7
ALOCAÇÃO PELO MÉTODO DO "NUCLEOLUS"

O quarto método abordado nesta monografia é o método do "nucleolus"[44]. Este método, diferentemente da alocação por Última Adição, garante que a alocação obtida pertence ao núcleo do jogo, se este não for vazio.

Provou-se na seção 5.3, que para o problema da energia firme, o núcleo do jogo nunca é vazio. Porém, dado que mais de uma alocação pode estar no núcleo, deve-se distinguir dentre elas qual a mais adequada. Este problema, que será discutido neste capítulo, é resolvido pelo método do "nucleolus", que fornece uma solução que pertence ao núcleo e é única.

7.1.
Definição do "Nucleolus"

Como já foi mencionado, o conjunto de restrições lineares que definem o núcleo pode conter um número infinito de soluções viáveis e, portanto, um número infinito de alocações de benefícios consideradas "justas". Isto leva à questão se é possível identificar uma alocação que seja preferível.

Suponha, por exemplo, que foi escolhida uma alocação no núcleo $\{\phi_1^p;\phi_2^p;\phi_3^p\}$, através de algum critério. Suponha agora que um subconjunto de agentes, por exemplo, os agentes 1 e 3, propõem uma alocação alternativa $\{\phi_1^q;\phi_2^q;\phi_3^q\}$, também núcleo, mas que leva a uma maior alocação para este conjunto, isto é:

$$\phi_1^q + \phi_3^q > \phi_1^p + \phi_3^p \qquad (7.1)$$

Esta nova alocação proposta *diminui* a alocação total do outro agente, no caso, o agente 2:

$$\phi_2^q < \phi_2^p \qquad (7.2)$$

Neste caso, o agente 2 vai preferir a alocação original, e não concorda com a proposta do subconjunto {1, 3}.

O método do “nucleolus” resolve este tipo de problema fornecendo uma alocação através da maximização lexicográfica (conforme explicado a diante) da menor “vantagem” que cada subconjunto tem por pertencer ao “consórcio”, comparado com o que o mesmo subconjunto receberia fora do consórcio. Este método, além de forçar que a alocação esteja no núcleo, faz com que a alocação obtida seja única [44].

Existe uma relação interessante entre o método de "nucleolus" e a Teoria de Justiça proposta pelo jurista John Rawls [72]. O conceito de Rawls é que a maneira mais justa de construir uma sociedade é solicitar a seus participantes que formulem livremente suas propostas de organização social. Entretanto, o *papel* que cada participante terá nesta sociedade será *sorteado aleatoriamente*. Com isto, todos os participantes convergem para uma sociedade que minimiza a máxima desvantagem, isto é, que proteja o menos favorecido o máximo possível. Este critério é muito parecido com o nucleolus, e tem atraído o interesse de economistas como Kenneth Arrow (prêmio Nobel)[85] e H.P.Young[44], que trabalham em temas ligados à equidade e critérios de votação.

7.2.
Descrição do Método do “Nucleolus”

O método do “Nucleolus” é calculado com a resolução de uma seqüência de subproblemas de programação linear. O primeiro problema a ser resolvido é mostrado abaixo para um caso com três agentes, onde δ e os ϕ’s são variáveis, e os $f(.)$’s são constantes:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max} \quad \delta \\
&\text{sujeito a} \\
&\qquad \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = f(H_1,H_2,H_3) \\
&\qquad \delta \le \phi_1 - f(H_1) \\
&\qquad \delta \le \phi_2 - f(H_2) \\
&\qquad \delta \le \phi_3 - f(H_3) \\
&\qquad \delta \le \phi_1 + \phi_2 - f(H_1,H_2) \\
&\qquad \delta \le \phi_1 + \phi_3 - f(H_1,H_3) \\
&\qquad \delta \le \phi_2 + \phi_3 - f(H_2,H_3) \\
&\qquad \delta \ge 0
\end{aligned}
\tag{7.3}
$$

Observa-se que os lados direitos das desigualdades representam a “vantagem” que cada subconjunto tem por pertencer ao “consórcio”, comparado com o que mesmo o subconjunto receberia fora do consórcio. Por exemplo, a diferença $\phi_1 + \phi_3 - f(H_1,H_3)$ representa o adicional de firme alocado ao subconjunto $\{H_1,H_3\}$ com relação ao firme que o mesmo teria se estivesse isolado, $f(H_1,H_3)$.

O escalar δ no problema representa, portanto, a maximização da menor vantagem. A restrição $\delta \ge 0$ garante que a “vantagem” seja não-negativa para qualquer subconjunto, o que corresponde a pertencer ao núcleo do jogo.

Note que se o procedimento fosse apenas resolver este primeiro problema, ainda assim poderia haver duas alocações diferentes e ambas com as menores “vantagens” iguais. Portanto, para que a alocação do método seja única, deve haver um critério para decidir qual das duas escolher. Isto é feito através da maximização lexicográfica das “vantagens” [44].

