporcionada pela utilização de pulsos que satisfazem o critério de Nyquist (ver Apêndice A). Como este modelo ideal é de difícil concepção prática, um segundo modelo deve ser sugerido, denominado neste texto de **modelo assíncrono**, que lida com a falta de alinhamento temporal entre os relógios das portadoras e do receptor. Espera-se que o desempenho do estimador obtido através do segundo modelo seja pior do que o obtido com o primeiro. Esta comparação de desempenhos motiva a análise do primeiro modelo, mesmo que este tenha pouca validade prática.

Embora a utilização de um modelo com várias portadoras independentes atingindo o receptor a partir de direções de chegada distintas motive a análise de um modelo que considera o multipercorso de uma única portadora, este último caso não será estudado nesta tese.

3.1

Modelo síncrono

A Fig. 3.1 representa um diagrama em blocos de um sistema de transmissão contínua para portadoras com modulação M-PSK. As n fontes determinam as seqüências de bits a serem transmitidas, enquanto que os moduladores transformam estas seqüências em n portadoras $\{s_1(t), \dots, s_n(t)\}$ moduladas por um pulso $\bar{g}(t)$ normalizado com energia unitária, ou seja,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}^2(t) dt = 1 \quad (3-1)$$

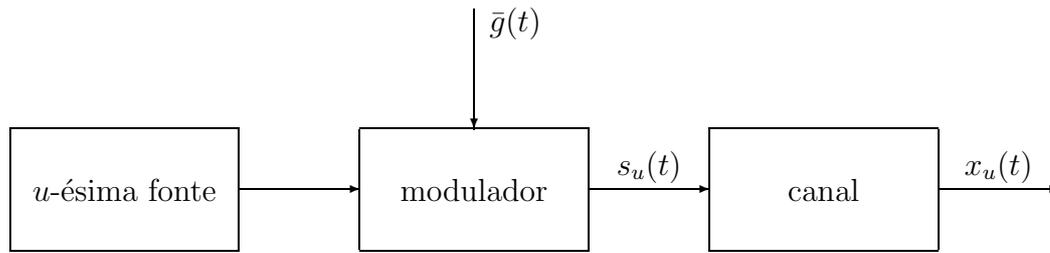


Figura 3.1: Modelo para a transmissão de uma portadora com modulação PSK.

Por fim, as n portadoras $\{s_1(t), \dots, s_n(t)\}$ atingem simultaneamente o elemento de referência do *array* após sofrerem alguns efeitos do canal.

As fases ϕ associadas aos símbolos PSK são definidas como variáveis aleatórias (v.a.) discretas, independentes e identicamente distribuídas, cuja fdp é a soma de M impulsos igualmente espaçados, situados nas M possíveis fases do esquema de modulação, isto é,

$$p_\phi(\Phi) = \frac{1}{M} \sum_{\ell=1}^M \delta(\Phi - \phi_{(\ell)}) \quad (3-2)$$

onde δ é a função impulso unitário e $\phi_{(\ell)}$ é a fase do ℓ -ésimo símbolo da constelação. Normalmente, a expressão $\phi_{(\ell)} = \frac{2\pi}{M}(\ell - 1)$ é adotada para especificar o valor destas fases. Assim, para $M = 2$ (*binary phase shift keying*—BPSK), utiliza-se $\phi_{(\ell)} = \pi(\ell - 1)$. No entanto, para $M = 4$ (*quaternary phase shift keying*—QPSK), costuma-se efetuar uma rotação na constelação, fazendo $\phi_{(\ell)} = \frac{\pi}{2}(\ell - 1) + \frac{\pi}{4}$. Esta rotação pretende facilitar cálculos posteriores para avaliação de desempenho na transmissão, como taxa de erro de símbolo, mas não afeta em nada o desempenho do estimador.

