

E

Aproximações para estimadores com uma única portadora

Embora os estimadores ótimos apresentem melhor desempenho segundo um critério específico, o tempo de processamento e a carga computacional exigidos na obtenção das estimativas pode ser suficientemente grande para determinadas aplicações. Para solucionar este problema, costuma-se empregar aproximações ou métodos alternativos que forneçam estimadores subótimos. Estes estimadores costumam apresentar maior velocidade de processamento e menor demanda computacional, em detrimento do desempenho segundo o critério no qual os estimadores ótimos foram formulados.

A seguir, as aproximações empregadas nos Apêndices B a D para o cálculo dos limitantes de Cramér-Rao serão utilizadas nas expressões dos estimadores ML com o propósito de apresentar estimadores alternativos aos que foram desenvolvidos neste trabalho. Como os limitantes de Cramér-Rao foram obtidos somente nos modelos de portadora única, os estimadores subótimos apresentados abaixo correspondem a aproximações dos estimadores ML desenvolvidos para os modelos com $n = 1$ portadora apenas.

No modelo síncrono, o estimador ML-BPSK obtido em (4-14)–(4-16) apresenta a função não-linear $\tanh\{f_k\}$ que, para valores altos de E_b/N_0 , pode ser aproximada pela função $\text{sgn}\{f_k\}$, definida como

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \\ -1 & , \quad x < 0 \end{cases}$$

Igualando (4-15) e (4-16) a zero, tem-se que a estimativa do parâmetro complexo B pode ser obtida iterativamente através de

$$\hat{B} = \frac{1}{m} \mathbf{S}^H \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{Z}_k \text{sgn}\{f_k\} \right) \quad (\text{E-1})$$

onde $f_k = \frac{1}{N_0} \Re[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{S} B]$ é função da estimativa de B na iteração anterior. Como a derivada em B da função $\text{sgn}\{f_k\}$ é nula na vizinhança do valor

verdadeiro deste parâmetro, pode-se afirmar que a estimativa de B dada em (E-1) converge em pouquíssimas iterações, principalmente se a estimativa inicial do vetor φ for suficientemente boa. Tem-se então que a expressão dada em (E-1) pode ser tratada como uma forma fechada em B desde que $\text{sgn}\{f_k\}$ seja aproximado para uma constante em B . Substituindo o valor de B na função de menos-log-verossimilhança deste cenário definida em (4-13), obtém-se

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\omega) &= \text{cte} + \frac{N}{2mN_0} \mathbf{S}^H \mathbf{m}_Z \mathbf{m}_Z^H \mathbf{S} - \sum_{k=1}^N \ln \cosh \{f_k\} \\ &= \text{cte} + \frac{N}{2mN_0} \mathbf{S}^H \mathbf{m}_Z \mathbf{m}_Z^H \mathbf{S} - \sum_{k=1}^N \ln \cosh \left\{ \frac{1}{mN_0} \mathbf{S}^H \mathbf{m}_Z \mathbf{Z}_k^H \mathbf{S} \right\}\end{aligned}\quad (\text{E-2})$$

onde $\mathbf{m}_Z = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{Z}_k \text{sgn}\{f_k\}$. Embora f_k seja função de ω , nota-se que $\text{sgn}\{f_k\}$ permanecerá aproximadamente constante se a estimativa inicial de ω for suficientemente próxima do seu valor real. Então, a derivada de $\mathcal{L}$ com relação a ω é dada por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = \frac{N}{mN_0} \Im[\mathbf{S}^H \mathbf{m}_Z \mathbf{m}_Z^H \mathbf{J} \mathbf{S}] \quad (\text{E-3})$$

e o valor de $\hat{\omega}$ é aquele que anula o termo $\Im[\mathbf{S}^H \mathbf{m}_Z \mathbf{m}_Z^H \mathbf{J} \mathbf{S}]$. Certamente, esta função pode apresentar muitos mínimos locais, mas se a estimativa inicial de ω for suficientemente precisa, o grau de convergência do algoritmo será elevado. A partir de (E-1) e (E-3), pode-se implementar um algoritmo iterativo que forneça valores cada vez mais refinados para $\hat{B}$ e $\hat{\omega}$. Em cada iteração, por exemplo, poderia-se utilizar as estimativas de B e ω do passo anterior em (E-1) para obter-se um valor mais refinado para $\hat{B}$. Em seguida, este novo valor de $\hat{B}$ forneceria um novo vetor $\mathbf{m}_Z$. Aplicando uma varredura nos arredores de $\hat{\omega}$, pode-se encontrar o novo valor de $\hat{\omega}$ no ponto onde a derivada em (E-3) for nula.

