5
ALOCAÇÃO A BENEFÍCIOS MARGINAIS (BM)

Uma vez que a Energia Firme total de um Sistema hidrelétrico é calculada através de um problema de programação linear, uma maneira clássica de alocá-la entre as usinas seria através dos benefícios marginais (BM) de seus recursos[18]. Portanto, o segundo método de alocação de benefícios a ser analisado será o Método de Alocação Marginalista, ou Alocação a Benefícios Marginais (BM).

5.1.
Descrição do Método

O método BM aloca a energia firme total do sistema proporcionalmente aos benefícios marginais dos recursos aportados pelas usinas para o cálculo do "firme" total. Como foi visto na seção 3.2.3, não é intuitivo atribuir vazões a uma determinada usina em um sistema em cascata. Por essa razão, usaremos a mesma transformação série-paralelo apresentada em (3.26), que fornece uma formulação em que cada usina tem como recurso da restrição de balanço hídrico a sua própria vazão natural.

Sabe-se, pelo Teorema Forte da Dualidade, que o valor ótimo da função objetivo do modelo para duas usinas (3.26) é igual ao valor ótimo da função objetivo de seu problema dual associado. A função objetivo do dual do modelo (3.26) é:

$$\begin{aligned}(\ & \sum_t \pi_{a1,t} a_{1,t} + \sum_t \pi_{v1,t} \bar{v}_1 + \sum_t \pi_{u1,t} \bar{u}_1 \\ & + \sum_t \pi_{a12,t} a_{12,t} + \sum_t \pi_{v2,t} \bar{v}_2 + \sum_t \pi_{u2,t} \bar{u}_2 \ )\end{aligned} \tag{5.1}$$

onde os π´s são as variáveis duais associadas a cada restrição do modelo (3.26).

---

[18] A expressão usualmente utilizada na literatura é de alocação a custos marginais, mas no contexto deste trabalho estaremos utilizando o conceito de alocação a benefícios marginais. Essencialmente a idéia de ambos é análoga, ou seja, alocam o benefício total (ou custo total), proporcionalmente aos incrementos de benefício (ou decréscimos de custos), causados por variações marginais dos recursos de cada agente.

Vale notar que a variável dual π_F, associada à restrição de atendimento ao firme (3.26g), não aparece na fórmula porque o lado direito da sua restrição é zero.

O método BM aloca a cada usina a sua parcela da função objetivo do dual correspondente, ou seja, a soma das variáveis duais associadas a cada restrição multiplicadas pelos seus respectivos recursos (lado direito das restrições do problema primal).

A alocação para este caso com 2 usinas fica então:

$$\phi_1 = \sum_t \pi_{a1,t} a_{1,t} + \sum_t \pi_{v1,t} \bar{v}_1 + \sum_t \pi_{u1,t} \bar{u}_1 \tag{5.2a}$$

$$\phi_2 = \sum_t \pi_{a12,t} a_{12,t} + \sum_t \pi_{v2,t} \bar{v}_2 + \sum_t \pi_{u2,t} \bar{u}_2 \tag{5.2b}$$

A soma das alocações resultantes deste método é igual ao firme total do sistema. A prova de que ela é completa vem diretamente do Teorema Forte da Dualidade: esta alocação é apenas uma ponderação da função objetivo do dual, que por sua vez é igual ao valor ótimo do problema primal, e, portanto, igual ao “firme” total do sistema.

O método para mais de duas usinas seria feito de forma análoga através de uma formulação do tipo (3.26).

5.2. Alocação no Núcleo

Para provar que a alocação BM está no núcleo usaremos os mesmos procedimentos da seção 3.2 (que na ocasião provaram o atendimento à condição de superaditividade). Porém, desta vez, usaremos um caso com três usinas, ao invés de duas, já que também devemos mostrar que esta alocação atende às restrições do núcleo para todas as sub-coalizões do tipo (4.1e), (4.1f) e (4.1g). Novamente, a extensão para uma topologia geral é imediata.

