C
Limitante de Cramér-Rao: modelo síncrono com uma portadora QPSK

O próximo cenário analisado para o cálculo do limitante de Cramér-Rao apresenta uma portadora QPSK com relógio alinhado no tempo com o receptor. O vetor de parâmetros desconhecidos $\boldsymbol{\varphi}$ é igual ao obtido para uma portadora BPSK sem retardo, ou seja,

$$\boldsymbol{\varphi} = \left[\begin{array}{ccc} \omega & \Re(B) & \Im(B) \end{array} \right]^T \tag{C-1}$$

onde ω é a defasagem provocada pela DOA e B é a amplitude complexa da portadora. Como a relação entre ω e a DOA ψ dada por (B-2) é biunívoca, o vetor de parâmetros também pode ser explicitado em função de ψ,

$$\boldsymbol{\varphi} = \left[\begin{array}{ccc} \psi & \Re(B) & \Im(B) \end{array} \right]^T \tag{C-2}$$

e os cálculos a seguir podem ser feitos utilizando qualquer um dos vetores de parâmetros. Utilizar-se-á o vetor definido em (C-1) pela maior simplicidade dos cálculos.

A função de menos-log-verossimilhança no cenário com uma portadora QPSK é dada por

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi}) = \text{cte} + \frac{mN}{2N_0}A^2 - \sum_{k=1}^{N}\Big[\ln\cosh\{\Re(f_k)\} + \ln\cosh\{\Im(f_k)\}\Big] \tag{C-3}$$

onde

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{2}N_0}\mathbf{Z}_k^H\mathbf{S}B \tag{C-4}$$

com o vetor $\mathbf{S}$ definido como em (B-6).

O estimador do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\varphi}$ é obtido através das derivadas de primeira ordem de (C-3), que são

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \omega} = \frac{1}{\sqrt{2}N_0} \sum_{k=1}^{N} \Big(\Im[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J} \mathbf{S} B] \tanh\{\Re(f_k)\} - \\ - \Re[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J} \mathbf{S} B] \tanh\{\Im(f_k)\} \Big) \quad \text{(C-5)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \Re(B)} = \frac{mN}{N_0}\Re(B) - \frac{1}{\sqrt{2}N_0} \sum_{k=1}^{N} \Big(\Re[\mathbf{S}^H \mathbf{Z}_k] \tanh\{\Re(f_k)\} + \\ + \Re[j\mathbf{S}^H \mathbf{Z}_k] \tanh\{\Im(f_k)\} \Big) \quad \text{(C-6)}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \Im(B)} = \frac{mN}{N_0}\Im(B) - \frac{1}{\sqrt{2}N_0} \sum_{k=1}^{N} \Big(\Im[\mathbf{S}^H \mathbf{Z}_k] \tanh\{\Re(f_k)\} + \\ + \Im[j\mathbf{S}^H \mathbf{Z}_k] \tanh\{\Im(f_k)\} \Big) \quad \text{(C-7)}$$

e as derivadas de segunda ordem utilizadas na obtenção da matriz de informação de Fisher são dadas por