Considerando que um símbolo de energia E_{s_u} é emitido pela u -ésima fonte a cada T segundos, pode-se expressar o sinal gerado pelo modulador (u -ésima portadora) como

$$s_u(t) = \sqrt{E_{s_u}} \sqrt{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \bar{g}(t - iT) \cos(2\pi f_c t + \phi_i^{(u)}) \quad (3-3)$$

onde f_c é a frequência central da portadora e $\phi_i^{(u)}$ é a fase do i -ésimo símbolo. Considerou-se no modelo síncrono que a principal perturbação causada pelo canal de comunicações móveis seria o desvanecimento plano do sinal, caracterizado por um fator de amplitude ρ e uma variação de fase

θ . Levando em conta estes efeitos, o sinal definido em (3-3) se torna

$$\begin{aligned} x_u(t) &= \rho\sqrt{E_{s_u}}\sqrt{2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \bar{g}(t-iT) \cos(2\pi f_c t + \theta_u + \phi_i^{(u)}) = \\ &= A_u \sum_{i=-\infty}^{\infty} \bar{g}(t-iT) \cos(2\pi f_c t + \theta_u + \phi_i^{(u)}) \end{aligned} \quad (3-4)$$

onde A_u é a amplitude desvanecida no *array* de recepção e θ_u representa a fase da u -ésima portadora ao atingir o elemento de referência do *array*. Ao se considerar n fontes simultâneas, releva-se o fato de que cada uma apresenta um par diferente de parâmetros (A, θ) , o que fornece, além das n DOAs, um conjunto adicional de $2n$ parâmetros a serem estimados.

No receptor, o sinal medido no v -ésimo elemento do SLA pode ser expresso por

$$y_v(t) = \sum_{u=1}^n A_u \sum_{i=-\infty}^{\infty} \bar{g}(t-iT) \cos\left(2\pi f_c t + \theta_u + \phi_i^{(u)} + (v-1)\omega_u\right) + e_v(t) \quad (3-5)$$

onde ω_u representa a DOA da u -ésima portadora e $e_v(t)$ é um RAGB com média nula e densidade espectral de potência $N_0/2$. Como, neste modelo, $e_v(t)$ representa um ruído térmico no receptor, N_0 é um parâmetro conhecido e, portanto, não precisa ser estimado.

O esquema de demodulação é ilustrado na Fig. 3.2. Inicialmente, os sinais recebidos em cada elemento do *array* são separados em suas

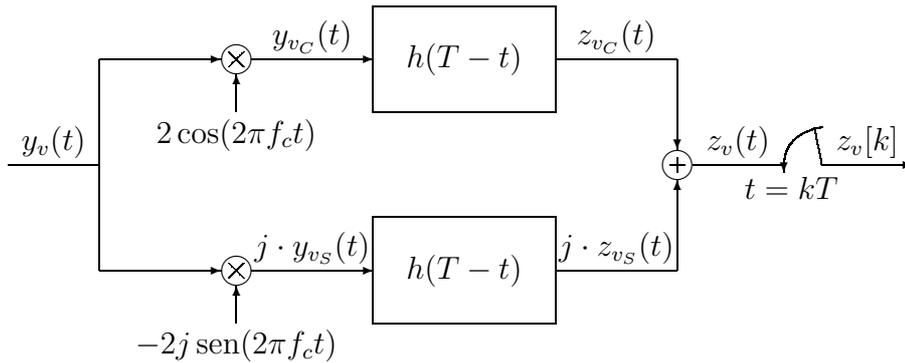


Figura 3.2: Receptor para a portadora PSK descrita em (3-4).

