

8

ALOCAÇÃO PELO MÉTODO AUMANN-SHAPLEY (AS)

Neste capítulo será apresentado o quinto método de alocação estudado nesta monografia: o Método Aumann-Shapley (AS).

Este capítulo é dividido em três partes. A primeira apresenta o método de benefícios incrementais. Este método atribui a cada agente o benefício incremental gerado por sua entrada na coalizão. Mostra-se que este método sofre total influência da ordem de entrada dos agentes, uma vez em que é calculado a medida que os agentes vão entrando na grande coalizão.

Na segunda parte é introduzido o método de Shapley (ou valor de Shapley), que foi o método que deu origem ao método AS. O método de Shapley resolve o problema do efeito da ordem de entrada do agente alocando a cada um deles a média das alocações incrementais para todas as permutações possíveis na ordem de entrada. Mostra-se que este método pode se tornar computacionalmente inviável, visto o grande número de permutações possíveis da ordem de entrada dos agentes. Mostra-se também que este método não apresenta isonomia em relação aos tamanhos de agentes do mesmo tipo, o que faz com que os maiores sejam menos sensíveis à ordem de entrada, e por isso sejam beneficiados.

A terceira e última parte deste capítulo apresenta o método AS, que resolve os problemas citados acima. Demonstra-se também que este método, para o caso da energia firme, fornece uma alocação que pertence ao núcleo do jogo.

O anexo D é um capítulo auxiliar a este. Nele encontra-se um exemplo através do qual são apresentadas algumas características dos métodos abordados neste capítulo. Além disso, contém uma interpretação intuitiva para o desenvolvimento do método AS a partir do método de Shapley.

8.1.**Método por Benefício Incremental**

Este primeiro método aloca a cada usina a diferença entre os benefícios à medida que os agentes são adicionados sucessivamente ao sistema. Portanto aloca-se a cada agente a *diferença* entre o benefício do conjunto quando a usina entra, e benefício total anterior, sem ela no sistema.

Por exemplo, supondo uma ordem de entrada 1-2-3, o método por benefício incremental alocaria a cada agente:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \Delta_1 = f(1) \\ \phi_2 &= \Delta_2 = f(1,2) - f(1) \\ \phi_3 &= \Delta_3 = f(1,2,3) - f(1,2)\end{aligned}\tag{8.1}$$

A questão que surge imediatamente é o porquê da ordem 1-2-3, e não, por exemplo, 3-1-2, ou qualquer outra permutação. No caso da energia firme, por exemplo, o incremento de uma usina em geral é diferente quando ela entra nas últimas posições que quando entra nas primeiras. Portanto, todas as usinas sempre “brigariam” para estar nas posições da ordenação que mais lhe favorecessem.

O efeito da ordem de entrada está apresentado, através de um exemplo, na seção 15.1 do anexo D.

8.2.**Método de Shapley**

O esquema proposto por Shapley [79] resolve o problema do efeito da ordem de entrada dos agentes apresentado pelo método do benefício incremental. Este método aloca a cada agente a *média* das alocações incrementais para todas as permutações possíveis nas ordens de entrada. Em outras palavras, o benefício de cada agente no critério de Shapley seria calculado pela média dos incrementos quando o agente é o primeiro a entrar, o segundo, terceiro e assim por diante.

Este método pode ser considerado uma generalização do método por última adição, pois nele o incremento de energia firme é calculado, não somente com a usina entrando na última posição, mas sim em todas as posições possíveis.

O método de Shapley (ou valor de Shapley) pode ser interpretado com sendo o valor médio dos benefícios incrementais de inclusão do agente, levando em conta todas as sub-coalizes que não contêm este determinado agente, inclusive a sub-coalizio vazia. Supondo-se que a probabilidade de ocorrência de sub-coalizes de diversos tamanhos seja igual, a alocação de Shapley é definida formalmente através da seguinte expressão analítica:

$$\Phi_i = \sum_{\forall S \subseteq N | i \in S} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} [F(S) - F(S - \{i\})], \quad i \in N \quad (8.5)$$

onde:

I	indexa as usinas
N	grande coalizio
S	sub-coalizio
N	número de elementos de N
S	número de elementos de S
$F(.)$	função característica para cálculo da energia firme

O valor de Shapley leva a resultados plausíveis e é intuitivamente considerado “justo” pelos agentes, pois todos têm igual oportunidade de estar nas melhores e piores posições. Entretanto, como os benefícios incrementais de todas as permutações possíveis da ordem de entrada devem ser calculados, este método se torna computacionalmente inviável. O número total de permutações, para um caso com n agentes, é igual a $n!$. Para um caso de 40 agentes, por exemplo, há cerca 10^{47} (ou $40!$) permutações possíveis.