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \omega^2} = \frac{1}{\sqrt{2}N_0} \sum_{k=1}^{N} \Big[\Re[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J}^2 \mathbf{S} B] \tanh\{\Re(f_k)\} + \Im[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J}^2 \mathbf{S} B] \tanh\{\Im(f_k)\} - \\ - \frac{1}{\sqrt{2}N_0} \Big(\Im[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J} \mathbf{S} B]^2 \operatorname{sech}^2\{\Re(f_k)\} + \Re[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J} \mathbf{S} B]^2 \operatorname{sech}^2\{\Im(f_k)\} \Big) \Big] \quad \text{(C-8)}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \Re(B)^2} = \frac{mN}{N_0} - \frac{1}{2N_0^2} \sum_{k=1}^{N} \Big(\Re[\mathbf{S}^H \mathbf{Z}_k]^2 \operatorname{sech}^2\{\Re(f_k)\} + \\ + \Re[j\mathbf{S}^H \mathbf{Z}_k]^2 \operatorname{sech}^2\{\Im(f_k)\} \Big) \quad \text{(C-9)}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \Im(B)^2} = \frac{mN}{N_0} - \frac{1}{2N_0^2} \sum_{k=1}^{N} \Big(\Im[\mathbf{S}^H \mathbf{Z}_k]^2 \operatorname{sech}^2\{\Re(f_k)\} + \\ + \Im[j\mathbf{S}^H \mathbf{Z}_k]^2 \operatorname{sech}^2\{\Im(f_k)\} \Big) \quad \text{(C-10)}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \omega\, \partial \Re(B)} &= \frac{1}{\sqrt{2}N_0} \sum_{k=1}^{N} \Big[\Im[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J}\mathbf{S}] \tanh\{\Re(f_k)\} - \Re[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J}\mathbf{S}] \tanh\{\Im(f_k)\} + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}N_0} \Big(\Re[\mathbf{S}^H \mathbf{Z}_k] \Im[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J}\mathbf{S}B] \,\mathrm{sech}^2\{\Re(f_k)\} - \\ &\quad - \Re[j\mathbf{S}^H \mathbf{Z}_k] \Re[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J}\mathbf{S}B] \,\mathrm{sech}^2\{\Im(f_k)\} \Big) \Big] \end{aligned} \quad \text{(C-11)}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \omega\, \partial \Im(B)} &= \frac{1}{\sqrt{2}N_0} \sum_{k=1}^{N} \Big[\Re[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J}\mathbf{S}] \tanh\{\Re(f_k)\} + \Im[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J}\mathbf{S}] \tanh\{\Im(f_k)\} + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2}N_0} \Big(\Im[\mathbf{S}^H \mathbf{Z}_k] \Im[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J}\mathbf{S}B] \,\mathrm{sech}^2\{\Re(f_k)\} - \\ &\quad - \Im[j\mathbf{S}^H \mathbf{Z}_k] \Re[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J}\mathbf{S}B] \,\mathrm{sech}^2\{\Im(f_k)\} \Big) \Big] \end{aligned} \quad \text{(C-12)}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \Re(B)\, \partial \Im(B)} = \frac{1}{2N_0^2} \sum_{k=1}^{N} \Re[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{S}] \Im[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{S}] \Big(\mathrm{sech}^2\{\Re(f_k)\} - \mathrm{sech}^2\{\Im(f_k)\} \Big) \quad \text{(C-13)}$$

Para valores suficientemente altos de E_b/N_0, são válidas as aproximações

$$\begin{aligned} \tanh\{\Re(f_k)\} &\approx \mathrm{sgn}\{\Re(f_k)\} \\ \tanh\{\Im(f_k)\} &\approx \mathrm{sgn}\{\Im(f_k)\} \\ \mathrm{sech}^2\{\Re(f_k)\} \approx \mathrm{sech}^2&\{\Im(f_k)\} \approx 0 \end{aligned} \quad \text{(C-14)}$$

onde $\mathrm{sgn}(x)$ vale 1 quando x for positivo, -1 quando x for negativo e zero quando x for nulo. Estas aproximações englobam toda a faixa de interesse das simulações com erro muito pequeno e podem ser utilizadas sem restrições. Assim, as derivadas de segunda ordem apresentadas em (C-8)–(C-13) se tornam

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \omega^2} = \frac{1}{\sqrt{2}N_0} \sum_{k=1}^{N} \Big[\Re[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J}^2 \mathbf{S}B] \,\mathrm{sgn}\{\Re(f_k)\} + \Im[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J}^2 \mathbf{S}B] \,\mathrm{sgn}\{\Im(f_k)\} \Big] \quad \text{(C-15)}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \Re(B)^2} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \Im(B)^2} = \frac{mN}{N_0} \quad \text{(C-16)}$$

