

7

Estudo de Casos: Obtenção de uma Regra de Decisão Ótima por Aproximação com Algoritmos Genéticos

7.1. Introdução

Este capítulo analisa o problema de decisão de investimento num projeto sujeito a incertezas de mercado, para o qual se têm várias alternativas (opções) de investimento.

Neste capítulo apresenta-se o desenvolvimento de um modelo baseado em Algoritmos Genéticos e simulação Monte Carlo para encontrar uma regra de decisão ótima para alternativas de desenvolvimento de um projeto considerando incertezas de mercado, que permita ajudar na tomada de decisão entre investir imediatamente ou esperar por melhores condições de mercado. O estudo de caso apresentado neste capítulo corresponde à decisão de investir no desenvolvimento de uma reserva de petróleo.

7.2. Descrição do Problema

A decisão de investir no desenvolvimento de uma reserva de petróleo requer uma profunda análise de vários fatores de incerteza. Estas incertezas podem ser técnicas ou de mercado (preço do petróleo). Opções Reais vêm sendo usadas na análise de opção de investimentos por considerar incertezas e a flexibilidade da gerência, tendo por objetivo maximizar o valor da oportunidade de investimento.

Neste estudo considera-se que não existem incertezas técnicas. A análise das incertezas de mercado ajudará na decisão de investir no campo imediatamente ou esperar melhores condições de mercado.

Quando se têm muitas alternativas (opções) de investimento, a seleção da melhor alternativa ou de uma regra de decisão é uma tarefa muito importante e complexa devido ao grande número de possibilidades e parâmetros a serem considerados.

O objetivo deste trabalho é obter uma regra de decisão ótima de investimento para uma reserva de petróleo considerando incertezas de mercado, especificamente, o preço do petróleo. Esta regra de decisão é formada por três alternativas mutuamente exclusivas, as quais descrevem três regiões de exercício no transcurso do tempo até a expiração da concessão do campo.

Cada alternativa apresenta uma curva de exercício ótimo, denominada curva de gatilho, que determina o valor crítico para o exercício ótimo da opção real. Todas as curvas de gatilho juntas representam a regra de decisão que maximiza o valor da opção dessas alternativas.

Tradicionalmente, para avaliar cada alternativa de investimento no campo de petróleo, procura-se maximizar o Valor Presente Líquido (VPL) [2] [81], isto é, a melhor alternativa é a de maior VPL [24] [25] [26] [82]. A equação do VPL nesse caso é mostrada a seguir:

$$VPL_t = qP_t B - D \quad (55)$$

onde q é a qualidade econômica da reserva, P é o preço do petróleo, B é o tamanho estimado da reserva e D é o investimento para desenvolvimento do campo. Observa-se na fórmula do VPL que esta é aplicável quando todos os seus termos são conhecidos (valores determinísticos). Todavia, em um problema real, todos estes termos podem variar no tempo, sendo fontes de incerteza para o problema. Para este trabalho foi considerado que só existem incertezas de mercado, isto é, que o preço do petróleo é a única fonte de incerteza.

7.3. Modelando as Incertezas do Preço do Petróleo

Neste estudo de caso a incerteza de mercado é representada pelas oscilações no preço do petróleo. Foram realizados dois experimentos em que se consideram dois processos estocásticos para o preço do petróleo, respectivamente: o Movimento Geométrico Browniano e o Processo de Reversão à Média, descritos no Apêndice C. O movimento geométrico browniano é o processo estocástico mais usado na literatura de finanças e opções reais para *commodities* [1]. Mesmo não sendo o melhor para *commodities*, o MGB é considerado razoável para a

análise feita neste trabalho. O segundo processo estocástico usado, processo de reversão à média, é mais realista para modelar o preço do petróleo.

O modelo híbrido proposto pode ser facilmente adaptado para utilizar outros processos estocásticos mais sofisticados (tais como o processo de reversão à média com saltos) pela mera substituição da função que simula o preço do petróleo. Esta é uma vantagem do modelo proposto sobre o método de equações diferenciais parciais, onde é preciso reconstruir estas equações, assim como implementar um novo software para resolvê-las, cada vez que se muda o processo estocástico utilizado para simular o preço do petróleo.