Outro problema constatado na alocação Shapley é a “não-isonomia” com relação ao tamanho de agentes, isto é, agentes maiores são menos sensíveis à ordem de entrada que

agentes menores, e por isso são beneficiados. Esta característica está exemplificada na seção 15.2 do anexo D.

8.3.

Método Aumann-Shapley (AS)

Foi mostrado que a primeira dificuldade para a aplicação do valor de Shapley a sistemas realistas é de cunho computacional, pois o número de permutações cresce muito rapidamente a medida que cresce o número de agentes. Além disto, foi observado que a alocação de benefícios “por unidade” para recursos de iguais características, mas de tamanhos diferentes, poderia ser desigual, devido ao problema da “não-isonomia” exemplificado na seção 15.2 do anexo D.

Um desenvolvimento posterior, chamado de alocação Aumann-Shapley[5], permitiu que se resolvessem estes problemas. O método surgiu da idéia de “dividir” os recursos de cada agente em vários segmentos, e aplicar o esquema de Shapley como se cada segmento fosse um agente individual. Por exemplo, para o caso da energia firme, se cada usina fosse dividida em dois segmentos, uma ordem de entrada poderia ser $\{H_3(1), H_2(1), H_1(1), H_1(2), H_3(2), H_2(2)\}$.

À primeira vista, as dificuldades computacionais seriam ainda maiores, pois o número de agentes e, portanto, de permutações aumentaria consideravelmente. Entretanto, como é mostrado na seção 15.3 do anexo D, o método AS permite que o problema tenha uma solução analítica se cada agente for dividido em partes infinitesimais.

8.3.1.

Formulação

A alocação AS (resultante da solução analítica do problema mencionado na seção anterior) é obtida a partir do cálculo da seguinte integral para cada agente:

$$\phi_i = b_i \times \int_0^1 \frac{\partial f(\lambda b)}{\partial b_i} d\lambda \quad (8.10)$$

onde:

λ é o parâmetro de integração;

b_i é o vetor de recursos aportados pelo agente i .

$f(\cdot)$ é a função que calcula o benefício a ser repartido

Para mostrar que a alocação AS recupera o firme total suponha que há dois agentes, temos que:

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 &= b_1 \times \int_0^1 \frac{\partial f(\lambda b)}{db_1} d\lambda + b_2 \times \int_0^1 \frac{\partial f(\lambda b)}{db_2} d\lambda \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial f(\lambda b)}{db_1} b_1 \right) d\lambda + \int_0^1 \left(\frac{\partial f(\lambda b)}{db_2} b_2 \right) d\lambda = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{\partial f(\lambda b)}{db_1} b_1 + \frac{\partial f(\lambda b)}{db_2} b_2 \right) d\lambda = \\ &= f(b_1, b_2) \end{aligned}$$

Pela expressão (8.10) nota-se que as alocações AS correspondem à média dos benefícios marginais dos recursos quando eles crescem uniformemente de zero até seus valores correntes. Esta integral pode ser calculada numericamente discretizando a variável λ no intervalo $[0, 1]$.

8.3.2.

Implementação do método AS

A seção 8.3.2.1 a seguir mostra a implementação do método AS para um caso geral em que o benefício é calculado a partir da solução de um problema de programação linear. A implementação para o caso da energia firme é feita em seguida, na seção 8.3.2.2.

8.3.2.1.**Caso Geral**

Suponha que para calcular o valor da integral (8.10) o parâmetro escalar λ é discretizado em K valores no intervalo $[0,1]$, indexados por $k = 1, \dots, K$. Para cada valor λ_k , tem-se o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned}
 z(\lambda_k) = \text{Max} \quad & cx && \text{var. dual.} \\
 & \text{sujeito a} && (8.11) \\
 & [A_i]x \leq b_i \lambda_k && \pi_{ik} \\
 & \text{para } i = 1, \dots, I
 \end{aligned}$$

onde:

c vetor n -dimensional de benefícios (por exemplo, energia firme)

x vetor n -dimensional de variáveis de decisão

$[A_i]$ i -ésima linha da matriz A ($m \times n$)

b_i i -ésimo recurso

Se o número de discretizações K for grande suficiente, os valores das variáveis duais não variam de uma discretização para outra, ou seja, $\pi_{ik} = \pi_{i(k-1)}$. Neste caso temos:

$$\Delta z = z(\lambda_k) - z(\lambda_{k-1}) = \sum_{i=1}^I (\pi_{ik} b_i \lambda_k - \pi_{i(k-1)} b_i \lambda_{(k-1)}) = \sum_{i=1}^I \pi_{ik} \Delta b_{ik} = \sum_{i=1}^I \pi_{ik} b_i (\lambda_k - \lambda_{k-1})$$

