D
Limitante de Cramér-Rao: modelo assíncrono com uma portadora BPSK

A seguir, será obtido o limitante de Cramér-Rao para o cenário com uma portadora BPSK no modelo assíncrono (relógio desalinhado no tempo com o receptor). O vetor de parâmetros desconhecidos $\boldsymbol{\varphi}$ é dado por

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \omega & \Re(B) & \Im(B) & \tau \end{bmatrix}^T \tag{D-1}$$

onde ω é a defasagem provocada pela DOA, B é a amplitude complexa e τ é o retardo (erro de relógio) normalizado pelo período de amostragem. A DOA ψ pode ser diretamente incluída no vetor de parâmetros no lugar de ω, originando um vetor de parâmetros alternativo

$$\boldsymbol{\varphi} = \begin{bmatrix} \psi & \Re(B) & \Im(B) & \tau \end{bmatrix}^T \tag{D-2}$$

A função de menos-log-verossimilhança deste cenário é

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi}) = \text{cte} + \frac{Nm}{2N_0}A^2 - \sum_{k=1}^{N} \ln(g_{2k}) \tag{D-3}$$

onde

$$g_{2k} = \cosh\{f_{2k}\} + \varepsilon_\tau \cdot \cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\} \tag{D-4}$$

e

$$f_{2k} = \tfrac{1}{N_0}\Re[\mathbf{Z}_{2k}^H \mathbf{S} B] \quad ; \quad \varepsilon_\tau = \exp\{\tfrac{2m}{N_0}A^2\tau(1-\tau)\} \tag{D-5}$$

e, como é mais fácil derivar o vetor $\mathbf{S}$ em função da defasagem ω, o vetor de parâmetros definido em (D-1) será utilizado no procedimento a seguir. As derivadas de primeira ordem (que dão origem aos estimadores) já foram apresentadas, mas serão repetidas abaixo, por conveniência.

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \omega} = \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{g_{2k}} \Im[\mathbf{Z}_{2k}^H \mathbf{J}\mathbf{S} B] \cdot g'_{2k} \tag{D-6}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116438/CA

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \Re(B)} = \frac{Nm}{N_0}\Re(B) - \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{g_{2k}}\Big\{\Re[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_{2k}]\cdot g'_{2k} + \\ +4m\tau(1-\tau)\varepsilon_\tau \cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\}\Re(B)\Big\} \quad \text{(D-7)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \Im(B)} = \frac{Nm}{N_0}\Im(B) - \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{g_{2k}}\Big\{\Im[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_{2k}]\cdot g'_{2k} + \\ +4m\tau(1-\tau)\varepsilon_\tau \cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\}\Im(B)\Big\} \quad \text{(D-8)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \tau} = \sum_{k=1}^{N}\frac{2\varepsilon_\tau}{g_{2k}}\Big[f_{2k}\operatorname{senh}\{f_{2k}(1-2\tau)\} - \frac{mA^2}{N_0}(1-2\tau)\cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\}\Big] \quad \text{(D-9)}$$

onde

$$g'_{2k} = \operatorname{senh}\{f_{2k}\} + (1-2\tau)\cdot\varepsilon_\tau\cdot\operatorname{senh}\{f_{2k}(1-2\tau)\} \quad \text{(D-10)}$$

é a derivada de g_{2k} com relação a f_{2k}. As derivadas de segunda ordem são obtidas sem nenhuma aproximação nas expressões das derivadas de primeira ordem. Assim, tem-se que as expressões exatas das derivadas de segunda ordem são dadas por

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \omega^2} = \frac{1}{N_0^2}\sum_{k=1}^{N}\Big\{\frac{1}{g_{2k}^2}\Im[\mathbf{Z}_{2k}^H\mathbf{J}\mathbf{S}B]^2(g'_{2k})^2 + \\ +\frac{N_0}{g_{2k}}\Re[\mathbf{Z}_{2k}^H\mathbf{J}^2\mathbf{S}B]g'_{2k} - \frac{1}{g_{2k}}\Im[\mathbf{Z}_{2k}^H\mathbf{J}\mathbf{S}B]^2 g''_{2k}\Big\} \quad \text{(D-11)}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \Re(B)^2} = \frac{Nm}{N_0} + \frac{1}{N_0^2}\sum_{k=1}^{N}\Big\{\frac{1}{g_{2k}^2}\Big[\Re[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_{2k}]\cdot g'_{2k} + \\ +4m\tau(1-\tau)\varepsilon_\tau\cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\}\Re(B)\Big]^2 - \frac{1}{g_{2k}}\Big[\Re[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_{2k}]^2\cdot g''_{2k} + \\ +8m\tau(1-\tau)(1-2\tau)\varepsilon_\tau\operatorname{senh}\{f_{2k}(1-2\tau)\}\Re[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_{2k}]\Re(B) + \\ +4m\tau(1-\tau)\varepsilon_\tau\cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\}\Big(N_0 + 4m\tau(1-\tau)\Re(B)^2\Big)\Big]\Big\} \quad \text{(D-12)}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116438/CA

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\Im(B)^2} = \frac{Nm}{N_0} + \frac{1}{N_0^2}\sum_{k=1}^{N}\Big\{\frac{1}{g_{2k}^2}\Big[\Im[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_{2k}]\cdot g'_{2k} + +4m\tau(1-\tau)\varepsilon_\tau\cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\}\Im(B)\Big]^2 - \frac{1}{g_{2k}}\Big[\Im[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_{2k}]^2\cdot g''_{2k} + +8m\tau(1-\tau)(1-2\tau)\varepsilon_\tau\,\mathrm{senh}\{f_{2k}(1-2\tau)\}\Im[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_{2k}]\Im(B) + +4m\tau(1-\tau)\varepsilon_\tau\cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\}\Big(N_0 + 4m\tau(1-\tau)\Im(B)^2\Big)\Big]\Big\} \quad \text{(D-13)}$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\tau^2} = \sum_{k=1}^{N}\Big\{\frac{4\varepsilon_\tau}{g_{2k}}\Big[\frac{2mA^2}{N_0}(1-2\tau)f_{2k}\,\mathrm{senh}\{f_{2k}(1-2\tau)\} + \Big(\frac{mA^2}{N_0} - -f_{2k}^2 - (\frac{mA^2}{N_0})^2(1-2\tau)^2\Big)\cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\}\Big] + \frac{4\varepsilon_\tau^2}{g_{2k}^2}\cdot \cdot\Big[f_{2k}\,\mathrm{senh}\{f_{2k}(1-2\tau)\} - \frac{mA^2}{N_0}(1-2\tau)\cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\}\Big]^2\Big\} \quad \text{(D-14)}$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\omega\,\partial\Re(B)} = \frac{1}{N_0^2}\sum_{k=1}^{N}\Big\{\Im[\mathbf{Z}_{2k}^H\mathbf{J}\mathbf{S}B]\frac{1}{g_{2k}}\Big[\Re[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_{2k}]\cdot g''_{2k} + 4m\tau(1-\tau)\cdot \cdot(1-2\tau)\varepsilon_\tau\,\mathrm{senh}\{f_{2k}(1-2\tau)\}\Re(B) - \frac{g'_{2k}}{g_{2k}}\Big(\Re[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_{2k}]\cdot g'_{2k} + +4m\tau(1-\tau)\varepsilon_\tau\cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\}\Re(B)\Big)\Big] + N_0\Im[\mathbf{Z}_{2k}^H\mathbf{J}\mathbf{S}]\frac{g'_{2k}}{g_{2k}}\Big\} \quad \text{(D-15)}$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\omega\,\partial\Im(B)} = \frac{1}{N_0^2}\sum_{k=1}^{N}\Big\{\Im[\mathbf{Z}_{2k}^H\mathbf{J}\mathbf{S}B]\frac{1}{g_{2k}}\Big[\Im[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_{2k}]\cdot g''_{2k} + 4m\tau(1-\tau)\cdot \cdot(1-2\tau)\varepsilon_\tau\,\mathrm{senh}\{f_{2k}(1-2\tau)\}\Im(B) - \frac{g'_{2k}}{g_{2k}}\Big(\Im[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_{2k}]\cdot g'_{2k} + +4m\tau(1-\tau)\varepsilon_\tau\cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\}\Im(B)\Big)\Big] + N_0\Re[\mathbf{Z}_{2k}^H\mathbf{J}\mathbf{S}]\frac{g'_{2k}}{g_{2k}}\Big\} \quad \text{(D-16)}$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\omega\,\partial\tau} = \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}\Im[\mathbf{Z}_{2k}^H\mathbf{J}\mathbf{S}B]\frac{2\varepsilon_\tau}{g_{2k}}\Big\{\frac{mA^2}{N_0}(1-2\tau)^2\,\mathrm{senh}\{f_{2k}(1-2\tau)\} - -\mathrm{senh}\{f_{2k}(1-2\tau)\} - (1-2\tau)f_{2k}\cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\} + \frac{g'_{2k}}{g_{2k}}\cdot \cdot\Big[f_{2k}\,\mathrm{senh}\{f_{2k}(1-2\tau)\} - \frac{mA^2}{N_0}(1-2\tau)\cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\}\Big]\Big\} \quad \text{(D-17)}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116438/CA

