



Fabiane Grange Leonardo

**O uso de vídeos em sala de aula: O
circuncentro de um triângulo a partir de
uma situação-problema**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Eduardo Barbosa Pinheiro

Rio de Janeiro
Setembro de 2021



Fabiane Grange Leonardo

**O uso de vídeos em sala de aula: O circuncentro
de um triângulo a partir de uma situação-
problema**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção
do grau de Mestre em Matemática. Aprovada pela banca
examinadora abaixo:

Prof. Eduardo Barbosa Pinheiro

Orientador

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof. Wilson Reis de Souza Neto

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof^a. Christine Sertã Costa

Departamento de Matemática – PUC-Rio

Prof^a. Mariana Gesualdi Villapouca

Departamento de Análise – UERJ

Rio de Janeiro, 17 de setembro de 2021.

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, da autora e do orientador.

Fabiane Grange Leonardo

Graduou-se em Licenciatura em Matemática pela Universidade Salgado de Oliveira (UNIVERSO) em 2005. Atualmente é professora da rede estadual de ensino de São Gonçalo e da rede particular de ensino de Niterói.

Ficha Catalográfica

Leonardo, Fabiane Grange

O uso de vídeos em sala de aula: o circuncentro de um triângulo a partir de uma situação-problema / Fabiane Grange Leonardo; orientador: Eduardo Barbosa Pinheiro. – 2021.

51 f.: il.; 30 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2021.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Pontos notáveis do triângulo. 3. Reta de Euler. 4. Circuncentro do triângulo. 5. Vídeos. I. Pinheiro, Eduardo Barbosa. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título

CDD 510

Dedico este trabalho aos meus filhos, Arthur e Helena, que são o meu combustível diário. E ao meu marido, Luis Carlos, pelo incentivo e apoio contínuo. O amor de vocês é o que me estimula a seguir em frente e vencer os desafios impostos pela vida.

Agradecimentos

Em primeiro lugar a Deus, pela vida, pela saúde e por estar comigo, me dando forças e me permitindo seguir em frente.

À minha família, pelo apoio e dedicação, em especial ao meu marido, Luis Carlos, que acima de tudo é um grande amigo e esteve sempre presente nos momentos difíceis, dando incentivo e acreditando na minha capacidade de concluir mais essa etapa.

Ao meu orientador, Eduardo Barbosa Pinheiro, por aceitar conduzir o meu trabalho e por todas as contribuições dadas durante o processo.

Aos professores do PROFMAT–PUC–Rio, pela contribuição na minha formação.

À professora e coordenadora Christine Sertã Costa, que sempre nos incentivou, nos motivou e que, num momento de dificuldade, se mostrou preocupada com a minha situação acadêmica. Por quem tenho grande apreço e muito do que aprendi com suas aulas levarei para a minha prática docente.

Ao Professor Humberto José Bortolossi, que contribuiu com minha formação acadêmica e profissional. Por quem guardo forte admiração e seus projetos foram para mim fonte de inspiração.

Aos colegas do curso, que compartilharam dos inúmeros desafios que enfrentamos, pelas trocas de experiências e ideias, pela ajuda mútua. Juntos conseguimos avançar e superar todos os obstáculos. Ninguém largou a mão de ninguém!

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Resumo

Leonardo, Fabiane Grange; Pinheiro, Eduardo Barbosa. **O uso de vídeos em sala de aula: O circuncentro de um triângulo a partir de uma situação-problema.** Rio de Janeiro, 2021. 51 p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O desenvolvimento tecnológico, cada vez mais acelerado, possibilitou o aperfeiçoamento das mídias disponíveis em um nível nunca antes visto, contribuindo significativamente para a transmissão de diversos conteúdos aos discentes no âmbito escolar como, por exemplo, os pontos notáveis de um triângulo e a Reta de Euler trazendo vários conceitos como: mediana, baricentro, bissetriz, incentro, ortocentro, mediatriz e o circuncentro, sendo este último o foco deste estudo que busca apresentar a proposta da utilização do vídeo “A Comunidade: Circuncentro do triângulo”, como forma de aperfeiçoar o conhecimento deste conceito de uma maneira dinâmica, através da solução de um problema prático sobre o local mais ideal para a construção de uma horta, sem que a mesma cause problemas às fazendas vizinhas. O tema se justifica devido à necessidade de desenvolvimento de competências necessárias para que os alunos estejam preparados para superar desafios sobre o conteúdo, sendo este possível através da análise de problemas práticos, como o apresentado no vídeo sugerido, que agrega valor ao processo de ensino aprendizagem desenvolvido em sala de aula.

Palavras-Chaves: Pontos Notáveis do Triângulo; Reta de Euler; Circuncentro do Triângulo; Vídeos.

Abstract

Leonardo, Fabiane Grange; Pinheiro, Eduardo Barbosa. **The use of videos in the classroom: The circumcenter of a triangle from a problem situation.** Rio de Janeiro, 2021. 51 p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The increasingly accelerated technological development has enabled the improvement of available media at a level never seen before, significantly contributing to the transmission of various contents to students in the school environment, such as the remarkable points of a triangle and the Euler Line bringing several concepts such as: median, barycenter, bisector, incenter, orthocenter, bisector and circumcenter, the latter being the focus of this study that seeks to present the proposal to use the video "The Community: Circumcenter of the triangle" as a way to improve the knowledge of this concept in a dynamic way, through the solution of a practical problem about the most ideal place to build a vegetable garden, without causing any problems to neighboring farms. The theme is justified due to the need to develop the skills necessary for students to be prepared to overcome challenges regarding the content, which is possible through the analysis of practical problems, such as the one presented in the suggested video, which adds value to the teaching-learning process developed in the classroom.

Key words: Triangle Remarkable Points; straight line of Euler; Circumcenter of the Triangle; Videos.

Lista de Figuras

Figura 1: Propriedades do triângulo	15
Figura 2: Representação do Baricentro	17
Figura 3: O Baricentro	17
Figura 4: Representação do Incentro	18
Figura 5: O incentro	19
Figura 6: Circunferência inscrita	20
Figura 7: Representação do ortocentro	20
Figura 8: O ortocentro	21
Figura 9: Ortocentro de um triângulo acutângulo	22
Figura 10: Ortocentro de um triângulo retângulo	22
Figura 11: Ortocentro de um triângulo obtusângulo	22
Figura 12: A circunferência circunscrita	23
Figura 13: O circuncentro	23
Figura 14: O circuncentro e a circunferência circunscrita	24
Figura 15: O circuncentro no triângulo retângulo	25
Figura 16: O circuncentro no triângulo obtusângulo	25
Figura 17: O circuncentro no triângulo acutângulo	25
Figura 18: A Reta de Euler	26
Figura 19: AH_1 , altura relativa ao lado BC	27
Figura 20: AH_2 , altura relativa ao lado AC	28
Figura 21: Vídeo “A Comunidade”	34
Figura 22: Localização da horta	35
Figura 23: A formação do triângulo	36
Figura 24: Imagens selecionadas	42
Figura 25: Imagens para montar o cartaz	42

Sumário

1	Introdução	11
2	Pontos notáveis de um triângulo e a Reta de Euler	15
2.1	Baricentro	17
2.2	Incentro	19
2.3	Ortocentro	20
2.4	Circuncentro	23
2.5	A Reta de Euler	26
3	A importância do uso de vídeos em sala de aula	29
3.1	Vídeos em sala de aula	30
3.2	Bons e maus usos do vídeo	31
3.3	A proposta: uso de vídeos para explicar o circuncentro de um triângulo	34
4	Metodologia e Roteiro para uso do vídeo - A Comunidade	37
4.1	Metodologia	38
4.2	Roteiro	41
5	Considerações Finais	48
	Referências	50

“Que os vossos esforços desafiem as impossibilidades, lembrai-vos de que as grandes coisas do homem foram conquistadas do que parecia impossível.”

Charles Chaplin

1

Introdução

Nesta última década houve um aumento considerável na produção de materiais audiovisuais como: documentários, animações, filmes, curtas, dentre outros que podem ser aplicados a diversos conteúdos, incluindo aqueles relacionados com Matemática, como vídeos da TV Escola do Ministério da Educação, documentários BBC (*British Broadcasting Corporation*) e PBS (*Public Broadcasting Service*), que são alguns exemplos de iniciativas na produção desses materiais.

Em termos históricos, o uso de vídeos em sala de aula não é uma novidade. Na época dos antigos videocassetes, a questão era considerada como uma ferramenta tecnológica que, segundo Miranda (2019) era utilizada de forma inadequada, o que permanece nos dias atuais, impedindo que esses recursos se tornem atrativos, criativos e significativos.

Neste contexto, a proposta deste trabalho consiste em potencializar o escopo didático relacionado ao ensino aprendizagem da Matemática, tendo os vídeos como importantes ferramentas estratégicas a serem utilizadas em sala de aula com o intuito de estimular o conhecimento sobre um determinado conteúdo.

Dentre os mais variados conteúdos transmitidos aos alunos, destacam-se os pontos notáveis de um triângulo, figura geométrica que apresenta elementos importantes como, altura, mediana, mediatriz e bissetriz, que são dados por segmentos de reta que unem um vértice do triângulo a um determinado ponto do seu lado oposto (ou do prolongamento do lado oposto) e possuem características específicas e aplicações não só na Matemática como também no cotidiano, através de situações-problemas. Os pontos notáveis são: baricentro, incentro, ortocentro e circuncentro.

O vídeo pode ser utilizado como forma de aprimorar o conhecimento do aluno a respeito deste conteúdo. No entanto, o foco deste trabalho é abordar um desses pontos: o circuncentro, através da seleção do vídeo “A Comunidade: o circuncentro do triângulo” que analisa o conceito e a aplicação deste, através da análise de uma situação-problema de fácil entendimento, a partir de uma abordagem criativa do assunto.

Neste sentido, o tema se torna relevante devido à necessidade de adequação do uso dos recursos midiáticos, em especial o vídeo, como ferramenta estratégica que desperte no aluno a criatividade e o interesse pelo conteúdo dado, possibilitando assim a construção de novos conhecimentos e favorecendo ao professor conduzi-lo a uma aprendizagem mais significativa e próxima do seu cotidiano.

O objetivo principal baseia-se em compreender o conceito e aplicação do circuncentro através de uma situação-problema. Especificamente, descrever o conceito de pontos notáveis do triângulo e a Reta de Euler; demonstrar a importância da utilização dos vídeos em sala de aula e elaboração de um roteiro para a aplicação do vídeo “A Comunidade: o circuncentro do triângulo” pelos professores em sala de aula.

Para tanto, percebe-se uma demanda da escola em fazer uso da tecnologia, para que possa aprimorar seu sistema de ensino adaptando-se ao cotidiano do aluno, cotidiano este, onde fica eminente o aumento da tecnologia. Por este motivo, o método de ensino foi desenvolvido com o intuito de trazer a luz do conhecimento e proporcionar um vislumbre da vida em si.

Por outro lado, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), “o ensino da Matemática não possui apenas o caráter formativo ou instrumental, mas também deve ser visto como ciência, com suas características estruturais específicas” (BRASIL, 1995). Ou seja, é importante que o aluno perceba que as definições, demonstrações e encadeamentos conceituais e lógicos possam ter a mesma função de possibilitar a construção de novos conhecimentos a partir de outros e que servem para validar instruções e dar sentidos às técnicas aplicativas.

Quando se pensa na exposição de um vídeo em sala de aula, é preciso ter em mente a promoção do aumento do conhecimento do aluno, que deve expandir seus horizontes para além dos conceitos, através de análises de situações-problemas que possam agregar valor ao processo de ensino-aprendizagem e tornar o ensino da Matemática algo dinâmico e inovador.