componentes em fase e quadratura. Rescrevendo (3-5) como

$$y_v(t) = \sum_{u=1}^n A_u \sum_{i=-\infty}^{\infty} \bar{g}(t - iT) \left\{ \cos(\theta_u + \phi_i^{(u)} + (v-1)\omega_u) \cdot \cos(2\pi f_c t) - \sin(\theta_u + \phi_i^{(u)} + (v-1)\omega_u) \cdot \sin(2\pi f_c t) \right\} + e_v(t) \quad (3-6)$$

tem-se que $y_{v_C}(t)$ e $y_{v_S}(t)$ são dadas por

$$y_{v_C}(t) = \sum_{u=1}^n A_u \sum_{i=-\infty}^{\infty} \bar{g}(t - iT) \left\{ \cos(\theta_u + \phi_i^{(u)} + (v-1)\omega_u) \cdot [1 + \cos(4\pi f_c t)] - \sin(\theta_u + \phi_i^{(u)} + (v-1)\omega_u) \cdot \sin(4\pi f_c t) \right\} + e_{v_C}(t) \quad (3-7)$$

$$y_{v_S}(t) = \sum_{u=1}^n A_u \sum_{i=-\infty}^{\infty} \bar{g}(t - iT) \left\{ \sin(\theta_u + \phi_i^{(u)} + (v-1)\omega_u) \cdot [1 - \cos(4\pi f_c t)] - \cos(\theta_u + \phi_i^{(u)} + (v-1)\omega_u) \cdot \sin(4\pi f_c t) \right\} + e_{v_S}(t) \quad (3-8)$$

onde

$$\begin{aligned} e_{v_C}(t) &= 2e_v(t) \cos(2\pi f_c t) \\ e_{v_S}(t) &= -2e_v(t) \sin(2\pi f_c t) \end{aligned} \quad (3-9)$$

representam as parcelas ruidosas do sinal recebido. Como o ruído $e_v(t)$ é branco, sua correlação é dada por $R_{e_v}(t) = N_0/2 \delta(t)$. Tem-se então que a correlação de $e_{v_C}(t)$ é

$$\begin{aligned} R_{e_{v_C}}(t_1, t_2) &= E[4e_v(t_1)e_v(t_2) \cos(2\pi f_c t_1) \cos(2\pi f_c t_2)] \\ &= 2E[e_v(t_1)e_v(t_2)] \cdot [\cos(2\pi f_c(t_1 - t_2)) + \cos(2\pi f_c(t_1 + t_2))] \\ &= N_0 \delta(t_1 - t_2) \cdot [\cos(2\pi f_c(t_1 - t_2)) + \cos(2\pi f_c(t_1 + t_2))] \\ &= N_0 \cdot [1 + \cos(4\pi f_c t_1)] \delta(\tau) \end{aligned} \quad (3-10)$$

onde $\tau = t_1 - t_2$. De forma análoga,

$$R_{e_{v_S}}(t_1, t_2) = N_0 \cdot [1 - \cos(4\pi f_c t_1)] \delta(\tau) \quad (3-11)$$

é a correlação de $e_{v_S}(t)$ e

$$R_{e_{v_C}, e_{v_S}}(t_1, t_2) = -N_0 \cdot \sin(4\pi f_c t_1) \delta(\tau) \quad (3-12)$$

é a correlação cruzada entre estas duas componentes. O filtro $h(T-t)$ tem a função inicial de eliminar as parcelas de alta frequência do sinal. Definindo

$$p(t) = \bar{g}(t) * h(T-t)$$

os sinais obtidos após a filtragem são dados por

$$z_{v_C}(t) = \sum_{u=1}^n A_u \sum_{i=-\infty}^{\infty} p(t-iT) \cos(\theta_u + \phi_i^{(u)} + (v-1)\omega_u) + n_{v_C}(t) \quad (3-13)$$

$$z_{v_S}(t) = \sum_{u=1}^n A_u \sum_{i=-\infty}^{\infty} p(t-iT) \sin(\theta_u + \phi_i^{(u)} + (v-1)\omega_u) + n_{v_S}(t) \quad (3-14)$$

onde

$$\begin{aligned} n_{v_C}(t) &= h(T-t) * e_{v_C}(t) \\ n_{v_S}(t) &= h(T-t) * e_{v_S}(t) \end{aligned} \quad (3-15)$$