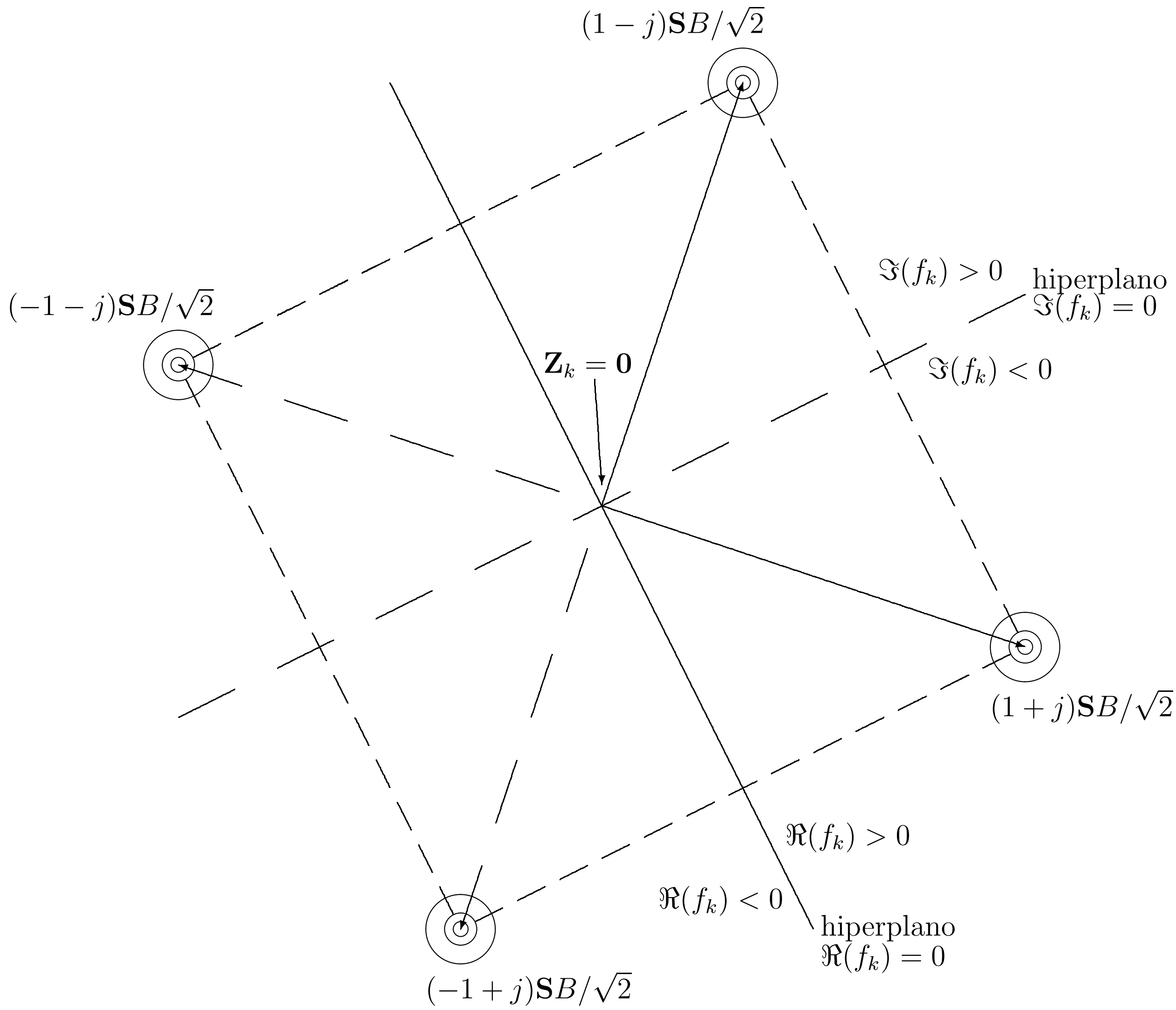

Figura C.1: Fdp condicional do vetor de observações em um instante k para o cenário com uma portadora QPSK com correção de relógio.