Para melhor compreensão do tema proposto, o trabalho em questão foi organizado em capítulos estrategicamente elaborados para que, tanto profissionais atuantes quanto os que estão em processo de formação possam compreender a proposta da utilização dos vídeos no processo de ensino da Matemática.

No segundo capítulo, foram apresentados conceitos e definições necessários para a compreensão dos pontos notáveis de um triângulo (baricentro, incentro, ortocentro e circuncentro), bem como sua relação com a Reta de Euler e a demonstração da existência de cada um deles, com a intenção de oferecer um suporte teórico ao professor que desejar fazer uso desse material.

No terceiro capítulo, foram expostas informações sobre a importância da utilização dos vídeos em sala de aula, principalmente com relação ao ensino da Matemática. Além disso, foram citados alguns projetos de instituições brasileiras que tem se dedicado na produção de materiais de apoio ao professor. Também foram apresentadas informações concernentes ao vídeo “A Comunidade: o circuncentro do triângulo”, explicando a situação-problema exposta no mesmo.

Já no quarto capítulo, foram apresentados uma metodologia e um roteiro para facilitar a aplicação do vídeo proposto em sala de aula, bem como sugestões de leituras de artigos concernentes aos pontos notáveis do triângulo e a Reta de Euler e a utilização de vídeos em sala de aula para estimular a aprendizagem dos alunos, abordando, inclusive, como utilizar o vídeo proposto para abordar circuncentro, que é o foco deste estudo. Segundo Rapozo (2020), o roteiro foi dividido nas seguintes seções:

- **Ficha catalográfica:** onde consta faixa de classificação etária, idioma do áudio, título, gênero, duração, produtora e ano de produção, tópicos matemáticos abordados, nível escolar sugerido, marcadores, competências e habilidades da BNCC, link para o vídeo e página da web oficial.
- **Imagens selecionadas:** seis imagens, que permitem ao professor visualizar a ideia, o estilo e o conteúdo do vídeo.
- **Sinopse:** um resumo do conteúdo do vídeo, sem fornecer informações que pudessem “estragar” a apreciação do mesmo.
- **Alguns objetivos com os quais esse vídeo pode ser usado:** um parágrafo indicando objetivos de aprendizagem que podem ser alcançados com a utilização do vídeo.
- **Sensibilização:** um texto que pode ser usado para confeccionar um cartaz para divulgar o vídeo na escola.
- **Orientações metodológicas gerais:** lista de recomendações metodológicas para a condução da atividade.

- **Sugestão de questões gerais:** questões que podem ser trabalhadas imediatamente após a exibição do vídeo.
- **Sugestão de questões específicas:** questões que para serem respondidas se faz necessário que trechos específicos do vídeo sejam revisitados (os tempos do trecho estão indicados no roteiro).
- **Observações para o professor:** orientações didáticas, desdobramentos, curiosidades, materiais relacionados com o vídeo.
- **Referências relacionadas:** bibliografia usada na produção do roteiro.

É contundente relatar que o objetivo desse roteiro é direcionar o professor para o uso do vídeo em questão, mas espera-se que ele seja apenas o ponto de partida, ou seja, o professor é livre para modificar e adaptar de acordo com as necessidades e demandas de seus alunos.

No quinto e último capítulo apresentamos as considerações finais onde foram relatadas as principais conclusões sobre o tema em questão, bem como sua contribuição para as comunidades científicas e acadêmicas e se os objetivos propostos foram concretizados.

2

Pontos notáveis de um triângulo e a Reta de Euler

Abordamos nesse capítulo informações teóricas que se fazem imprescindíveis ao professor que pretende ministrar uma aula com o tema deste estudo. Trouxemos todos os conceitos, definições e demonstrações que foram consideradas pertinentes.

Na matemática, existem várias figuras geométricas que são estudadas no cotidiano escolar. Uma dessas figuras é o triângulo, caracterizado por ser um polígono que apresenta três lados, três ângulos, três vértices e também, pontos notáveis que são importantes na estrutura de formação e de caracterização de sua geometria.

Bida (2016) afirma que o triângulo é uma figura muito estudada na geometria, por suas propriedades únicas. Uma delas é a propriedade das várias formas de divisão que ele pode ter, que são referentes à: altura, bissetriz, mediana e mediatriz, conforme podemos ver na Figura 1.

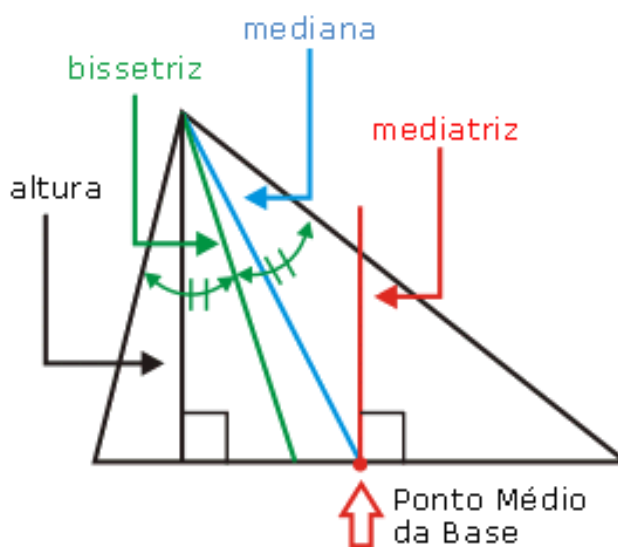


Figura 1: Propriedades do triângulo
Fonte: Bida (2016)

De acordo com os dados apresentados na figura, percebe-se quatro tipos de formas de dividir um triângulo:

- **Altura:** Segmento de reta que une um vértice do triângulo ao seu lado oposto (ou prolongamento do lado oposto) e é perpendicular a esse lado.

- Bissetriz: Segmento de reta que une um lado do triângulo com o vértice oposto, dividindo o ângulo interno desse vértice em duas partes iguais.
- Mediana: Segmento de reta que une o ponto médio de um dos lados do triângulo com o vértice oposto.
- Mediatriz: Reta relativa a um segmento, que é perpendicular em seu ponto médio.

Todo triângulo possui três alturas, três bissetrizes, três medianas e três mediatrizes, sendo uma relativa a cada vértice.

A análise dessas formas de divisões é extremamente importante para o estudo do triângulo, bem como seus pontos notáveis. Os elementos citados acima, exceto a mediatriz, são dados por segmentos de reta, geralmente no interior do triângulo, e possuem características específicas. Sabemos que a interseção de duas ou mais retas, coplanares e não paralelas, é dada por um ponto, assim, o encontro das retas suporte desses segmentos formam pontos que possuem características e propriedades bastante significativas e são chamados de pontos notáveis do triângulo.

Os pontos notáveis de um triângulo são elementos importantes na estrutura de formação e de caracterização dessa figura geométrica. Os principais pontos notáveis de um triângulo são: baricentro, incentro, ortocentro e circuncentro.

- Baricentro: Ponto de encontro das três medianas.
- Incentro: Ponto de encontro das três bissetrizes.
- Ortocentro: Ponto de encontro das três alturas.
- Circuncentro: Ponto de encontro das três mediatrizes.

Notações Utilizadas

- $\triangle ABC$: Triângulo cujos vértices são os pontos A, B e C;
- \hat{B} : Ângulo interno do triângulo, situado no vértice B;
- \widehat{ABC} : Ângulo interno, situado no vértice B, cujos lados são os segmentos AB e BC;
- AB : Segmento de reta cujas extremidades são os pontos A e B. Também podendo ser utilizado para mencionar a medida do segmento, quando comparado a outro segmento.

2.1

Baricentro

O baricentro é definido como o ponto de interseção (ou ponto de encontro) das três medianas de um triângulo (MORGADO, WAGNER, JORGE, 1990). Na Figura 2, podemos observar o baricentro (G) do triângulo ABC.

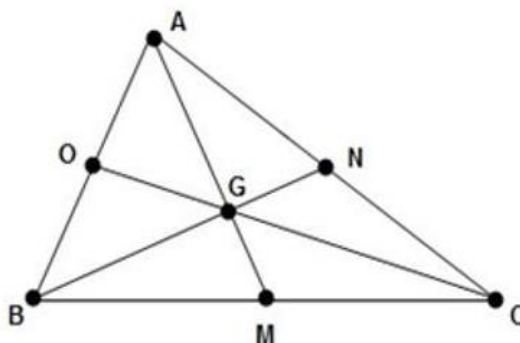


Figura 2: Representação do Baricentro

Vamos mostrar que tal ponto de fato existe e que o comprimento de cada mediana dista $\frac{2}{3}$ do vértice e, portanto, $\frac{1}{3}$ do ponto médio do lado oposto, conforme exemplificado na Figura 3.

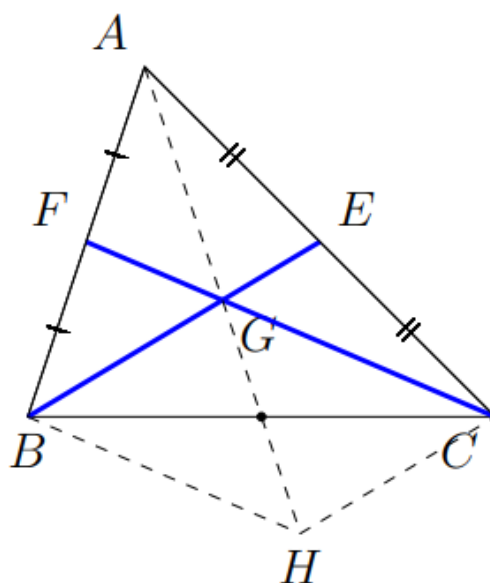


Figura 3: O Baricentro
Fonte: Massago (2014)

Dado o $\triangle ABC$, considere os pontos médios E e F dos lados AC e AB, respectivamente. Seja G, a interseção das medianas BE e CF. Agora, considere AG e seja H, um ponto no prolongamento de AG de forma que $AG = GH$. Como F e G são pontos médios dos lados AB e AH do $\triangle ABH$, temos que FG é paralelo a BH e $FG = \frac{1}{2} BH$. Da mesma forma, como G e E são pontos médios dos lados AH e AC do $\triangle AHC$, GE é paralelo a CH e $GE = \frac{1}{2} CH$.

Como CG é paralelo a BH e BG é paralelo a CH, o quadrilátero BGCH é um paralelogramo e, consequentemente, $BH = CG$ e $CH = BG$. Logo $FG = \frac{1}{2} BH = \frac{1}{2} CG$ e $EG = \frac{1}{2} CH = \frac{1}{2} BG$.

Agora note que o prolongamento de AG passa no ponto médio de BC (que chamaremos de D), pois BGCH é um paralelogramo e as diagonais dos paralelogramos se cortam ao meio. Além disso, $DG = \frac{1}{2} GH = \frac{1}{2} AG$. Logo, todas as medianas se cruzam no mesmo ponto (que apresenta distância de $\frac{1}{3}$ dos vértices correspondentes).

2.2

Incentro

O incentro é definido como o ponto de interseção das bissetrizes internas de um triângulo (MORGADO, WAGNER, JORGE, 1990). Como as bissetrizes são internas, o incentro sempre ficará no interior do triângulo, conforme observado, por exemplo, na Figura 4.