(8.12)

Se para cada discretização, o valor Δz é ponderado entre as usinas, de forma que cada uma recebe $\pi_{ik} \Delta b_{ik}$, o benefício total atribuído a cada recurso b_i é, portanto:

$$\phi_i = \sum_{k=1}^K \pi_{ik} \Delta b_{ik} \quad \text{para } i = 1, \dots, I$$

(8.13)

8.3.2.2.

Cálculo da energia firme

No cálculo da energia firme, cada agente i dispõe de dois recursos: a capacidade de armazenamento \bar{v}_i , e a capacidade de turbinamento \bar{u}_i , os quais serão parametrizados na integral de Almann-Shapley. O cálculo de $z(\lambda_k)$ é dado por:

$$z(\lambda_k) = \text{Max } F \quad \text{var. dual} \quad (8.14a)$$

sujeito a

$$v_{t+1,i} - v_{t,i} + \sum_{m \in M_i} [u_{t,m} + w_{t,m}] + u_{t,i} + w_{t,i} = a_{t,i} \quad \pi_{atik} \quad (8.14b)$$

$$v_{t,i} \leq \bar{v}_i \times \lambda_k \quad \pi_{vtik} \quad (8.14c)$$

$$u_{t,i} \leq \bar{u}_i \times \lambda_k \quad \pi_{utik} \quad (8.14d)$$

$$F - \sum_{i=1}^I u_{t,i} \times \rho_i \leq 0 \quad \pi_{Ftik} \quad (8.14g)$$

para $t = 1, \dots, T$; para $i = 1, \dots, I$

Sabemos a que a função objetivo do dual do problema (8.14) é:

$$\sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^I [(\pi_{atik} \times a_{t,i}) + (\pi_{vtik} \times \bar{v}_i \times \lambda_k) + (\pi_{utik} \times \bar{u}_i \times \lambda_k)] \quad (8.15)$$

Novamente, se o número total de discretizações K usado for grande suficiente, os valores das variáveis duais não variam de uma discretização para outra ($\pi_{atik} \cong \pi_{ati(k-1)}$, $\pi_{vtik} \cong \pi_{vti(k-1)}$, $\pi_{utik} \cong \pi_{uti(k-1)}$), portanto temos que:

$$\sum_{i=1}^I (\pi_{atik} \times a_{t,i}) - \sum_{i=1}^I (\pi_{ati(k-1)} \times a_{t,i}) = 0, \text{ para todo } k, \text{ para todo } t \quad (8.16)$$

A alocação final de cada agente corresponde, portanto, a:

$$\phi_i = \sum_{k=1}^K \sum_{t=1}^T [(\pi_{vtik} \Delta \bar{v}_{ik}) + (\pi_{utik} \Delta \bar{u}_{ik})] \quad \text{para } i = 1, \dots, I \quad (8.17)$$

onde $\Delta \bar{v}_{ik} = \bar{v}_i(\lambda_k - \lambda_{k-1})$ e $\Delta \bar{u}_{ik} = \bar{u}_i(\lambda_k - \lambda_{k-1})$

Note através da equação (8.16) que as parcelas referentes ao “recurso” $a_{t,i}$ (vazões incrementais) se cancelam, e, portanto, não é preciso arbitrar a quem pertence o recurso “água”, diferente do que ocorre no método BM.

8.4.

Alocação no Núcleo

Embora, como comentado, o esquema de Aumann-Shapley seja intuitivamente “justo”, para muitos tipos de problemas é possível construir contra-exemplos onde a alocação resultante não atende às restrições do núcleo; em outras palavras, haveria neste caso um ou mais subconjuntos que estariam prejudicados por pertencer ao “consórcio” global.

Porém, especificamente para o problema de alocação de energia firme, é possível provar que a alocação de Aumann-Shapley está no núcleo.

