3
O PROBLEMA DA REPARTIÇÃO DOS BENEFÍCIOS

Como foi visto na seção 1.3, a produção firme total do sistema resultante de uma operação integrada das usinas, onde todas cooperam entre si formando uma grande coalizão, é maior que a produção firme onde cada agente maximiza isoladamente a sua produção, sem cooperar para a maximização do firme total do sistema.

A existência destes benefícios na capacidade de produção das usinas, operando de forma integrada, leva imediatamente à questão de como reparti-los de forma justa entre os diversos agentes, de tal forma que seja vantajoso para cada um participar da grande coalizão. Em outras palavras, os benefícios da operação conjunta devem ser repartidos de forma que nenhum dos agentes tenha incentivo a sair da grande coalizão, o que faria com que a Energia Firme total do sistema fosse menor que a da operação conjunta. Este tipo de problema é estudado em *teoria de jogos cooperativos*[44].

3.1.
Teoria de Jogos Cooperativos

A teoria de jogos cooperativos se aplica tanto a problemas de alocação de custos entre participantes que usufruem um mesmo serviço, quanto para problemas de alocação de benefícios (Energia Firme, por exemplo).

A diferença básica entre jogos cooperativos e não-cooperativos é o tipo de solução empregada por cada um. Jogos cooperativos buscam repartir os benefícios de uma ação conjunta de maneira a incentivar a cooperação entre os agentes. Os jogos não-cooperativos são usados em ambientes competitivos, onde cada participante procura maximizar seu benefício individual, mesmo que em detrimento dos demais.

3.1.1.
Revisão Bibliográfica

A teoria dos jogos tem sido extensivamente aplicada a temas do Setor Elétrico. De caráter geral, em [50] pode ser observada a variedade de temas e desafios que podem ser enfrentados pela teoria dos jogos.

Mais especificamente, a teoria dos jogos não-cooperativos tem sido aplicada em situações oriundas dos mercados competitivos de energia, onde os distintos agentes atuam estrategicamente, frente aos desafios de um mercado competitivo, objetivando a maximização do lucro individual. Os resultados do jogo para qualquer agente dependem não somente da atuação deste agente, mas da atuação conjunta de todos os jogadores. A busca tradicional de uma solução é denominada “equilíbrio do jogo”, no qual o equilíbrio de Nash[51] vem sendo usado como elemento principal. Na literatura encontram-se distintas aplicações, como por exemplo, análises de poder de mercado[52][53], modelos de equilíbrio[54],[55] e determinação de estratégias de ofertas ótimas de geradores em ambiente de mercado[56],[57].

Já a teoria dos jogos cooperativos vem sendo aplicada, no setor elétrico, a problemas de “alocação” de um modo geral, em seus diversos segmentos.

Uma de suas áreas de aplicações mais notáveis é a área de transmissão, sobretudo em alocação de custos de transmissão. Neste problema, o desenvolvimento de um “serviço” de transmissão (construir circuitos, adquirir recursos auxiliares, faixas de passagem etc) necessário para transportar a geração para a demanda ocorre de maneira *compartilhada* por um conjunto de agentes (geradores e demandas). É intuitivo que o custo do serviço integrado é menor que a soma de desenvolvimento de serviços separados para cada agente ou sub-grupos de agentes. Em outras palavras, o desenvolvimento conjunto é eficiente em termos econômicos. O problema é então como *alocar* este custo de serviço entre os participantes de maneira eficiente e justa. A teoria dos jogos cooperativos é extensivamente aplicada na alocação de custos, por exemplo, de transmissão entre geradores, consumidores, transmissores ou subconjunto de todos anteriores[13],[14],[29],[47],[48], e contratos de transações wheeling[59],[60]. A referencia [47] apresenta uma visão geral da utilização de jogos cooperativos para alocação de custos de transmissão. Nestas aplicações distintos métodos de jogos cooperativos tem sido aplicados, como o valor de Shapley, Núcleo, Aumann-Shapley, etc.

Ainda no contexto de "custos de transmissão", diversas outras aplicações são encontradas na literatura como a alocação do sobrecusto operativo e custos de congestão[4],[39], o uso de teoria dos jogos cooperativos para repartir custos associados a serviços ancilares[6][41], obter fatores de perdas nodais[30], VaR planning[6],[34], entre outros.

