2
ENERGIA FIRME DE SISTEMAS HIDRELÉTRICOS

Como visto no capítulo 1, a energia firme de uma usina hidrelétrica corresponde à máxima demanda que pode ser suprida continuamente (sem racionamento) na ocorrência das vazões registradas no histórico.

Uma das formas de se obter a Energia Firme de uma usina hidrelétrica é utilizar um procedimento iterativo do tipo “tentativa e erro”. Um procedimento típico seria:

(a) defina uma demanda firme inicial EF;

(b) simule a operação do sistema para atender a esta demanda EF; se ocorreu algum racionamento durante a simulação, reduza EF e volte ao passo (b); se não ocorreu nenhum racionamento, aumente EF e volte ao passo (b).

Este procedimento deve ser aplicado até que um critério de convergência seja atendido.

Neste capítulo será mostrado que a energia firme pode ser calculada diretamente através de um modelo de otimização linear. Por motivos didáticos, será apresentado inicialmente o modelo para apenas uma usina e em seguida será apresentada a extensão para múltiplas usinas.

2.1.
Formulação como um problema de otimização – uma única usina

Por simplicidade de apresentação, no modelo apresentado a seguir, e no restante deste trabalho, será usada uma formulação linear para a modelagem do sistema hidrelétrico, a qual em particular considera constante o coeficiente de produção da usina hidrelétrica[6]. Outra não-linearidade desconsiderada no modelo, discutida em [1][24], é a

[6] O coeficiente de produção de uma usina é diretamente proporcional à altura líquida de queda, que corresponde à diferença entre a cota do reservatório (que depende do volume armazenado) e o nível do

representação das perdas de volume dos reservatórios por evaporação[7]. Mostra-se em [36],[82] que estas não-linearidades podem ser representadas por um conjunto de inequações lineares obtidas através de envoltórias convexas ("*convex hull*")[81].

2.1.1. Equação de balanço hídrico

Esta equação representa a evolução do armazenamento ao longo do período de estudo: o volume final a cada estágio é obtido somando-se ao volume inicial a afluência durante o estágio (afluência natural do rio) e subtraindo-se os volumes turbinado e vertido:

$$v_{t+1} - v_t + u_t + w_t = a_t \qquad (2.2)$$

para $t = 1, ..., T$

onde:

t	indexa os estágios (por exemplo, mês)
T	duração do estudo (número de meses do registro histórico)
v_t	armazenamento do reservatório no início do mês t (m^3)
v_{t+1}	armazenamento ao final do mês t = início do mês t+1 (m^3)
u_t	volume turbinado ao longo do mês (m^3)
w_t	volume vertido (m^3)
a_t	afluência incremental ao longo do mês (m^3)

canal de fuga (que depende do volume defluente). As perdas hidráulicas são abatidas diretamente desta altura A formulação não-linear do problema é apresentada em [1],[24].

[7] A evaporação é proporcional ao produto do coeficiente mensal de evaporação pela área do espelho d'água do reservatório, que por sua vez depende do armazenamento.

2.1.2.
Limites de armazenamento e turbinamento

Estas restrições são auto-explicativas e estabelecem o volume máximo armazenado no reservatório e máximo volume turbinado ao longo de cada mês:

$$v_t \leq \bar{v} \qquad \text{para } t = 1, ..., \mathrm{T} \qquad (2.3)$$

$$u_t \leq \bar{u} \qquad \text{para } t = 1, ..., \mathrm{T} \qquad (2.4)$$

onde:

$\bar{v}$ volume útil do reservatório (m^3)

$\bar{u}$ máximo volume turbinado ao longo do mês (m^3)

2.1.3.
Geração hidrelétrica

A produção de energia da usina (MWh) é proporcional ao produto do volume turbinado (m^3) e do coeficiente de produção médio (MWh/m^3).

$$\mathrm{E}_t = \rho \times u_t \qquad \text{para } t = 1, ..., \mathrm{T} \qquad (2.5)$$

onde:

ρ fator de produção médio da usina (MWh/m^3)

2.1.4.
Energia firme

Como a energia firme deve ser produzida continuamente, o conjunto de restrições a seguir essencialmente estabelece que o firme corresponde à menor energia produzida ao longo do período:

$$F \leq \rho \times u_t \qquad \text{para } t = 1, ..., T \qquad (2.6)$$

onde:

F variável escalar que representa a energia firme da usina (MWh)[8].