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\Re(B)\,\partial\Im(B)} = \frac{1}{N_0^2}\sum_{k=1}^{N}\Big\{-\frac{1}{g_{2k}}\Big[\Re[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_{2k}]\Im[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_{2k}]\cdot g''_{2k} + \Re(B)\Im(B)\cdot$$
$$\cdot\Big(4m\tau(1-\tau)\Big)^2\varepsilon_\tau\cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\} + \Big(\Re[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_{2k}]\Im(B) +$$
$$+\Im[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_{2k}]\Re(B)\Big)\cdot 4m\tau(1-\tau)(1-2\tau)\varepsilon_\tau\,\mathrm{senh}\{f_{2k}(1-2\tau)\}\Big] +$$
$$+\frac{1}{g_{2k}^2}\Big[\Re[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_{2k}]\cdot g'_{2k} + 4m\tau(1-\tau)\varepsilon_\tau\cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\}\Re(B)\Big]\cdot$$
$$\cdot\Big[\Im[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_{2k}]\cdot g'_{2k} + 4m\tau(1-\tau)\varepsilon_\tau\cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\}\Im(B)\Big]\Big\} \tag{D-18}$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\Re(B)\,\partial\tau} = \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}\frac{2\varepsilon_\tau}{g_{2k}}\Big\{\Re[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_{2k}]\Big[(1-2\tau)f_{2k}\cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\} +$$
$$+\Big(1-\frac{mA^2}{N_0}(1-2\tau)^2\Big)\,\mathrm{senh}\{f_{2k}(1-2\tau)\}\Big] + 2m\Re(B)\Big[2\tau(1-\tau)f_{2k}\cdot$$
$$\cdot\,\mathrm{senh}\{f_{2k}(1-2\tau)\} - \Big(1+\frac{2mA^2}{N_0}\tau(1-\tau)\Big)(1-2\tau)\cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\}\Big] -$$
$$-\frac{1}{g_{2k}}\Big[f_{2k}\,\mathrm{senh}\{f_{2k}(1-2\tau)\} - \frac{mA^2}{N_0}(1-2\tau)\cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\}\Big]\cdot$$
$$\cdot\Big[\Re[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_{2k}]\cdot g'_{2k} + 4m\tau(1-\tau)\varepsilon_\tau\cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\}\Re(B)\Big]\Big\} \tag{D-19}$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\Im(B)\,\partial\tau} = \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}\frac{2\varepsilon_\tau}{g_{2k}}\Big\{\Im[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_{2k}]\Big[(1-2\tau)f_{2k}\cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\} +$$
$$+\Big(1-\frac{mA^2}{N_0}(1-2\tau)^2\Big)\,\mathrm{senh}\{f_{2k}(1-2\tau)\}\Big] + 2m\Im(B)\Big[2\tau(1-\tau)f_{2k}\cdot$$
$$\cdot\,\mathrm{senh}\{f_{2k}(1-2\tau)\} - \Big(1+\frac{2mA^2}{N_0}\tau(1-\tau)\Big)(1-2\tau)\cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\}\Big] -$$
$$-\frac{1}{g_{2k}}\Big[f_{2k}\,\mathrm{senh}\{f_{2k}(1-2\tau)\} - \frac{mA^2}{N_0}(1-2\tau)\cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\}\Big]\cdot$$
$$\cdot\Big[\Im[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_{2k}]\cdot g'_{2k} + 4m\tau(1-\tau)\varepsilon_\tau\cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\}\Im(B)\Big]\Big\} \tag{D-20}$$

onde

$$g''_{2k} = \cosh\{f_{2k}\} + (1-2\tau)^2\cdot\varepsilon_\tau\cdot\cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\} \tag{D-21}$$

é a derivada de segunda ordem de g_{2k} com relação a f_{2k}. Percebe-se que todas as expressões apresentadas de (D-11) até (D-20) são altamente não lineares, o que inviabiliza o cálculo dos valores esperados necessários na obtenção da matriz de informação de Fisher. Para prosseguir neste desenvolvimento, deve-se utilizar algumas aproximações nas funções não lineares, inicialmente

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116438/CA

na função seno hiperbólico. Esta função pode ser aproximada de duas formas. A primeira é

$$\text{senh}(x) = x,$$

para valores absolutos pequenos de x. A outra, então, é utilizada quando o valor absoluto de x é suficientemente grande tal que

$$\text{senh}(x) = \text{sgn}(x) \cdot \cosh(x),$$

onde a função $\text{sgn}(x)$ vale $+1$ quando x for positivo, -1 quando x for negativo, e zero quando x for nulo. Percebe-se que o operando no interior de todos os senos hiperbólicos apresentados nas expressões (D-11)–(D-20) é proporcional ao valor de E_b/N_0, de modo que as duas aproximações acima se caracterizam para E_b/N_0 baixo e alto, respectivamente. A primeira aproximação começa a ser válida quando o valor de E_b/N_0 é inferior a -16 dB, enquanto que a segunda, para E_b/N_0 alto, já é válida para valores maiores que 2 dB. Como a região de interesse neste estudo varia de -2 dB a 10 dB, apenas a aproximação para E_b/N_0 alto será utilizada. Um detalhe que merece destaque agora é

$$\text{sgn}\{f_{2k}(1-2\tau)\} = \text{sgn}\{f_{2k}\}$$

pois o valor de $(1-2\tau)$ será sempre positivo, uma vez que o retardo τ é uma v.a. uniforme no intervalo $[0; 0.5)$.

Com esta primeira aproximação, percebe-se que todas as expressões das derivadas de segunda ordem se apresentam como uma soma de termos e de produtos de termos da forma

$$\text{coeficiente} \cdot \frac{2}{g_{2k}} \cdot \cosh\{f_{2k}\}$$

ou

$$\text{coeficiente} \cdot \frac{2\varepsilon_\tau}{g_{2k}} \cdot \cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\}$$

e o que diferencia os termos dentro destes dois grupos é o valor de cada coeficiente. Assim, considerando (D-4) e o fato de que E_b/N_0, e conseqüentemente f_{2k}, é suficientemente alto, tem-se que

$$\frac{2}{g_{2k}} \cdot \cosh\{f_{2k}\} = \frac{2}{1 + \varepsilon_\tau \frac{\cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\}}{\cosh\{f_{2k}\}}} \approx \frac{2}{1 + \varepsilon_\tau \exp\{-2\tau f_{2k}\,\text{sgn}\{f_{2k}\}\}}$$

$$= \frac{2}{1 + \exp\{-2\tau\gamma_{2k}\}} = \frac{\exp\{\tau\gamma_{2k}\}}{\cosh\{\tau\gamma_{2k}\}} = 1 + \tanh\{\tau\gamma_{2k}\} \qquad \text{(D-22)}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116438/CA

para o primeiro grupo de termos e

$$\frac{2\varepsilon_\tau}{g_{2k}} \cdot \cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\} = \frac{2\varepsilon_\tau}{\frac{\cosh\{f_{2k}\}}{\cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\}} + \varepsilon_\tau} \approx \frac{2}{\varepsilon_\tau^{-1}\exp\{2\tau f_{2k}\,\mathrm{sgn}\{f_{2k}\}\} + 1}$$

$$= \frac{2}{\exp\{2\tau\gamma_{2k}\} + 1} = \frac{\exp\{-\tau\gamma_{2k}\}}{\cosh\{\tau\gamma_{2k}\}} = 1 - \tanh\{\tau\gamma_{2k}\} \qquad \text{(D-23)}$$

para o segundo grupo, onde

$$\gamma_{2k} = f_{2k}\,\mathrm{sgn}\{f_{2k}\} - \frac{mA^2}{N_0}(1-\tau) \qquad \text{(D-24)}$$

também é proporcional a E_b/N_0. Observando (D-4), (D-10) e (D-21), pode-se facilmente concluir que

$$\frac{g'_{2k}}{g_{2k}} = \Big[1 - \tau\Big(1 - \tanh\{\tau\gamma_{2k}\}\Big)\Big]\,\mathrm{sgn}\{f_{2k}\} \qquad \text{(D-25)}$$

$$\frac{g''_{2k}}{g_{2k}} = 1 - 2\tau(1-\tau)\Big(1 - \tanh\{\tau\gamma_{2k}\}\Big) \qquad \text{(D-26)}$$

Outra expressão que vale ressaltar pelo número de repetições ao longo das derivadas de segunda ordem é

$$\frac{2\varepsilon_\tau}{g_{2k}} \cdot \Big[f_{2k}\,\mathrm{senh}\{f_{2k}(1-2\tau)\} - \frac{mA^2}{N_0}(1-2\tau)\cosh\{f_{2k}(1-2\tau)\}\Big] =$$
$$= \Big[f_{2k}\,\mathrm{sgn}\{f_{2k}\} - \frac{mA^2}{N_0}(1-2\tau)\Big]\Big(1 - \tanh\{\tau\gamma_{2k}\}\Big) \qquad \text{(D-27)}$$