Além disso, o modelo híbrido proposto é capaz de trabalhar com várias alternativas (opções) de investimento sem precisar de modificações.

7.4. Regra de Decisão Ótima

A curva de gatilho, ou curva de exercício ótimo da opção, representa a regra de decisão para o desenvolvimento do campo. Com a simulação do preço do petróleo $P(t)$ é possível estimar o valor de desenvolvimento de uma reserva, $V(t) = q * B * P(t)$. O gatilho é o nível crítico que faz ótimo o investimento imediato para desenvolver o campo de petróleo. Esta curva de gatilho determina a regra de decisão para o exercício da opção (o exercício é acima da curva de gatilho) que maximize o valor da opção real. Neste trabalho a curva de gatilho será determinada usando-se um algoritmo genético.

Na Figura 29 mostram-se a curva de gatilho e dois caminhos possíveis para o preço do petróleo até a expiração da opção. No primeiro caminho o preço do petróleo alcança a curva de gatilho no ponto “A” (no tempo $t=1.2$ neste exemplo). Nesse momento a regra de decisão indica exercer a opção de investimento representada pela curva de gatilho. O valor da opção nesse momento é $F(1.2) = VPL = V - D = qP_t B - D$, trazido ao presente por meio de sua multiplicação pelo fator $\exp(-rt)$. O outro caminho do preço do petróleo na Figura 29 passa todo o tempo de vida da opção sem alcançar a curva de gatilho (ponto B), e neste caso o valor da opção é zero. Neste caso a regra de decisão indica não exercer a opção e esperar por melhores condições.

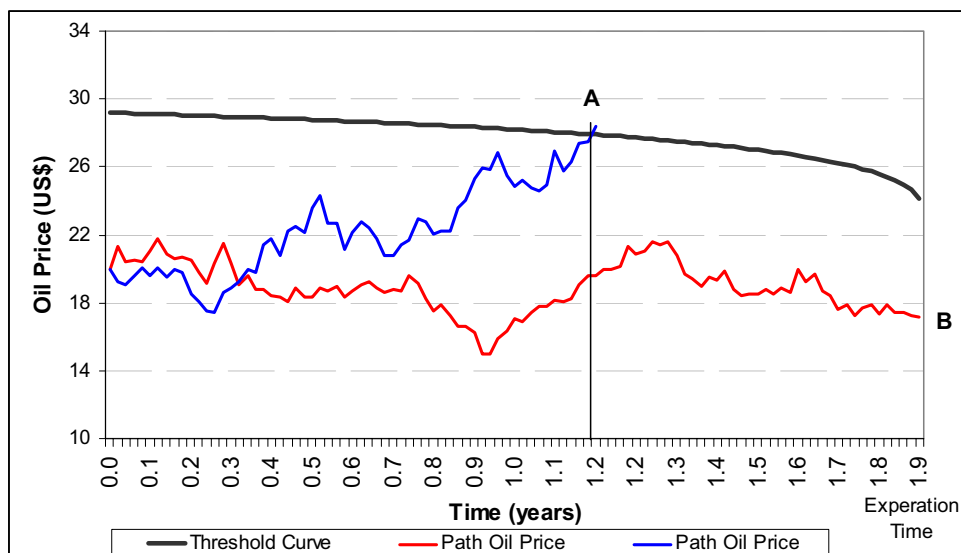


Figura 29 - A curva de gatilho e caminhos do preço do petróleo

Desta forma a curva de gatilho descreve duas regiões: a região de exercício acima da curva e a região de espera abaixo da curva.

Quando o número de alternativas aumenta a regra de decisão é formada pela interseção das curvas de gatilho de cada alternativa, considerando a formação de possíveis regiões de espera entre as alternativas.

7.5. Modelagem do Problema

Nesta seção descreve-se o modelo proposto que integra a simulação Monte Carlo e a teoria de opções reais a um algoritmo genético para a obtenção de uma regra de decisão ótima para três alternativas de investimento, considerando incerteza no preço do petróleo.