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \omega\, \partial \Re(B)} = \frac{1}{\sqrt{2} N_0} \sum_{k=1}^{N} \Big(\Im[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J}\mathbf{S}]\, \mathrm{sgn}\{\Re(f_k)\} - \Im[j\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J}\mathbf{S}]\, \mathrm{sgn}\{\Im(f_k)\} \Big) \tag{C-17}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \omega\, \partial \Im(B)} = \frac{1}{\sqrt{2} N_0} \sum_{k=1}^{N} \Big(\Re[\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J}\mathbf{S}]\, \mathrm{sgn}\{\Re(f_k)\} - \Re[j\mathbf{Z}_k^H \mathbf{J}\mathbf{S}]\, \mathrm{sgn}\{\Im(f_k)\} \Big) \tag{C-18}$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \Re(B)\, \partial \Im(B)} = 0 \tag{C-19}$$

Percebe-se que o valor esperado com relação ao vetor de observações $\mathbf{z}_k$ é imediato nas expressões (C-16) e (C-19). Para as expressões restantes, o seu cálculo segue um procedimento semelhante ao adotado na seção anterior. Antes, porém, é preciso realizar alguns comentários a respeito da fdp condicional do vetor $\mathbf{z}_k$. A Fig. C.1 ilustra esta função. Ela é formada pela média de quatro gaussianas centradas em $(\pm 1 \pm j)\mathbf{S}B\sqrt{2}/2$. Dois hiperplanos ortogonais dividem o espaço $\mathbf{Z}_k$ em quatro regiões. Nas duas regiões à direita do hiperplano $\Re(f_k) = 0$, o valor de $\text{sgn}\{\Re(f_k)\}$ será $+1$, enquanto que nas outras duas regiões à esquerda deste hiperplano, $\text{sgn}\{\Re(f_k)\} = -1$. O mesmo pode ser considerado para o hiperplano $\Im(f_k) = 0$. Para as duas regiões acima deste hiperplano, tem-se que $\text{sgn}\{\Im(f_k)\} = +1$ e, para as duas regiões abaixo do hiperplano $\Im(f_k) = 0$, obtém-se $\text{sgn}\{\Im(f_k)\} = -1$. Embora a dificuldade no cálculo dos valores esperados para este cenário aparente ser maior que no cenário anterior (BPSK), a simetria existente na fdp ilustrada na Fig. C.1 entre as partes real e imaginária de qualquer elemento de $\mathbf{Z}_k$ facilita todo o trabalho. Primeiramente, deve-se perceber de (C-4) que

$$\Im(f_k) = -\Re(jf_k) = \Re\Big[\frac{1}{\sqrt{2}N_0}(j\mathbf{Z}_k)^H\mathbf{S}B\Big]$$

ou seja, ao se efetuar a rotação $\mathbf{Y}_k = j\mathbf{Z}_k$, o termo $\Im(f_k)$ do espaço $\mathbf{Z}_k$ passa a ser o termo $\Re(f_k)$ no espaço $\mathbf{Y}_k$. Como esta rotação não altera a fdp condicional, isto é,

$$p_{\mathbf{z}_k|\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{Z}_k) = p_{\mathbf{y}_k|\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{Y}_k)$$

e observando que

$$\begin{aligned}
\Im[\mathbf{Z}_k^H\mathbf{J}^2\mathbf{S}B] = -\Re[j\mathbf{Z}_k^H\mathbf{J}^2\mathbf{S}B] &= \Re[(j\mathbf{Z}_k)^H\mathbf{J}^2\mathbf{S}B] \\
-\Im[j\mathbf{Z}_k^H\mathbf{J}\mathbf{S}] &= \Im[(j\mathbf{Z}_k)^H\mathbf{J}\mathbf{S}] \\
-\Re[j\mathbf{Z}_k^H\mathbf{J}\mathbf{S}] &= \Re[(j\mathbf{Z}_k)^H\mathbf{J}\mathbf{S}]
\end{aligned}$$