Utilizando os resultados de (D-22)–(D-27) e sabendo-se que $1 - \tanh^2(x) = \mathrm{sech}^2(x)$, tem-se que, após algumas manipulações algébricas, as derivadas de segunda ordem apresentadas em (D-11)–(D-20) se aproximam de

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\omega^2} = \sum_{k=1}^{N}\Big\{-\frac{1}{N_0^2}\Im[\mathbf{Z}_{2k}^H\mathbf{J}\mathbf{S}B]^2\tau^2\,\mathrm{sech}^2\{\tau\gamma_{2k}\} +$$
$$+\frac{1}{N_0}\Re[\mathbf{Z}_{2k}^H\mathbf{J}^2\mathbf{S}B]\,\mathrm{sgn}\{f_{2k}\}\Big[1 - \tau\Big(1 - \tanh\{\tau\gamma_{2k}\}\Big)\Big]\Big\} \qquad \text{(D-28)}$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\Re(B)^2} = \frac{Nm}{N_0} - \sum_{k=1}^{N}\Big\{\frac{2m\tau(1-\tau)}{N_0}\Big(1 - \tanh\{\tau\gamma_{2k}\}\Big) -$$
$$-\tau^2\Big[\Re[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_{2k}] - 2m(1-\tau)\Re(B)\Big]^2\,\mathrm{sech}^2\{\tau\gamma_{2k}\}\Big\} \qquad \text{(D-29)}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116438/CA

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \Im(B)^2} = \frac{Nm}{N_0} - \sum_{k=1}^{N} \Big\{ \frac{2m\tau(1-\tau)}{N_0} \Big(1 - \tanh\{\tau\gamma_{2k}\} \Big) - \\ -\tau^2 \Big[\Im[\mathbf{S}^H \mathbf{Z}_{2k}] - 2m(1-\tau)\Im(B) \Big]^2 \operatorname{sech}^2\{\tau\gamma_{2k}\} \Big\} \tag{D-30}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \tau^2} = \sum_{k=1}^{N} \Big\{ \frac{2mA^2}{N_0} \Big(1 - \tanh\{\tau\gamma_{2k}\} \Big) - \\ - \Big[f_{2k} \operatorname{sgn}\{f_{2k}\} - \frac{mA^2}{N_0}(1-2\tau) \Big]^2 \operatorname{sech}^2\{\tau\gamma_{2k}\} \Big\} \tag{D-31}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \omega \, \partial \Re(B)} = \sum_{k=1}^{N} \Big\{ \frac{1}{N_0^2} \Im[\mathbf{Z}_{2k}^H \mathbf{J} \mathbf{S} B] \tau^2 \Big[\Re[\mathbf{S}^H \mathbf{Z}_{2k}] - \\ -2m(1-\tau) \operatorname{sgn}\{f_{2k}\} \Re(B) \Big] \operatorname{sech}^2\{\tau\gamma_{2k}\} + \\ + \frac{1}{N_0} \Im[\mathbf{Z}_{2k}^H \mathbf{J} \mathbf{S}] \operatorname{sgn}\{f_{2k}\} \Big[1 - \tau \Big(1 - \tanh\{\tau\gamma_{2k}\} \Big) \Big] \Big\} \tag{D-32}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \omega \, \partial \Im(B)} = \sum_{k=1}^{N} \Big\{ \frac{1}{N_0^2} \Im[\mathbf{Z}_{2k}^H \mathbf{J} \mathbf{S} B] \tau^2 \Big[\Im[\mathbf{S}^H \mathbf{Z}_{2k}] - \\ -2m(1-\tau) \operatorname{sgn}\{f_{2k}\} \Im(B) \Big] \operatorname{sech}^2\{\tau\gamma_{2k}\} + \\ + \frac{1}{N_0} \Re[\mathbf{Z}_{2k}^H \mathbf{J} \mathbf{S}] \operatorname{sgn}\{f_{2k}\} \Big[1 - \tau \Big(1 - \tanh\{\tau\gamma_{2k}\} \Big) \Big] \Big\} \tag{D-33}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \omega \, \partial \tau} = \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^{N} \Im[\mathbf{Z}_{2k}^H \mathbf{J} \mathbf{S} B] \Big\{ -\operatorname{sgn}\{f_{2k}\} \Big(1 - \tanh\{\tau\gamma_{2k}\} \Big) + \\ + \tau \Big[f_{2k} - \frac{mA^2}{N_0}(1-2\tau) \operatorname{sgn}\{f_{2k}\} \Big] \operatorname{sech}^2\{\tau\gamma_{2k}\} \Big\} \tag{D-34}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \Re(B) \, \partial \Im(B)} = \frac{\tau^2}{N_0^2} \sum_{k=1}^{N} \Big[-\Re[\mathbf{S}^H \mathbf{Z}_{2k}] \Im[\mathbf{S}^H \mathbf{Z}_{2k}] - \Big(2m(1-\tau) \Big)^2 \cdot \\ \cdot \Re(B) \Im(B) + 2m(1-\tau) \operatorname{sgn}\{f_{2k}\} \Im[\mathbf{S}^H \mathbf{Z}_{2k} B] \Big] \operatorname{sech}^2\{\tau\gamma_{2k}\} \tag{D-35}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116438/CA

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \Re(B)\,\partial\tau} = \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}\Big\{\Big[\Re[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_{2k}]\,\mathrm{sgn}\{f_{2k}\} - 2m(1-2\tau)\Re(B)\Big]\cdot \\ \cdot\Big(1-\tanh\{\tau\gamma_{2k}\}\Big) - \tau\Big[\Re[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_{2k}]\,\mathrm{sgn}\{f_{2k}\} - 2m(1-\tau)\Re(B)\Big]\cdot \\ \cdot\Big[f_{2k}\,\mathrm{sgn}\{f_{2k}\} - \frac{mA^2}{N_0}(1-2\tau)\Big]\cdot\mathrm{sech}^2\{\tau\gamma_{2k}\}\Big\} \tag{D-36}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \Im(B)\,\partial\tau} = \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}\Big\{\Big[\Im[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_{2k}]\,\mathrm{sgn}\{f_{2k}\} - 2m(1-2\tau)\Im(B)\Big]\cdot \\ \cdot\Big(1-\tanh\{\tau\gamma_{2k}\}\Big) - \tau\Big[\Im[\mathbf{S}^H\mathbf{Z}_{2k}]\,\mathrm{sgn}\{f_{2k}\} - 2m(1-\tau)\Im(B)\Big]\cdot \\ \cdot\Big[f_{2k}\,\mathrm{sgn}\{f_{2k}\} - \frac{mA^2}{N_0}(1-2\tau)\Big]\cdot\mathrm{sech}^2\{\tau\gamma_{2k}\}\Big\} \tag{D-37}$$

Todas estas expressões podem ser ainda mais simplificadas se for considerado que, para E_b/N_0 alto, o valor do operando $\tau\gamma_{2k}$ das funções sech^2 e tanh também será alto. Assim,

$$\mathrm{sech}^2\{\tau\gamma_{2k}\} \approx 0 \qquad\qquad \tanh\{\tau\gamma_{2k}\} \approx \mathrm{sgn}\{\gamma_{2k}\} \tag{D-38}$$

Estas aproximações podem ser contestadas quando o valor de τ for suficientemente baixo. No entanto, quase a totalidade dos termos em (D-28)–(D-37) que contêm $\mathrm{sech}^2\{\tau\gamma_{2k}\}$ são multiplicados por τ ou por τ^2, o que reduz bastante este erro de aproximação. A Fig. D.1 ilustra esta afirmativa, para um valor de γ_{2k} constante e igual a 20 durante todo o intervalo de τ (nota-se de (D-24) que γ_{2k} é função de τ; esta impossibilidade se justifica pois o objetivo da figura é explicar a influência de τ na função em questão).