2.1.5.
Função objetivo

Como visto em (2.6), F é a menor energia produzida ao longo do período. Portanto, o objetivo é maximizar F.

2.1.6.
Formulação completa

O problema de otimização é formulado como:

Max F

sujeito a

$$v_{t+1} - v_t + u_t + w_t = a_t \qquad (2.7a)$$

$$v_t \leq \bar{v} \qquad (2.7b)$$

$$u_t \leq \bar{u} \qquad (2.7c)$$

$$F - \rho\, u_t \leq 0 \qquad (2.7d)$$

para $t = 1, ..., T$

O armazenamento inicial no reservatório, v_0, é arbitrado para ter 100% da capacidade máxima da usina, ou seja, $\bar{v}$.

[8] Por simplicidade de notação, estamos supondo que todos os estágios têm igual duração. Na prática são utilizados estágios mensais e é feito um ajuste de MWh para MW médio.

2.2. Formulação como um problema de otimização – múltiplas usinas

A Energia Firme total de um conjunto de usinas hidrelétricas, analogamente ao caso de uma usina, corresponde à máxima demanda que elas podem atender continuamente, numa operação *integrada*, supondo a ocorrência do registro histórico de vazões e sem ocorrência de déficits. A Energia Firme de um sistema composto de múltiplas usinas hidrelétricas também pode ser obtida através de um modelo de programação linear, análogo ao modelo para uma usina visto no na seção 2.1. A produção de energia total do sistema, também neste caso, está sujeita a restrições operativas de cada usina que compõe o sistema (balanço hídrico, limites de armazenamento e turbinamento, etc.).

2.2.1. Equação de balanço hídrico

Para o caso de um sistema com múltiplas usinas, a equação de balanço hídrico é um pouco diferente, já que neste caso adiciona-se à afluência incremental de cada usina as defluências das usinas a montante dela.

O volume final a cada estágio é obtido somando-se ao volume inicial a afluência durante o estágio (afluência incremental mais defluência das usinas a montante) e subtraindo-se os volumes turbinado e vertido:

$$v_{t+1,i} - v_{t,i} + \sum_{m \in M_i} \left[u_{t,m} + w_{t,m} \right] + u_{t,i} + w_{t,i} = a_{t,i} \qquad (2.8)$$

para t = 1, ..., T; i = 1, ..., I

onde:

t	indexa os estágios (por exemplo, mês)
T	duração do estudo (número de meses do registro histórico)
i	indexa as usinas (I - número de usinas)
$v_{t,i}$	armazenamento do reservatório no início do mês t (m^3)

$v_{t+1,i}$ armazenamento ao final do mês t = início do mês t+1 (m^3)

$m \in M_i$ conjunto de usinas imediatamente a montante da usina i

$u_{t,i}$ volume turbinado ao longo do mês (m^3)

$w_{t,i}$ volume vertido (m^3)

$a_{t,i}$ afluência incremental ao longo do mês (m^3)

2.2.2.
Limites de armazenamento e turbinamento

Similarmente ao caso uma usina somente, estas restrições são auto-explicativas:

$$v_{t,i} \leq \bar{v}_i \qquad \text{para } t = 1, ..., \text{T}; \; i = 1,...,\text{I} \qquad (2.9)$$

$$u_{t,i} \leq \bar{u}_i \qquad \text{para } t = 1, ..., \text{T}; \; i = 1,...,\text{I} \qquad (2.10)$$

onde:

$\bar{v}_i$ armazenamento máximo (m^3)

$\bar{u}_i$ máximo volume turbinado ao longo do mês (m^3)

2.2.3.
Geração hidrelétrica

A produção de energia total do sistema é igual à soma das produções individuais de todas as usinas:

$$E_t = \sum_i \rho_i \times u_{t,i} \qquad \text{para } t = 1, ..., \text{T} \qquad (2.11)$$

onde:

ρ_i fator de produção médio da usina i (MWh/m^3)

2.2.4.
Energia firme

Como a energia firme deve ser produzida continuamente, o conjunto de restrições a seguir essencialmente estabelece que o firme corresponde à menor energia produzida ao longo do período:

$$F \leq \sum_i \rho_i \times u_{t,i} \qquad \text{para } t = 1, \ldots, \mathrm{T} \qquad (2.12)$$

onde:

F variável escalar que representa a energia firme do conjunto de usinas (MWh)[9].