tem-se que o valor esperado de (C-15), (C-17) e (C-18) pode ser escrito como

$$E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\omega^2}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = \frac{\sqrt{2}}{N_0}\sum_{k=1}^{N} E\Big[\Re[\mathbf{z}_k^H\mathbf{J}^2\mathbf{S}B]\,\text{sgn}\{\Re(f_k)\}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] \tag{C-20}$$

$$E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\omega\,\partial\Re(B)}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = \frac{\sqrt{2}}{N_0}\sum_{k=1}^{N} E\Big[\Im[\mathbf{z}_k^H\mathbf{J}\mathbf{S}]\,\text{sgn}\{\Re(f_k)\}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] \tag{C-21}$$

$$E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\omega\,\partial\Im(B)}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = \frac{\sqrt{2}}{N_0}\sum_{k=1}^{N} E\Big[\Re[\mathbf{z}_k^H\mathbf{J}\mathbf{S}]\,\mathrm{sgn}\{\Re(f_k)\}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] \tag{C-22}$$

e os termos $\Re[\mathbf{z}_k^H\mathbf{J}^2\mathbf{S}B]$ em (C-20), $\Im[\mathbf{z}_k^H\mathbf{J}\mathbf{S}]$ em (C-21) e $\Re[\mathbf{z}_k^H\mathbf{J}\mathbf{S}]$ em (C-22) são funções lineares escalares ímpares de $\mathbf{z}_k$ e podem, portanto, ser representados como $g(\mathbf{z}_k)$, da mesma forma como feito para o sistema BPSK. Assim, é preciso apenas calcular $E\Big[g(\mathbf{z}_k)\cdot\mathrm{sgn}\{\Re(f_k)\}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big]$ para resolver (C-20)–(C-22).

Definindo algebricamente a fdp condicional de $\mathbf{z}_k$ como

$$p_{\mathbf{z}_k|\boldsymbol{\varphi}}(\mathbf{Z}_k) = \frac{1}{(2\pi N_0)^m}\cdot\frac{1}{4}\sum_{\ell=1}^{4}\lambda^{(\ell)} \tag{C-23}$$

onde

$$\begin{aligned}
\lambda^{(1)} &= \exp\Big\{-\frac{1}{2N_0}\|\mathbf{Z}_k - \mathbf{S}B\frac{\sqrt{2}}{2} - j\mathbf{S}B\frac{\sqrt{2}}{2}\|^2\Big\}\\
\lambda^{(2)} &= \exp\Big\{-\frac{1}{2N_0}\|\mathbf{Z}_k - \mathbf{S}B\frac{\sqrt{2}}{2} + j\mathbf{S}B\frac{\sqrt{2}}{2}\|^2\Big\}\\
\lambda^{(3)} &= \exp\Big\{-\frac{1}{2N_0}\|\mathbf{Z}_k + \mathbf{S}B\frac{\sqrt{2}}{2} - j\mathbf{S}B\frac{\sqrt{2}}{2}\|^2\Big\}\\
\lambda^{(4)} &= \exp\Big\{-\frac{1}{2N_0}\|\mathbf{Z}_k + \mathbf{S}B\frac{\sqrt{2}}{2} + j\mathbf{S}B\frac{\sqrt{2}}{2}\|^2\Big\}
\end{aligned}$$

tem-se então que

$$E\Big[g(\mathbf{z}_k)\cdot\mathrm{sgn}\{\Re(f_k)\}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = \frac{1}{4}\Big(I_1 - I_2 + I_3 - I_4 + I_5 - I_6 + I_7 - I_8\Big) \tag{C-24}$$