A fim de simular o preço do petróleo, foram considerados os seguintes parâmetros:

Tempo para a expiração (T): 2 anos

Discretização do tempo (Δt): 7 dias

Taxa livre de risco (r): 8 %

Taxa de conveniência do campo de petróleo (δ): 8 % a.a.

Volatilidade do preço (σ): 25 % a.a.

Preço inicial do petróleo (P_0): 20 US\$/bbl.

Velocidade de reversão à média (η): 0.4366

Taxa de desconto ajustada ao risco (ρ): 0.12

As três alternativas consideradas apresentam os seguintes parâmetros:

	Alternativa 1	Alternativa 2	Alternativa 3
Tamanho estimado da reserva (B):	400 MM de barris.	400 MM de barris.	400 MM de barris.
Qualidade da reserva (q):	8%	16%	22%
Investimento para desenvolvimento (D):	400 MM US\$	1000 MM US\$	1700 MM US\$

Tabela 24 - Parâmetros das três alternativas

Observa-se na Tabela 24 que somente faz sentido considerar alternativas de maior investimento se elas possibilitarem um aumento da qualidade econômica da reserva, isto é, se o investimento em mais poços (maior D), para drenar o mesmo reservatório, implicar no aumento da qualidade econômica da reserva desenvolvida (maior q).

O problema de determinar a regra de decisão ótima para estas três alternativas, considerando a incerteza no preço do petróleo, é um problema computacionalmente difícil, devido à sua não linearidade. Por isso, algoritmos genéticos apresentam-se como uma boa alternativa para encontrar a regra ótima de decisão de desenvolvimento do campo de petróleo.

A curva de gatilho pode ser aproximada mediante funções logarítmicas da forma $a + b \ln(\tau)$, mais um ponto livre que é situado próximo da expiração da opção, o que ocorre em um tempo τ (tempo de expiração da opção) [23] [24] [25] [26] [82]. A função logarítmica é empregada por ser uma boa aproximação da curva de gatilho obtida pelo método de diferenças finitas. Quando são analisadas várias alternativas, há várias curvas de gatilho mutuamente exclusivas que determinam as regiões de exercício; estas regiões são delimitadas pelas interseções entre elas. Considera-se também a possibilidade de existirem períodos de espera entre as regiões formadas pelas curvas de gatilho das alternativas. Estas regiões de espera são também aproximadas por funções logarítmicas $a_w - b_w \ln(\tau)$ e um ponto livre. O valor dos coeficientes das funções (a, b, a_w, b_w) e os pontos livres são determinados pelo algoritmo genético.

Assim, para o caso de três alternativas, podem ser formadas cinco regiões (duas regiões de espera e três regiões de exercício, uma para cada alternativa).

7.6. Representação do Cromossomo

Este estudo considera três alternativas e regiões de espera, emprega-se um algoritmo genético com representação real [14] para determinar a regra de decisão ótima das três alternativas que maximiza o valor presente líquido da opção real. O cromossomo é composto de 5 genes, cada gene é formado por três alelos. Os três alelos de cada gene do cromossomo são números reais que representam os parâmetros da curva de gatilho de cada alternativa (variáveis a e b da curva $a + b \ln(\tau)$ e o ponto livre) [23] [24] [25] [26], assim como para as curvas que determinam as possíveis regiões de espera, conforme ilustrado na Figura 30. Estas curvas de gatilho e de espera estão sujeitas a um conjunto de restrições que devem ser cumpridas no processo de geração de cada cromossomo. Estas restrições garantem que o cromossomo possa formar as regiões de exercício, assim como introduzem heurísticas sobre o problema de modo a reduzir o espaço de busca das soluções ótimas. Foram consideradas restrições de domínio para cada gene e restrições lineares para cada curva.