Em (D-31), a função $\mathrm{sech}^2\{\tau\gamma_{2k}\}$ não está multiplicada por τ, mas por $\Big[f_{2k}\,\mathrm{sgn}\{f_{2k}\} - \frac{mA^2}{N_0}(1-2\tau)\Big]^2$. No entanto, à medida que τ se aproxima de zero, a fdp de $\mathbf{z}_{2k}$ se aproxima da média de 2 gaussianas centradas em $\pm\mathbf{S}B$, de modo que o valor esperado de $\mathbf{z}_{2k}\,\mathrm{sgn}\{f_{2k}\}$ tende a $\mathbf{S}B$. Assim,

$$f_{2k}\,\mathrm{sgn}\{f_{2k}\} - \frac{mA^2}{N_0} \approx 0$$

e o erro de $\mathrm{sech}^2\{\tau\gamma_{2k}\}$ será reduzido quando τ se aproximar de zero. De forma similar, pode-se justificar a aproximação da função $\tanh\{\tau\gamma_{2k}\}$. Por se tratar de uma função ímpar em γ_{2k}, e considerando que a fdp de $\mathbf{z}_{2k}$ é par em γ_{2k}, os erros obtidos na aproximação serão reduzidos quando o valor esperado em $\mathbf{z}_{2k}$ for calculado. As expressões das derivadas de segunda

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116438/CA

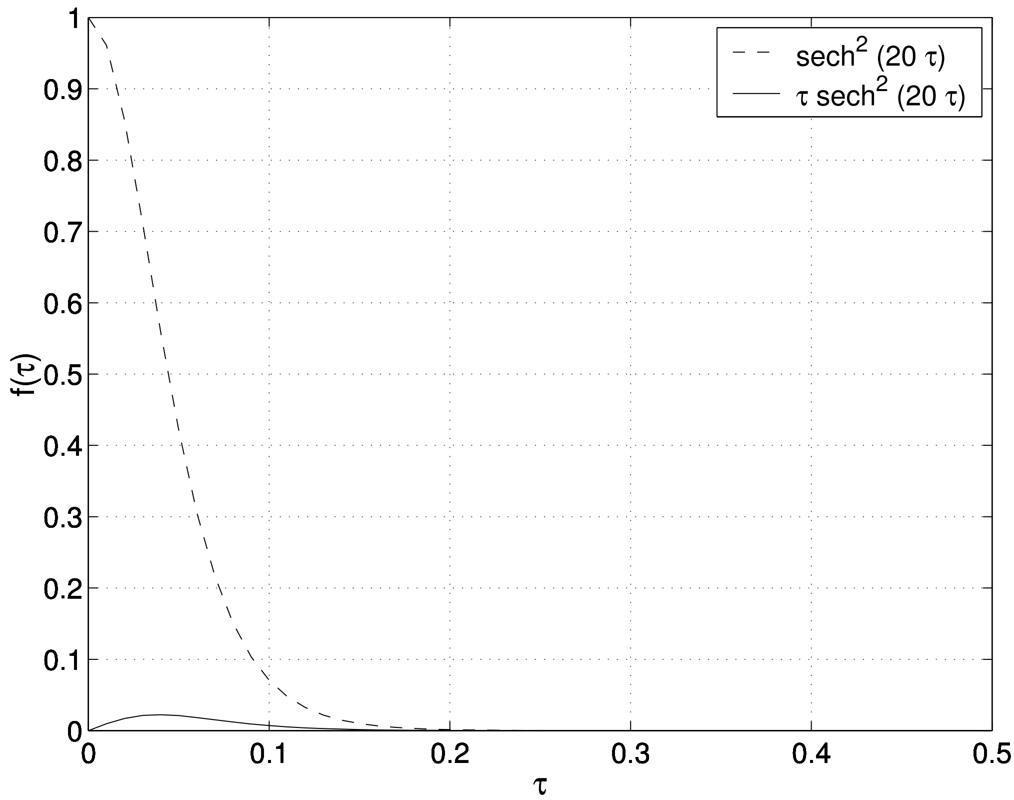

Figura D.1: Influência de τ na aproximação da função $\mathrm{sech}^2\{\tau\gamma_{2k}\}$.

ordem, após todas as aproximações, são

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\omega^2} = \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}\Re[\mathbf{Z}_{2k}^H\mathbf{J}^2\mathbf{S}B]\,\mathrm{sgn}\{f_{2k}\}\Big[1-\tau\Big(1-\mathrm{sgn}\{\gamma_{2k}\}\Big)\Big] \tag{D-39}$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\Re(B)^2} = \frac{Nm}{N_0} - \frac{2m\tau(1-\tau)}{N_0}\sum_{k=1}^{N}\Big(1-\mathrm{sgn}\{\gamma_{2k}\}\Big) \tag{D-40}$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\Im(B)^2} = \frac{Nm}{N_0} - \frac{2m\tau(1-\tau)}{N_0}\sum_{k=1}^{N}\Big(1-\mathrm{sgn}\{\gamma_{2k}\}\Big) \tag{D-41}$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\tau^2} = \frac{2mA^2}{N_0}\sum_{k=1}^{N}\Big(1-\mathrm{sgn}\{\gamma_{2k}\}\Big) \tag{D-42}$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\omega\,\partial\Re(B)} = \frac{1}{N_0}\sum_{k=1}^{N}\Im[\mathbf{Z}_{2k}^H\mathbf{J}\mathbf{S}]\,\mathrm{sgn}\{f_{2k}\}\Big[1-\tau\Big(1-\mathrm{sgn}\{\gamma_{2k}\}\Big)\Big] \tag{D-43}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116438/CA

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \omega \, \partial \Im(B)} = \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^{N} \Re[\mathbf{Z}_{2k}^H \mathbf{J}\mathbf{S}] \operatorname{sgn}\{f_{2k}\} \Big[1 - \tau \Big(1 - \operatorname{sgn}\{\gamma_{2k}\}\Big)\Big] \tag{D-44}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \omega \, \partial \tau} = -\frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^{N} \Im[\mathbf{Z}_{2k}^H \mathbf{J}\mathbf{S}B] \operatorname{sgn}\{f_{2k}\} \Big(1 - \operatorname{sgn}\{\gamma_{2k}\}\Big) \tag{D-45}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \Re(B) \, \partial \Im(B)} = 0 \tag{D-46}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \Re(B) \, \partial \tau} = \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^{N} \Big[\Re[\mathbf{S}^H \mathbf{Z}_{2k}] \operatorname{sgn}\{f_{2k}\} - 2m(1-2\tau)\Re(B)\Big] \Big(1 - \operatorname{sgn}\{\gamma_{2k}\}\Big) \tag{D-47}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \Im(B) \, \partial \tau} = \frac{1}{N_0} \sum_{k=1}^{N} \Big[\Im[\mathbf{S}^H \mathbf{Z}_{2k}] \operatorname{sgn}\{f_{2k}\} - 2m(1-2\tau)\Im(B)\Big] \Big(1 - \operatorname{sgn}\{\gamma_{2k}\}\Big) \tag{D-48}$$

O valor esperado destas expressões formará a matriz de informação de Fisher que, ao ser invertida, fornece o limitante de Cramér-Rao. Identifica-se três blocos básicos nas expressões (D-39)–(D-48) que precisam ser desenvolvidos para que se avance no cálculo do limitante de Cramér-Rao. Estes blocos são

$$\begin{aligned} &E\Big[g(\mathbf{z}_{2k}) \cdot \operatorname{sgn}\{f_{2k}\} \Big| \boldsymbol{\varphi}\Big] \\ &E\Big[g(\mathbf{z}_{2k}) \cdot \operatorname{sgn}\{f_{2k}\} \Big(1 - \operatorname{sgn}\{\gamma_{2k}\}\Big) \Big| \boldsymbol{\varphi}\Big] \\ &E\Big[\Big(1 - \operatorname{sgn}\{\gamma_{2k}\}\Big) \Big| \boldsymbol{\varphi}\Big] \end{aligned} \tag{D-49}$$

onde $g(\mathbf{z}_{2k})$ é uma função linear escalar ímpar do vetor de observações no instante $2k$.

Antes de resolver o valor esperado em (D-49), algumas considerações sobre a fdp de $\mathbf{z}_{2k}$ precisam ser feitas. Esta fdp, condicionada ao vetor de parâmetros $\boldsymbol{\varphi}$, é dada por

$$p_{\mathbf{z}_{2k}|\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{Z}_{2k}) = \frac{1}{(2\pi N_0)^m} \cdot \frac{1}{4} \sum_{\ell=1}^{4} \lambda^{(\ell)} \tag{D-50}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116438/CA

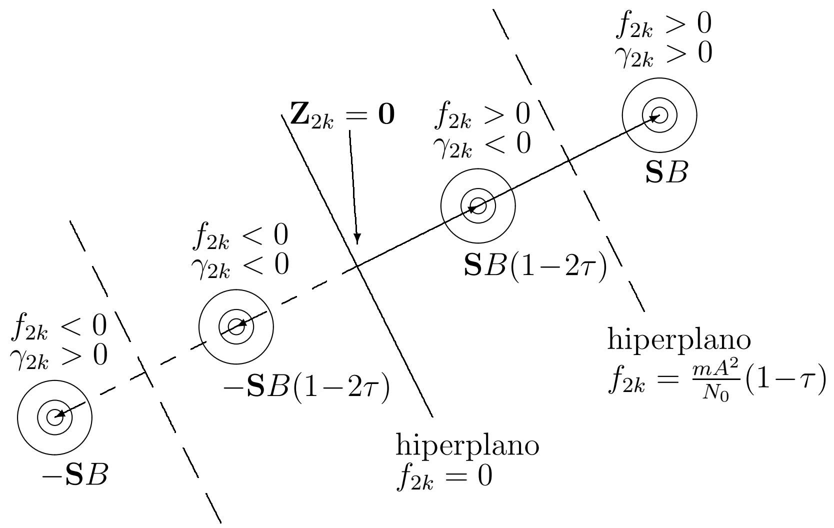

Figura D.2: Fdp condicional do vetor de observações em um instante $2k$ para o cenário com uma portadora BPSK sem correção de relógio.