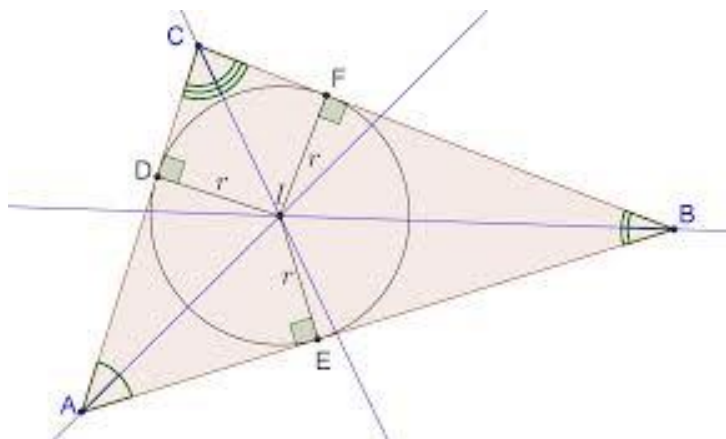


Figura 4: Representação do Incentro
Fonte: Souto (2013)

Vamos mostrar que esse ponto existe, como podemos observar na Figura 5, e que é o centro da circunferência tangente aos três lados do triângulo, conforme ilustrado na Figura 6.

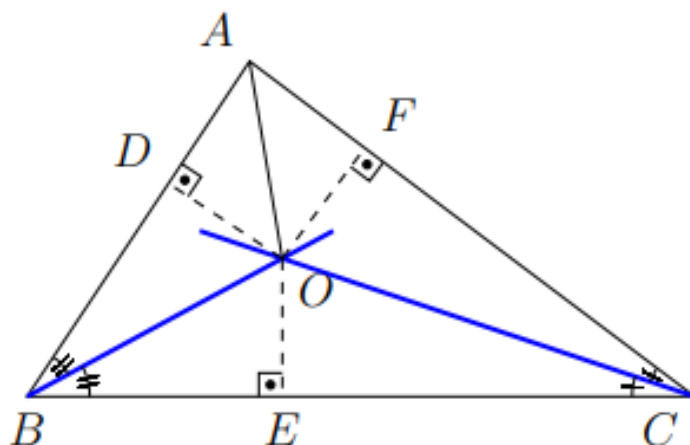


Figura 5: O incentro
Fonte: Massago (2014)

Considere o $\triangle ABC$. Considere também as bissetrizes dos ângulos \hat{B} e \hat{C} e seu ponto de interseção O . Podemos observar que O está no interior desse triângulo.

Como O está sobre a bissetriz de \hat{B} , ele é equidistante de AB e BC . Mas também está na bissetriz \hat{C} , de forma que O é equidistante de AC e BC . Assim, O é equidistante aos três lados do triângulo. Agora considere o segmento AO . Como AO divide o ângulo \hat{BAC} e passa no ponto (fora do vértice) equidistante dos segmentos AB e AC , será a bissetriz de \hat{BAC} .

Sejam D , E e F pontos que pertencem, respectivamente, aos lados AB , BC e AC , do $\triangle ABC$, de modo que OD seja perpendicular a AB , OE seja perpendicular a BC e OF seja perpendicular a AC . A circunferência com centro em O que passa num dos pontos entre D , E e F passa em todos os outros. Como OD , OE e OF são raios desta circunferência e são ortogonais aos lados do triângulo, a circunferência tangencia todos os lados do triângulo nos pontos D , E e F . A circunferência que tangencia todos os lados de um polígono é denominada circunferência inscrita, conforme mostra a Figura 6.

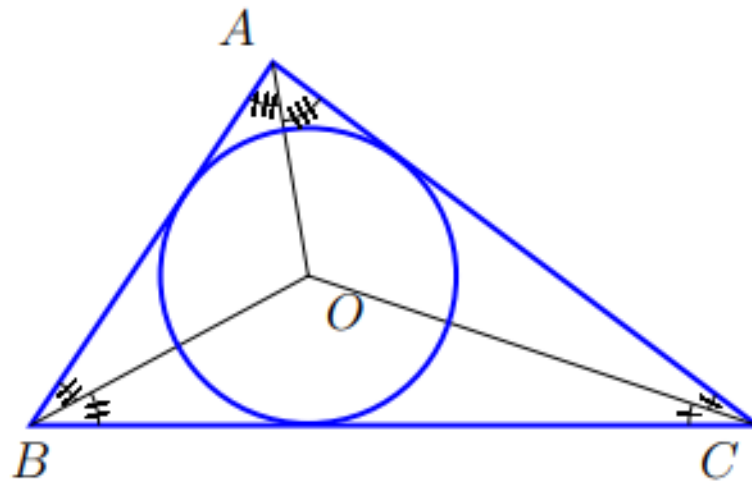


Figura 6: Circunferência inscrita
Fonte: Massago (2014)

Logo, a interseção das bissetrizes determina o centro da circunferência inscrita em um triângulo (MASSAGO, 2014).

2.3

Ortocentro

O ortocentro é definido como o ponto de interseção das três alturas do triângulo (MORGADO, WAGNER, JORGE, 1990). Na Figura 7 podemos observar o ortocentro do triângulo ABC, onde AH_1 é a altura relativa ao lado BC, BH_2 é a altura relativa ao lado AC e CH_3 é a altura relativa ao lado AB.

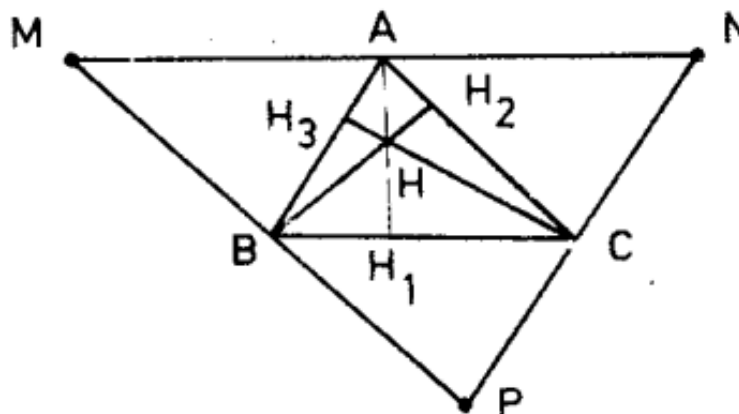


Figura 7: Representação do ortocentro
Fonte: Morgado, Wagner, Jorge, (1990)

Vamos mostrar a existência do ortocentro e também observar algumas de suas propriedades.

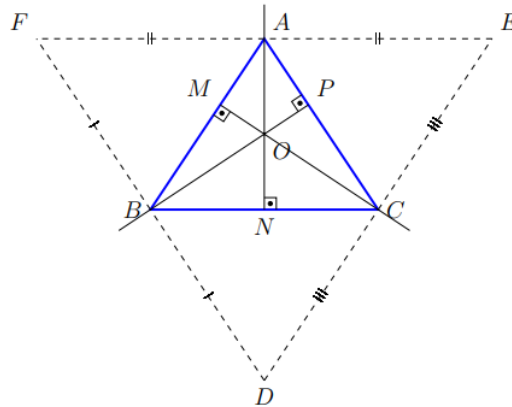


Figura 8: O ortocentro
Fonte: Massago (2014)

Seja $\triangle ABC$ e sejam NA , BP e CM , as alturas relativas aos vértices A , B e C , respectivamente. Considere as retas paralelas aos lados AB , AC e BC , passando pelos vértices opostos C , B e A , respectivamente. Essas retas não são paralelas duas a duas, devido aos lados dos triângulos não serem paralelos dois a dois. Logo, estas retas se cruzam duas a duas, formando um triângulo. Considerando D , E e F , as intersecções das retas paralelas a AB e AC , BC e AB , BC e AC respectivamente, podemos considerar $\triangle DEF$. Então temos que DE , EF e DF são paralelos aos lados AB , BC e AC respectivamente, conforme registrado na Figura 8.

Observa-se que $\triangle BAF$ é congruente a $\triangle ABC$. De fato, como AF é paralelo a BC , $\angle BAF$ é congruente a $\angle ABC$, por serem alternos internos. Da mesma forma, por BF ser paralelo a AC , implica que $\angle BFA$ é congruente a $\angle BCA$. Como AB é comum, pelo critério ALA, $\triangle BAF$ e $\triangle ABC$ são congruentes. De maneira análoga podemos provar que $\triangle ACE$ é congruente a $\triangle ABC$ e também que $\triangle BCD$ é congruente a $\triangle ABC$.

A partir daí, temos que $ACBF$, $ABCE$ e $ABDC$ são paralelogramos e podemos observar que $AF = AE = BC$, $AC = BF = BD$ e $AB = CE = CD$. Dessa forma, A é ponto médio de EF , B é ponto médio de DF e C é ponto médio de DE . Assim, AN , BP e CM são mediatrizes dos lados EF , DF e DE , respectivamente e se interceptam no ponto O , como mostrado na Figura 8.

Logo, as alturas do $\triangle ABC$ se interceptam num único ponto, o Ortocentro.

Observações

- No triângulo acutângulo, as alturas e o ortocentro ficam no interior do triângulo.

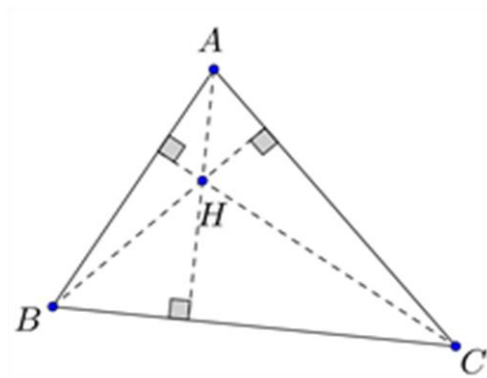


Figura 9: Ortocentro de um triângulo acutângulo

- No triângulo retângulo, duas alturas são coincidentes com os dois catetos e uma altura fica no interior do triângulo. O ortocentro coincide com o vértice do ângulo reto.

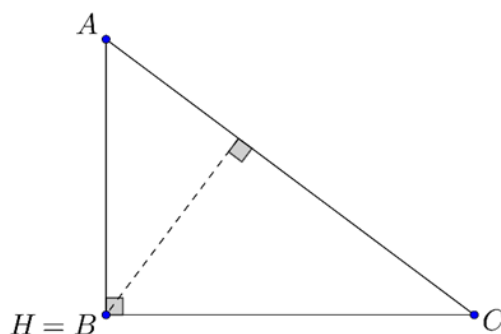


Figura 10: Ortocentro de um triângulo retângulo

- No triângulo obtusângulo, uma das alturas fica no interior do triângulo e as outras duas ficam no exterior. O ortocentro fica localizado no exterior do triângulo.

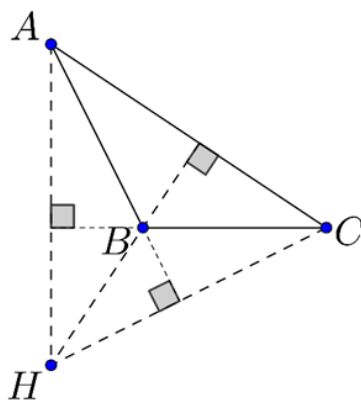


Figura 11: Ortocentro de um triângulo obtusângulo

2.4

Circuncentro

O circuncentro é definido como o ponto de interseção das três mediatrizes de um triângulo (MORGADO, WAGNER, JORGE, 1990). Na Figura 12 temos a representação do circuncentro de um triângulo.