Para se definir as restrições de domínio é necessário calcular o preço crítico do petróleo na expiração. Este preço é possível de ser calculado porque, para que na expiração o exercício da opção seja atrativo, o VPL da opção deve ser no mínimo zero ou igual ao VPL da alternativa de menor investimento. Assim, para a alternativa 1, que é a de menor investimento, deve-se igualar a equação (55) a zero para se obter o preço crítico do petróleo:

$$VPL_{T1} = q_1 P_{T1} B - D_1 = 0 \quad VPL \text{ na expiração para uma alternativa } 1$$

O preço crítico do petróleo para a alternativa 1 é, portanto:

$$P_{T1} = \frac{D_1}{q_1 B} = \frac{400}{0.08(400)} = 12.5$$

Para se calcular o preço crítico do petróleo para a alternativa 2, iguala-se o VPL na expiração desta alternativa com o VPL da alternativa 1:

$$VPL_{T_2} = VPL_{T_1}$$

$$q_2 P_{T_2} B - D_2 = q_1 P_{T_1} B - D_1$$

$$P_{T_2} = \frac{D_2 - D_1}{(q_2 - q_1)B} = \frac{1000 - 400}{(0.16 - 0.08)400} = 18.75$$

Finalmente, para se calcular o preço crítico do petróleo para a alternativa 3, iguala-se o VPL na expiração com o VPL da alternativa 2:

$$VPL_{T_3} = VPL_{T_2}$$

$$q_3 P_{T_3} B - D_3 = q_2 P_{T_2} B - D_2$$

$$P_{T_3} = \frac{D_3 - D_2}{(q_3 - q_2)B} = \frac{1700 - 1000}{(0.22 - 0.16)400} = 29.16$$

Considera-se que o preço máximo (P_{Max}) que o petróleo pode atingir é de 60 US\$/bbl.

As restrições de domínio para cada parâmetro da curva de gatilho e da curva de espera (gene do cromossomo) são apresentadas na Tabela 25:

Gatilho Alternativa 1	$P_{T_1} \leq Pto\ Livre_1 \leq P_{T_2}$	$0 \leq a_1 \leq P_{T_2}$	$0 \leq b_1 \leq \frac{P_{Max}}{\ln(T + \Delta t)}$
Gatilho Alternativa 2	$P_{T_2} \leq Pto\ Livre_2 \leq P_{T_3}$	$P_{T_1} \leq a_2 \leq P_{T_3}$	$0 \leq b_2 \leq \frac{P_{Max}}{\ln(T + \Delta t)}$
Gatilho Alternativa 3	$P_{T_3} \leq Pto\ Livre_3 \leq P_{Max}$	$P_{T_2} \leq a_3 \leq P_{Max}$	$0 \leq b_3 \leq \frac{P_{Max}}{\ln(T + \Delta t)}$
Espera 1	$P_{T_1} \leq Pto\ Livre_4 \leq P_{T_2}$	$P_{T_1} \leq a_4 \leq P_{T_2}$	$0 \leq b_4 \leq \frac{P_{Max} - P_{T_2}}{\ln(T + \Delta t)}$
Espera 2	$P_{T_2} \leq Pto\ Livre_5 \leq P_{T_3}$	$P_{T_2} \leq a_5 \leq P_{T_3}$	$0 \leq b_5 \leq \frac{P_{Max} - P_{T_3}}{\ln(T + \Delta t)}$

Tabela 25 – Restrições para cada gene do cromossomo

As restrições lineares impostas para cada curva de gatilho e curva de espera são as seguintes:

$$a + b \ln(0.1 + dt) \geq \text{PontoLivre}$$

$$a_w - b_w \ln(0.1 + dt) \leq \text{PontoLivre}$$

$$a + b \ln(0.1 + dt) \geq 0$$

$$a_w - b_w \ln(0.1 + dt) \geq 0$$

Os pontos livres são escolhidos em cada alternativa para o mesmo instante de tempo correspondente a 0.1 de ano. A curva logarítmica começa no instante $0.1 + \Delta t$, onde Δt corresponde ao intervalo de tempo.