Diversas outras aplicações práticas de teoria dos jogos cooperativos podem ser encontradas fora do setor elétrico. Por exemplo, engenheiros da Tennessee Valley Authority consideraram nos anos 30 distintos métodos para alocar entre os beneficiários (usuários de irrigação, navegação e produtores de energia elétrica) os custos de melhoria do sistema de transporte de água existente na época e construção de represas[61]. Os conceitos de "justiça", núcleo e "nucleolus" foram utilizados de forma intuitiva e diversos anos antes da publicação do celebrado livro de Von Neumann e Morgenstern[42]. De modo geral, o problema de repartição de custos e benefícios de atividades, onde há economias de escala ou sinergia, ocorre em diversas atividades comerciais, e a literatura está repleta de exemplos:

a) alocação de custos entre os departamentos da McDonnell-Douglas [62];
b) repartição dos custos de aluguel de um sistema de telefonia na universidade de Cornell[63];
c) alocação de custos de manutenção de uma biblioteca médica que é compartilhada por distintos hospitais[64];
d) financiamento de projetos de recursos hídricos no estado americano do Tennessee[65];
e) alocação de custos de construção de reservatórios com usos múltiplos nos Estados Unidos[66];
f) alocação de taxas aeroportuárias na Inglaterra[67];

g) alocação dos custos de construção de um duto subterrâneo para transporte de água na Suécia[44];

h) aplicações em recursos hídricos de um modo geral [45], como o problema de alocação de custos de construção de dutos para abastecimento de águas em cidades.

Finalmente, cabe ressaltar que, embora muitas aplicações da teoria dos jogos cooperativos possam ser encontradas na área de recursos hídricos, o autor desconhece sua aplicação na alocação de benefícios e direitos de energia firme, que é o foco deste trabalho.

3.1.2.
Conceitos Básicos

Um jogo cooperativo é formado por um conjunto de *N* jogadores que se unem para formar coalizões com o objetivo de maximizar ou minimizar uma função característica. Esta por sua vez fornece o benefício total, ou o custo total de fornecer um serviço, para cada coalizão formada pelos *N* jogadores (ou agentes).

Matematicamente, uma coalizão é um subconjunto *S* do conjunto de *N* jogadores. Os jogadores podem agrupar-se de diferentes maneiras de acordo com seus interesse e conveniência. Para formar uma coalizão, é necessário que todos os jogadores envolvidos firmem acordos entre si e uma vez que todos concordem, a coalizão é formada. As coalizões são mutuamente exclusivas, ou seja, formar uma coalizão *S* implica que não há possibilidade de seus participantes fazerem acordos com participantes de fora dela.

A coalizão formada por todos os *N* jogadores é chamada de *grande coalizão, ou coalizão N*. *N*um jogo com *N* jogadores há 2^N diferentes coalizões possíveis. A coalizão vazia, ou coalizão $\emptyset$, é a coalizão na qual nenhum jogador participa.

A maneira através da qual todos os jogadores formam m coalizões pode ser descrita pelo conjunto $S = \{S_1, S_2, ..., S_m\}$, conhecido como o conjunto das configurações das possíveis coalizões. Este conjunto S satisfaz três condições:

$$S_i \neq \emptyset,\ i = 1,\ldots,m, \tag{3.1}$$

$$S_i \cap S_j = \emptyset \quad para\ todo\ i \neq j\text{, e} \tag{3.2}$$

$$\bigcup_{i=1}^{m} S_i = N\,. \tag{3.3}$$

Von Neumann e Morgenstern [42] introduziram pela primeira vez, em 1947, o termo *função característica*, que calcula para cada coalizão (argumento da função) o maior valor do benefício (ou menor valor do custo) associado a ela. Em outras palavras, a função característica fornece o valor do máximo benefício (ou mínimo custo) que os membros de uma determinada coalizão conseguem obter através de uma ação cooperativa entre eles. A definição formal da *função característica é*:

Definição: Para cada subconjunto S de N, a **função característica *v*** de um jogo fornece o maior valor $v(S)$ que os membros de S podem receber se eles formarem uma coalizão e agirem juntos, cooperando entre si, sem a ajuda de qualquer jogador de fora dela.[13]

Esta definição leva em conta uma restrição que requer que o valor da função característica da coalizão vazia seja zero, ou seja, $v(\emptyset)=0$.