No estimador ML-QPSK dado em (4-24)–(4-26), também é possível aplicar a mesma aproximação do estimador ML-BPSK subótimo descrito acima. Desta forma, ao se igualar (4-25) e (4-26) a zero, obtém-se que

$$\hat{B} = \frac{1}{\sqrt{2}m} \mathbf{S}^H \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{Z}_k \text{sgn}\{\Re(f_k)\} + j \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{Z}_k \text{sgn}\{\Im(f_k)\} \right) \quad (\text{E-4})$$

onde, mais uma vez, $f_k = \frac{1}{\sqrt{2}N_0} [\mathbf{Z}_k^H \mathbf{S} B]$ é função da estimativa de B na iteração anterior. Considerando as derivadas em B das funções $\text{sgn}\{\Re(f_k)\}$ e $\text{sgn}\{\Im(f_k)\}$ iguais a zero na vizinhança do valor verdadeiro deste parâmetro,

pode-se afirmar que uma boa estimativa inicial de φ garante a convergência de (E-4). Substituindo a forma fechada obtida em (E-4) na função de menos-log-verossimilhança deste cenário definida em (4-23), chega-se a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\omega) = \text{cte} + \frac{N}{4mN_0} \mathbf{S}^H \mathbf{m}_Z \mathbf{m}_Z^H \mathbf{S} - \sum_{k=1}^N \ln \cosh \left\{ \frac{1}{2mN_0} \Re[\mathbf{S}^H \mathbf{m}_Z \mathbf{Z}_k^H \mathbf{S}] \right\} - \\ - \sum_{k=1}^N \ln \cosh \left\{ \frac{1}{2mN_0} \Im[\mathbf{S}^H \mathbf{m}_Z \mathbf{Z}_k^H \mathbf{S}] \right\} \quad (\text{E-5}) \end{aligned}$$

onde $\mathbf{m}_Z = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{Z}_k [\text{sgn}\{\Re(f_k)\} + j \text{sgn}\{\Im(f_k)\}]$. Ainda que o valor de f_k varie com ω , nota-se que as funções $\text{sgn}\{\Re(f_k)\}$ e $\text{sgn}\{\Im(f_k)\}$ permanecem constantes para pequenas variações de ω em torno do seu valor real. Assim, uma boa estimativa inicial é mais uma vez suficiente para convergência. Após algumas manipulações algébricas, a derivada de (E-5) com relação a ω equivale a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = \frac{N}{2mN_0} \Im[\mathbf{S}^H \mathbf{m}_Z \mathbf{m}_Z^H \mathbf{J} \mathbf{S}] \quad (\text{E-6})$$

e o valor de $\hat{\omega}$ é obtido ao igualar esta derivada a zero. Como esta função apresenta vários nulos, uma estimativa inicial suficientemente precisa é necessária para garantir a convergência do algoritmo para o mínimo global. Um algoritmo iterativo semelhante ao proposto para o estimador ML-BPSK subótimo pode ser utilizado neste caso, bastando substituir as expressões (E-1) e (E-3) pelas apresentadas em (E-4) e (E-6).

Também é possível aproveitar as aproximações sugeridas no Apêndice D para obter um estimador ML-BPSK subótimo no modelo assíncrono. De (D-23), (D-25) e (D-38), tem-se que

$$\frac{2\varepsilon_\tau}{g_{2k}} \cdot \cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\} = 1 - \tanh\{\tau\gamma_{2k}\} = 1 - \text{sgn}\{\gamma_{2k}\} \quad (\text{E-7})$$

e

$$\frac{g'_{2k}}{g_{2k}} = \left[1 - \tau \left(1 - \tanh\{\tau\gamma_{2k}\} \right) \right] \text{sgn}\{f_{2k}\} = \left[1 - \tau \left(1 - \text{sgn}\{\gamma_{2k}\} \right) \right] \text{sgn}\{f_{2k}\} \quad (\text{E-8})$$