2.2.5.
Função objetivo

Como visto em (2.12), F é a menor energia produzida ao longo do período. Portanto, o objetivo é maximizar F.

2.2.6.
Formulação Completa

O problema de otimização é formulado como:

[9] Novamente, por simplicidade de notação, estamos supondo que todos os estágios têm igual duração e na prática são utilizados estágios mensais e é feito um ajuste de MWh para MW médio.

Max F

sujeito a

$$v_{t+1,i} - v_{t,i} + \sum_{m \in M_i} \left[u_{t,m} + w_{t,m} \right] + u_{t,i} + w_{t,i} = a_{t,i} \quad (2.13a)$$

$$v_{t,i} \leq \bar{v}_i \quad (2.13b)$$

$$u_{t,i} \leq \bar{u}_i \quad (2.13c)$$

$$F - \sum_i \rho_i \times u_{t,i} \leq 0 \quad (2.13d)$$

para t = 1, ..., T; para i = 1, ..., N

Os armazenamentos iniciais dos reservatórios v_0's de cada usina são arbitrados para terem 100% das capacidades máximas.

O modelo de cálculo da energia firme (2.13) é um problema de otimização linear e pode ser resolvido por pacotes computacionais comerciais como o CPLEX [68] ou XPRESS-MP [69].

2.3. Aplicações do modelo para cálculo de energia firme.

Esta seção mostra a aplicação do modelo de cálculo de energia firme (2.13), primeiro para um caso com uma única usina, e em seguida considerando 4 usinas em cascata.

2.3.1.
Exemplo com 1 usina

A Tabela 2.1 abaixo as características físicas da usina do primeiro exemplo:

	Fator de Produtibilidade (ρ) (MW/ m^3/s)	**Volume útil do reservatório ($\bar{v}$)** (hm^3)	**Turbinamento máximo ($\bar{u}$)** (m^3/s)	**Potência Nominal** (MW)
Usina 1	0,75	18250	1700	1275,0

Tabela 2.1[10] - Características físicas da usina do primeiro exemplo

As vazões naturais utilizadas foram obtidas do histórico de vazões de uma usina do sistema brasileiro com características semelhantes.

O modelo (2.13) foi implementado e testado para a usina com o pacote computacional Xpress-MP.

O valor da Energia Firme encontrado foi 513,7 MW médios. Isto significa que a usina consegue atender, sem que haja déficit, a uma demanda constante de no máximo 513,7 MW médios, caso ocorra novamente a seqüência histórica de vazões simulada.

Os resultados são apresentados no gráfico da Figura 2.1, que mostra a evolução das variáveis: (i) volume armazenado, (ii) vertimento, (iii) turbinamento, (iv) vazão incremental, expressos em hm^3, e (v) energia produzida, expressa em MW médios. Para que se possa ver com mais detalhes o período crítico (que será introduzido na seção 2.4), o horizonte de tempo apresentado é bem menor que o simulado, que começa em 1931 e se estende até 2001.

[10] As unidades nesta tabela, diferentes das apresentadas no modelo (2.13), são as mais usualmente utilizadas.