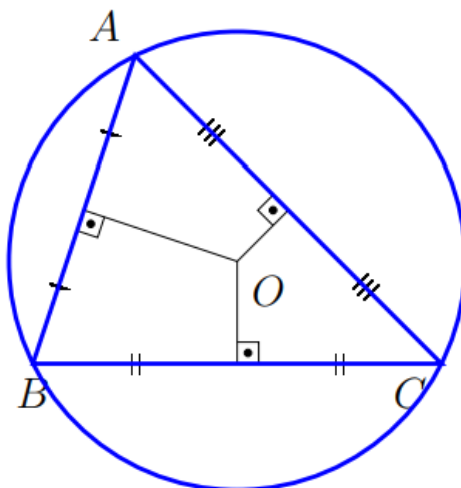


Figura 12: A circunferência circunscrita
Fonte: Massago (2014)

Vamos mostrar a existência do circuncentro, bem como o fato de ele ser equidistante dos vértices do triângulo, conforme Figuras 12 e 13. Vamos também observar algumas de suas propriedades.

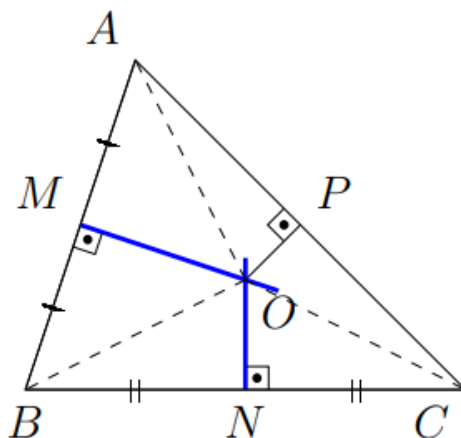


Figura 13: O circuncentro
Fonte: Massago (2014)

Dado o $\triangle ABC$, considere M, N e P, pontos médios dos lados AB, BC e AC, respectivamente. Como as mediatrizes de AB e BC se cruzam, denotaremos este ponto por O, conforme observado na Figura 13.

Como O está na mediatriz de AB, é equidistante de A e B, ou seja, $AO = OB$. Analogamente, $OB = OC$ e, conseqüentemente, O é equidistante dos vértices do triângulo ABC.

Agora, consideremos a reta que passa pelos pontos P e O. Como P é o ponto médio de AC e O é equidistante de A e C, temos que o segmento OP está contido na reta mediatriz do lado AC. Portanto, podemos concluir que todas as mediatrizes se cruzam no ponto O que é equidistante dos vértices, como podemos ver na Figura 14.

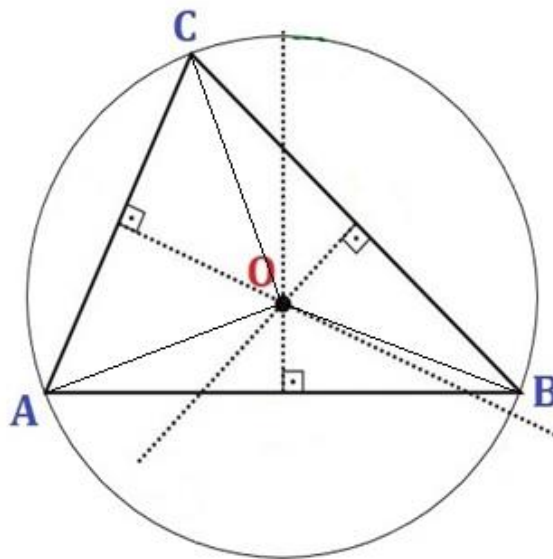


Figura 14: O circuncentro e a circunferência circunscrita.

De certa maneira, observando a imagem, percebe-se que uma circunferência com centro no circuncentro, que passa em um dos vértices, passa em todos os outros vértices. A circunferência que passa em todos os vértices de um polígono é chamada de circunferência circunscrita. A interseção das mediatrizes dos lados de um triângulo é o centro da circunferência circunscrita.

Observações

- O circuncentro no triângulo retângulo é o ponto médio da hipotenusa.

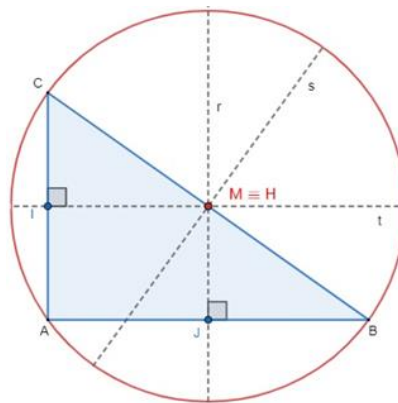


Figura 15: O circuncentro no triângulo retângulo

- O circuncentro em um triângulo obtusângulo fica situado no seu exterior

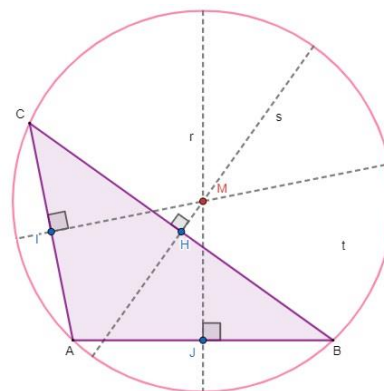


Figura 16: O circuncentro no triângulo obtusângulo

- O circuncentro em um triângulo acutângulo fica no seu interior.

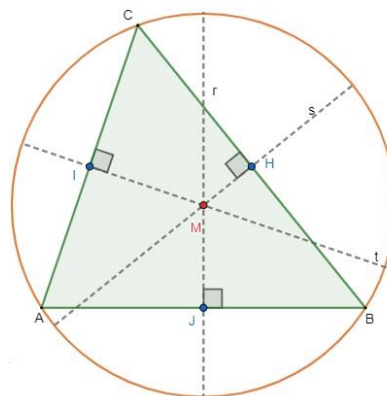


Figura 17: O circuncentro no triângulo acutângulo.

2.5

A Reta de Euler

Segundo Toledo e Ramos (2017), Leonhard Euler, um dos maiores matemáticos do Século XIX, descobriu acidentalmente que três pontos notáveis de um triângulo são sempre colineares, ou seja, que há três dos pontos notáveis que partilham a mesma reta. Estes pontos são: o Baricentro, o Ortocentro e o Circuncentro.

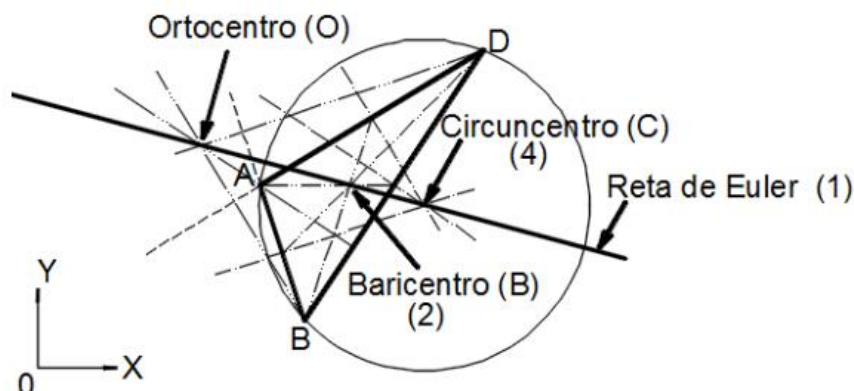


Figura 18: A Reta de Euler
Fonte: Szendroni (2018)

Observando o $\triangle ABD$, representado na Figura 18, podemos notar quatro fatos importantes:

- Existe uma reta que passa pelos pontos notáveis de triângulos escalenos e isósceles: ortocentro (O), baricentro (G) e circuncentro (C);
- O baricentro (G) está localizado entre o ortocentro (O) e o circuncentro (C);
- A distância entre o baricentro (G) e o ortocentro (O) é maior do que a distância entre o baricentro (G) e o circuncentro (C). Posteriormente veremos que é o dobro, ou seja, $OG = 2 \cdot CG$;
- Existe uma circunferência com centro no encontro das mediatrizes (Ponto C) e que passa pelos três vértices de um triângulo, ou seja: $AC = BC = CD$.

A reta observada acima é denominada *Reta de Euler* e sua existência baseia-se no seguinte teorema: “Os três pontos notáveis de um triângulo: Baricentro, Ortocentro e Circuncentro são colineares e a distância entre o Baricentro e o Ortocentro é duas vezes menor que a distância entre o Baricentro e Circuncentro” (TOLEDO, RAMOS, 2017).

Em outras palavras, o baricentro sempre estará entre o circuncentro e o ortocentro, exceto no triângulo equilátero, já que neste caso, os três pontos irão coincidir. Como no triângulo equilátero os três pontos coincidem, o texto acima ficaria mais abrangente dizendo que ‘a distância entre o Baricentro e o Ortocentro é o dobro da distância entre o Baricentro e o Circuncentro’. Pois, nesse caso, para o triângulo equilátero, a distância entre os pontos é nula e, de fato, o dobro de zero é igual a zero.

Agora, vamos apresentar uma prova da existência da Reta de Euler:

Seja o $\triangle ABC$. Sejam M , N e P , respectivamente, os pontos médios dos lados BC , AC e AB . Consideremos os pontos G e O , respectivamente, como o Baricentro e o Circuncentro desse triângulo.

Tracemos a reta que passa pelos pontos G e O . Tomemos, sobre essa reta, um ponto, que chamaremos de H , tal que $GH = 2 \cdot GO$ e que o ponto O não pertença ao segmento GH .

Queremos provar que o ponto H é o ortocentro do $\triangle ABC$.

Tracemos a reta AH e chamemos de H_1 o ponto de interseção dessa reta com o lado BC .

Temos que $\triangle AGH$ é semelhante ao $\triangle GOM$, pois por construção, $GH = 2 \cdot GO$; $\angle AGH = \angle OGM$, pois são opostos pelo vértice; como G é baricentro, temos que $AG = 2 \cdot GM$. Assim, pelo caso ALA, garantimos a semelhança dos triângulos. Daí, $\angle H\hat{A}G = \angle G\hat{M}O$. Então podemos dizer que $\angle H\hat{A}G$ e $\angle G\hat{M}O$ são alternos internos e as retas AH_1 e OM são paralelas. Como OM é perpendicular a BC , temos que AH_1 também é perpendicular a BC . Logo AH_1 é altura relativa ao lado BC , conforme podemos observar na Figura 19.

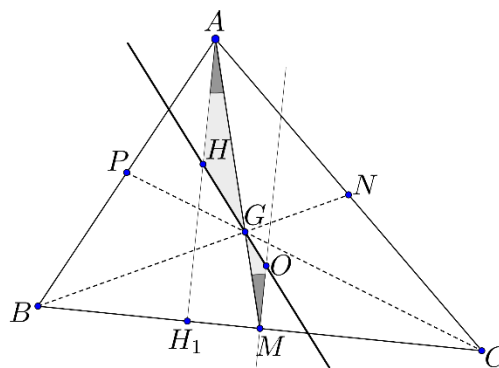


Figura 19: AH_1 , altura relativa ao lado BC

Tracemos agora a reta BH e chamemos de H_2 o ponto de interseção dessa reta com o lado AC .

Temos que $\triangle GHB$ é semelhante ao $\triangle GON$, pois por construção, $GH = 2 \cdot GO$; $\widehat{BGH} = \widehat{ONG}$, pois são opostos pelo vértice; como G é baricentro, temos que $BG = 2 \cdot GN$. Assim, pelo caso ALA, garantimos a semelhança dos triângulos. Daí, $\widehat{HBG} = \widehat{GNO}$. Então podemos dizer que \widehat{HBG} e \widehat{GNO} são alternos internos e as retas BH_2 e ON são paralelas. Como ON é perpendicular a AC , temos que AH_2 também é perpendicular a AC . Logo AH_2 é altura relativa ao lado AC , o que podemos verificar na Figura 20.