onde

$$f_{2k} = \frac{1}{N_0} \Re[\mathbf{Z}_{2k}^H \mathbf{S} B]$$

e

$$\gamma_{2k} = f_{2k} \text{sgn}\{f_{2k}\} - \frac{mA^2}{N_0} (1-\tau)$$

Considerando que os símbolos da portadora são independentes e identicamente distribuídos, a expressão $(1 - \text{sgn}\{\gamma_{2k}\})$ apresentará os valores 0 e 2

com igual probabilidade. Sendo N suficientemente grande, pode-se afirmar que

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left(1 - \text{sgn}\{\gamma_{2k}\}\right) \approx 1 \quad (\text{E-9})$$

Igualando as expressões (4-48) e (4-49) a zero e aplicando (E-7)–(E-9), obtém-se a forma fechada

$$\hat{B} = \frac{1}{1 - 2\tau + 2\tau^2} \cdot \frac{1}{m} \mathbf{S}^H \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{Z}_{2k} \left[1 - \tau(1 - \text{sgn}\{\gamma_{2k}\})\right] \text{sgn}\{f_{2k}\} \right) \quad (\text{E-10})$$

para a estimativa de B . Novamente, deve-se considerar que a estimativa inicial do vetor de parâmetros é suficientemente boa para que as funções $\text{sgn}\{f_{2k}\}$ e $\text{sgn}\{\gamma_{2k}\}$ sejam constantes na vizinhança de $\hat{B}$. Definindo $\Upsilon_\tau = 1 - 2\tau + 2\tau^2$ e $\mathbf{m}_{\mathbf{Z}_A} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{Z}_{2k} \left[1 - \tau(1 - \text{sgn}\{\gamma_{2k}\})\right] \text{sgn}\{f_{2k}\}$, pode-se reescrever (E-10) como

$$\hat{B} = \Upsilon_\tau^{-1} \cdot \frac{1}{m} \mathbf{S}^H \mathbf{m}_{\mathbf{Z}_A} \quad (\text{E-11})$$

Substituindo esta forma fechada na função de menos-log-verossimilhança dada em (4-45), chega-se a

$$\mathcal{L}(\omega, \tau) = \text{cte} + \frac{N}{2mN_0} \Upsilon_\tau^{-2} \cdot \mathbf{S}^H \mathbf{m}_{\mathbf{Z}_A} \mathbf{m}_{\mathbf{Z}_A}^H \mathbf{S} - \sum_{k=1}^N \ln(g_{2k}) \quad (\text{E-12})$$

onde

$$g_{2k} = \cosh\{f_{2k}\} + \varepsilon_\tau \cdot \cosh\{f_{2k}(1 - 2\tau)\} \quad (\text{E-13})$$

com

$$f_{2k} = \frac{1}{mN_0} \Upsilon_\tau^{-1} \cdot \Re \left[\mathbf{S}^H \mathbf{Z}_{2k} \mathbf{m}_{\mathbf{Z}_A}^H \mathbf{S} \right]$$

$$\varepsilon_\tau = \exp \left\{ \frac{2}{mN_0} \Upsilon_\tau^{-2} \cdot \mathbf{S}^H \mathbf{m}_{\mathbf{Z}_A} \mathbf{m}_{\mathbf{Z}_A}^H \mathbf{S} \tau(1 - \tau) \right\}$$

Percebe-se que ambas as funções f_{2k} e ε_τ agora dependem tanto de ω quanto de τ . Derivando (E-12) com relação a τ e utilizando algumas aproximações, obtém-se

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tau} = \frac{N}{mN_0} \Upsilon_\tau^{-2} \cdot \Re \left[\mathbf{m}_{\mathbf{Z}_A}^H \mathbf{S} \mathbf{S}^H \left(\underbrace{(2\tau - 1) \cdot \mathbf{m}_{\mathbf{Z}_A} - \Upsilon_\tau \cdot \mathbf{m}'_{\mathbf{Z}_A}}_{=0} \right) \right] \quad (\text{E-14})$$

onde $\mathbf{m}'_{\mathbf{Z}_A}$ é a derivada de $\mathbf{m}_{\mathbf{Z}_A}$ com relação a τ (considera-se que $\text{sgn}\{f_{2k}\}$

e $\text{sgn}\{\gamma_{2k}\}$ não variam com τ na vizinhança de $\hat{\tau}$), dada por

$$\mathbf{m}'_{\mathbf{Z}_A} = \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{m}_{\mathbf{Z}_A} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{Z}_{2k} \left(\text{sgn}\{\gamma_{2k}\} - 1 \right) \text{sgn}\{f_{2k}\}$$

