Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Rodrigo Pereira Pacheco

Destruction of Invariant Graphs by C^{1,\beta} Perturbations

Tese de Doutorado

Thesis presented to the Programa de Pós-Graduação em Matemática of the Departamento de Matemática, PUC–Rio, as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doutor em Matemática.

Advisor: Prof. Rafael Oswaldo Ruggiero Rodriguez

Rio de Janeiro
March 2014

Pontifícia Universidade Católica
do Rio de Janeiro

Rodrigo Pereira Pacheco

Destruction of Invariant Graphs by C^{1,\beta} Perturbations

Thesis presented to the Programa de Pós-Graduação em Matemática of the Departamento de Matemática do Centro Técnico Científico da PUC–Rio, as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doutor.

Prof. Rafael Oswaldo Ruggiero Rodriguez
Advisor
Departamento de Matemática - PUC-Rio

Prof. Mário Jorge Dias Carneiro
Departamento de Matemática - UFMG

Prof. Umberto Leone Hryniewicz
Departamento de Matemática - UFRJ

Prof. Clodoaldo Grotta Ragazzo
Instituto de Matemática - USP

Prof. José Antônio Gonçalves Miranda
Departamento de Matemática - UFMG

Prof. José Barbosa Gomes
Instituto de Matemática - UFJF

Prof. David Francisco Martínez Torres
Departamento de Matemática - PUC-Rio

Prof. José Eugenio Leal
Coordinator of the Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, March 28th,2014

Rodrigo Pereira Pacheco

B.A. in Mathematics, from Universidade do Espírito Santo and M.A. in Mathematics, from Pontfícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Bibliographic data

Pacheco, Rodrigo P.

Destruction of Invariant Graphs by C^{1,\beta} Perturbations / Rodrigo Pereira Pacheco; advisor: Rafael Oswaldo Ruggiero Rodriguez . — 2014.
66 f. : il. ; 30 cm

Tese (Doutorado em Matemática) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2014.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Geometria Finsler conforme. ; 3. Equação de Jacobi. ; 4. Gráficos Lagrageanos. ; 5. Equação de Euler-Lagrange. ; 6. Pontos conjugados. . I. Pacheco, Rodrigo P.. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

To Sabrina and Maria Stella.

Acknowledgments

First and foremost I would like to thank God. The faith I have in you was the light that guided me through these years.

I would like to express my sincere gratitude to my advisor Rafael O. Ruggiero for his availability, patience and for teaching me a lot of interesting things.

I would like to thank my committee members, professor Mário Jorge D. Carneiro, professor Umberto L. Hryniewicz, professor Clodoaldo G. Ragazzo, professor José Antônio G. Miranda, professor José B. Gomes and professor David Francisco M. Torres.

I would like to thank my beloved wife Sabrina for always standing by my side with love, patience and care. This work couldn't have been done without you. I would also like to thank our daughter Maria Stella for being an inspiration.

A very special thanks to my parents Ronaldo and Jussara for all the love, trust and support. I would like to thank my sister Clarisse for the encouragement and affection.

Many thanks to Lourdinha, Thomaz e Tom for receiving me in their home and in their family.

I would also like to thank my dearests friends José Victor and Juliana for all the happy hours we spent together.

Thanks to my all my friends from PUC-Rio for the companionship and support. In particular, thanks to André, Felipe, Miguel, Débora, João Paulo, Ady, Alessandro Edgar and Tiane.

I would like to thank professor Ricardo Sá Earp, professor Paul Schweitzer, professor Alex Lúcio Castro, professor Carlos Tomei, professor Lorenzo Díaz and professor Jairo Bochi.

I would also like to thank the staff of Secretaria de Matemática. In particular to Kátia, Creuza and Orlando.

I would like to thank CNPq and FAPERJ for the financial support.

Abstract

Pacheco, Rodrigo P.; Ruggiero, Rafael O.. **Destruction of Invariant Graphs by C^{1,\beta} Perturbations**. Rio de Janeiro, 2014. 66p. Tese de Doutorado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

According to the theory developed by Kolmogorov, Arnold and Moser in the sixties, the majority of invariant tori persists under a C^3 perturbation of a integrable Hamiltonian. A natural question is if a perturbation in the C^k topology, $k < 3$, still preserves such tori. Bangert showed that, in the C^1 topology, what happens is the opposite: there are metrics with no invariant torus arbitrarily close to any given Riemannian metric. Ruggiero extended these results to mechanical Lagrangians in the torus and showed that for Riemannian metrics this phenomenon is C^1 generic. In this work, we show that, given $\epsilon > 0$, $E \in \mathbb{R}$ and a reversible Tonelli Hamiltonian $H : T\mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$, there exists $\beta \in (0, 1)$ and an ϵ perturbation H_0 of H in the $C^{1,\beta}$ topology such that H_0 has no continuous invariant graphs. The result is achieved by explicitly exhibiting a Finsler metric, without any continuous field of minimizers, constructed after an analytic study of the Jacobi operator.

Keywords

Conformal Finsler Geometry; Jacobi equation; Lagrangian graphs; Euler-Lagrange equation; Conjugate points.

Resumo

Pacheco, Rodrigo P.; Ruggiero, Rafael O.. **Destruição de gráficos invariantes por perturbações C^{1,\beta}** . Rio de Janeiro, 2014. 66p. Tese de Doutorado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Segundo a teoria desenvolvida por Kolmogorov, Arnold e Moser na década de sessenta, a grande maioria dos toros invariantes persistem após uma perturbação C^3 de um Hamiltoniano integrável. Uma pergunta natural é se perturbações em topologias C^k, para $k < 3$, ainda preservam tais toros. Bangert mostrou que a situação é a oposta na topologia C^1 : arbitrariamente próximo de uma métrica Riemanniana plana no toro existem métricas sem nenhum toro invariante. Ruggiero estendeu esses resultados para Lagrangeanos mecânicos no toro e mostrou que, no caso de métricas Riemannianas, esse fenômeno é C^1 genérico. Neste trabalho, mostramos que, dado $\epsilon > 0$, $E \in \mathbb{R}$ e um Hamiltoniano de Tonelli reversível $H : T\mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$, existe $\beta \in (0, 1)$ e uma ϵ perturbação H_0 de H tal que H_0 não possui gráficos contínuos invariantes. Para tal, construimos explicitamente uma métrica Finsler, sem nenhum campo contínuo de minimizantes, através de um estudo analítico do operador de Jacobi.

Palavras–chave

Geometria Finsler conforme; Equação de Jacobi; Gráficos Lagrageanos; Equação de Euler-Lagrange; Pontos conjugados.

Contents

List of Figures