onde

$$\lambda^{(1)} = \exp\Big\{-\frac{1}{2N_0}\|\mathbf{Z}_{2k} - \mathbf{S}B\|^2\Big\} \quad ; \quad \lambda^{(2)} = \exp\Big\{-\frac{1}{2N_0}\|\mathbf{Z}_{2k} - \mathbf{S}B(1-2\tau)\|^2\Big\}$$
$$\lambda^{(3)} = \exp\Big\{-\frac{1}{2N_0}\|\mathbf{Z}_{2k} + \mathbf{S}B\|^2\Big\} \quad ; \quad \lambda^{(4)} = \exp\Big\{-\frac{1}{2N_0}\|\mathbf{Z}_{2k} + \mathbf{S}B(1-2\tau)\|^2\Big\}$$

representam as quatro gaussianas ilustradas na Fig. D.2. Observando esta mesma figura, percebe-se que o espaço $\mathbf{Z}_{2k}$ é seccionado em quatro regiões por três hiperplanos paralelos. Cada região contém um dos quatro máximos da fdp de $\mathbf{z}_{2k}$. Assim, as regiões que envolvem os picos equivalentes às curvas de $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$ e $\lambda^{(4)}$ serão chamadas de R_1, R_2, R_3 e R_4, respectivamente. Os valores de $\mathrm{sgn}\{f_{2k}\}$ e $\mathrm{sgn}\{\gamma_{2k}\}$ variam de região para região. Desta forma, a integral do valor esperado em $\mathbf{z}_{2k}$ será dividida em quatro integrais, cada uma limitada por uma região diferente, onde as funções $\mathrm{sgn}\{f_{2k}\}$ e $\mathrm{sgn}\{\gamma_{2k}\}$ poderão ser substituídas por seus respectivos valores.

A terceira expressão destacada em (D-49) é a mais simples de se resolver, o que motiva o início desta análise pela mesma. Tem-se

$$E\Big[\Big(1-\mathrm{sgn}\{\gamma_{2k}\}\Big)\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\cdots\!\int_{-\infty}^{\infty}}_{2m\text{ integrais}}\Big(1-\mathrm{sgn}\{\gamma_{2k}\}\Big)p_{\mathbf{z}_{2k}|\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{Z}_{2k})\mathrm{d}\mathbf{Z} =$$
$$= \int_{R_2}\frac{1}{(2\pi N_0)^m}\cdot\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{4}\lambda^{(\ell)}\mathrm{d}\mathbf{Z} + \int_{R_4}\frac{1}{(2\pi N_0)^m}\cdot\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{4}\lambda^{(\ell)}\mathrm{d}\mathbf{Z} \qquad \text{(D-51)}$$

onde percebe-se que as integrais de $\lambda^{(3)}$ e $\lambda^{(4)}$ em R_2 e em R_4 são iguais às

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116438/CA

integrais de $\lambda^{(1)}$ e $\lambda^{(2)}$ nas regiões R_4 e R_2, respectivamente. Assim, (D-51) se reduz a

$$E\Big[\Big(1-\mathrm{sgn}\{\gamma_{2k}\}\Big)\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = \int_{R_2+R_4} \frac{1}{(2\pi N_0)^m}\Big(\lambda^{(1)}+\lambda^{(2)}\Big)\mathrm{d}\mathbf{Z} \qquad \text{(D-52)}$$

Para resolver esta integral, é necessário efetuar uma rotação no espaço $\mathbf{Z}_{2k}$ de modo que o primeiro eixo do novo espaço seja perpendicular aos hiperplanos definidos na Fig. D.2. Os demais eixos devem então estar situados no hiperplano $f_{2k} = 0$. Desta forma, a matriz de rotação $\mathbf{P}$ ortonormal que roda o espaço $\mathbf{Z}_{2k}$ no espaço $\mathbf{Y}_{2k}$ será dada por

$$\mathbf{Y}_{2k} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{Z}_{2k} \qquad \rightleftharpoons \qquad \mathbf{Z}_{2k} = \mathbf{P}^H\cdot\mathbf{Y}_{2k}$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix}\mathbf{P}_1\\ \mathbf{P}_r\end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{array}{l}\mathbf{P}_1 = m^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-j\theta}\,\mathbf{S}^H\\ \mathbf{P}_r \text{ é tal que } \mathbf{P}_r\mathbf{S}B = \mathbf{0}\end{array} \qquad \text{(D-53)}$$

e o vetor $\mathbf{Y}_{2k}$ pode ser decomposto em

$$\mathbf{Y}_{2k} = \begin{pmatrix}Y_1\\ \mathbf{Y}_r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{P}_1\mathbf{Z}_{2k}\\ \mathbf{P}_r\mathbf{Z}_{2k}\end{pmatrix} \qquad \text{(D-54)}$$

Assim, $\mathbf{Z}_{2k}$ pode ser expresso por

$$\mathbf{Z}_{2k} = \mathbf{P}^H\cdot\mathbf{Y}_{2k} = \mathbf{P}_1^H\cdot Y_1 + \mathbf{P}_r^H\cdot\mathbf{Y}_r \qquad \text{(D-55)}$$

e o elemento diferencial $\mathrm{d}\mathbf{Z}$ será igual a $\mathrm{d}\mathbf{Y}$, pois a matriz $\mathbf{P}$ é ortonormal. Um último resultado a salientar é

$$\|\mathbf{Z}_{2k}-\mathbf{m}_{\mathbf{Z}}\|^2 = \|\mathbf{P}^H(\mathbf{Y}_{2k}-\mathbf{P}\mathbf{m}_{\mathbf{Z}})\|^2 = \|\mathbf{Y}_{2k}-\mathbf{P}\mathbf{m}_{\mathbf{Z}}\|^2 \qquad \text{(D-56)}$$

Substituindo (D-56) em (D-52), chega-se a

$$E\Big[\Big(1-\mathrm{sgn}\{\gamma_{2k}\}\Big)\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = \int_{-A\sqrt{m}(1-\tau)}^{A\sqrt{m}(1-\tau)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\cdots\!\int_{-\infty}^{\infty}}_{2m\text{–}1 \text{ integrais}} \frac{1}{(2\pi N_0)^m}\Big(\exp\Big\{-\frac{1}{2N_0}\|\mathbf{Y}_{2k} -$$

$$-\mathbf{P}\mathbf{S}B\|^2\Big\} + \exp\Big\{-\frac{1}{2N_0}\|\mathbf{Y}_{2k}-\mathbf{P}\mathbf{S}B(1-2\tau)\|^2\Big\}\Big)\mathrm{d}\mathbf{Y} \qquad \text{(D-57)}$$

onde $\mathrm{d}\mathbf{Y} = \mathrm{d}Y_1\cdot\mathrm{d}\mathbf{Y}_r$ e, considerando a definição de $\mathbf{P}_r$ dada em (D-53),

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116438/CA

percebe-se que apenas o primeiro elemento de $\mathbf{PS}B$ é não nulo. Assim,

$$E\Big[\Big(1-\mathrm{sgn}\{\gamma_{2k}\}\Big)\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = \int_{-A\sqrt{m}(1-\tau)}^{A\sqrt{m}(1-\tau)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi N_0}\Big(\exp\Big\{-\frac{1}{2N_0}\Big|Y_1 - \\ -A\sqrt{m}\Big|^2\Big\} + \exp\Big\{-\frac{1}{2N_0}\Big|Y_1 - A\sqrt{m}(1-2\tau)\Big|^2\Big\}\Big)\mathrm{d}Y_1 \qquad \text{(D-58)}$$

onde $\mathrm{d}Y_1 = \mathrm{d}\Re(Y_1)\cdot\mathrm{d}\Im(Y_1)$ e, como a média de Y_1 nas duas gaussianas é real, tem-se

$$E\Big[\Big(1-\mathrm{sgn}\{\gamma_{2k}\}\Big)\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = \int_{-A\sqrt{m}(1-\tau)}^{A\sqrt{m}(1-\tau)}\frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}}\Big(\exp\Big\{-\frac{1}{2N_0}\Big[\Re(Y_1) - \\ -A\sqrt{m}\Big]^2\Big\} + \exp\Big\{-\frac{1}{2N_0}\Big[\Re(Y_1) - A\sqrt{m}(1-2\tau)\Big]^2\Big\}\Big)\mathrm{d}\Re(Y_1) \qquad \text{(D-59)}$$

Separando as exponenciais em duas integrais e resolvendo-as por substituição, chega-se a

$$E\Big[\Big(1-\mathrm{sgn}\{\gamma_{2k}\}\Big)\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = \int_{-A\sqrt{m}(2-\tau)}^{-A\sqrt{m}\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}}\exp\Big\{-\frac{1}{2N_0}u^2\Big\}\mathrm{d}u + \\ + \int_{-A\sqrt{m}(2-3\tau)}^{A\sqrt{m}\tau}\frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}}\exp\Big\{-\frac{1}{2N_0}u^2\Big\}\mathrm{d}u = \\ = 1 - \mathrm{Q}\Big[A\sqrt{\frac{m}{N_0}}(2-\tau)\Big] - \mathrm{Q}\Big[A\sqrt{\frac{m}{N_0}}(2-3\tau)\Big] \approx 1 \qquad \text{(D-60)}$$

onde

$$\mathrm{Q}(x) = \int_x^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u \qquad \text{(D-61)}$$

apresenta valor muito próximo de zero quando o operando x é grande. O resultado obtido em (D-60) pode ser verificado intuitivamente já que, para E_b/N_0 alto, as quatro gaussianas de (D-50) se aproximam de “agulhas”, tornando o valor da integral de (D-50) em cada região aproximadamente igual a $\frac{1}{4}$. Como são integradas duas regiões com peso dois em cada uma, tem-se que a resposta final é unitária.