são as componentes do ruído gaussiano filtrado. Utilizando (3-10), obtém-se

$$\begin{aligned} R_{n_{v_C}}(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} R_{e_{v_C}}(\alpha, \beta) h(T-t_2+\beta) h(T-t_1+\alpha) d\beta d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} N_0 [1 + \cos(4\pi f_c \alpha)] \delta(\alpha - \beta) h(T-t_2+\beta) h(T-t_1+\alpha) d\beta d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} N_0 [1 + \cos(4\pi f_c \alpha)] h(T-t_2+\alpha) h(T-t_1+\alpha) d\alpha \\ &\approx \int_{-\infty}^{\infty} N_0 h(T-t_2+\alpha) h(T-t_1+\alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (3-16)$$

para a correlação de $n_{v_C}(t)$. Analogamente, pode-se provar que $R_{n_{v_S}}(t_1, t_2) \approx R_{n_{v_C}}(t_1, t_2)$ e que $R_{n_{v_C}, n_{v_S}}(t_1, t_2) \approx 0$. Para maximizar a razão sinal-ruído, utiliza-se o filtro $h(T-t)$ casado ao pulso modulador $\bar{g}(t)$, ou seja, $h(t) = \bar{g}(t)$. Ao se fazer a mudança de variáveis $t = t_1$ e $\tau = t_1 - t_2$, obtém-se

$$\begin{aligned} R_{n_{v_C}}(t, \tau) &= R_{n_{v_S}}(t, \tau) = N_0 \int_{-\infty}^{\infty} \bar{g}(T+\tau-t+\alpha) h(T-t+\alpha) d\alpha \\ &= N_0 \cdot [\bar{g}(T+\tau) * h(T-t)] = N_0 \cdot p(T+\tau) \end{aligned} \quad (3-17)$$

que depende apenas de τ , isto é, $n(t)$ é estacionário no sentido amplo (ESA). Escolhendo-se $\bar{g}(t)$ convenientemente (utilizando o critério de Nyquist), pode-se garantir, na saída do filtro, amostras descorrelatadas no tempo para as componentes do ruído $n_v[k]$. Esta análise é realizada mais detalhadamente no Apêndice A. Por ora, assume-se apenas que $\bar{g}(t)$ é um pulso raiz quadrada

de Nyquist e que

$$p[k] = p(kT) = \begin{cases} 1, & k = 1 \\ 0, & \{k \in \mathcal{Z} | k \neq 1\} \end{cases} \quad (3-18)$$

o que elimina a interferência entre símbolos. Logo, observa-se que o sinal $z_v[k]$ na saída do receptor da Fig. 3.2 é dado por

$$\begin{aligned} z_v[k] = z_v(kT) &= \sum_{u=1}^n A_u \sum_{i=-\infty}^{\infty} p[k-i] \exp \left\{ j \left[\theta_u + \phi_i^{(u)} + (v-1)\omega_u \right] \right\} + \\ &+ n_v(kT) = \sum_{u=1}^n B_u \exp \left\{ j \left(\phi_{k-1}^{(u)} + (v-1)\omega_u \right) \right\} + n_v[k] \end{aligned} \quad (3-19)$$

onde $B_u = A_u e^{j\theta_u}$ representa a amplitude complexa da u -ésima fonte no elemento de referência do *array* e $n_v[k] = n_{v_C}[k] + jn_{v_S}[k]$ é uma seqüência de v.a. gaussianas complexas independentes e identicamente distribuídas com variância $\sigma^2 = N_0$ em cada uma de suas componentes.

As amostras $z_v[k]$ podem ser representadas em forma matricial como se segue. Seja \mathbf{z} um vetor-coluna de comprimento mN definido por

$$\mathbf{z}_{mN \times 1} = \begin{bmatrix} z_1[1] & z_1[2] & \cdots & z_1[N] & z_2[1] & \cdots & z_m[N] \end{bmatrix}^T \quad (3-20)$$