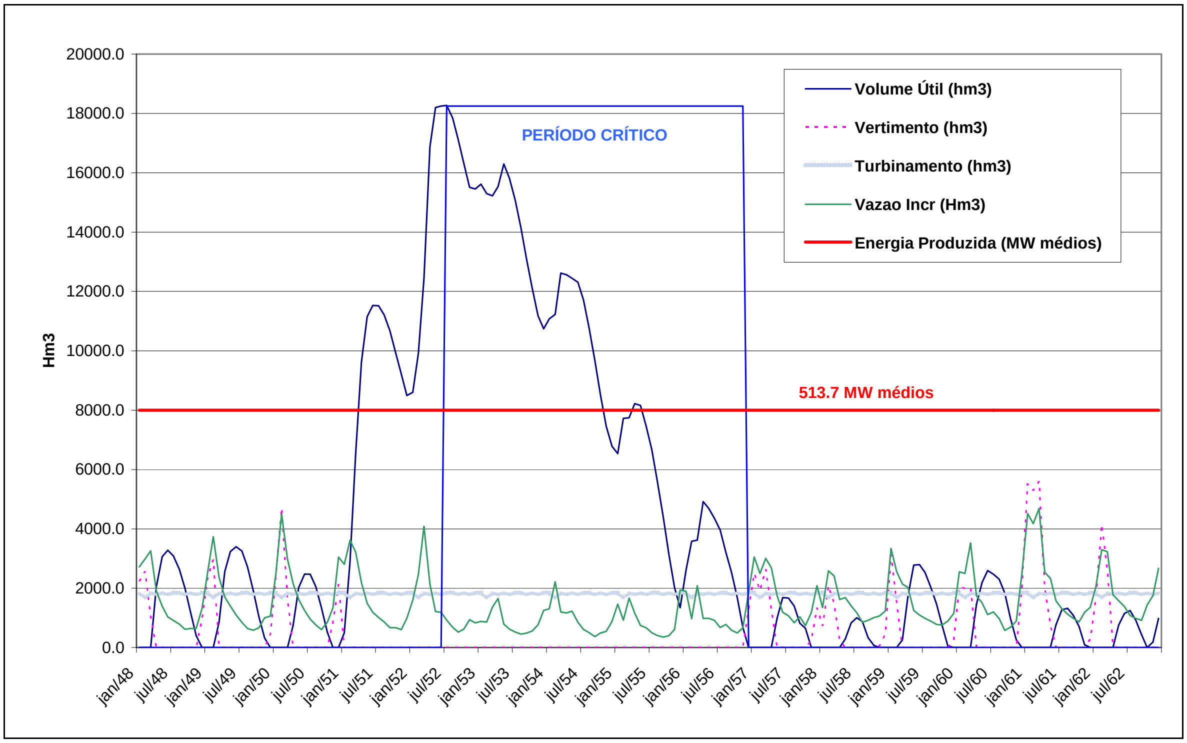

Figura 2.1 - Resultados do cálculo da energia firme para 1 usina

Observa-se inicialmente que a energia produzida, expressa em MW médios, é constante, pois se está atendendo continuamente a uma “demanda” igual à energia firme do sistema. As pequenas variações no turbinamento se devem ao fato de que os meses simulados têm número de dias diferentes, e, portanto, mesmo turbinando a uma taxa constante, apresentam volumes totais turbinados em cada mês, em hm^3, diferentes.

2.3.2. Exemplo com 4 usinas

Neste segundo exemplo foi utilizado um sistema hidrelétrico composto por quatro usinas localizadas em cascata. As características físicas das usinas estão descritas na Tabela 2.2 e a topologia é mostrada na Figura 2.3. As vazões naturais utilizadas foram obtidas dos dados do histórico de vazões de 4 postos do sistema brasileiro. Para definir as características das usinas (volume máximo, turbinamento máximo e fator de produção médio) também foram adotados valores típicos de hidrelétricas existentes no sistema brasileiro.

A Figura 2.2 mostra a legenda das figuras usadas para representar cada tipo de usinas (fio d'água, com reservatório e somente com reservatório):

Legenda dos Tipos de Usinas Hidrelétricas

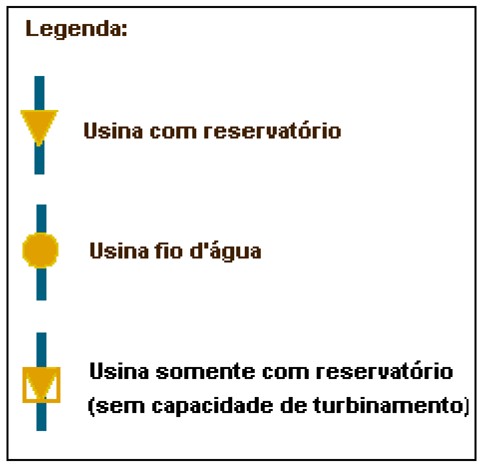

Figura 2.2– Legenda das figuras usadas para representar usinas hidrelétricas

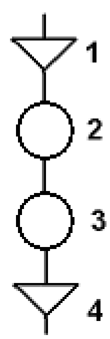

Figura 2.3 – Topologia dosistema-exemplo

	Fator de Produtibilidade (ρ) (MW/ m^3/s)	**Volume útil do reservatório** ($\bar{v}$) (hm³)	**Turbinamento máximo** ($\bar{u}$) (m^3/s)	**Potência Nominal** (MW)
Usina 1	0,15	800	200	30,0
Usina 2	0,25	0	250	62,5
Usina 3	0,35	0	600	210,0
Usina 4	1,00	17000	1600	1600,0