onde I_1, I_3, I_5 e I_7 representam respectivamente as integrais do produto de $g(\mathbf{Z}_k)/(2\pi N_0)^m$ com $\lambda^{(1)}$, $\lambda^{(2)}$, $\lambda^{(3)}$ e $\lambda^{(4)}$ na região à direita do hiperplano $\Re(f_k) = 0$, enquanto que I_2, I_4, I_6 e I_8 representam a integral dos mesmos produtos, porém na região à esquerda do hiperplano $\Re(f_k) = 0$. Pode-se perceber na Fig. C.1 que os valores de I_5, I_6, I_7 e I_8 são o oposto de I_4, I_3, I_2 e I_1, respectivamente. Assim,

$$\begin{aligned}
E\Big[g(\mathbf{z}_k)\cdot\mathrm{sgn}\{\Re(f_k)\}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] &= \frac{1}{2}\Big(I_1 - I_2 + I_3 - I_4\Big) =\\
&= \frac{I_1+I_2}{2} + \frac{I_3+I_4}{2} - I_2 - I_4 = \frac{\sqrt{2}}{2}\,g(\mathbf{S}B) - I_2 - I_4
\end{aligned} \tag{C-25}$$

onde, mais explicitamente,

$$I_2 = \int_{D_{\mathbf{Z}_k}|\Re(f_k)<0} g(\mathbf{Z}_k)\frac{1}{(2\pi N_0)^m}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}\|\mathbf{Z}_k - \mathbf{S}B\frac{\sqrt{2}}{2} - j\mathbf{S}B\frac{\sqrt{2}}{2}\|^2}\mathrm{d}\mathbf{Z}$$
$$I_4 = \int_{D_{\mathbf{Z}_k}|\Re(f_k)<0} g(\mathbf{Z}_k)\frac{1}{(2\pi N_0)^m}\ \mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}\|\mathbf{Z}_k - \mathbf{S}B\frac{\sqrt{2}}{2} + j\mathbf{S}B\frac{\sqrt{2}}{2}\|^2}\mathrm{d}\mathbf{Z}$$

com $\mathrm{d}\mathbf{Z} = \mathrm{d}\Re(Z_1)\,\mathrm{d}\Im(Z_1)\,\mathrm{d}\Re(Z_2)\cdots\mathrm{d}\Im(Z_m)$ e $D_{\mathbf{Z}_k}$ representando o domínio complexo m-dimensional do vetor de observações $\mathbf{Z}_k$. Para resolver I_2 e I_4, deve-se efetuar a mesma rotação no espaço $\mathbf{Z}_k$ realizada em (B-24), que será repetida a seguir por conveniência.

$$\mathbf{Y}_k = \mathbf{P}\cdot\mathbf{Z}_k \qquad \rightleftharpoons \qquad \mathbf{Z}_k = \mathbf{P}^H\cdot\mathbf{Y}_k$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix}\mathbf{P}_1\\ \mathbf{P}_r\end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l}\mathbf{P}_1 = m^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-j\theta}\,\mathbf{S}^H\\ \mathbf{P}_r \text{ é tal que } \mathbf{P}_r\mathbf{S}B = \mathbf{0}\end{array} \tag{C-26}$$

onde $\mathbf{P}_1$ representa a primeira linha da matriz de rotação $\mathbf{P}$ e $\mathbf{P}_r$ inclui as linhas restantes. O primeiro elemento do vetor $\mathbf{Y}_k$, Y_1, pode ser expresso por

$$\mathbf{Y}_k = \begin{pmatrix}Y_1\\ \mathbf{Y}_r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbf{P}_1\mathbf{Z}_k\\ \mathbf{P}_r\mathbf{Z}_k\end{pmatrix} \tag{C-27}$$

enquanto que $\mathbf{Z}_k$ é dado por

$$\mathbf{Z}_k = \mathbf{P}^H\cdot\mathbf{Y}_k = \mathbf{P}_1^H\cdot Y_1 + \mathbf{P}_r^H\cdot\mathbf{Y}_r \tag{C-28}$$