Esta maximização é feita da seguinte forma: suponha que todas as “vantagens” de cada coalizão são ordenadas, do menor pro maior, em um vetor $\theta(x)$ de dimensão $(2^n\text{-}2)$. O “Nucleolus” é a alocação x que maximiza $\theta(x)$ lexicograficamente caso a seguinte expressão seja satisfeita: se y é qualquer outra alocação e k é o primeiro índice tal que $\theta_k(x) \neq \theta_k(y)$, então $\theta(x) > \theta_k(y)$ [77].

Outra forma de se entender a ordem lexicográfica entre alocações é fazer analogia com a ordenação das palavras em um dicionário. Esta ordem se baseia na ordenação das menores “vantagens”, da mesma forma que a ordem das palavras em um dicionário se baseia na ordenação das letras no alfabeto. Para comparar duas alocações x e y, por exemplo, procura-se a primeira posição, digamos k, em que as duas alocações diferem. Se $\theta_k(x) > \theta_k(y)$, então x é lexicograficamente maior que y.

Quando se resolve o primeiro problema (7.3), acha-se uma alocação cuja menor “vantagem” de todas é maximizada. Porém, o vetor ordenado de todas as “vantagens” ainda pode não estar maximizado lexicograficamente.

O próximo problema a ser resolvido é o mesmo (7.3), só que agora se fixa a restrição, ou o conjunto de restrições, que tenham atingido a igualdade no último problema resolvido[20], ou seja, troca-se o “<” por “=” e troca-se a variável delta pelo valor obtido para ela no problema anterior. O método pára quando se chega em uma solução única, ou seja, quando o numero de restrições atendidas por igualdade for igual ao numero de variáveis. A alocação obtida dessa forma, chamada de “nucleolus”, sempre existe, é única e pertence ao núcleo do jogo, quando este não é vazio [44].

7.3. Definição do “Nucleolus” Proporcional

Uma crítica feita ao “nucleolus” é fato de que a “vantagem” de cada subconjunto é calculada em termos absolutos, o que pode não ser adequado quando os benefícios têm tamanhos muito diferentes. Por exemplo, suponha a seguinte situação de alocação de energia firme:

$$\Delta(H_1,H_2) = \underset{\phi_1 + \phi_2}{2200} \quad - \underset{f(H_1,H_2)}{2000} = \quad 200$$

[20] Neste caso elas são as restrições das coalizões que apresentam a menor “vantagem”.

$$\Delta(H_3) = \underset{\phi_3}{22} \quad \underset{f(H_3)}{-10} = \quad 12$$

A vantagem do primeiro subconjunto é 200 MW médios e, portanto, superior em termos absolutos à vantagem do segundo, de “apenas” 12 MW.

Entretanto, em termos *relativos*, a situação se inverte: o primeiro subconjunto tem um ganho de 200/2000 = 10% em relação à situação fora do consórcio. Já o segundo subconjunto tem um ganho de 12/10 = 120% em relação à situação fora do consórcio.

O *“nucleolus” proporcional*, como o nome indica, é o ponto que maximiza lexicograficamente a mínima vantagem em termos *percentuais*, de tal forma que o primeiro problema a ser resolvido, novamente para um caso de 3 agentes, passa a ser:

Max δ

sujeito a

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = f(H_1,H_2,H_3)$$

$$\delta \le [\phi_1 - f(H_1)]/f(H_1)$$

$$\delta \le [\phi_2 - f(H_2)]/f(H_2)$$

$$\delta \le [\phi_3 - f(H_3)]/f(H_3) \qquad (7.4)$$

$$\delta \le [\phi_1 + \phi_2 - f(H_1,H_2)]/f(H_1,H_2)$$

$$\delta \le [\phi_1 + \phi_3 - f(H_1,H_3)]/f(H_1,H_3)$$

$$\delta \le [\phi_2 + \phi_3 - f(H_2,H_3)]/f(H_2,H_3)$$

$$\delta \ge 0$$

O método do “nucleolus” proporcional, por comparar “vantagens” relativas, é intuitivamente mais adequado que o método do “nucleolus”.

7.4.
Vantagens e desvantagens do método

A principal desvantagem, tanto do método do “nucleolus”, quanto do “nucleolus” proporcional, está na dificuldade de seu cálculo em situações realistas. O caráter combinatório das restrições, que crescem com 2^N (onde N é o número de agentes[21]) faz com que para um sistema com 40 agentes, por exemplo, haja cerca de um trilhão de restrições.

Para alguns problemas, a solução do “nucleolus” pode ser encontrada sem necessariamente se fazer o acréscimo de todas as restrições do problema. Isso já foi verificado, por exemplo, para jogos de redes capacitadas, como foi mostrado em [78]. Entretanto, tal solução ainda não existe para o problema da energia firme.

A vantagem de ambos os métodos, como já foi mencionado, é o fato de sempre fornecerem alocações no núcleo do jogo.

[21] Observe que o número de restrições é a soma de todas as combinações de N: 1 a 1, 2 a 2 etc. até N a N.