As demais expressões de (D-49) serão analisadas conjuntamente. Com base nas regiões definidas na Fig. D.2, e nas exponenciais da fdp em (D-50), tem-se

$$E\Big[g(\mathbf{z}_{2k})\cdot\mathrm{sgn}\{f_{2k}\}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = \frac{1}{(2\pi N_0)^m}\cdot\frac{1}{4}\cdot \\ \cdot\Bigg(\int_{R_1+R_2} g(\mathbf{Z}_{2k})\sum_{\ell=1}^{4}\lambda^{(\ell)}\mathrm{d}\mathbf{Z} - \int_{R_3+R_4} g(\mathbf{Z}_{2k})\sum_{\ell=1}^{4}\lambda^{(\ell)}\mathrm{d}\mathbf{Z}\Bigg) \qquad \text{(D-62)}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116438/CA

$$E\Big[g(\mathbf{z}_{2k})\cdot\mathrm{sgn}\{f_{2k}\}\Big(1-\mathrm{sgn}\{\gamma_{2k}\}\Big)\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big]=\frac{1}{(2\pi N_0)^m}\cdot\frac{1}{2}\cdot$$
$$\cdot\left(\int_{R_2}g(\mathbf{Z}_{2k})\sum_{\ell=1}^{4}\lambda^{(\ell)}\mathrm{d}\mathbf{Z}-\int_{R_4}g(\mathbf{Z}_{2k})\sum_{\ell=1}^{4}\lambda^{(\ell)}\mathrm{d}\mathbf{Z}\right)\qquad\text{(D-63)}$$

e, lembrando que g é uma função ímpar em $\mathbf{Z}_{2k}$, percebe-se que as integrais de $g(\mathbf{Z}_{2k})\lambda^{(3)}$ e $g(\mathbf{Z}_{2k})\lambda^{(4)}$ nas regiões R_1, R_2, R_3 e R_4 equivalem respectivamente ao oposto das integrais de $g(\mathbf{Z}_{2k})\lambda^{(1)}$ e $g(\mathbf{Z}_{2k})\lambda^{(2)}$ nas regiões R_3, R_4, R_1 e R_2. Assim,

$$E\Big[g(\mathbf{z}_{2k})\cdot\mathrm{sgn}\{f_{2k}\}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big]=\frac{1}{(2\pi N_0)^m}\cdot\frac{1}{2}\cdot$$
$$\cdot\left(\int_{R_1+R_2}g(\mathbf{Z}_{2k})\sum_{\ell=1}^{2}\lambda^{(\ell)}\mathrm{d}\mathbf{Z}-\int_{R_3+R_4}g(\mathbf{Z}_{2k})\sum_{\ell=1}^{2}\lambda^{(\ell)}\mathrm{d}\mathbf{Z}\right)\quad\text{(D-64)}$$

$$E\Big[g(\mathbf{z}_{2k})\cdot\mathrm{sgn}\{f_{2k}\}\Big(1-\mathrm{sgn}\{\gamma_{2k}\}\Big)\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big]=\frac{1}{(2\pi N_0)^m}\cdot$$
$$\cdot\left(\int_{R_2}g(\mathbf{Z}_{2k})\sum_{\ell=1}^{2}\lambda^{(\ell)}\mathrm{d}\mathbf{Z}-\int_{R_4}g(\mathbf{Z}_{2k})\sum_{\ell=1}^{2}\lambda^{(\ell)}\mathrm{d}\mathbf{Z}\right)\qquad\text{(D-65)}$$

Pode-se intuir que, ao aumentar o valor de E_b/N_0, a primeira integral em (D-64) prevalecerá sobre a segunda, fornecendo $\frac{1}{2}[g(\mathbf{S}B)+g(\mathbf{S}B(1-2\tau))]$ como resultado. Da mesma forma, a integral em R_2 de $\lambda^{(2)}$ em (D-65) influirá cada vez mais na resposta com o aumento de E_b/N_0, fazendo com que a solução tenda para $g(\mathbf{S}B(1-2\tau))$.

Para verificar estas projeções, deve-se efetuar uma rotação no espaço $\mathbf{Z}_{2k}$ igual a descrita em (D-53). Antes, porém, a segunda integral em (D-64) será somada e subtraída da expressão total, resultando em

$$E\Big[g(\mathbf{z}_{2k})\cdot\mathrm{sgn}\{f_{2k}\}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big]=\frac{1}{2}\cdot\Bigg(\Big[g\Big(\mathbf{S}B\Big)+$$
$$+g\Big(\mathbf{S}B(1-2\tau)\Big)\Big]-2\int_{R_3+R_4}g(\mathbf{Z}_{2k})\frac{1}{(2\pi N_0)^m}\sum_{\ell=1}^{2}\lambda^{(\ell)}\mathrm{d}\mathbf{Z}\Bigg)=$$
$$=g\Big(\mathbf{S}B(1-\tau)\Big)-\int_{R_3+R_4}g(\mathbf{Z}_{2k})\frac{1}{(2\pi N_0)^m}\sum_{\ell=1}^{2}\lambda^{(\ell)}\mathrm{d}\mathbf{Z}\qquad\text{(D-66)}$$

que é mais simples de ser resolvida. Utilizando agora a rotação proposta em

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116438/CA

(D-53) e substituindo (D-55) e (D-56) em (D-66), obtém-se

$$E\Big[g(\mathbf{z}_{2k})\cdot \mathrm{sgn}\{f_{2k}\}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = g\Big(\mathbf{S}B(1-\tau)\Big) - \frac{1}{(2\pi N_0)^m}\cdot$$
$$\cdot\Bigg(\int_{-\infty}^{0}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{2m\text{–}1 \text{ integrais}} g(\mathbf{P}_1^H Y_1)\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}\|\mathbf{Y}_{2k}-\mathbf{PS}B\|^2}\mathrm{d}\mathbf{Y} +$$
$$+\int_{-\infty}^{0}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{2m\text{–}1 \text{ integrais}} g(\mathbf{P}_1^H Y_1)\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}\|\mathbf{Y}_{2k}-\mathbf{PS}B(1-2\tau)\|^2}\mathrm{d}\mathbf{Y} +$$
$$+\int_{-\infty}^{0}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{2m\text{–}1 \text{ integrais}} g(\mathbf{P}_r^H \mathbf{Y}_r)\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}\|\mathbf{Y}_{2k}-\mathbf{PS}B\|^2}\mathrm{d}\mathbf{Y} +$$
$$+\int_{-\infty}^{0}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}}_{2m\text{–}1 \text{ integrais}} g(\mathbf{P}_r^H \mathbf{Y}_r)\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}\|\mathbf{Y}_{2k}-\mathbf{PS}B(1-2\tau)\|^2}\mathrm{d}\mathbf{Y}\Bigg) =$$
$$= g\Big(\mathbf{S}B(1-\tau)\Big) - \Bigg(\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\mathbf{P}_1^H Y_1)}{2\pi N_0}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}\left|Y_1-A\sqrt{m}\right|^2}\mathrm{d}Y_1 +$$
$$+\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\mathbf{P}_1^H Y_1)}{2\pi N_0}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}\left|Y_1-A\sqrt{m}(1-2\tau)\right|^2}\mathrm{d}Y_1 +$$
$$+g(\mathbf{P}_r^H\mathbf{0})\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi N_0}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}\left|Y_1-A\sqrt{m}\right|^2}\mathrm{d}Y_1 +$$
$$+g(\mathbf{P}_r^H\mathbf{0})\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi N_0}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}\left|Y_1-A\sqrt{m}(1-2\tau)\right|^2}\mathrm{d}Y_1\Bigg) \tag{D-67}$$

e, como g é uma função ímpar, $g(\mathbf{0}) = 0$ e os dois últimos termos desaparecem da expressão. Analogamente, para (D-65), verifica-se que

$$E\Big[g(\mathbf{z}_{2k})\cdot \mathrm{sgn}\{f_{2k}\}\Big(1-\mathrm{sgn}\{\gamma_{2k}\}\Big)\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] =$$
$$= \int_{0}^{A\sqrt{m}(1-\tau)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\mathbf{P}_1^H Y_1)}{2\pi N_0}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}\left|Y_1-A\sqrt{m}\right|^2}\mathrm{d}Y_1 +$$
$$+\int_{0}^{A\sqrt{m}(1-\tau)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\mathbf{P}_1^H Y_1)}{2\pi N_0}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}\left|Y_1-A\sqrt{m}(1-2\tau)\right|^2}\mathrm{d}Y_1 -$$
$$-\int_{-A\sqrt{m}(1-\tau)}^{0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\mathbf{P}_1^H Y_1)}{2\pi N_0}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}\left|Y_1-A\sqrt{m}\right|^2}\mathrm{d}Y_1 -$$
$$-\int_{-A\sqrt{m}(1-\tau)}^{0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\mathbf{P}_1^H Y_1)}{2\pi N_0}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}\left|Y_1-A\sqrt{m}(1-2\tau)\right|^2}\mathrm{d}Y_1 \tag{D-68}$$