O elemento diferencial $\mathrm{d}\mathbf{Y}$ é igual a $\mathrm{d}\mathbf{Z}$ porque a matriz $\mathbf{P}$ é ortonormal. Lembrando que

$$\|\mathbf{Z}_k - \mathbf{S}B\mathrm{e}^{j\phi}\|^2 = \|\mathbf{P}^H(\mathbf{Y}_k - \mathbf{P}\mathbf{S}B\mathrm{e}^{j\phi})\|^2 = \|\mathbf{Y}_k - \mathbf{P}\mathbf{S}B\mathrm{e}^{j\phi}\|^2 \tag{C-29}$$

e utilizando um desenvolvimento semelhante ao utilizado de (B-28) a (B-30), chega-se a

$$I_2 = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{P}_1^H Y_1)\frac{1}{2\pi N_0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}|Y_1 - A\sqrt{\frac{m}{2}} - jA\sqrt{\frac{m}{2}}|^2}\mathrm{d}\Im(Y_1)\Re(Y_1) \tag{C-30}$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty} g(\mathbf{P}_1^H Y_1)\frac{1}{2\pi N_0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}|Y_1 - A\sqrt{\frac{m}{2}} + jA\sqrt{\frac{m}{2}}|^2}\mathrm{d}\Im(Y_1)\Re(Y_1) \tag{C-31}$$

Como $Y_1 = \Re(Y_1) + j\Im(Y_1)$, pode-se decompor cada uma das integrais acima na soma de outras duas. No cenário BPSK, a integral que apresentava o termo $g(j\mathbf{P}_1^H \Im(Y_1))$ era nula, pois a média da gaussiana apresentava apenas parte real. Isto não ocorre em (C-30) e (C-31), já que o termo que subtrai Y_1 nas exponenciais é complexo. Sendo g uma função linear e $\Re(Y_1)$ e $\Im(Y_1)$ dois escalares reais, e utilizando o desenvolvimento de (B-31) em (B-32), tem-se que

$$I_2 = g(\mathbf{P}_1^H)\int_{-\infty}^{0} \Re(Y_1)\frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}[\Re(Y_1)-A\sqrt{\frac{m}{2}}]^2}\mathrm{d}\Re(Y_1) + g(j\mathbf{P}_1^H)$$
$$\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty} \Im(Y_1)\frac{1}{2\pi N_0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}[\Re(Y_1)-A\sqrt{\frac{m}{2}}]^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}[\Im(Y_1)-A\sqrt{\frac{m}{2}}]^2}\mathrm{d}\Im(Y_1)\Re(Y_1) =$$
$$= -g(\mathbf{P}_1^H)\sqrt{\frac{N_0}{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{4N_0}} + \Big[g(\mathbf{P}_1^H) + g(j\mathbf{P}_1^H)\Big]A\sqrt{\frac{m}{2}}\;\mathrm{Q}\Big(\sqrt{\frac{mA^2}{2N_0}}\Big) \quad \text{(C-32)}$$

$$I_4 = g(\mathbf{P}_1^H)\int_{-\infty}^{0} \Re(Y_1)\frac{1}{\sqrt{2\pi N_0}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}[\Re(Y_1)-A\sqrt{\frac{m}{2}}]^2}\mathrm{d}\Re(Y_1) + g(j\mathbf{P}_1^H)$$
$$\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{\infty} \Im(Y_1)\frac{1}{2\pi N_0}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}[\Re(Y_1)-A\sqrt{\frac{m}{2}}]^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2N_0}[\Im(Y_1)+A\sqrt{\frac{m}{2}}]^2}\mathrm{d}\Im(Y_1)\Re(Y_1) =$$
$$= -g(\mathbf{P}_1^H)\sqrt{\frac{N_0}{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{4N_0}} + \Big[g(\mathbf{P}_1^H) - g(j\mathbf{P}_1^H)\Big]A\sqrt{\frac{m}{2}}\;\mathrm{Q}\Big(\sqrt{\frac{mA^2}{2N_0}}\Big) \quad \text{(C-33)}$$