Outro requisito que deve ser atendido pela função característica em jogos de coalizão é a chamada **superaditividade**[14], que pode ser expressa da seguinte forma:

$$v(S \cup T) \geq v(S) + v(T) \text{ para todo } S, T \subseteq N\text{, tal que } S \cap T = \emptyset \tag{3.4}$$

A superaditividade determina que o benefício associado a qualquer coalizão será sempre maior que a soma dos benefícios associados às sub coalizões que a particionam. Como a superaditividade deve ser atendida para quaisquer S e T, uma simples manipulação da expressão (3.4) permite concluir que seu lado direito pode não somente

---

[13] Nesta definição assume-se que o problema em questão é de alocação de benefícios, e por isso a função característica calcula o *maior* valor associado ao subconjunto S. Caso o problema fosse de alocação de *custos*, a função característica análoga calcularia o *menor* valor associado ao subconjunto S.
[14] Estaremos sempre lidando com problemas de alocação de benefícios entre jogadores. Para problemas de alocação de custos, esta propriedade é conhecida como “subatitividade” [44].

ter a soma dos benefícios de duas coalizões, como a soma dos benefícios de qualquer conjunto de coalizões que particiona $S \cup T$, o que equivale a:

$$v(S) \geq v(S_1) + v(S_2) + \ldots + v(S_m) \text{ para todo } S, \text{ tal que } S_i \cap S_j = \varnothing \text{ e } \bigcup_{i=1}^{m} S_i = S \quad (3.5)$$

A superaditividade garante, portanto, que a cooperação entre os jogadores sempre gera um aumento do benefício global. Em outras palavras, a cooperação entre os agentes produz uma “sinergia”, que implica no aumento do benefício total.

Note que a expressão (3.4) não requer que $S \cup T$ seja igual a N, e, portanto, a superaditividade deve ser válida não somente para a grande coalizão, mas para qualquer outra possível.

Assumindo que a função característica do jogo apresenta superaditividade, a grande coalizão sempre será formada ao final do jogo. Portanto, a pergunta natural que surge, após o cálculo do benefício total, é como dividi-lo de modo eficiente e justa entre os agentes que formam esta grande coalizão. A divisão do benefício $v(N)$ entre eles, representada pelo vetor de alocações $\phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n)$, não é evidente.

3.1.3. Núcleo de jogos cooperativos

Um vetor de alocações ϕ só é considerado “justo” se satisfizer às três expressões abaixo:

$$v(N) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i \qquad \text{(Racionalidade do Grupo)} \qquad (3.6)$$

$$\phi_i \geq v(\{i\}) \quad (\text{para todo i} \in N) \qquad \text{(Racionalidade Individual)} \qquad (3.7)$$

$$\sum \phi_i \geq v(S) \text{ para todo i} \in S, \text{ para todo } S \subset N \text{ (Racionalidade das Coalizões)} \qquad (3.8)$$

A equação (3.6) determina que devem-se alocar aos jogadores benefícios cuja soma é igual ao benefício da grande coalizão ($v(N)$), ou seja, deve-se garantir que a totalidade do benefício é alocado entre os agentes. Por sua vez, a inequação (3.7) determina que cada jogador deve receber no mínimo um benefício igual ao que ele obteria agindo individualmente ($v\{i\}$).

A inequação (3.8) determina que a soma das alocações dos jogadores de qualquer sub-coalizão S deve ser maior que o benefício obtido pela ação conjunta destes jogadores (v(S)). Vale notar que (3.7) é apenas um caso particular de (3.8).

Quando uma alocação atende a (3.6) e a (3.8), diz-se que ela pertence ao *núcleo* do jogo.

O núcleo formaliza a idéia de justiça em uma alocação de custos ou benefícios entre agentes. Se uma alocação pertence ao núcleo de um jogo cooperativo, podemos dizer que o benefício atribuído a qualquer agente, ou a qualquer "consórcio" de agentes, não é inferior ao que estes agentes conseguiriam obter se formassem um "consórcio" separado ou se atuassem "individualmente" (fora da coalizão). Em outras palavras, uma alocação é justa se todos os participantes recebem mais benefícios por estarem no "grande consórcio" do que fora dele.

Soluções que pertencem ao núcleo possuem uma certa estabilidade, já que nenhum jogador tem incentivo a sair da grande coalizão. Porém, há casos em que o núcleo do jogo é vazio. Neste caso outras abordagens podem ser propostas, como, por exemplo, o uso dos conceitos de conjunto estável ("stable set")[42] e conjunto de negociação ("bargaining-set")[83]. Como será provado na seção 5.3, o núcleo do jogo relacionado à repartição de energia firme nunca é vazio, e por esta razão estes conceitos não serão abordados nesta monografia.