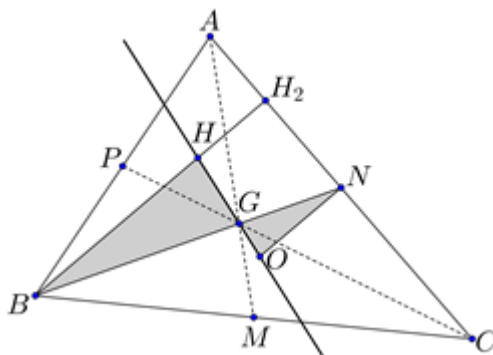


Figura 20: AH_2 , altura relativa ao lado AC

Assim, vimos que H é o ponto de encontro de duas alturas do $\triangle ABC$. Logo H é o ortocentro do $\triangle ABC$.

Concluimos então que o Circuncentro, o Baricentro e o Ortocentro de um $\triangle ABC$ são colineares.

Note que se conhecermos a posição de dois dos pontos O , G e H , podemos obter a posição do terceiro ponto, pois O , G e H são colineares e $GH = 2 \cdot GO$.

3

A importância do uso de vídeos em sala de aula

Como citado na introdução, nos últimos dez anos ocorreu um aumento considerável na produção de materiais audiovisuais como documentários, animações, filmes, curtas, que podem ser aplicados a diversos conteúdos, incluindo a Matemática. Além dos exemplos já mencionados, podemos destacar também episódios da série portuguesa “Isto é Matemática”, apresentada por Rogério Martins, vídeos educacionais, alguns vídeos de “Os Simpsons”, curtas da coleção Matemática Multimídia, da UNICAMP, apenas para relatar algumas iniciativas na produção desses materiais.

De acordo com Rapozo (2020),

(....) o objetivo principal de utilizar recursos audiovisuais afim de potencializar o escopo didático para além da simples explicação com ênfase nos aspectos matemáticos e estatísticos, um grupo de professores, alunos de graduação e pós-graduação tem catalogado vídeos disponíveis e elaborado material de apoio no formato de roteiros pelo projeto Cineclube de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense.

Universidades brasileiras como UFF e UNICAMP tem trabalhado na pesquisa e seleção de alguns vídeos disponíveis e elaborado material de apoio no formato de roteiros para facilitar o uso e a adequação desses vídeos aos conteúdos de sala de aula. Os projetos Coleção Matemática Multimídia (M³) da Universidade Estadual de Campinas e Cineclube de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense, coordenado pelo professor Humberto José Bortolossi, doutor em Matemática (PUC-Rio, 1999) são exemplos a serem mencionados.

Esse trabalho foi fortemente inspirado nesses dois projetos citados acima. O vídeo escolhido faz parte do acervo do projeto Coleção Matemática Multimídia e o roteiro construído no capítulo 4 foi elaborado nos moldes dos roteiros criados pela equipe do projeto Cineclube de Matemática e Estatística.

3.1

Vídeos em sala de aula

O uso de vídeos em sala de aula não é uma novidade. Já no tempo dos antigos videocassetes a questão era considerada, embora existisse pouco material disponível para a área de Matemática nesta época. Com a mídia digital se tornando cada vez mais predominante na vida das crianças, é imperativo para a sociedade de uma forma geral, principalmente os criadores de políticas e criadores de conteúdo, trabalhar juntos e ajudar a próxima geração a se utilizar dessas ferramentas digitais para prosperar e crescer.

Neste sentido, Campos e Almeida (2019) afirmam que, na atualidade, é bastante comum ver jovens buscando interação através de mídias como Google, YouTube, WhatsApp, por exemplo. Com isso, os gigantes da tecnologia estão cada vez mais engajados em desenvolver e empregar tecnologias (aplicativos, programas, plataformas) que facilitem o cotidiano da sociedade e esses recursos tecnológicos estão mais presentes no dia-a-dia das pessoas, tornando-se cada vez mais acessíveis aos vários níveis da sociedade, e na educação não é diferente, ou seja, é possível a utilização de vários programas e aplicativos como forma de facilitar o cotidiano da sala de aula.

Além disso, para Carvalho (2017) o uso de vídeos e filmes em sala de aula surge como ferramentas que oportunizam a socialização, a aprendizagem e o desenvolvimento de diversos conhecimentos e habilidades. Destaca-se que é de fundamental importância traçar os objetivos e metas que deverão ser cumpridos na aula, bem como a importância do papel do professor, que deve atuar como mediador para que os estudantes compreendam o objetivo de tal escolha.

Um ponto importante que se pode observar neste contexto é que foi a Tecnologia da Informação e Comunicação (TICs) que possibilitou desenvolver uma série de recursos didáticos como forma de aumentar a eficiência do processo de ensino aprendizagem desenvolvido nas escolas, principalmente os recursos audiovisuais, como documentários, animações, filmes, curtas, etc.

Assim, sem dúvida, o professor além de ser educador e transmissor de conhecimento, deve atuar, ao mesmo tempo, como mediador. Ou seja, o professor deve se colocar como ponte entre o estudante e o conhecimento para que, dessa forma, o aluno aprenda a “pensar” e a questionar por si mesmo e não mais receba passivamente as informações como se fosse um depósito do educador.

3.2

Bons e maus usos do vídeo

Conforme mencionado, o objetivo da utilização das mídias na educação engloba várias questões e condições tais como: interesse, motivação, habilidades e a interação com diferentes contextos. Assim, o desafio dos educadores é despertar motivos para a aprendizagem, tornar as aulas mais interessantes e trabalhar, através dos recursos tecnológicos, os conteúdos relevantes para que possam ser compartilhados com experiências extracurriculares.

A sociedade mundial vive em um mundo globalizado e, dessa forma, torna-se necessário interagir com as novas tecnologias para que os alunos convivam com o mundo conectado. O papel da mídia é fundamental para que sejam incorporadas as novas atitudes cotidianas de maneira prazerosa. É muito importante o processo de humanização das tecnologias, pois segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), apresentar conteúdos de maneiras diferenciadas ajuda a consolidar e alcançar diferentes formas de aprender, facilitando o processo de aprendizagem (BRASIL, 2018).

No entanto, tanto o aluno como o professor são desafiados a entenderem que as novas metodologias de aprendizagem implicam em novas estratégias de suporte no uso das mídias no contexto escolar. Mais ainda: “Quanto mais as tecnologias avançam, mais a educação precisa de pessoas humanas, evoluídas, éticas.” (PAZZINI, ARAÚJO, 2013). Em outras palavras, é preciso focar neste cenário para o desenvolvimento do processo ensino aprendizagem dos alunos.

Neste sentido, o vídeo representa uma das tecnologias de maior uso cotidiano pelos alunos por ter um papel predominante e especial na ligação das pessoas com o mundo, com diferentes realidades, enfoca diversas faces (tristeza, alegria, informação, diversidade, imagens), sendo primordial que o educador oriente seu aluno quanto à importância da leitura das imagens e sons para compreender o conteúdo que está sendo transmitido.

De maneira geral, a aprendizagem por meio dos vídeos se torna um desafio constante, mas sua prática bem aplicada abre a possibilidade para uma maior eficiência da arte de ensinar. Para isso, é necessário pesquisar, planejar, orientar, motivar, justificar e, se necessário, aprofundar-se no conteúdo a ser aplicado, para que o aluno de fato sinta prazer em aprender e também em assistir ao vídeo selecionado.

No entanto, na realidade, os vídeos são transmitidos pelo professor com alguns propósitos que divergem dos reais objetivos de sua utilização como, por exemplo, deixar o tempo passar ou porque esses fazem parte das exigências do planejamento da escola, o que acaba não agregando valor para os alunos.

Moran (1995), já indicava alguns usos inadequados dos vídeos em sala de aula, abaixo apresentamos alguns trechos transcritos de Moran (1995):

- **Vídeo tapa-buraco:** colocar vídeo quando há um problema inesperado, como ausência de professor;
- **Vídeo enrolação:** exibir um vídeo sem muita ligação com a matéria;
- **Vídeo deslumbramento:** O professor que acaba de descobrir o uso do vídeo costuma empolgar-se e passa vídeo em todas as aulas, esquecendo outras dinâmicas mais pertinentes. O uso exagerado do vídeo diminui a sua eficácia e empobrece as aulas.
- **Vídeo perfeição:** Existem professores que questionam todos os vídeos possíveis porque possuem defeitos de informação ou estéticos. Os vídeos que apresentam conceitos problemáticos podem ser usados para descobri-los, junto com os alunos, e questioná-los.
- **Só vídeo:** Não é satisfatório exibir o vídeo sem discuti-lo, sem integrá-lo com o assunto de aula, sem voltar e mostrar alguns momentos mais importantes.

Em contrapartida, o próprio Moran (1995), também sugeria propostas para a utilização dos vídeos em sala de aula, tais como os trechos abaixo, que foram transcritos do seu trabalho:

- **Vídeo como sensibilização:** Em sua opinião, o uso mais importante na escola. Interessante para introduzir um novo assunto, despertar a curiosidade, motivar para novos temas. Facilitando no aluno o desejo de pesquisar e se aprofundar no assunto do vídeo e da matéria.
- **Vídeo como ilustração:** Para ajudar a mostrar o que se fala na aula, compor cenários desconhecidos dos alunos, ajudar a situar os alunos no tempo histórico, trazer para a sala de aula realidades distantes dos alunos.
- **Vídeo como simulação:** Uma ilustração mais sofisticada. Para mostrar através de um vídeo situações que exigiriam muito tempo ou recursos não disponíveis na escola.

- **Vídeo como conteúdo de ensino:** Para mostrar determinado assunto de forma direta ou indireta, orientando a interpretação e permitindo abordagens múltiplas, facilitando a interdisciplinaridade.
- **Vídeo como produção:** Podendo a produção ser feita pelo professor, afim de documentar, registrar eventos, criar seu próprio material audiovisual ou pelo aluno, como forma de comunicação, sendo incentivado a produzir pesquisas e trabalhos em vídeos.
- **Vídeo como avaliação:** Dos alunos, do professor, do processo.
- **Vídeo espelho:** Para a análise do grupo e dos papéis de cada um, acompanhando os comportamentos individuais e coletivos; do ponto de vista participativo, incentivando os mais retraídos e pedindo aos que falam mais para darem mais espaço aos colegas. Também é útil para que o professor se veja, examine sua comunicação, suas qualidades e defeitos.
- **Vídeo como integração/suporte de outras mídias:** Gravar programas importantes da televisão para usar nas aulas, utilizar filmes de longa-metragem ou documentários para ampliar o conhecimento. Interagir o vídeo com outras mídias como computador, videogame, internet.

A busca por inovações deve promover aos alunos a possibilidade de compreender melhor um conteúdo dado. Para tanto, torna-se necessário que o professor apresente objetivos específicos por trás de sua utilização, como pedir para que o aluno explique com suas palavras o que compreendeu do assunto, se ele gostou ou não do vídeo e o porquê disso.

De maneira geral, a utilização dos vídeos em sala de aula deve apresentar como objetivo primordial aumentar o conhecimento do aluno sobre o conteúdo apresentado, levando em consideração que o aluno da atualidade vivencia o avanço da tecnologia e que muitos estão conectados através de internet em celulares, o que há alguns anos atrás não existia.