onde

$$\mathrm{Q}(x) = \int_{x}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\mathrm{d}u \quad \text{(C-34)}$$

Logo, a soma das duas integrais calculadas em (C-32) e (C-33) será

$$I_2 + I_4 = g(\mathbf{P}_1^H)\Big[-2\sqrt{\frac{N_0}{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{4N_0}} + 2A\sqrt{\frac{m}{2}}\;\mathrm{Q}\Big(\sqrt{\frac{mA^2}{2N_0}}\Big)\Big] =$$
$$= \underbrace{g(\mathbf{P}_1^H)A\sqrt{\frac{m}{2}}}_{g(\mathbf{S}B)\frac{\sqrt{2}}{2}}\Big[-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{N_0}{mA^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{4N_0}} + 2\,\mathrm{Q}\Big(\sqrt{\frac{mA^2}{2N_0}}\Big)\Big] \quad \text{(C-35)}$$

Assim, tem-se de (C-25) que

$$E\Big[g(\mathbf{z}_k)\cdot \mathrm{sgn}\{f_k\}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] =$$
$$= g(\mathbf{S}B)\frac{\sqrt{2}}{2}\Big\{1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\frac{2N_0}{mA^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{mA^2}{4N_0}} - 2\,\mathrm{Q}\Big(\sqrt{\frac{mA^2}{2N_0}}\Big)\Big\} \approx g(\mathbf{S}B) \quad \text{(C-36)}$$

e o valor esperado das derivadas de segunda ordem é

$$E\Big[\frac{\partial^2\mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial\omega^2}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = \frac{NA^2}{N_0}\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}^2\} \quad \text{(C-37)}$$

$$E\Big[\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \Re(B)^2}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = E\Big[\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \Im(B)^2}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = \frac{mN}{N_0} \tag{C-38}$$

$$E\Big[\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \omega\, \partial \Re(B)}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = -\frac{NA}{N_0}\,\mathrm{sen}(\theta)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\} \tag{C-39}$$

$$E\Big[\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \omega\, \partial \Im(B)}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = \frac{NA}{N_0}\cos(\theta)\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\} \tag{C-40}$$

$$E\Big[\frac{\partial^2 \mathcal{L}(\boldsymbol{\varphi})}{\partial \Re(B)\, \partial \Im(B)}\Big|\boldsymbol{\varphi}\Big] = 0 \tag{C-41}$$

Comparando as expressões (C-37)–(C-41) com as obtidas para o estimador BPSK em (B-35)–(B-39), percebe-se que o limitante de Cramér-Rao para o cenário de uma portadora QPSK é idêntico ao obtido em (B-42) para o parâmetro ω e em (B-55) para a DOA ψ. Assim,

$$\mathrm{LCR}_\omega = \frac{N_0}{NA^2} \cdot \frac{m}{m\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}^2\} - \mathrm{tr}\{\mathbf{J}\}^2} \tag{C-42}$$

$$\mathrm{LCR}_\psi = \frac{8N_0}{NA^2} \cdot \frac{m}{(4\pi^2 + 3\sqrt{3}\pi)m\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}^2\} - 54\,\mathrm{tr}\{\mathbf{J}\}^2} \tag{C-43}$$

onde ψ é dado em radianos. O limitante de Cramér-Rao para ψ em graus é obtido ao multiplicar o resultado em (C-43) por $180^2/\pi^2$, conforme apresentado na seção anterior.