3.1.4.
Núcleo: ilustração para o problema de energia firme

Suponha que exista uma função $f(.)$ que calcula a energia firme de qualquer subconjunto destas hidrelétricas[15]. O resultado desta função é calculado pela aplicação do

[15] Esta função calcula através do modelo (2.13) a energia firme do conjunto de usinas quando operadas de forma isolada na cascata, respeitando a topologia entre elas.

modelo (2.13) apresentado no capítulo 2. Com isso, teríamos, por exemplo, para um caso com 3 usinas, $f(H_2)$ o firme da usina H_2; $f(H_1,H_3)$ o firme conjunto das usinas H_1 e H_3; $f(H_1,H_2,H_3)$ o firme total do sistema, e assim por diante.

Sejam ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 as energias firmes alocadas à H_1, H_2 e H_3, respectivamente. A primeira restrição do núcleo é que a soma das alocações deve ser igual à energia firme total do sistema: $\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = f(H_1,H_2,H_3)$.

O segundo grupo de restrições exige que a alocação de cada usina não seja inferior ao firme individual das mesmas:

$$\phi_1 \geq f(H_1)$$

$$\phi_2 \geq f(H_2)$$

$$\phi_3 \geq f(H_3)$$

O terceiro grupo de restrições se aplica às combinações de duas usinas:

$$\phi_1 + \phi_2 \geq f(H_1,H_2)$$

$$\phi_1 + \phi_3 \geq f(H_1,H_3)$$

$$\phi_2 + \phi_3 \geq f(H_2,H_3)$$

Observe que ϕ_1, ϕ_2 e ϕ_3 são as “incógnitas” do problema, e os lados direitos das restrições são valores conhecidos. De acordo com a abordagem de jogos cooperativos, qualquer alocação $\{\phi_1;\phi_2;\phi_3\}$ que atende o conjunto de restrições acima – conhecido como “núcleo” do jogo - é considerada “justa”, no sentido de que nenhum subconjunto de agentes teria incentivo a sair do “consórcio global”.

Como visto, as restrições do núcleo formam um conjunto linear, onde o lado esquerdo de cada restrição contém uma das combinações possíveis dos agentes (1 a 1, 2 a 2 etc.). Por sua vez, o valor do lado direito da restrição contém o benefício (energia firme, no caso) associado à mesma combinação.

Portanto, o núcleo deste jogo corresponderia à solução do sistema linear formado pelo conjunto de equações anteriores. Este sistema é reproduzido a seguir:

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 = f(H_1,H_2,H_3) \qquad (3.9a)$$

$$\phi_1 \geq f(H_1) \tag{3.9b}$$

$$\phi_2 \geq f(H_2) \tag{3.9c}$$

$$\phi_3 \geq f(H_3) \tag{3.9d}$$

$$\phi_1 + \phi_2 \geq f(H_1,H_2) \tag{3.9e}$$

$$\phi_1 + \phi_3 \geq f(H_1,H_3) \tag{3.9f}$$

$$\phi_2 + \phi_3 \geq f(H_2,H_3) \tag{3.9g}$$

Finalmente, observa-se que para uma alocação estar no núcleo ela deve atender a um conjunto de inequações, o que faz com que a solução não necessariamente seja única, o que normalmente não acontece.

3.1.5. Núcleo de Jogos Cooperativos: exemplo

Vamos ilustrar nesta seção o conceito de núcleo de jogos cooperativos, através de um exemplo que trata o problema da energia firme. Considere um sistema fictício formado por duas usinas hidroelétricas em cascata, A e B, de proprietários distintos e com potências instaladas iguais a 360 MW (A) e 120 MW (B). Vamos supor que estas usinas possuem firmes individuais iguais a 110 MW médios (A) e 70 MW médios (B).

Suponhamos ainda que a Energia Firme total resultante de uma operação integrada das 2 usinas, como se pertencessem a um único dono, fornece um valor de 200 MW médios, que é superior à soma dos firmes individuais de A e B (180 MW) e indica a existência de um "benefício" na cooperação. Portanto, o problema a ser resolvido é repartir estes 200 MW médios entres as usinas, de forma a manter atrativa a operação integrada. Alguns possíveis critérios para a divisão deste montante estão indicadas na Tabela 3.1 a seguir.