Tabela 2.2 - Características físicas das 4 usinas segundo exemplo

O valor da Energia Firme encontrado foi 799,3 MW médios, que é, portanto, a máxima demanda que estas quatro usinas conseguem atender numa operação integrada, sem que haja déficit, caso ocorra novamente a seqüência histórica de vazões simulada.

Os resultados são apresentados no gráfico da Figura 2.4, que mostra a evolução da soma das variáveis das quatro usinas: (i) volume armazenado, (ii) vertimento, (iii) turbinamento, (iv) vazão incremental, expressas em hm³ e (v) energia produzida, expressa em MW médios. Novamente, para que se possa ver com mais detalhes o período crítico (que será introduzido em seguida na seção 2.4), o horizonte de tempo apresentado é bem menor que o horizonte simulado (1931 até 2001).

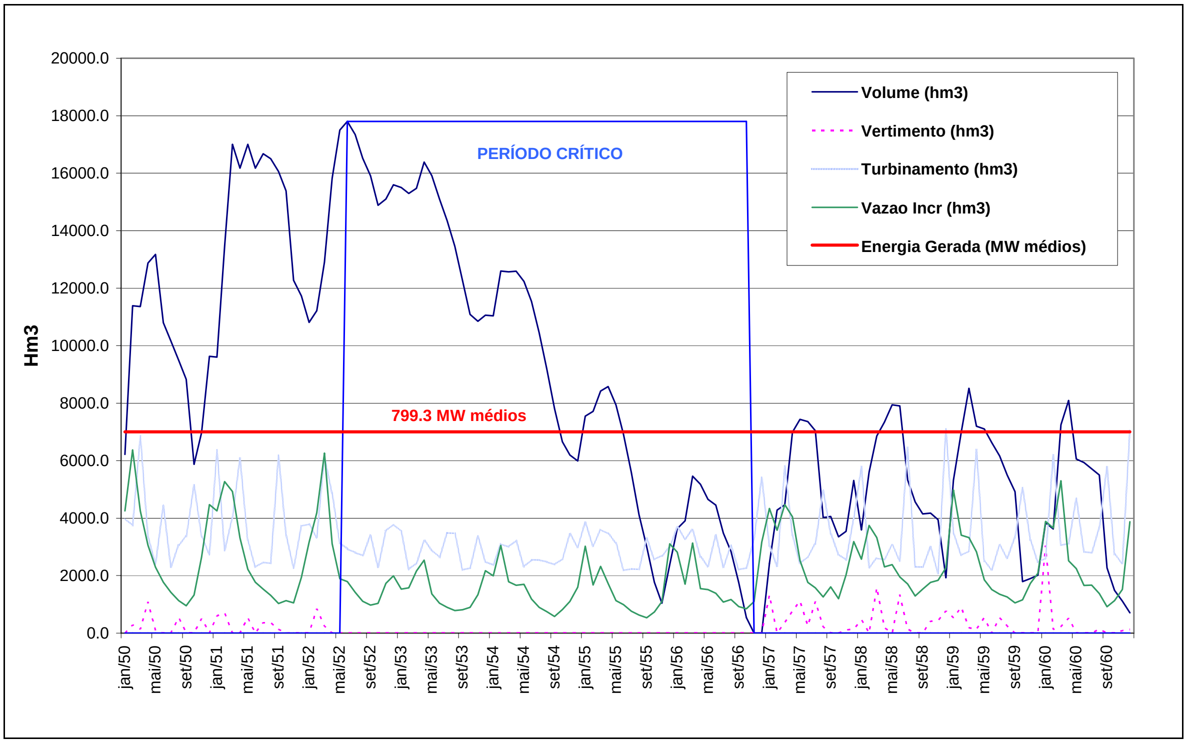

Figura 2.4 – Resultados do cálculo da energia firme para 4 usinas

Apesar de a produção de energia ser constante, o volume turbinado apresenta uma certa variação, devido aos diferentes coeficientes de produção das usinas que geram em diferentes proporções em cada etapa.