Resolvendo a integral em $\Im(Y_1)$ e lembrando que g é uma função linear,

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116438/CA

chega-se a

$$E\Big[g(\mathbf{z}_{2k})\cdot\mathrm{sgn}\{f_{2k}\}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big]=g\Big(\mathbf{S}B(1-\tau)\Big)-g(\mathbf{P}_1^H)\cdot$$
$$\cdot\Bigg(\int_{-\infty}^{0}\frac{\Re(Y_1)}{\sqrt{2\pi N_0}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}\left[\Re(Y_1)-A\sqrt{m}\right]^2}\mathrm{d}\Re(Y_1)+$$
$$+\int_{-\infty}^{0}\frac{\Re(Y_1)}{\sqrt{2\pi N_0}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}\left[\Re(Y_1)-A\sqrt{m}(1-2\tau)\right]^2}\mathrm{d}\Re(Y_1)\Bigg) \qquad \text{(D-69)}$$

$$E\Big[g(\mathbf{z}_{2k})\cdot\mathrm{sgn}\{f_{2k}\}\Big(1-\mathrm{sgn}\{\gamma_{2k}\}\Big)\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big]=g(\mathbf{P}_1^H)\cdot$$
$$\cdot\Bigg(\int_{0}^{A\sqrt{m}(1-\tau)}\frac{\Re(Y_1)}{\sqrt{2\pi N_0}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}\left[\Re(Y_1)-A\sqrt{m}\right]^2}\mathrm{d}\Re(Y_1)+$$
$$+\int_{0}^{A\sqrt{m}(1-\tau)}\frac{\Re(Y_1)}{\sqrt{2\pi N_0}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}\left[\Re(Y_1)-A\sqrt{m}(1-2\tau)\right]^2}\mathrm{d}\Re(Y_1)-$$
$$-\int_{-A\sqrt{m}(1-\tau)}^{0}\frac{\Re(Y_1)}{\sqrt{2\pi N_0}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}\left[\Re(Y_1)-A\sqrt{m}\right]^2}\mathrm{d}\Re(Y_1)-$$
$$-\int_{-A\sqrt{m}(1-\tau)}^{0}\frac{\Re(Y_1)}{\sqrt{2\pi N_0}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}\left[\Re(Y_1)-A\sqrt{m}(1-2\tau)\right]^2}\mathrm{d}\Re(Y_1)\Bigg) \qquad \text{(D-70)}$$

Solucionando as integrais por substituição e utilizando $g(\mathbf{P}_1^H)A\sqrt{m} = g(\mathbf{S}B)$, conclui-se que

$$E\Big[g(\mathbf{z}_{2k})\cdot\mathrm{sgn}\{f_{2k}\}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big]=g(\mathbf{S}B)\Bigg\{1-\tau+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{N_0}{mA^2}}\Big[\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{2N_0}}+$$
$$+\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{2N_0}(1-2\tau)^2}\Big]-\mathrm{Q}\Big(\sqrt{\frac{mA^2}{N_0}}\Big)-(1-2\tau)\,\mathrm{Q}\Big(\sqrt{\frac{mA^2}{N_0}}(1-2\tau)\Big)\Bigg\} \qquad \text{(D-71)}$$

$$E\Big[g(\mathbf{z}_{2k})\cdot\mathrm{sgn}\{f_{2k}\}\Big(1-\mathrm{sgn}\{\gamma_{2k}\}\Big)\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big]=g(\mathbf{S}B)\Bigg\{1-2\tau+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{N_0}{mA^2}}\cdot$$
$$\cdot\Big[2\,\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{2N_0}(1-2\tau)^2}-2\,\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{2N_0}\tau^2}+2\,\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{2N_0}}-\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{2N_0}(2-3\tau)^2}-\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{2N_0}(2-\tau)^2}\Big]+$$
$$+2\tau\,\mathrm{Q}\Big(\sqrt{\frac{mA^2}{N_0}}\tau\Big)-2(1-2\tau)\,\mathrm{Q}\Big(\sqrt{\frac{mA^2}{N_0}}(1-2\tau)\Big)-2\,\mathrm{Q}\Big(\sqrt{\frac{mA^2}{N_0}}\Big)+$$
$$+\mathrm{Q}\Big(\sqrt{\frac{mA^2}{N_0}}(2-\tau)\Big)+(1-2\tau)\,\mathrm{Q}\Big(\sqrt{\frac{mA^2}{N_0}}(2-3\tau)\Big)\Bigg\} \qquad \text{(D-72)}$$

Considerando E_b/N_0 alto, a primeira exponencial e a primeira função Q de (D-71) tendem a zero. A segunda função Q também pode ser desprezada

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116438/CA

mesmo para valores pequenos de τ, pois esta função esta ponderada de 1–2τ. Aproximações semelhantes podem ser realizadas em (D-72), resultando em

$$E\Big[g(\mathbf{z}_{2k})\cdot\mathrm{sgn}\{f_{2k}\}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = g(\mathbf{S}B)\left\{1{-}\tau+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{N_0}{mA^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{2N_0}(1-2\tau)^2}\right\} \tag{D-73}$$

$$\begin{aligned}E\Big[g(\mathbf{z}_{2k})\cdot\mathrm{sgn}\{f_{2k}\}\Big(1-\mathrm{sgn}\{\gamma_{2k}\}\Big)\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] &= g(\mathbf{S}B)\bigg\{1{-}2\tau+\\ &+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{N_0}{mA^2}}\Big[2\,\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{2N_0}(1-2\tau)^2}-2\,\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{2N_0}\tau^2}\Big]\bigg\}\end{aligned} \tag{D-74}$$

que se aproxima bastante do resultado intuído no início deste desenvolvimento, diferindo apenas porque, anteriormente, o efeito de τ não foi considerado.

Utilizando os resultados em (D-60), (D-73) e (D-74) nas derivadas de segunda ordem apresentadas em (D-39)–(D-48), obtém-se

$$\begin{aligned}E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\omega^2}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] &= \frac{NA^2}{N_0}\ \mathrm{tr}\{\mathbf{J}^2\}\Big\{1{-}2\tau{+}2\tau^2+\\ &+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{N_0}{mA^2}}\Big[(1{-}2\tau)\,\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{2N_0}(1-2\tau)^2}-2\tau\,\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{2N_0}\tau^2}\Big]\Big\}\end{aligned} \tag{D-75}$$

$$E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\Re(B)^2}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\Im(B)^2}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = \frac{Nm}{N_0}\Big\{1{-}2\tau{+}2\tau^2\Big\} \tag{D-76}$$

$$E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\tau^2}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = \frac{2NmA^2}{N_0} \tag{D-77}$$

$$\begin{aligned}E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\omega\,\partial\Re(B)}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] &= -\frac{NA}{N_0}\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\}\Big\{1{-}2\tau{+}2\tau^2+\\ &+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{N_0}{mA^2}}\Big[(1{-}2\tau)\,\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{2N_0}(1-2\tau)^2}-2\tau\,\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{2N_0}\tau^2}\Big]\Big\}\end{aligned} \tag{D-78}$$

$$\begin{aligned}E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\omega\,\partial\Im(B)}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] &= \frac{NA}{N_0}\cos(\theta)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\}\Big\{1{-}2\tau{+}2\tau^2+\\ &+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{N_0}{mA^2}}\Big[(1{-}2\tau)\,\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{2N_0}(1-2\tau)^2}-2\tau\,\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{2N_0}\tau^2}\Big]\Big\}\end{aligned} \tag{D-79}$$

$$E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\omega\,\partial\tau}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\Re(B)\,\partial\Im(B)}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = 0 \tag{D-80}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116438/CA

$$E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\Re(B)\,\partial\tau}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = \frac{NmA}{N_0}\cos(\theta)\Big\{-1+2\tau+ \\ +\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{N_0}{mA^2}}\Big[2\,\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{2N_0}(1-2\tau)^2}-2\,\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{2N_0}\tau^2}\Big]\Big\} \tag{D-81}$$

$$E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\Im(B)\,\partial\tau}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = \frac{NmA}{N_0}\,\mathrm{sen}(\theta)\Big\{-1+2\tau+ \\ +\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{\frac{N_0}{mA^2}}\Big[2\,\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{2N_0}(1-2\tau)^2}-2\,\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{2N_0}\tau^2}\Big]\Big\} \tag{D-82}$$