	Método de Alocação da Energia Firme Total	**Usina A** (MW médios)	**Usina B** (MW médios)
a	Divisão igual	**100**	**100**
b	Divisão proporcional às capacidades instaladas de cada usina	200 x (360/480) = **150**	200 x (120/480) = **50**
c	Divisão igual do ganho em relação à soma dos firmes individuais	110 + (20/2) = **120**	70 + (20/2) = **80**
d	Divisão do ganho em relação à soma dos firmes individuais proporcional às capacidades instaladas de cada usina	110 + 20 x (360/480) = **125**	70 + 20 x (120/480) = **75**
e	Divisão do ganho em relação à soma dos firmes individuais proporcional às energias "individuais" de cada usina	110 + 20 x (110/180) = 122.2	70 + 20 x (70/180) =**77.8**

Tabela 3.1 – Possíveis alocações de Energia Firme das usinas

Observa-se nesta tabela que o incentivo à cooperação ocorre quando a repartição se concentra na divisão da energia "excedente" (ou "ganho" em relação à soma dos firmes individuais), presente nas opções **c**, **d** e **e**. Isto não ocorre na opção **a** para a usina A, já que nesta repartição o firme alocado a ela (100 MW médios) é menor que seu firme individual (110 MW médios). O mesmo ocorre na opção **b** para a usina B, que tem o firme alocado a ela nesta repartição (50 MW médios) menor que seu firme individual (70 MW médios). Ou seja, estes dois critérios de alocação não satisfazem à condição do tipo (3.9b), na seção 3.1.4, e, portanto, não constituem alocações "justas".

Todas as alternativas de alocação da Tabela 3.1 estão representadas geometricamente na Figura 3.1.

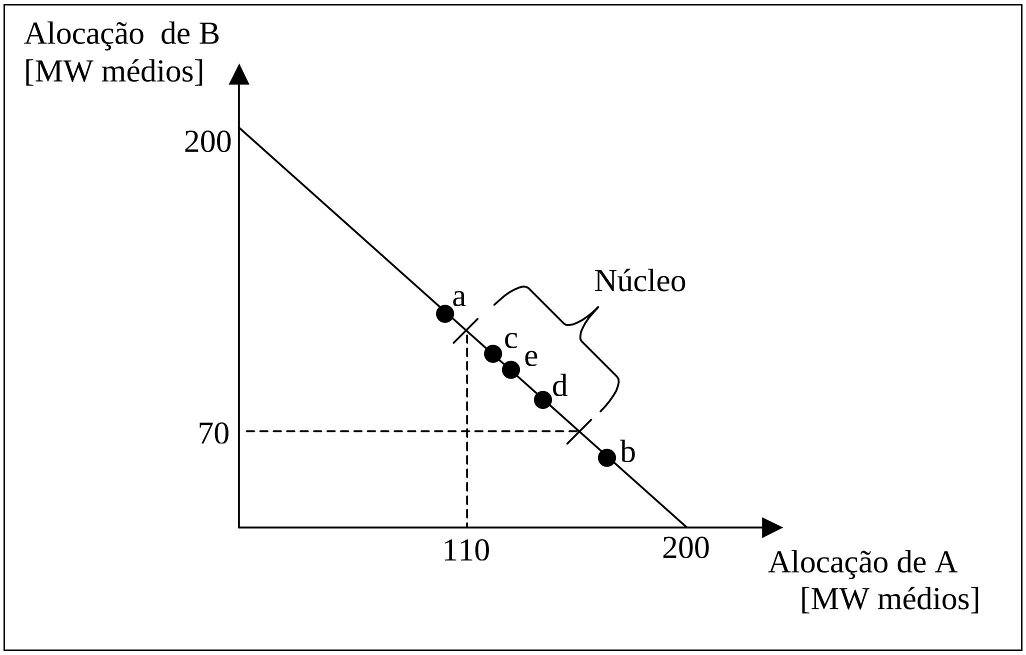

Figura 3.1 – Representação geométrica do núcleo

Conforme visto na seção 3.1.4, o conjunto de soluções que fornece um incentivo à cooperação é chamado de "núcleo" de um jogo cooperativo e é representado neste exemplo pelo segmento de reta indicado na Figura 3.1. Pode-se notar que cada ponto deste segmento aloca tanto à usina A, quanto à usina B, energias firmes maiores que seus respectivos firmes individuais e, portanto, são atrativos sob o ponto de vista da coalizão. Observa-se ainda que mais de uma alocação pode pertencer ao núcleo, ou seja, o núcleo não é único.

3.2.
Condição para um jogo cooperativo

Conforme apresentado no capítulo 1, uma das motivações para o problema de alocação de benefícios é a existência de "sinergia" entre os agentes, isto é, o benefício global excede a soma dos benefícios isolados. Em outras palavras, o jogo dever atender à condição de superaditividade (3.4). Para o problema em análise nesta dissertação, este aspecto intuitivo se traduz no requisito de que a soma das energias firmes de qualquer grupo de agentes não exceda a energia firme do conjunto. Por exemplo, para o sistema hidrelétrico composto de três usinas hidrelétricas H_1, H_2 e H_3, a seguinte inequação deve ser atendida:

$$f(H_1,H_2,H_3) \geq f(H_1) + f(H_2) + f(H_3) \quad (3.10)$$

que é justamente a expressão da sinergia.