De acordo com (3-19), pode-se escrever (3-20) como

$$\mathbf{z}_{mN \times 1} = \mathbf{T}_{mN \times nN} \cdot \boldsymbol{\phi}_{nN \times 1} + \mathbf{n}_{mN \times 1} \quad (3-21)$$

onde \mathbf{T} é a matriz de transferência contendo os parâmetros B_u e ω_u , $\boldsymbol{\phi}$ é o vetor de entrada com as fases dos símbolos da modulação, definido como

$$\boldsymbol{\phi}_{nN \times 1} = \begin{bmatrix} e^{j\phi_0^{(1)}} & \cdots & e^{j\phi_{N-1}^{(1)}} & e^{j\phi_0^{(2)}} & \cdots & e^{j\phi_{N-1}^{(n)}} \end{bmatrix}^T \quad (3-22)$$

e \mathbf{n} é um vetor de ruído gaussiano branco complexo cujos elementos são

$$\mathbf{n}_{mN \times 1} = \begin{bmatrix} n_1[1] & \cdots & n_1[N] & n_2[1] & \cdots & n_m[N] \end{bmatrix}^T \quad (3-23)$$

que apresenta média nula e matriz correlação

$$\mathbf{R}_{\mathbf{n}} = \mathbf{E} \left[\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}^H \right] = 2N_0 \mathbf{I} \quad (3-24)$$

Considerando que as DOAs das unidades móveis não variam durante o tempo total da rajada de N símbolos (a taxa de símbolos em um sistema de

comunicações móveis costuma ser suficientemente elevada para assegurar tal suposição), a matriz de transferência \mathbf{T} utilizada em (3-21) pode ser decomposta no produto

$$\mathbf{T}_{mN \times nN} = \left(\mathbf{S}_{m \times n} \cdot \mathbf{B}_{n \times n} \right) \otimes \mathbf{I}_{N \times N} \quad (3-25)$$

onde \otimes representa o operador do produto de Kronecker, \mathbf{S} é a mesma matriz de direcionamento definida em (2-6) e \mathbf{B} é uma matriz diagonal complexa contendo os valores de B_u em sua diagonal principal.

O vetor Φ de elementos desconhecidos, contendo as diferenças de fase ocasionadas pelas DOAs, as amplitudes complexas e as fases de modulação, é definido como

$$\Phi = \left[\varphi^T \quad \phi^T \right]^T \quad (3-26)$$

onde ϕ é definido em (3-22) e φ compreende os parâmetros ω_u e B_u , todos tendo estatísticas *a priori* desconhecidas, dado por

$$\varphi = \left[\omega_1 \quad \cdots \quad \omega_n \quad \Re(B_1) \quad \cdots \quad \Re(B_n) \quad \Im(B_1) \quad \cdots \quad \Im(B_n) \right]^T \quad (3-27)$$

com os símbolos \Re e \Im em (3-27) significando as partes real e imaginária, respectivamente.

3.2 Modelo assíncrono

A principal mudança no modelo assíncrono em relação ao modelo síncrono apresentado na Seção 3.1 consiste no desalinhamento temporal das portadoras recebidas no *array*. Este fato pode ser modelado através da inclusão, em cada portadora, de uma v.a. τ que caracteriza o retardo relativo com o qual ela atinge o receptor. Voltando à Fig. 3.1 e às definições de $s_u(t)$ e $x_u(t)$ em (3-3) e (3-4), tem-se que

$$x_u(t) = A_u \sum_{i=-\infty}^{\infty} \bar{g}(t - (i + \tau_u)T) \cos(2\pi f_c t + \theta_u + \phi_i^{(u)}) \quad (3-28)$$

onde τ_u representa o retardo temporal da u -ésima portadora no elemento de referência do *array* de recepção. Este retardo é uma v.a. uniforme em $[0; 1)$, pois está normalizado pelo período T entre dois símbolos, ou seja, a u -ésima portadora transmitida atinge o receptor com $\tau_u T$ segundos de atraso. Percebe-se que o retardo não aparece dentro do co-seno em (3-28), pois a parcela $2\pi f_c \tau_u T$ é incorporada na fase da portadora θ_u sem

alterar suas características—uma v.a. uniforme em $[0; 2\pi)$ adicionada (soma módulo 2π) de uma constante real permanece com distribuição uniforme no mesmo intervalo. Vale salientar que cada uma das n portadoras possui agora um conjunto de 4 parâmetros desconhecidos que precisam ser estimados: a defasagem ω provocada pela DOA, a amplitude A , a fase θ e o retardo τ .