Os modelos para o cálculo de Energia Firme de cada usina individualmente e das três usinas juntas podem ser simplificados da seguinte forma:

$f(\mathrm{H}_1) = \quad \mathrm{Max} \quad cx$

sujeito a (5.3a)

$$Ax \le b_1$$

$$f(H_2) = \text{Max} \quad cx$$

sujeito a (5.3b)

$$Ax \le b_2$$

$$f(H_3) = \text{Max} \quad cx$$

sujeito a (5.3c)

$$Ax \le b_3$$

$$f(H_1,H_2,H_3) = \text{Max} \quad cx$$

sujeito a (5.3d)

$$Ax \le b_1 + b_2 + b_3$$

Seus problemas duais correspondentes são:

$$f'(H_1) = \text{Min} \quad \pi b_1$$

sujeito a (5.4a)

$$\pi A \ge c$$

$$f'(H_2) = \text{Min} \quad \pi b_2$$

sujeito a (5.4b)

$$\pi A \ge c$$

$$f'(H_3) = \text{Min} \quad \pi b_3$$

sujeito a (5.4c)

$$\pi A \ge c$$

$$f'(H_1,H_2,H_3) = \text{Min} \quad \pi(b_1 + b_2 + b_3)$$

$$\text{sujeito a} \qquad (5.4d)$$

$$\pi A \geq c$$

Sejam π_1, π_2, π_3 e π_{123} as soluções ótimas dos problemas (5.4a) a (5.4d), respectivamente. O método a Benefícios marginais aloca a cada usina o firme:

$$\phi_1 = \pi_{123}b_1 \qquad (5.5a)$$

$$\phi 2 = \pi_{123}b_2 \qquad (5.5b)$$

$$\phi 3 = \pi_{123}b_3 \qquad (5.5c)$$

Provou-se na seção 4.2.1 que $\pi_{123}b_1 \geq \pi_1 b_1$, $\pi_{123}b_2 \geq \pi_2 b_2$, e $\pi_{123}b_3 \geq \pi_3 b_3$. Portanto $\phi_1 \geq f(H_1)$, $\phi_2 \geq f(H_2)$ e $\phi_3 \geq f(H_3)$.

Nos resta provar que para qualquer sub-coalizão, a soma das alocações das usinas que nela participam é maior que a energia firme da sub-coalizão quando esta opera sozinha.

No caso de três usinas, isso equivale dizer que devemos ter:

$$\phi_1 + \phi_2 \geq f(H_1, H_2) \qquad (5.6a)$$

$$\phi_1 + \phi_3 \geq f(H_1, H_3) \qquad (5.6b)$$

$$\phi_2 + \phi_3 \geq f(H_2, H_3) \qquad (5.6c)$$

O modelo de cálculo da energia firme da sub-coalizão das usinas 1 e 2, por exemplo, pode ser simplificado da seguinte forma:

$$f(H_1,H_2) = \text{Max} \quad cx$$

$$\text{sujeito a} \qquad (5.7)$$

$$Ax \leq b_1 + b_2$$

O modelo para uma coalizão composta por todas as três usinas, como já foi mencionado, também pode ser simplificado da seguinte forma:

$$f(H_1,H_2,H_3) = \quad \text{Max} \quad cx$$
$$\text{sujeito a} \tag{5.8}$$
$$Ax \leq b_1 + b_2 + b_3$$

Os problemas duais dos modelos (5.7) e (5.8) são:

$$f'(H_1,H_2) = \quad \text{Min} \quad \pi(b_1 + b_2)$$
$$\text{sujeito a} \tag{5.9}$$
$$\pi A \geq c$$

$$f'(H_1,H_2,H_3) = \quad \text{Min} \quad \pi(b_1 + b_2 + b_3)$$
$$\text{sujeito a} \tag{5.10}$$
$$\pi A \geq c$$

Sejam π_{12} e π_{123} as soluções ótimas dos problemas (5.9) e (5.10).

Novamente o conjunto de restrições $\pi A \geq c$ é o mesmo nos dois problemas duais, e a solução ótima de cada um é uma solução viável do outro. Em particular, π_{123}, é uma solução viável do problema (5.9). Como a função objetivo do problema dual é de minimização temos que:

$$\pi_{123}(b_1 + b_2) \geq \pi_{12}(b_1 + b_2) \tag{5.11}$$

O lado esquerdo da inequação (5.11) corresponde à soma das alocações das usinas 1 e 2 quando estas participam da grande coalizão, e o lado direito corresponde à energia firme da sub-coalizão das usinas quando esta opera sozinha. A inequação (5.11) corresponde a $\phi_1 + \phi_2 \geq f(H_1, H_2)$, que era o que desejávamos provar. Para todas as outras sub-coalizões possíveis a prova é análoga e imediata.

Provou-se, com isso, que a alocação BM pertence ao núcleo do jogo.

5.3. Núcleo do Jogo Não Vazio

A partir da prova de que a alocação BM sempre pertence ao núcleo, e dado que é sempre possível usá-la como método de alocação, conclui-se que *o núcleo do jogo que envolve a alocação de energia firme nunca é vazio*.