Porém as restrições do tipo (3.10) devem ser válidas também para todos os subconjuntos de agentes, por exemplo, também devem ser válidas inequações do tipo:

$$f(H_1,H_2,H_3) \geq f(H1,\ H2) + f(H_3) \quad (3.11)$$

A verificação de todas as condições parece ser tão complexa quanto verificar o conjunto de restrições de núcleo (4.1). Entretanto, como será visto a seguir, pode-se demonstrar que as condições de tipo (3.10) são válidas se o benefício global é calculado como a solução de um problema de programação linear com algumas características específicas, como é o caso da Energia Firme.

Esta demonstração será feita em duas etapas: na primeira será mostrado que a condição de superaditividade é satisfeita se o benefício do jogo cooperativo em questão pode ser calculado como a solução de um problema de programação linear, onde se altera apenas o lado direito das restrições para o cálculo do benefício de qualquer subconjunto de agentes. Em seguida, será mostrado que o problema de energia firme atende a estas condições.

3.2.1. Condição atendida para o caso de um modelo de otimização linear

Por simplicidade de notação, a demonstração será feita para um caso de 2 agentes. A generalização para N agentes é imediata, ou seja, a prova de que o modelo do firme atende à condição de superaditividade para quaisquer dois subconjuntos de agentes é análoga.

Suponha que o benefício de um agente em um jogo cooperativo qualquer possa ser calculado com a solução de um problema de programação linear. Suponha ainda que o benefício de qualquer sub-conjunto de agentes possas ser calculado através do mesmo modelo, apenas alterando o lado direito ("recursos") das restrições.

Deseja-se mostrar que o benefício conjunto é maior ou igual à soma dos benefícios individuais:

$$z(1,2) \geq z(1) + z(2) \tag{3.12}$$

onde as funções dos benefícios z(.) são dados por:

$$z(1) = \text{Max} \quad cx \quad \text{sujeito a} \quad Ax \leq b_1 \tag{3.13a}$$

$$z(2) = \text{Max} \quad cx \quad \text{sujeito a} \quad Ax \leq b_2 \tag{3.13b}$$

$$z(1,2) = \text{Max} \quad cx \quad \text{sujeito a} \quad Ax \leq b_1 + b_2 \tag{3.13c}$$

Calculando o Dual de cada problema, tem-se:

$$z(1) = \text{Min} \quad \pi b_1 \quad \text{sujeito a} \quad \pi A \geq c \tag{3.14a}$$

$$z(2) = \text{Min} \quad \pi b_2 \quad \text{sujeito a} \quad \pi A \geq c \tag{3.14b}$$

$$z(1,2) = \text{Min} \quad \pi(b_1 + b_2)$$

$$\text{sujeito a} \tag{3.14c}$$

$$\pi A \geq c$$

Sejam π_1, π_2 e π_{12} as soluções ótimas dos problemas (3.14a) a (3.14c). Aplicando a igualdade primal-dual, a restrição desejada (3.12) é reescrita como:

$$\pi_{12}(b_1 + b_2) \geq \pi_1 b_1 + \pi_2 b_2 \tag{3.15}$$

Como o conjunto de restrições $\pi A \geq c$ é o mesmo nos três problemas duais, as soluções ótimas de cada problema são soluções viáveis dos demais. Em particular, π_{12}, é uma solução viável do problema (3.14a). Como o problema dual minimiza a função objetivo, isto significa que:

$$\pi_{12} b_1 \geq \pi_1 b_1 \tag{3.16}$$

Aplicando o mesmo raciocínio ao problema (3.14b), resulta:

$$\pi_{12} b_2 \geq \pi_2 b_2 \tag{3.17}$$

Somando (3.16) e (3.17), chega-se a (3.15), que por sua vez equivale ao resultado desejado, que é a restrição (3.12).

3.2.2.
Condição atendida para o caso da energia firme

O modelo de cálculo de Energia Firme apresentado no capítulo 2, e reproduzido a seguir, é um problema de otimização linear.