Então conclui-se que o professor deve ser intermediador no processo de conhecimento do aluno e a utilização dos vídeos se tornou uma excelente estratégia facilitadora desse processo. As mídias, quando bem utilizadas, podem ajudar a expandir o conhecimento dos alunos sobre um determinado assunto, ou seja, a exibição de um vídeo bem administrada pode contribuir positivamente com o processo de ensino e aprendizagem dos alunos.

3.3

A proposta: uso de vídeos para explicar o circuncentro de um triângulo

Como mencionado anteriormente, jovens, crianças, adolescentes, tem acesso a diversos canais audiovisuais tais como YouTube e WhatsApp e, neste contexto, uma proposta viável para trabalhar os conteúdos da Matemática, seria a utilização de vídeos, publicados em sites como forma de agregar valor ao processo de ensino aprendizagem da Matemática.

Dentre os vários conteúdos que são vivenciados pelos alunos no âmbito escolar, estão os pontos notáveis de um triângulo retângulo e a Reta de Euler, um conteúdo que envolve vários conceitos como altura, mediatriz, mediana e bissetriz, que possuem importantes aplicações. Quando não abordados de forma prática, ou seja, sem fazer associações com o cotidiano, esse conteúdo que pode trazer dificuldade de compreensão aos alunos.

Como vimos no Capítulo 2, o circuncentro é definido pelo encontro das mediatrizes, ou seja, pela interseção entre elas. Caso seja representado um triângulo inscrito em uma circunferência, nota-se que o circuncentro é o centro dessa circunferência.

Neste sentido, os vídeos também podem auxiliar no estudo do circuncentro, bem como nos outros pontos notáveis do triângulo. Contudo, torna-se necessária objetividade na seleção do mesmo e, tendo este quesito como foco, escolhemos como proposta a utilização do vídeo titulado como “A comunidade”, que apresenta em seu contexto, informações específicas sobre o circuncentro. Na Figura 21 é apresentada tela de abertura do vídeo escolhido.



Figura 21: Vídeo “A Comunidade”.

Fonte: A Comunidade (2012)

O vídeo “A Comunidade” foi escolhido por apresentar uma abordagem dinâmica com relação aos pontos notáveis de um triângulo. Ele relata a história de João, que precisa resolver o problema de onde montar uma horta na comunidade sem prejudicar as famílias envolvidas no projeto, contando com a ajuda de Deucy. Juntos lidam com o problema, utilizando o circuncentro de um triângulo. A Figura 20 registra o ponto sugerido para a horta.

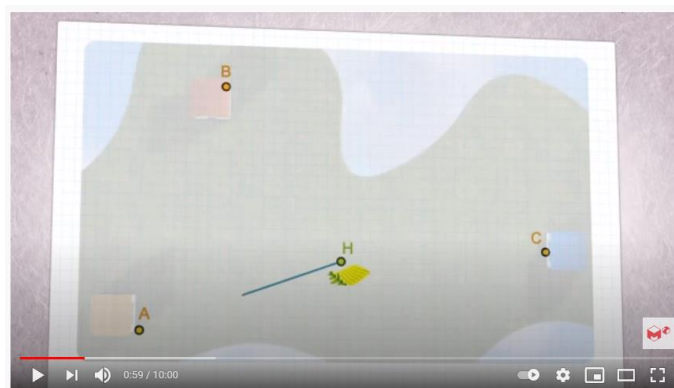


Figura 22: Localização da horta

Fonte: A Comunidade (2012)

Na Figura 22 são apresentados três pontos, que seriam as localizações das casas das três famílias envolvidas no projeto de construção da horta comunitária, descrevendo um triângulo e o ponto H, que seria o local onde a horta deveria ser construída, neste caso, o circuncentro, sendo este o principal motivo da escolha do vídeo em questão, que mesmo sendo publicado em 2012, apresenta o conceito de uma forma dinâmica, onde os alunos podem visualizar no cotidiano de um grupo de pessoas, através da situação-problema abordada no vídeo, o conteúdo de sala de aula e compreender o porquê da utilização.

Com o vídeo, além da questão da motivação, o docente tem nas mãos várias possibilidades de apresentar seu conteúdo programático, em outros ângulos e perspectivas, fazendo com que o conteúdo abstrato se torne um conteúdo palpável e de fácil entendimento, além de poder inserir os alunos em realidades diferentes vividas por eles, facilitando a compreensão de outras culturas ou modos de viver diferentes do seu cotidiano.

Neste sentido, o vídeo escolhido como proposta para o ensino do circuncentro pode proporcionar a facilidade do entendimento deste conteúdo, pois apresenta a partir do diálogo dos atores, a contextualização do circuncentro, tornando o ensino desse tópico Matemático mais dinâmico, saindo do tradicionalismo, possibilitando o conhecimento

sobre os pontos notáveis do triângulo, bem como sua representação. A Figura 23 descreve a união dos pontos e a formação do triângulo.

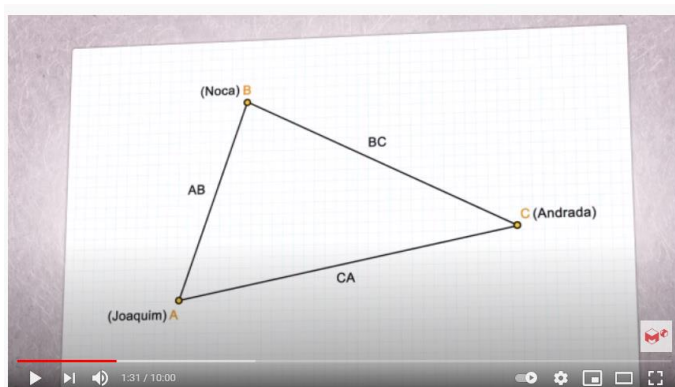


Figura 23: A formação do triângulo

Fonte: A Comunidade (2012)

Percebe-se que o triângulo foi traçado a partir da distância entre as propriedades de Joaquim (A), Noca (B) e Andrade (C), formando o triângulo ABC. A representação da figura permite aos alunos, a compreensão, de uma forma dinâmica, do conteúdo aplicado em sala de aula.

De uma forma geral, o educador além de estar ensinando pode criar um efeito benéfico de troca com seus discentes, pois muitas vezes o professor estará em constante aprendizado com seus alunos, percebendo que as tecnologias além de facilitadoras do ensino, podem trazer um efeito de aproximação dos alunos para com ele dentro de sala de aula, criando-se assim alunos mais colaborativos em sala, fazendo com que um currículo formal e impessoal passe a ser um currículo de exploração viva e de grande empolgação por parte dos alunos.

Em outras palavras, os vídeos apresentam conteúdos dinâmicos e boa parte deles pode ser utilizada em sala de aula. No entanto, cabe salientar que o vídeo precisa ser selecionado com objetividade, extraindo do aluno, o máximo de conhecimento possível com relação ao conteúdo apresentado.

4

Metodologia e Roteiro para o uso do vídeo A Comunidade

A proposta desse capítulo é sugerir uma metodologia e um roteiro para o uso do vídeo “A Comunidade”, bem como justificar sua escolha e compará-lo com os tipos de vídeo mencionados anteriormente nesse trabalho.

A intenção é preparar aulas que possibilitem a aprendizagem de forma contextualizada e significativa, permitindo aos agentes envolvidos (aluno, professor e comunidade escolar) interagir construindo e reconstruindo o conhecimento, facilitando assim o trabalho do professor que pretende utilizar o vídeo “A Comunidade” em suas aulas.

O roteiro descrito nesse capítulo foi elaborado seguindo os moldes dos roteiros criados pelos alunos do PROFMAT-UFF, que outrora foram orientados pelo professor Humberto Bortolossi, citado no capítulo 3 desse trabalho. Esse roteiro contém partes que são relacionadas exclusivamente ao uso do vídeo “A Comunidade” e outras partes que foram transcritas de outros roteiros, todos escritos com as mesmas palavras, da mesma forma. Para manter um padrão de referência, dentre todos os trabalhos com essa parte comum, onde podemos, por exemplo, mencionar Miranda (2019), Pereira (2019) e Rapozo (2020), escolhemos usar sempre Rapozo (2020)

A metodologia descrita nesse capítulo “conversará” com o tempo todo com o roteiro, pois foi elaborada a partir dele.

O vídeo “A Comunidade” foi escolhido por trazer uma abordagem do circuncentro do triângulo ligada a uma situação-problema que faz parte do cotidiano do grupo de pessoas nele citado.

Diante das sugestões propostas para a utilização dos vídeos em sala de aula, abordadas no capítulo 3 desse trabalho, a classificação do vídeo “A Comunidade” vai depender do público que o assistir. Se o público for oriundo da área rural, podemos classificá-lo como vídeo ilustração. Já para um público de área urbana ele pode ser considerado um vídeo simulação, pois a problemática trazida envolve a criação de uma horta cujo processo de construção e os benefícios obtidos com a mesma devem atingir igualmente a três famílias que vivem numa área rural.

Falando ainda sobre o vídeo, ele relata um diálogo entre o João, um agente comunitário e a Deucy, uma pessoa de sua equipe, através de uma conversa por rádio. Nessa conversa ele expõe o problema de três famílias que pretendem criar uma horta para atendê-las. A construção da horta e dos caminhos das três propriedades até a horta, bem como os frutos de sua produção devem atingir e beneficiar igualmente às três famílias. Durante o diálogo, que dura cerca de oito minutos, alguns conteúdos matemáticos são citados para ajudar na compreensão da situação exposta. Os dois agentes discutem duas maneiras para a construção da horta, que são o caso de gastarem o menor valor possível com a construção dos caminhos e o caso em que a distância entre a horta e cada uma das propriedades seja a mesma. Depois de algum tempo, fica resolvido que a melhor solução é o caso das distâncias serem iguais, ou seja, a horta é o centro do triângulo cujos vértices são as três propriedades. Pois com a outra possibilidade, apesar de gastar menos para a construção dos caminhos, cada família iria desembolsar um valor diferente e uma delas gastaria muito mais que as outras. Finalizando o vídeo, João traz mais um dilema: Uma quarta família deseja fazer parte da construção da horta, nas mesmas condições citadas no caso de três famílias. E essa última questão fica sem solução, deixando a critério do professor que utilizará o vídeo abordá-la ou não.

Após assistir e analisar o vídeo, julgamos que os alunos irão compreender e absorver melhor a situação exposta se o professor já tiver trabalhado com a turma os pontos notáveis de um triângulo.

4.1

Metodologia

Mostraremos agora a sugestão de uma metodologia de aulas para turmas de Ensino Fundamental II (8º e 9º anos) ou Ensino Médio, onde utilizaremos o vídeo “A Comunidade”.

Para que o conteúdo matemático do vídeo e a situação-problema abordada sejam bem compreendidos pelos alunos, existem alguns pré-requisitos: Noções básicas de Geometria Plana (ponto, reta, segmento de reta, ponto médio e um segmento, mediatriz de um segmento), Ângulos, Triângulos, Circunferências Equidistância, Pontos Notáveis de um Triângulo (Baricentro, Incentro, Ortocentro e Circuncentro).

Podemos indicar como objetivo geral utilizar o vídeo para apresentar uma aplicação prática de um ponto notável do triângulo, o circuncentro.

Como objetivos específicos podemos citar: revisar os pontos notáveis do triângulo; reconhecer o circuncentro como ponto equidistante dos três vértices do triângulo; identificar o centro da circunferência circunscrita no triângulo; perceber que conteúdos abstratos podem ser visualizados de uma forma concreta, real, através de um vídeo.