5.4. Vantagens e Desvantagens do Método

Embora a alocação BM pertença ao núcleo, e, portanto, seja “justa”, sua aplicação a sistemas em que os recursos aportados são discretos (como é o caso de usinas hidrelétricas) pode se tornar não satisfatória, uma vez que a alocação marginal é baseada em pequenas variações incrementais dos recursos.

Uma pequena variação na quantidade dos recursos aportados por cada agente (por ex. capacidade de armazenamento ou limite de turbinamento) pode levar a uma grande variação na energia firme alocada a ele, e em um caso de um aporte de “excesso” dos recursos, a sua alocação pode ser até reduzida.

Suponha, por exemplo, que uma usina aumente sua capacidade de armazenamento até um pouco antes de ter “excesso” desse recurso. Neste ponto, como a sua variável dual associada à restrição de volume máximo será maior que zero, ela receberá benefício pelo método BM. Porém, se o reservatório aumentar um pouco mais, esta variável dual passará a valer zero e fará com que a usina perca benefício, já que este “recurso” ficará em excesso. Com isso pode-se concluir que este método não é robusto em relação a pequenas variações dos recursos das usinas.

A Figura 5.1 a seguir ilustra, para um sistema com duas usinas, o efeito da não-robustez do método BM. O gráfico mostra a evolução das alocações BM das duas usinas, a medida que se aumenta o reservatório da usina 1 (eixo das abcissas). Quando o reservatório atinge um certo tamanho, e passa a estar em excesso, sua variável dual associada à restrição de volume máximo cai para zero, o que faz com que sua alocação pelo BM apresente um degrau (como mostra a Figura 5.1). Quando isso ocorre, o aumento deste recurso passa a não ser mais capaz de aumentar a energia firme total do sistema, que a partir daí se mantém constante.

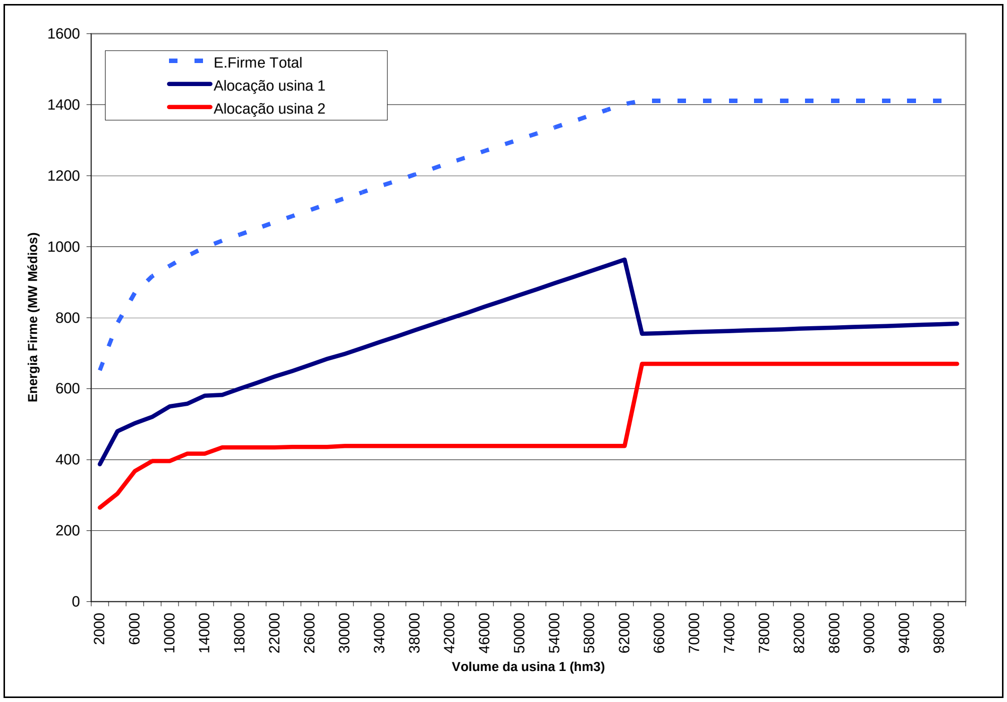

Figura 5.1 – Exemplo do efeito do aumento do reservatório no método BM

Por estas razões apresentadas, a alocação BM, apesar de estar no núcleo do jogo, não pode ser considerada adequada para alocar a energia firme de um sistema hidrelétrico.