A condição explicitada embaixo da chave em (E-14) é suficiente para que a derivada seja nula. Definindo $\mathbf{m}_{\mathbf{Z}_S} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{Z}_{2k} \text{sgn}\{f_{2k}\}$, tem-se de (E-14) que

$$(1 - \hat{\tau}) \cdot \mathbf{m}'_{\mathbf{Z}_A} = (2\hat{\tau} - 1) \cdot \mathbf{m}_{\mathbf{Z}_S}$$

que fornece a estimativa

$$\hat{\tau} = \frac{(2\mathbf{m}_{\mathbf{Z}_S} + \mathbf{m}'_{\mathbf{Z}_A})^H (\mathbf{m}_{\mathbf{Z}_S} + \mathbf{m}'_{\mathbf{Z}_A})}{\|2\mathbf{m}_{\mathbf{Z}_S} + \mathbf{m}'_{\mathbf{Z}_A}\|^2} \quad (\text{E-15})$$

e, como as funções $\mathbf{m}_{\mathbf{Z}_S}$ e $\mathbf{m}'_{\mathbf{Z}_A}$ são constantes na vizinhança de $\hat{\tau}$, a estimativa obtida em (E-15) converge em poucas iterações.

Utilizando algumas aproximações, a derivada de (E-12) com relação a ω é dada por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = \frac{N}{mN_0} \Upsilon_{\tau}^{-1} \cdot \Im \left[\mathbf{S}^H \mathbf{m}_{\mathbf{Z}_A} \mathbf{m}_{\mathbf{Z}_A}^H \mathbf{J} \mathbf{S} \right] \quad (\text{E-16})$$

bastando igualar o termo $\Im \left[\mathbf{S}^H \mathbf{m}_{\mathbf{Z}_A} \mathbf{m}_{\mathbf{Z}_A}^H \mathbf{J} \mathbf{S} \right]$ a zero para se obter o valor de $\hat{\omega}$. Como esta função apresenta vários nulos, o valor de $\hat{\omega}$ desejado é o que está mais próximo da estimativa inicial de ω , desde que o vetor de estimativas iniciais seja preciso. O algoritmo iterativo deste estimador subótimo deve ser analisado mais cautelosamente, por ser altamente suscetível a erros de convergência. Desde que estimativas iniciais suficientemente boas sejam fornecidas, o primeiro passo consistiria em determinar, a partir dos valores de $\text{sgn}\{f_{2k}\}$ e $\text{sgn}\{\gamma_{2k}\}$, o valor dos vetores $\mathbf{m}_{\mathbf{Z}_S}$ e $\mathbf{m}'_{\mathbf{Z}_A}$ para retificar o valor de $\hat{\tau}$ em (E-15). Este novo valor de $\hat{\tau}$ seria utilizado no cálculo de Υ_{τ} e $\mathbf{m}_{\mathbf{Z}_A}$. Assim, obtém-se novas estimativas para ω e para B , respectivamente de (E-16) e de (E-11). Os valores de $\text{sgn}\{f_{2k}\}$ e $\text{sgn}\{\gamma_{2k}\}$ seriam então recalculados e comparados com os anteriores para julgar a necessidade de uma nova iteração. Percebe-se que grande parte do sucesso na convergência deste algoritmo recai na determinação precisa dos valores de $\text{sgn}\{f_{2k}\}$ e de $\text{sgn}\{\gamma_{2k}\}$. Como estes valores estão intrinsecamente relacionados com a seqüência de símbolos da portadora (ver Fig. D.2), o uso de seqüências de treinamento seria de grande valia para aumentar o grau de convergência deste algoritmo.

O cálculo das estimativas através destes algoritmos subótimos é muito mais simples e viável sob o aspecto computacional que utilizando os esti-

madores propostos nesta tese, embora as aproximações utilizadas possam levar a estimativas finais menos precisas. Vale salientar que novos algoritmos subótimos para estimação da DOA podem ser formados a partir de diferentes aproximações, além das apresentadas neste texto.