As competências e habilidades da BNCC em matemática e suas tecnologias que foram observadas são as seguintes: (EF08MA17) “Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas”(Brasil, 2018, p.315); (EF09MA11) “Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica” (Brasil, 2018, p.317); (EM13MAT308) “Resolver e elaborar problemas em variados contextos, envolvendo triângulos nos quais se aplicam as relações métricas ou as noções de congruência e semelhança” (Brasil, 2018, p.529). e (EM13MAT512) “Investigar propriedades de figuras geométricas, questionando suas conjecturas por meio da busca de contraexemplos, para refutá-las ou reconhecer a necessidade de sua demonstração para validação, como os teoremas relativos aos quadriláteros e triângulos”.(Brasil, 2018, p. 533)

Para que os alunos se sintam mais motivados e atentos durante a apresentação do vídeo, sugerimos ao professor que confeccione um cartaz com informações e uma imagem ligada ao vídeo e o exponha em algum lugar de fácil acesso aos alunos alguns dias antes da exibição do vídeo. O texto para essa sensibilização está no roteiro que veremos na próxima seção desse capítulo.

Uma ficha catalográfica com informações importantes sobre o vídeo “A Comunidade” segue descrita no roteiro.

Consta também uma seleção de seis imagens captadas do vídeo que permitem ao professor visualizar a ideia e o conteúdo do mesmo.

Antes de exibir o vídeo é necessário que o professor se aproprie do conteúdo matemático nele abordado e do conteúdo do vídeo em si. Para isso, no roteiro, há uma sugestão de leituras que o professor pode fazer para enriquecer seu conhecimento e sua prática. Há também uma lista de orientações metodológicas.

Após trabalhar com seus alunos os quatro pontos notáveis de um triângulo, o professor pode dar início aos trabalhos com o vídeo “A Comunidade”. Por exemplo, exibindo o cartaz e falando da sinopse do vídeo, sem dar “spoilers”.

O próximo passo seria a exibição do vídeo. O professor passa o vídeo para os seus alunos e imediatamente após o término pode fazer algumas (ou todas) as perguntas que foram sugeridas na parte de sugestões de questões gerais do roteiro.

Depois da exibição do vídeo e de fazer as perguntas sugeridas, o professor pode realizar a dinâmica proposta pelo programa Matemática Multimídia. Para executá-la precisará de folhas de papel no tamanho A4, lápis, borracha, régua e compasso.

Até esse momento o professor deve precisar de dois ou três tempos de aulas, com duração de 50 minutos em cada aula, dependendo da turma.

Num momento seguinte o professor pode propor um debate para tratar das sugestões de questões específicas, onde cada questão traz o trecho do vídeo onde se passa cada situação. Aqui o professor deve retornar ao vídeo, mostrando os trechos citados para facilitar ao aluno responder às questões.

A última questão da seção de sugestões de questões específicas traz a situação em que a horta beneficie igualmente a quatro famílias. Uma outra sugestão para essa problemática é que o professor divida a turma em grupos de 3, 4 ou 5 alunos (dependendo do número total de alunos) e peça para que cada grupo crie uma maquete expondo uma possibilidade de posicionamento da quarta casa. Cada grupo deverá posicionar também a horta em sua maquete. No dia reservado para a entrega das maquetes cada grupo irá justificar a escolha do posicionamento da quarta casa e a solução encontrada para a localização da horta, apresentando seus argumentos para a escolha. Depois os alunos poderão, através de uma conversa informal, discutir sobre as soluções comuns e diferentes. Para a maquete os alunos poderão usar isopor ou papelão, tinta, papel colorido, canetinha colorida, lápis, borracha, régua e compasso. O professor pode sugerir também que seja feita em material reciclado.

Aqui o professor pode precisar de mais 1 ou 2 aulas de minutos, contando o tempo necessário para explicar a execução da maquete e mais 1 ou 2 aulas de minutos em um outro dia, pré agendado, para a entrega e apresentação das maquetes.

Os alunos serão avaliados em todos os momentos que estiverem participando das atividades, debates, dinâmicas e discussões propostas, seja individualmente ou em grupo.

4.2

Roteiro

Agora teremos o roteiro, elaborado e diagramado nos moldes já mencionados outras vezes nesse trabalho.

Ficha Catalográfica

Faixa de classificação etária: Livre.

Áudio: Português.

Título Original: A Comunidade.

Gênero: Documentário.

Duração: Aproximadamente 10 minutos.

Produtora e ano de produção: M³ Matemática Multimídia (2012).

Tópicos matemáticos abordados: Geometria Plana.

Nível escolar sugerido: Ensino Fundamental II, Ensino Médio; Formação de Professores.

Pré-requisitos: Noções básicas de Geometria Plana (ponto, reta, segmento de reta, ponto médio e um segmento, mediatriz de um segmento), Ângulos, Triângulos, Circunferências Equidistância, Pontos Notáveis de um Triângulo (Baricentro, Incentro, Ortocentro e Circuncentro).

Marcadores: Documentário; Geometria; Circuncentro; Pontos notáveis de um triângulo.

Competências e habilidades da BNCC em Matemática e suas Tecnologias: (EF08MA17), (EF09MA11), (EM13MAT308), (EM13MAT512).

Link para o vídeo:

<https://www.youtube.com/watch?v=r45Xh1ncDxQ&feature=emb_imp_woyt>

Página da web oficial: <<https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1074>>

Imagens Seleccionadas



Figura 24: Imagens Seleccionadas

Fonte: A Comunidade (2012)

Sinopse - Trecho descrito de Guia do Professor (2018)

João precisa resolver o problema de onde montar uma horta na comunidade sem prejudicar as famílias envolvidas no projeto, para isso conta com a ajuda de Deucy. Na solução do problema, eles vão ter de lidar com o circuncentro de um triângulo.

Alguns objetivos com os quais esse vídeo pode ser usado

O vídeo pode ser usado para apresentar uma aplicação prática de um ponto notável do triângulo, o circuncentro. Além disso, o vídeo pode revisar, de forma rápida, os outros pontos notáveis de um triângulo.

Sensibilização (para montar um cartaz)

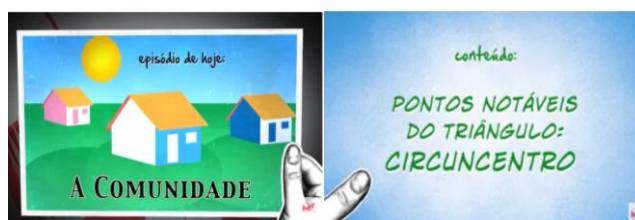


Figura 24: Imagens para montar um cartaz

Fonte: A Comunidade (2012)

Três famílias participam de um projeto e pretendem montar uma horta comunitária, mas uma questão precisa ser resolvida: A localização da horta não deve prejudicar nenhuma das famílias envolvidas. Para ajudar na solução desse problema João, o líder comunitário, conta com a ajuda de Deucy, que sugere algumas formas de resolver a situação. Qual será o melhor local para montar essa horta? Como garantir que a horta beneficie igualmente as três famílias?

Orientações metodológicas gerais

A seguir, apresentamos orientações metodológicas que podem ser encontradas em Rapozo (2020).

- O professor é livre para adequar ao seu tempo, à sua turma, às suas demandas pessoais, qualquer atividade sugerida aqui.
- É importante que o professor assista ao vídeo antes de trabalhar com ele em sala de aula.
- É interessante que os alunos leiam, antes de assistirem ao vídeo, as questões que serão trabalhadas.
- Os alunos costumam ficar mais motivados quando as atividades desenvolvidas fazem parte do processo avaliativo.

Sugestões de questões gerais

(Para serem trabalhadas logo após a exibição do vídeo)

1. Na sua opinião, o vídeo quer transmitir alguma mensagem? Qual?
2. Você aprendeu algo de novo com o vídeo? O que?
3. Segundo o vídeo, quais eram as duas maneiras de se resolver o problema?
4. Segundo o vídeo, qual é a definição de mediatriz?
5. Segundo o vídeo, como garantir que o circuncentro é equidistante dos três vértices do triângulo?
6. Quais são os outros pontos notáveis de um triângulo?
7. Porque o trajeto cuja soma das distâncias de cada casa até a horta não é o melhor?

8. Segundo o vídeo, qual é a relação existente entre o circuncentro, o ortocentro e o baricentro?
9. Segundo o vídeo, qual a importância do triângulo para a Geometria Plana?
10. Na sua opinião, qual a melhor solução para incluir a família do Sr. Raimundo no mutirão da horta comunitária?
11. No vídeo, Deucy fala sobre a Reta de Euler. Na sua opinião, porque o incentro não é também colinear com os outros pontos notáveis?
12. Pense que o seu melhor amigo de classe faltou à aula de hoje e pediu que você o explicasse o conteúdo visto em sala. Escreva uma mensagem de texto para esse amigo, explicando com suas palavras tudo o que você aprendeu na aula de hoje.
13. Do que você mais gostou no vídeo?
14. Se você fosse o diretor desse vídeo, faria algo diferente? O que?

Sugestões de questões específicas

(Para serem respondidas, pode ser necessário retornar ao vídeo)

1. No trecho (1:31 - 1:58), o vídeo mostra um triângulo e suas mediatrizes. Relate, passo a passo, como podem ser traçadas as mediatrizes desse triângulo.
2. No trecho (2:00 – 2:42), João e Deucy falam sobre o circuncentro e que esse é o ponto de equidistância entre os três vértices do triângulo.
 - a) Qual é a informação que justifica essa informação?
 - b) Porque é possível garantir que a circunferência passa pelos três vértices do triângulo?
 - c) Qual é o nome dado a essa distância do circuncentro até cada vértice?
3. O vídeo mostra, no trecho (2:41 – 3:10), que em um triângulo obtusângulo, o circuncentro ficaria fora do triângulo. Para você, o que justifica essa informação?
4. É relatado no vídeo, no trecho (3:40 – 5:35), a segunda possibilidade de traçar os caminhos e construir a horta. Explique com suas palavras o motivo de ter sido decidido construir no circuncentro e não no ponto Q.
5. O vídeo cita, no trecho (5:36 – 6:10), os outros pontos notáveis de um triângulo e fala como são formados. Faça uma pesquisa e responda quais são as principais características de cada um desses pontos.

6. No trecho (6:12 – 7:00), o vídeo mostra que três dos pontos notáveis de um triângulo estão sempre alinhados e que há uma relação proporcional entre eles.
- Quais são esses pontos?
 - Qual é a relação existente entre eles?
 - Essa relação é válida para o triângulo equilátero? Justifique.
 - Essa relação é válida para o triângulo isósceles? Justifique.
 - Na sua opinião, porque o incentro não está incluído nessa relação?
 - Você acha que existe alguma relação entre algum desses pontos que inclua o incentro? Justifique.
7. No trecho (7:15 – 8:34), João diz a Deucy que mais uma família deseja entrar no mutirão para a construção da horta. Como você resolveria essa situação?

Atividade proposta pelo programa Matemática Multimídia

Segundo Guia do Professor (2018), nas orientações para uso do vídeo “A Comunidade” podemos encontrar a sugestão de atividade que descreveremos a seguir:

Depois da execução do vídeo, como exercício de fixação, peça aos alunos que marquem três pontos em uma folha A4 e realizem o procedimento para obter o circuncentro utilizando régua e compasso. Em seguida, peça que verifiquem se o ponto encontrado é realmente equidistante dos demais.

Agora, em duplas, sugira que discutam o caso de quatro casas. Verifique se eles consideram fatores como a possibilidade de haver um ponto equidistante às casas, ou se discutem formas de encontrar o ponto que minimiza a soma das distâncias. Por fim, peça-os que mostrem o ponto em que pensam que a horta deva ser construída e apresentem seus argumentos para tal escolha.