Já o volume afluente é bastante variável, e é a variação no armazenamento do reservatório que transforma esta série variável de entrada numa saída constante. Em particular, observa-se na Figura 2.4 que o reservatório foi enchendo para poder compensar as afluências mais reduzidas ao longo do período crítico.

2.4. Período Crítico

Associado ao cálculo do “firme” surge um importante conceito que será usado em um dos métodos de alocação estudado nesta dissertação, que é o método de alocação pela geração média no Período Crítico.

Quando o modelo de otimização (2.7) para cálculo da energia firme é aplicado e a solução ótima é obtida, os valores da variável *volume útil* do problema apresentam um comportamento típico: sempre haverá um intervalo de tempo em que a usina começa com seu reservatório completamente cheio e termina com ele completamente vazio, sem haver reenchimentos parciais. Este intervalo é conhecido como período crítico e está destacado na Figura 2.1 e na Figura 2.4.

O período crítico se caracteriza por ter as piores afluências do histórico de vazões, ou seja, é o período em que ocorre a pior seca, daí o adjetivo "crítico". Ele é importante porque representa o "ponto de estrangulamento" da capacidade contínua de produção do sistema. Fora do período crítico, ainda seria possível atender a um incremento da demanda, sem problemas. Entretanto, dentro do período crítico, o atendimento a este mesmo incremento levaria a um racionamento.

2.4.1. Interpretação das Variáveis Duais: modelo para uma usina

As variáveis duais (ou multiplicadores de Lagrange) associadas às restrições do modelo do "firme" servem para interpretar e definir explicitamente importantes aspectos relacionados ao problema da energia firme.

A definição do período crítico pode ser feita de maneira *explícita* (depois de encontrada a solução ótima) através dos valores das variáveis duais associadas às restrições de atendimento ao firme (2.7d). Ele pode ser definido como o intervalo de tempo onde estas restrições estão ativas, isto é, têm variáveis duais diferentes de zero. Para todo o resto do horizonte estas restrições estarão "relaxadas", e suas variáveis duais terão valores nulos.

A razão é que aumentar infinitesimalmente o "recurso" (lado direito) da restrição (2.7d) numa etapa "fora" do período crítico não geraria beneficio (ou melhora) à função objetivo. Neste caso estas restrições apenas ficariam um pouco mais "relaxadas" e o valor ótimo do problema não se alteraria. Já aumentar o recurso desta restrição numa etapa que está "dentro" do período crítico geraria um aumento do firme total, pois nesta etapa menos água precisaria ser turbinada para atender à restrição do firme (que neste caso seria menor pelo aumento do recurso no lado direito). Com isso, mais água poderia passar a ser turbinada nas etapas do período crítico, o que geraria um aumento da energia firme total da usina. Esta também é a explicação para não haver nenhum vertimento durante o período crítico, ou seja, nenhuma quantidade de água é desperdiçada. Outra característica das variáveis duais associadas à restrição (2.7d) é que possuem o mesmo valor durante todo o período crítico[11], o que significa que um aumento infinitesimal no lado direito da restrição (2.7d) geraria aumentos iguais na energia firme total da usina. Visto em termos econômicos, o *custo marginal de curto prazo*, que reflete justamente o custo de atender a 1 MWh adicional de demanda, é igual a zero fora do período crítico; e igual ao custo do racionamento dentro do período crítico. Este conceito é a base das extensões metodológicas discutidas nos capítulos seguintes.