Suponha que o modelo de cálculo de energia firme é formulado como o seguinte modelo de programação linear:

$$\begin{aligned} \text{Max } cx & & (8.18) \\ \text{s.a.} & \\ [A_i]x \leq b_i & \\ \text{para } i = 1, \dots, m & \end{aligned}$$

onde:

- c vetor n-dimensional de benefícios
- x vetor n-dimensional de variáveis de decisão
- $[A_i]$ linhas da matriz A associadas à i-ésimo usina
- b_i i-ésimo sub-vetor de b correspondente à i-ésima usina.

A energia firme associada a um subconjunto de Ω de usinas, quando consideradas isoladamente, é:

$$\text{Max } cx \quad (8.19)$$

s.a.

$$[A_i]x \leq h_i$$

para $i = 1, \dots, m$

onde:

$h_i = b_i$, para $i \in \Omega$ e $h_i = 0$, caso contrário.

A alocação de Aumann-Shapley é dada por:

$$\phi_i = \left(\int_0^1 \pi_i(t) dt \right) b_i \quad i = 1, \dots, m \quad (8.20)$$

onde:

$\pi_i(t)$ sub-vetor de multiplicadores ótimo associado à usina i do problema:

$$\text{Max } cx \quad (8.21)$$

s.a.

$$[A_i]x \leq tb_i$$

para $i = 1, \dots, m$, $0 \leq t \leq 1$

Seja δ_Ω o vetor multiplicador ótimo associado ao problema (8.19). Então pela igualdade primal dual a energia firme associada ao subconjunto de usinas Ω é

$$\sum_{i=1}^m \delta_{\Omega 1} h_i = \sum_{i \in \Omega} \delta_{\Omega 1} b_i \quad (8.22)$$

por definição de h_i .

Observe que δ_Ω é solução ótima de:

$$\text{Min } \sum_{i=1}^m \delta_i h_i \quad (8.23)$$

s.a.

$$\sum_{i=1}^m \delta_i^t A_i \geq c \quad (8.24)$$

Por outro lado, note que $\{\pi_i(t), i=1,\dots,m\}$ é dual viável de (8.19) (viável para o problema (8.23)), já que (8.19) e (8.21) somente diferem entre si pelo lado direito das restrições. Logo,

$$\sum_{i=1}^m \pi_i(t) h_i \geq \sum_{i=1}^m \delta_i h_i \quad (8.25)$$

ou,

$$\sum_{i \in \Omega} \pi_i(t) b_i \geq \sum_{i \in \Omega} \delta_i b_i \quad (8.26)$$

Integrando (8.26a) temos,

$$\sum_{i \in \Omega} \left(\int_0^1 \pi_i(t) dt \right) b_i \geq \sum_{i \in \Omega} \delta_i b_i \int_0^1 dt = \sum_{i \in \Omega} \delta_i b_i \quad (8.27)$$

ou,

$$\sum_{i \in \Omega} \phi_i \geq \sum_{i \in \Omega} \delta_i b_i = \text{energia firme associada ao subconjunto de usinas } \Omega \quad (8.28)$$

Portanto, a alocação de Aumann-Shapley associada ao subconjunto de usinas Ω é maior ou igual à energia firme associada a elas usinas quando consideradas isoladamente. Provou-se com isso que esta alocação pertence ao núcleo do jogo.

8.5.

Vantagens e Desvantagens do Método AS

O método de Aumann-Shapley mostra-se o mais adequado (dentre os analisados) para alocação de energia firme de um sistema hidrelétrico: é viável computacionalmente, origina-se de uma metodologia intuitiva (valor de Shapley), não há preocupação com a alocação do recurso “água” entre as usinas (conforme mostrado na seção 8.3.2.2) e, como foi demonstrado, fornece uma alocação que pertence ao “núcleo” do jogo cooperativo, o que garante que a alocação obtida é “justa”.

Outra vantagem do método AS é a robustez em relação ao tamanho dos recursos. Pequenas variações do volume ou turbinamento máximos de uma usina nunca geram bruscas variações na alocação AS (o que ocorre no método BM). O fato de a alocação AS

ser média dos benefícios marginais dos recursos quando eles crescem uniformemente de zero até seus valores correntes, mesmo que uma usina tenha algum recurso em “excesso”, em grande parte das discretizações o método creditará benefício a ela. Este método também pode ser considerado economicamente eficiente na medida em que, além de creditar benefício pelos benefícios marginais do turbinamento, também considera os benefícios gerados pelos reservatórios das usinas.