O sinal no v -ésimo elemento do *array* de recepção compreende a soma das n portadoras, sendo expresso por

$$y_v(t) = \sum_{u=1}^n A_u \sum_{i=-\infty}^{\infty} \bar{g}(t-(i+\tau_u)T) \cos \left(2\pi f_c t + \theta_u + \phi_i^{(u)} + (v-1)\omega_u \right) + e_v(t) \quad (3-29)$$

onde $e_v(t)$ é um ruído que apresenta as mesmas características descritas para o modelo síncrono. A demodulação é igual àquela ilustrada na Fig. 3.2, logo a correlação das amostras de ruído $n_v(t)$ no final do receptor terá a mesma característica da que foi apresentada na seção anterior, ou seja,

$$R_{n_{v_C}}(t) = R_{n_{v_S}}(t) = N_0 \cdot p(T+t) \quad (3-30)$$

e o sinal $z_v[k]$ utilizado como observação para o estimador é

$$z_v[k] = \sum_{u=1}^n B_u \sum_{i=-\infty}^{\infty} p[k-i-\tau_u] \exp \left\{ j \left[\phi_i^{(u)} + (v-1)\omega_u \right] \right\} + n_v[k] \quad (3-31)$$

que possui infinitos termos, devido à soma em i . Se $\bar{g}(t)$ for um pulso raiz quadrada de Nyquist, conforme apresentado no Apêndice A, e considerando que o índice $k-i-\tau$ não é inteiro, então $p[k-i-\tau]$ será diferente de zero em todas as amostras. Deve-se então considerar um pulso finito no intervalo $[0; T)$, de modo que $p(t)$ também seja finito no intervalo $[0; 2T)$ e a interferência entre símbolos seja limitada a uma única amostra. Se $\bar{g}(t)$ for um pulso retangular em $[0; T)$, com amplitude $T^{-1/2}$, então $p(t) = \bar{g}(t) * h(T-t)$ será um pulso triangular que vale

$$p(t) = \begin{cases} t/T & ; 0 < t < T \\ 2 - t/T & ; T < t < 2T \\ 0 & ; \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3-32)$$

pois o filtro $h(T-t)$ é casado a $\bar{g}(t)$. Assim, para $i = k-1$ em (3-31), tem-se que $p[1-\tau] = 1 - \tau$ e, para $i = k-2$, tem-se que $p[2-\tau] = \tau$. Logo, (3-31)

se torna

$$z_v[k] = \sum_{u=1}^n B_u \exp \{j(v-1)\omega_u\} \left[(1-\tau_u)e^{j\phi_{k-1}^{(u)}} + \tau_u e^{j\phi_{k-2}^{(u)}} \right] + n_v[k] \quad (3-33)$$

onde $n_v[k]$ é um ruído complexo gaussiano branco com variância N_0 em cada componente (partes real e imaginária). Como cada amostra $z_v[k]$ é função de dois símbolos consecutivos, percebe-se que uma seqüência formada pelas amostras pares, por exemplo, será uma seqüência de v.a. complexas independentes e identicamente distribuídas. Nota-se que se todos os retardos τ_u forem nulos, (3-33) se reduz a (3-19), ou seja, o modelo assíncrono se transforma no modelo síncrono, e cada amostra $z_v[k]$ será função apenas de um único símbolo.