Outra característica do modelo diz respeito ao comportamento do reservatório da usina durante o período crítico. Na última etapa do período crítico o reservatório sempre se esvazia completamente. A razão é que o modelo irá “tentar” aumentar o valor da variável F (que representa a capacidade de geração constante e é a própria função objetivo), até que ela atinja seu valor máximo. Se no final do período crítico o reservatório não se esvazia completamente, significa que esta água que ainda sobrou poderia ter sido usada para aumentar ainda mais o valor de F. Por esses motivos, quando a solução ótima for obtida, sempre haverá um período crítico e o reservatório da usina ao final dele sempre estará vazio.[12]

O mesmo raciocínio feito para as restrições de atendimento ao firme (2.7d) vale para as restrições de balanço hídrico (2.7a), ou seja, um aumento infinitesimal na quantidade de água (“recurso”, ou lado direito da restrição de balanço hídrico) que chega a montante da usina em uma etapa fora do período crítico não iria alterar o valor da energia que ela seria capaz de gerar continuamente durante todo o horizonte. A razão é que caso esta quantidade a mais de água “chegasse” em uma etapa anterior ao período

---

[11] Neste caso se supõe que todas as etapas simuladas são do mesmo tamanho.

[12] Em teoria, poderiam existir, para uma mesma energia firme, dois períodos críticos diferentes. Este caso seria equivalente ao de uma solução “degenerada” em programação linear, em que um dos períodos seria arbitrariamente o “crítico” (básico). Este caso, por ser considerado estatisticamente impossível de ocorrer, não afeta os desenvolvimentos deste trabalho.

crítico, ela certamente iria ser vertida antes de seu início, quando o reservatório se enche por completo. Já se essa quantidade “chegasse” depois do período crítico, ela também não iria ser capaz de impedir o completo esvaziamento do reservatório ao final do período crítico.

Outra característica importante diz respeito à variável dual associada à restrição de volume máximo. Quando a solução ótima do problema é obtida ela terá valor maior que zero apenas na primeira etapa do período crítico, quando o reservatório está completamente cheio. Apenas nesta etapa um aumento da capacidade do reservatório geraria um aumento no valor da função objetivo, já que uma quantidade maior de água poderia ser armazenada e utilizada durante o período crítico para aumentar a capacidade de geração constante da usina.

2.4.2. Interpretação das Variáveis Duais: modelo para múltiplas usinas

Todas as análises das variáveis duais feitas até então estão relacionadas ao modelo para uma usina (2.7). As mesmas características observadas neste modelo se estendem para o caso de múltiplas usinas (2.13), salvo algumas observações.

No início do período crítico, por exemplo, não é garantido que todas as usinas atingirão os níveis máximos de armazenamento ao mesmo tempo, e por isso a variável dual associada à restrição de volume máximo de alguma delas pode ter valor igual a zero nesta etapa.

Durante o período crítico o inverso também pode ocorrer, ou seja, alguma usina pode isoladamente encher completamente o reservatório e por isso apresentar a variável dual associada à restrição de volume máximo maior que zero. Isto serve também para explicar a existência de pequenos vertimentos isolados durante o período crítico. Ao final do período crítico os reservatórios de todas as usinas, analogamente ao caso de uma usina, se esvaziam completamente e ao mesmo tempo.

Há dois casos em que uma usina verte durante o período crítico. O primeiro é quando ela é um reservatório “puro”, sem capacidade de turbinamento, só lhe restando verter ou armazenar água. O segundo seria o de a usina possuir isoladamente vazões mais favoráveis durante o período crítico, o que faz com que encha por completo o reservatório, mesmo turbinando o máximo de água possível. Neste caso, a vazão excedente, que não pode ser nem armazenada, nem turbinada, é vertida. Nunca ocorrerá, porém, durante o período crítico, vertimento em uma usina que não esteja turbinando o máximo de sua capacidade. Esta energia desperdiçada por esta usina, poderia ser gerada e fazer com que outra armazenasse mais água, aumentando a energia firme do sistema.

Analisando as variáveis duais associadas às restrições de turbinamento máximo constata-se que elas também poderão ter valores maiores que zero somente durante o período crítico. Isto ocorre por motivos análogos aos apresentados anteriormente, ou seja, um aumento infinitesimal na capacidade de turbinamento de qualquer usina numa etapa fora do período crítico não geraria um aumento da energia firme total do sistema. Tal fato ocorre geralmente com usinas cujas vazões afluentes durante o período crítico são mais favoráveis, o que faz com que elas pudessem turbinar uma quantidade de água maior que suas capacidades máximas de turbinamento.