Max F

sujeito a

$$v_{t+1,i} - v_{t,i} + \sum_{m \in M_i} \left[u_{t,m} + w_{t,m} \right] + u_{t,i} + w_{t,i} = a_{t,i} \tag{3.18a}$$

$$v_{t,i} \leq \bar{v}_i \tag{3.18b}$$

$$u_{t,i} \leq \bar{u}_i \tag{3.18c}$$

$$F - \sum_i \rho_i \times u_{t,i} \leq 0 \tag{3.18d}$$

para t = 1, ..., T; para i = 1, ..., N

Para que ele seja um caso particular da demonstração feita na seção anterior, e como tal, atenda automaticamente às condições de jogos cooperativos, deve-se provar que a energia firme de qualquer sub-conjunto de usinas pode ser calculada através de um mesmo modelo de programação linear, apenas alterando o lado direito ("recursos") das restrições.

Note que esta condição não é claramente atendida no caso da energia firme, pois, tal como visto na equação (3.18a), há uma conexão entre as equações de balanço hídrico de usinas em cascata[16]. Caso uma usina não pertença a uma dada coalizão, e os lados direitos de todas suas restrições se igualem a zero, a água correspondente à sua vazão incremental (lado direito de uma das restrições), que deveria chegar à usina imediatamente a jusante, não estaria sendo contabilizada, o que caracterizaria um erro.

Esta limitação pode ser resolvida se considerarmos como recursos de cada usina somente suas capacidades de turbinamento $\bar{u}$ e de armazenamento $\bar{v}$. Se uma usina não faz parte de uma dada coalizão, estas capacidades (lados direitos de suas restrições de volume máximo e turbinamento máximo) são zeradas. Neste caso, a água que chega a montante seria totalmente vertida e seria a mesma coisa que a usina não existisse.

[16] O vertimento e o turbinamento de uma usina são somados às vazões incrementais da usina imediatamente a jusante.

Entretanto, há um detalhe importante na demonstração de que a condição de superaditividade, apresentada na seção 3.2.1, está atendida: todos os recursos no lado direito das restrições estarão sendo alocados a cada um dos participantes – ver vetores b_1 e b_2 no problema (3.13). Observando o problema de cálculo de firme (3.18), não há dúvida em alocar os limites de armazenamento e turbinamento $\overline{v}_i$ e $\overline{u}_i$ aos respectivos agentes. O problema surge com as vazões afluentes incrementais $a_{t,i}$, que são os recursos no lado direito da equação de balanço (3.18a). Este problema já havia sido detectado em [74].

Uma primeira idéia seria alocar as vazões afluentes a cada usina como seu recurso próprio. Se as usinas estão em paralelo, como na Figura 3.2 abaixo, esta alocação estaria correta, pois o firme da usina #2 não é afetado pelas afluências à usina #1, e vice-versa[17].

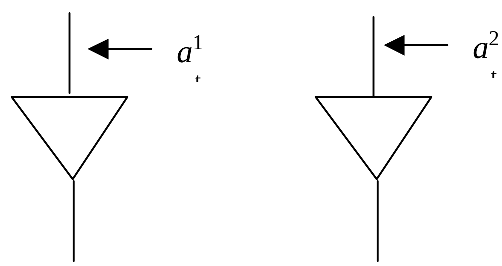

Figura 3.2 – Usinas em paralelo

Suponha agora que as usinas estão em série, como na Figura 3.3 abaixo, e que as vazões *incrementais* a cada usina são alocadas separadamente em cada vetor de recursos.

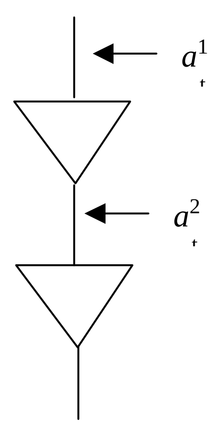

Figura 3.3– Usinas em série

A primeira idéia seria alocar as vazões *incrementais* a cada usina nos respectivos vetores de recursos. Observe, entretanto, que o firme da usina #2 (a jusante), não estaria correto. A razão é que, se a usina #1 não existisse, a usina #2 receberia a vazão *total* afluente, $a_t^1 + a_t^2$, e não somente a vazão incremental.

Será mostrado a seguir que o modelo de energia firme pode ser reescrito de forma a representar todas as usinas em série como usinas em paralelo. Isto permite definir os recursos de vazão alocados a cada usina de maneira mais coerente.

3.2.3. Reformulação do problema de energia firme

O procedimento de transformação série-paralelo será ilustrado para um sistema com duas usinas. Novamente, a extensão para uma topologia geral é imediata.