Percebe-se que as exponenciais nos colchetes de (D-75), (D-78) e (D-79) possuem um peso muito pequeno no valor total, por estarem ponderadas de $1-2\tau$ e τ, respectivamente. O fato de estarem multiplicadas por $\sqrt{\frac{N_0}{mA^2}}$ também contribui para esta eliminação, já que este fator é inversamente proporcional a E_b/N_0. Conclusão equivalente pode ser obtida do termo entre colchetes em (D-81) e (D-82), embora esta última aproximação não seja tão precisa quanto a primeira. Sabendo que τ é uniforme em $[0; 0.5)$, pode-se calcular o valor esperado dos dois termos em questão, obtendo

$$E\Big[(1-2\tau)\,\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{2N_0}(1-2\tau)^2}-2\tau\,\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{2N_0}\tau^2}\Big] = \frac{N_0}{mA^2}\Big(-3+4\,\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{8N_0}}-\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{2N_0}}\Big) \tag{D-83}$$

$$E\Big[2\,\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{2N_0}(1-2\tau)^2}-2\,\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{2N_0}\tau^2}\Big] = \sqrt{\frac{2\pi N_0}{mA^2}}\Big[-1+4\,\mathrm{Q}\Big(\sqrt{\frac{mA^2}{4N_0}}\Big)-2\,\mathrm{Q}\Big(\sqrt{\frac{mA^2}{N_0}}\Big)\Big] \tag{D-84}$$

o que corrobora o fato de (D-83) tender mais rapidamente para zero que (D-84) quando se aumenta o valor de E_b/N_0. De qualquer forma, estas duas expressões podem ser desprezadas. Sabendo que o valor médio quadrático de uma v.a. uniforme em $[0, x)$ é igual a $x^2/3$, o valor esperado em relação a τ é dado por

$$E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\omega^2}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = \frac{2NA^2}{3N_0}\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}^2\} \tag{D-85}$$

$$E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\Re(B)^2}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\Im(B)^2}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = \frac{2Nm}{3N_0} \tag{D-86}$$

$$E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\tau^2}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = \frac{2NmA^2}{N_0} \tag{D-87}$$

$$E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\omega\,\partial\Re(B)}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = -\frac{2NA}{3N_0}\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\} \tag{D-88}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116438/CA

$$E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\omega\,\partial\Im(B)}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = \frac{2NA}{3N_0}\cos(\theta)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\} \tag{D-89}$$

$$E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\omega\,\partial\tau}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\Re(B)\,\partial\Im(B)}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = 0 \tag{D-90}$$

$$E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\Re(B)\,\partial\tau}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = -\frac{NmA}{2N_0}\cos(\theta) \tag{D-91}$$

$$E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\Im(B)\,\partial\tau}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = -\frac{NmA}{2N_0}\mathrm{sen}(\theta) \tag{D-92}$$

e a matriz de informação de Fisher será dada por

$$\frac{N}{N_0}\begin{bmatrix} \frac{2A^2}{3}\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}^2\} & -\frac{2A}{3}\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\} & \frac{2A}{3}\cos(\theta)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\} & 0 \\ -\frac{2A}{3}\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\} & 2m/3 & 0 & -\frac{mA}{2}\cos(\theta) \\ \frac{2A}{3}\cos(\theta)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\} & 0 & 2m/3 & -\frac{mA}{2}\mathrm{sen}(\theta) \\ 0 & -\frac{mA}{2}\cos(\theta) & -\frac{mA}{2}\mathrm{sen}(\theta) & 2mA^2 \end{bmatrix} \tag{D-93}$$

cujo determinante Δ é dado por

$$\Delta = \frac{N^4}{N_0^4}\cdot\Big\{\frac{2A^2}{3}\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J^2}\}\Delta_1 + \frac{2A}{3}\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\}\Delta_2 + \frac{2A}{3}\cos(\theta)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\}\Delta_3\Big\} \tag{D-94}$$

onde

$$\Delta_1 = \det\begin{bmatrix} 2m/3 & 0 & -\frac{mA}{2}\cos(\theta) \\ 0 & 2m/3 & -\frac{mA}{2}\mathrm{sen}(\theta) \\ -\frac{mA}{2}\cos(\theta) & -\frac{mA}{2}\mathrm{sen}(\theta) & 2mA^2 \end{bmatrix} = \frac{13}{18}m^3A^2 \tag{D-95}$$

$$\begin{aligned}\Delta_2 &= \det\begin{bmatrix} -\frac{2A}{3}\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\} & 0 & -\frac{mA}{2}\cos(\theta) \\ \frac{2A}{3}\cos(\theta)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\} & 2m/3 & -\frac{mA}{2}\mathrm{sen}(\theta) \\ 0 & -\frac{mA}{2}\mathrm{sen}(\theta) & 2mA^2 \end{bmatrix} = \\ &= -\frac{13}{18}m^2A^3\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\}\end{aligned} \tag{D-96}$$

$$\begin{aligned}\Delta_3 &= \det\begin{bmatrix} -\frac{2A}{3}\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\} & 2m/3 & -\frac{mA}{2}\cos(\theta) \\ \frac{2A}{3}\cos(\theta)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\} & 0 & -\frac{mA}{2}\mathrm{sen}(\theta) \\ 0 & -\frac{mA}{2}\cos(\theta) & 2mA^2 \end{bmatrix} = \\ &= -\frac{13}{18}m^2A^3\cos(\theta)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\}\end{aligned} \tag{D-97}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116438/CA

Substituindo estes resultados em (D-94), obtém-se

$$\Delta = \frac{13}{27}\left(\frac{NA}{N_0}\right)^4 \left[m^3\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}^2\} - m^2\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\}^2\right] \tag{D-98}$$

e o limitante de Cramér-Rao para o erro de estimação do parâmetro ω vale

$$\mathrm{LCR}_\omega = \frac{N^3}{N_0^3}\cdot\frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3N_0}{2NA^2}\cdot\frac{m}{m\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}^2\} - \mathrm{tr}\{\mathbf{J}\}^2} \tag{D-99}$$

Se o vetor de parâmetros definido em (D-2) fosse utilizado, o limitante de Cramér-Rao seria calculado de forma análoga à apresentada no cenário com modelo síncrono. Como o valor esperado em z_{2k} de (D-6) também é nulo neste cenário, tem-se que o determinante da matriz de informação de Fisher, neste caso, será dado por

$$\begin{aligned}\Delta = \frac{N^4}{N_0^4}\cdot\Big\{&\frac{2A^2}{3}\left(\frac{\pi^2}{2}+\frac{3\sqrt{3}\pi}{8}\right)\mathrm{tr}\{\mathbf{J^2}\}\Delta_1 - \\ &-A\sqrt{3}\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\}\Delta_2 - A\sqrt{3}\cos(\theta)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\}\Delta_3\Big\}\end{aligned} \tag{D-100}$$

onde Δ_1 é o mesmo definido em (D-95) e

$$\Delta_2 = \frac{13}{18}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}m^2A^3\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\};\quad \Delta_3 = \frac{13}{18}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}m^2A^3\cos(\theta)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\} \tag{D-101}$$

Substituindo (D-101) em (D-100), tem-se

$$\Delta = \frac{13}{27}\left(\frac{NA}{N_0}\right)^4 \left[\left(\frac{\pi^2}{2}+\frac{3\sqrt{3}\pi}{8}\right)m^3\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}^2\} - \frac{27}{4}m^2\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\}^2\right] \tag{D-102}$$

e o limitante de Cramér-Rao para o erro de estimação da DOA ψ neste cenário é dado por

$$\begin{aligned}\mathrm{LCR}_\psi &= \frac{N^3}{N_0^3}\cdot\frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3N_0}{2NA^2}\cdot\frac{m}{\left(\frac{\pi^2}{2}+\frac{3\sqrt{3}\pi}{8}\right)m\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}^2\} - \frac{27}{4}\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\}^2} = \\ &= \frac{12N_0}{NA^2}\cdot\frac{m}{\left(4\pi^2+3\sqrt{3}\pi\right)m\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}^2\} - 54\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\}^2}\end{aligned} \tag{D-103}$$

bastando multiplicar esta expressão por $(180/\pi)^2$ para obter o limitante em graus.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 0116438/CA