A representação do modelo assíncrono em forma matricial será tratada a seguir. Considerando apenas N amostras pares por elemento do *array*, tem-se que o vetor de observações \mathbf{z} , dado por

$$\mathbf{z}_{mN \times 1} = \left[z_1[2] \quad z_1[4] \quad \cdots \quad z_1[2N] \quad z_2[2] \quad \cdots \quad z_m[2N] \right]^T \quad (3-34)$$

pode ser definido de acordo com (3-33) como

$$\mathbf{z}_{mN \times 1} = \mathbf{T}_{mN \times nN} \cdot \boldsymbol{\phi}_{nN \times 2n} \cdot \boldsymbol{\tau}_{2n \times 1} + \mathbf{n}_{mN \times 1} \quad (3-35)$$

onde \mathbf{T} é a mesma matriz de transferência definida no modelo síncrono, $\boldsymbol{\phi}$ é a matriz de informação de entrada, contendo todas as fases de modulação, cujos elementos são

$$\boldsymbol{\phi}_{nN \times 2n} = \begin{bmatrix} e^{j\phi_0^{(1)}} & \cdots & e^{j\phi_{2N-2}^{(1)}} & 0 & \cdots & 0 \\ e^{j\phi_1^{(1)}} & \cdots & e^{j\phi_{2N-1}^{(1)}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{j\phi_0^{(2)}} & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{j\phi_1^{(2)}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & e^{j\phi_{2N-2}^{(n)}} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & e^{j\phi_{2N-1}^{(n)}} \end{bmatrix}^T \quad (3-36)$$

e que reproduz o efeito da transmissão assíncrona, ao ser multiplicada pelo vetor

$$\boldsymbol{\tau}_{2n \times 1} = \left[\tau_1 \quad 1-\tau_1 \quad \tau_2 \quad 1-\tau_2 \quad \cdots \quad \tau_n \quad 1-\tau_n \right]^T \quad (3-37)$$

O vetor de ruído complexo gaussiano branco \mathbf{n} , dado por

$$\mathbf{n}_{mN \times 1} = \begin{bmatrix} n_1[2] & n_1[4] & \cdots & n_1[2N] & n_2[2] & \cdots & n_m[2N] \end{bmatrix}^T \quad (3-38)$$

possui média nula e matriz autocorrelação $\mathbf{R}_n = 2N_0 \mathbf{I}$. Assumindo mais uma vez que as DOAs permanecem constantes durante a transmissão da rajada de $2N$ símbolos de cada portadora, a matriz de transferência T pode ser definida como em (3-25) para o modelo síncrono.

O vetor de elementos desconhecidos, Φ , é definido no modelo assíncrono como

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi^T & \phi_{\text{vec}}^T \end{bmatrix}^T \quad (3-39)$$

contém os $4n$ parâmetros desconhecidos ω_u , B_u (complexo) e τ_u , $u = 1, \dots, n$ no vetor φ , dado por

$$\varphi = \begin{bmatrix} \omega_1 & \cdots & \omega_n & \Re(B_1) & \cdots & \Re(B_n) & \Im(B_1) & \cdots & \Im(B_n) & \tau_1 & \cdots & \tau_n \end{bmatrix}^T \quad (3-40)$$

e as $2nN$ fases dos símbolos—ocorrências da v.a. discreta com fdp definida em (3-2)—no vetor ϕ_{vec} , que compreende os elementos não nulos da matriz apresentada em (3-36).

Os vetores de elementos desconhecidos obtidos em (3-26) para o modelo síncrono e em (3-39) para o modelo assíncrono englobam tanto os parâmetros desconhecidos da portadora quanto as fases de modulação, que são ocorrências de uma v.a. discreta. No próximo capítulo, a fdp dos vetores de observação \mathbf{z} , definidos em (3-20) e (3-34) para os dois modelos, será apresentada na forma condicional a Φ . Como a fdp das fases de modulação são conhecidas, tirando o valor esperado da fdp de \mathbf{z} condicionada a Φ com relação ao vetor ϕ , no modelo síncrono, ou ϕ_{vec} , no modelo assíncrono, fornecerá a fdp de \mathbf{z} condicionada a φ . Com a redução do número de elementos desconhecidos, o estimador ML dos parâmetros das portadoras PSK pode ser desenvolvido de forma viável sob o aspecto computacional.