Observações para o professor

- Recomendo ao professor o conhecimento sobre: “A comunidade-guia”, uma série Matemática na Escola que aborda o conteúdo desta disciplina no ensino médio através de situações, ficções e contextualizações. Os programas desta série são

elaborados tendo em vista a informação e podem ser introduzidos na sala de aula como forma de fechamento de um tema ou problema desenvolvidos pelo professor. São programas que agregam valor na aprendizagem por serem ricos em representações gráficas, dando suporte ao conteúdo matemático e pequenos documentários, trazendo informações interdisciplinares. Um desses programas traz uma aplicação prática envolvendo um dos pontos notáveis de um triângulo, o circuncentro (GUIA DO PROFESSOR, 2018).

- Conhecer os desafios e as possibilidades sobre o uso das tecnologias digitais também são extremamente importantes para a aprendizagem da matemática e aplicação de conteúdos diversificados. Neste sentido, sugiro a leitura do artigo “Desafios e possibilidades de uso de conteúdos digitais no ensino e na aprendizagem de matemática: o caso da coleção M³”, que demonstra o caso de uma coleção que foi desenvolvida para ser utilizada por professores do ensino médio, nas escolas e com seus respectivos alunos, de acordo com a realidade vivenciada pelos mesmos, como forma de ampliar o conhecimento sobre os conteúdos dados (OLIVEIRA, 2018).
- Após a leitura, sugiro também a busca pela ampliação do conhecimento sobre a reta de Euler e A reta de Euler e a circunferência de 9 pontos. O artigo “Sobre a reta de Euler” demonstra informações importantes sobre o assunto em questão, tendo como base cinco definições básicas sobre o triângulo: conceito de triângulo e sua classificação, Ponto Médio, Mediana, Mediatriz e Bissetriz. A compreensão desses conceitos é extremamente importante para o ensino do conteúdo em questão (TOLEDO, 2017).
- Neste mesmo sentido, recomendo também a leitura dos artigos; “A Reta de Euler e a Circunferência de Nove Pontos” e “A Reta de Euler e a circunferência de nove pontos: um olhar algébrico” que apresentam uma abordagem conceitual sobre a descoberta de Leonhard Euler no século XVIII de que os pontos notáveis de um triângulo seriam: O (circuncentro), G (baricentro) e H (ortocentro) estão sobre uma reta, denominada, em sua homenagem, de reta de Euler. A existência de uma circunferência que passa pelos pontos médios dos lados de um triângulo e pelos pés das alturas do mesmo é um resultado que foi considerado interessante pelos autores do texto, sendo este feito, atribuído a Euler. No entanto, somente em 1820 que o Brianchon e Poncelet mostraram que os três pontos médios entre o ortocentro e os vértices também pertencem à mesma circunferência, denominada

oficialmente em 1842 de a “Circunferência de nove pontos” (ROJAS, 2017) e (SOUTO, 2013).

- O conhecimento sobre o incentro e suas particularidades também é importante para ampliar o conhecimento do professor sobre o conteúdo. Assim, recomendo a leitura do artigo “A vingança do incentro” que apresentam informações sobre o fato do circuncentro O , o baricentro G e o ortocentro H de um triângulo que estejam alinhados a Reta de Euler, onde a distância de GH é o dobro de OG . Além disso, também demonstram que o centro P do círculo de nove pontos é o ponto médio do segmento cujos extremos são H e O , sendo considerados pontos tipicamente inclinados, no sentido que sua existência depende da Axioma das Paralelas, sendo estas as particularidades do incentro (DALCIN, HELMEISTER, 2018).

Referências relacionadas (com a seção anterior)

- GUIA DO PROFESSOR. *A Comunidade*. Série: Matemática na Escola. Ministério da Ciência e Tecnologia. 2018
- OLIVEIRA, Samuel Rocha de. *Desafios e possibilidades de uso de conteúdos digitais no ensino e na aprendizagem de matemática: o caso da Coleção M³*. 2018. Dissertação (Bacharelado em Matemática Aplicada) – IMECC – Unicamp, 2018.
- TOLEDO, Bárbara C.; Santos, Tiago Fontes. *Sobre a Reta de Euler*. 2017. Revista de Matemática de Ouro Preto, v.1 pp:51-59 2017.
- ROJAS, Jacqueline; Mendonça, Ramón. *A Reta de Euler e a Circunferência de Nove Pontos*. Matemática Universitária nos 48/49, 2017.
- DALCIN, Mário; HELMEISTER, Ana Catarina P. *A Vingança do Incentro*. Sociedade Brasileira de Matemática. 2018.
- SOUTO, Antônio Marco da Silva. *A Reta de Euler e a circunferência de nove pontos: um olhar algébrico*. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

5

Considerações Finais

Através da realização deste trabalho, foi possível analisar o conceito e a aplicação dos pontos notáveis de um triângulo (Ortocentro, Baricentro, Circuncentro e Incentro) e sua relação com reta de Euler, onde foi demonstrado que o uso dos recursos midiáticos, como os vídeos, por exemplo, podem ser excelentes ferramentas para ampliar o conhecimento do aluno sobre este assunto.

O estudo sugere que os vídeos, quando bem administrados, são eficazes, levando os alunos a expandirem seu conhecimento sobre um determinado tema. No entanto, para o alcance desse objetivo, torna-se necessário a seleção dos mesmos de forma estratégica, como no caso do exemplo apresentado no estudo em que, para explicar sobre o circuncentro, foi selecionado um vídeo que abordasse sobre essa particularidade.

O vídeo selecionado: A comunidade: o circuncentro do triângulo” trouxe informações específicas sobre o circuncentro de uma forma dinâmica, com a apresentação de uma situação-problema em que os alunos teriam que aplicar o conceito do mesmo para a resolução do problema, o que pode possibilitar maior compreensão sobre este, que é um dos pontos notáveis de um triângulo.

Foi mencionado também que, com relação a atuação do professor na aplicação do vídeo como recurso midiático, torna-se necessário a adoção de uma visão sobre a importância do mesmo no contexto escolar, uma vez que o aluno vivencia um contexto marcado pelo avanço da tecnologia.

Neste sentido, na atualidade, há uma série de vídeos criativos que podem enriquecer o processo de ensino-aprendizagem, mas para o alcance desse objetivo há uma necessidade de mudança de paradigma do profissional, paradigma este que abrange o tradicional uso do livro didático e aplicação de atividades extras em folha impressa em que, boa parte dos alunos, encontram-se desmotivados.

Outro ponto importante considerado foi com relação a importância do domínio do professor sobre os pontos notáveis do triângulo e a Reta de Euler, destacando a necessidade de leituras responsivas de arquivos além dos materiais didáticos sobre o assunto, sendo sugerido artigos específicos para que os mesmos possam expandir seu

conhecimento sobre a temática. Em outras palavras, ter domínio do assunto, significa mais eficiência no processo de ensino e aprendizagem.

Assim, o estudo em questão, apresentou como foco a sugestão de aplicação do uso do vídeo como forma de cativar a atenção do aluno diante dos mais variados conteúdos matemáticos dados em sala de aula, como o circuncentro, por exemplo, um dos pontos notáveis do triângulo. Neste sentido, acredita-se que os objetivos propostos foram concretizados com êxito, uma vez que possibilitou a compreensão do conteúdo abordado..

Referências

ARAÚJO, Isabele Cristina D. **Recursos didáticos, formação inicial docente e o processo de ensino e aprendizagem no Pibid geografia UFRN**. 2015. Disponível em: <https://journals.openedition.org/confins/10605>. Acesso em: ago. 2021

BIDA, Luzybek Tuski. **Pontos Notáveis no Triângulo**. 2016. Disponível em: <https://www.geogebra.org/m/czh9fx4a>. Acesso em: 26 mar. 2021

BRASIL, **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)**. Ciências Humanas e suas tecnologias. Brasília: MEC. 1995

_____, Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular (BNCC)**. Brasília, 2018.

CARVALHO, Ana Carolina de Souza. **A importância da isenção de vídeos e filmes na prática do docente no ensino fundamenta I**. 2017. Dissertação (Graduação em Pedagogia) – Universidade Federal de Juiz de Fora, 2017.

DALCIN, Mário; HELMEISTER, Ana Catarina P. **A Vingança do Incentro**. Sociedade Brasileira de Matemática. 2018.

DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Fundamentos da Matemática 9 Elementar: Geometria Plana**; 7ª edição, Atual Editora, 2009.

GUIA DO PROFESSOR. **A Comunidade**. Série: Matemática na Escola. Ministério da Ciência e Tecnologia. 2018

JARDIM, Lucas Augusto; CECÍLIO, Waléria. A. G. **Tecnologias Educacionais: aspectos positivos e negativos em sala de aula**. XI Congresso Nacional de Educação-EDUCERE, Curitiba, 2013.

MASSAGO, Sadao. **Pontos Notáveis de um Triângulo**. 2014. Disponível em: [file:///C:/Users/Trabalho/Downloads/geometria-plana-elementar-pontos-notaveis-de-um-triangulo%20\(1\).pdf](file:///C:/Users/Trabalho/Downloads/geometria-plana-elementar-pontos-notaveis-de-um-triangulo%20(1).pdf). Acesso em: 27 mar. 2021

MORAN, José Manuel. **O vídeo na sala de aula**. Revista Comunicação & Educação. São Paulo, ECA-Ed. Moderna, n. 2: 27 a 35, jan./abr. de 1995

MORGADO, A.C; WAGNER, E.; JORGE, M. **Geometria I: 2º Grau, exames e vestibulares**. 5ª Edição, Francisco Alves, 1990

OLIVEIRA, Samuel Rocha de. **Desafios e possibilidades de uso de conteúdos digitais no ensino e na aprendizagem de matemática: o caso da Coleção M³**. 2018. Dissertação (Bacharelado em Matemática Aplicada) – IMECC – Unicamp, 2018.

PAZZINI, Darlin Nalú A.; ARAÚJO, Fabrício Vieira. **O Uso do vídeo como ferramenta de apoio ao ensino-aprendizagem**. 2018. Dissertação (Especialização em Mídias na Educação) – Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões. 2018.

RAPOZO, André de Carvalho. **O uso de vídeos no ambiente escolar: explorando estatísticas e probabilidade por meio de narrativas**. 2020. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2020.

PEREIRA, Hamanda de Aguiar. **O uso de desenhos animados no ambiente escolar: explorando Matemática por meio de narrativas**. 2019. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2019.

MIRANDA, Fabiana Silva de. **O uso de vídeos no ambiente escolar: explorando números e medidas por meio de narrativas**. 2019. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal Fluminense, Niterói, 2019.

ROJAS, Jacqueline; MENDONÇA, Ramón. **A Reta de Euler e a Circunferência de Nove Pontos**. Matemática Universitária nos 48/49, 2017.

SOUTO, Antônio Marco da Silva. **A Reta de Euler e a circunferência de nove pontos: um olhar algébrico**. 2013. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2013.

SZENDRODI, P.C; et al. Análise gráfica e analítica da Reta de Euler e três pontos notáveis, em triângulos no espaço R^2 . **Cadernos do IME - Série Matemática**, n. 12. Disponível em: <https://doi.org/10.12957/cadmat.2018.33835>. Acesso em: 27 mar. 2021

TOLEDO, Bárbara C.; SANTOS, Tiago Fontes. Sobre a reta Euler. **Revista de Matemática de Ouro Preto**, v.1 pp:51-59 2017: 2237-8103