As equações de balanço hídrico de duas usinas em série são:

$$v_{t+1}^1 = v_t^1 + a_t^1 - u_t^1 - w_t^1 \tag{3.19}$$

$$v_{t+1}^2 = v_t^2 + a_t^2 - u_t^2 - w_t^2 + u_t^1 + w_t^1 \tag{3.20}$$

Somando as equações (3.19) e (3.20), obtém-se:

$$v_{t+1}^{12} = v_t^{12} + a_t^{12} - u_t^2 - w_t^2 \tag{3.21}$$

onde:

v_t^{12} representa a soma dos armazenamentos das usinas #1 e #2.

a_t^{12} afluência natural (soma das incrementais) à usina

As equações (3.19) e (3.21) correspondem à mesma região viável que as equações originais (3.19) e (3.20). A diferença é que a equação de balanço (3.21) não inclui as

[17] Naturalmente, tanto as afluências da usina #1 como as da usina #2 afetam o firme *conjunto* 1&2, que é

variáveis de defluência a montante, u^1_t e w^1_t (estas variáveis foram canceladas na soma). Como mostra a Figura 3.4, é como se as usinas estivessem em paralelo, cada uma recebendo a montante uma quantidade de água igual à sua vazão natural.

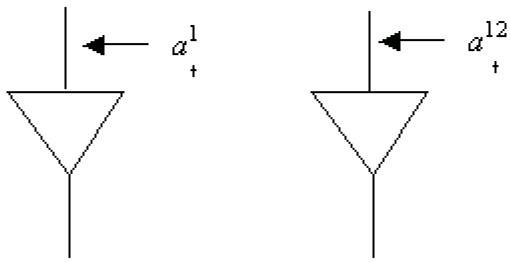

Figura 3.4 - Nova representação das usinas em série

Por sua vez, os limites de armazenamento são reescritos como:

$$v_{1,t+1} \leq \bar{v}_1 \tag{3.22}$$

$$v_{12,t+1} - v_{1,t+1} \leq \bar{v}_2 \tag{3.23}$$

Os limites de defluência permanecem iguais:

$$u_{1,t} \leq \bar{u}_1 \tag{3.24}$$

$$u_{2,t} \leq \bar{u}_2 \tag{3.25}$$

Portanto, o cálculo da energia firme passa a ser formulado como:

justamente o efeito da sinergia.

$$
\begin{array}{llllll}
\text{Max} & F & & & \text{Var. Duais} & \\
\text{sujeito a} & & & & & \\
 & v^{1}_{t+1} - v^{1}_{t} - u^{1}_{t} - w^{1}_{t} & = & a^{1}_{t} & \pi_{a1,t} & (3.26a) \\
 & v^{12}_{t+1} - v^{12}_{t} - u^{2}_{t} - w^{2}_{t} & = & a^{12}_{t} & \pi_{a12,t} & (3.26b) \\
 & v^{1}_{t+1} & \leq & \bar{v}_1 & \pi_{v1,t} & (3.26c) \\
 & v^{12}_{t+1} - v^{1}_{t+1} & \leq & \bar{v}_2 & \pi_{v2,t} & (3.26d) \\
 & u^{1}_{t} & \leq & \bar{u}_1 & \pi_{u1,t} & (3.26e) \\
 & u^{2}_{t} & \leq & \bar{u}_2 & \pi_{u2,t} & (3.26f) \\
 & F - \rho_1 u^{1}_{t} - \rho_2 u^{2}_{t} & \leq & 0 & \pi_F & (3.26g)
\end{array}
$$

O modelo (3.26), que fornece o mesmo “firme” do primeiro modelo apresentado no capítulo 2, mostra a separação dos recursos nos vetores b_1 e b_2.

O procedimento descrito acima tem alguma relação com o conceito de “Mercado Atacadista de Água”, desenvolvido em [26],[27]. A idéia básica do MAA é que cada usina da cascata tem “direito” a utilizar a vazão natural afluente, e deve ser compensada por alterações neste volume afluente causadas por ações de reservatórios a montante; simetricamente, a usina deve compensar as unidades a jusante pelo efeito de seu próprio reservatório.

Neste capítulo foi provado que o cálculo da energia firme atende às condições dos jogos cooperativos, ou seja, a energia firme resultante de uma operação integrada das usinas, onde todas cooperam entre si formando uma grande coalizão, é maior que a produção firme onde cada uma maximiza isoladamente a sua produção.

O restante desta dissertação vai abordar o problema decorrente desta condição, que é como “repartir” estes benefícios de maneira justa e eficiente entre os N agentes que formam a grande coalizão.