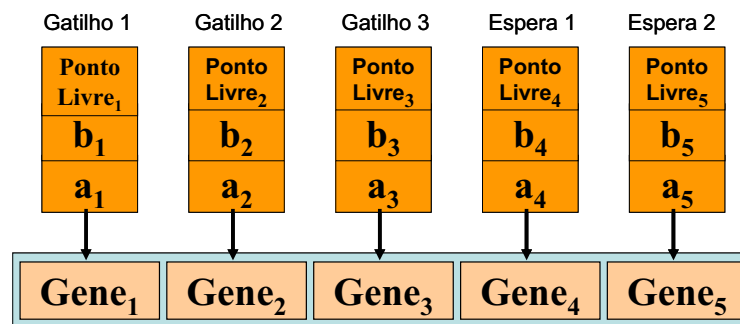


Figura 30 – Cromossomo

Os operadores genéticos utilizados no processo de evolução do algoritmo genético são os de cruzamento e mutação para números reais, descritos no livro de Michalewicz [14]. Os diferentes tipos de operadores de cruzamento e mutação utilizados garantem que os novos indivíduos criados se encontrem no espaço de busca definido pelas restrições [14].

Entre os diferentes tipos de operadores genéticos de cruzamento e mutação para representação com números reais, foram empregados os seguintes:

- Mutação uniforme;
- Mutação de fronteira;
- Mutação não uniforme;
- Cruzamento aritmético;
- Cruzamento simples;

- Cruzamento geométrico;
- Cruzamento Sphere;

Estes tipos de operadores garantem que os indivíduos resultantes pertençam ao espaço de busca, permitindo acelerar a convergência e garantindo que a solução saia de um mínimo local, além de fazer uma busca local nas últimas gerações. Cada operador apresenta uma probabilidade de aplicação, de tal forma que, quando o algoritmo genético efetua o sorteio para fazer um cruzamento ou mutação (segundo as respectivas taxas de cruzamento e mutação), sorteia-se também que operador será executado.

O algoritmo genético foi executado com os seguintes parâmetros:

Tamanho da população: 1000 indivíduos.

Número de gerações: 100

Percentual de restituição da população: 0.25

7.7. Avaliação do Cromossomo

O objetivo do Algoritmo Genético é maximizar o valor presente líquido dinâmico da opção real (VPL da reserva de petróleo, equação (55), onde o preço do petróleo depende do tempo. Para este fim, emprega-se a simulação Monte Carlo com 10.000 iterações, sendo que em cada iteração (i) é estimado o preço do petróleo para cada intervalo de 2 dias (t), até a expiração (2 anos), supondo que o preço do petróleo segue um processo estocástico. Como foi indicado anteriormente, neste trabalho foram realizados dois experimentos: no primeiro usou-se o movimento geométrico browniano e, no segundo, o processo de reversão à média para o preço do petróleo; com eles foi usada também a técnica de redução de variância: *Latin Hypercube Sampling*, vide Apêndice B. Desta maneira, para cada iteração é formado um “caminho” do preço do petróleo que denominamos $Path_i$.

A avaliação do cromossomo (j) inicia-se com a primeira iteração da simulação Monte Carlo ($i = 1$); para esta iteração tem-se um $Path_i$ do preço do petróleo, e, para cada t deste $Path_i$, é verificado se o preço do petróleo alcança

uma das regiões de exercício. Se o preço do petróleo alcança uma região, a opção é exercida, calcula-se o VPL para esse preço do petróleo e passa-se para a próxima iteração. Quando o exercício é feito em um instante $t > 0$, o valor presente líquido é atualizado pela taxa de desconto livre de risco, obtendo-se o valor da opção para essa iteração i (F_i). Concluído o $Path_i$, e não tendo sido alcançada nenhuma das regiões de exercício, então o VPL é zero. Este processo é repetido para cada iteração (i).

O valor de avaliação (*fitness*) para este cromossomo está determinado pela média dos *VPLs* encontrada para cada iteração, equação (56).

$$F_j = \frac{\sum_{i=1}^{10000} F_i}{N \circ \text{Iterações}} \quad (56)$$

O melhor cromossomo será aquele que maximize o valor de F_j .

A Figura 31 apresenta o fluxograma do modelo proposto. Nele observa-se como cada cromossomo gerado é validado de modo a satisfazer as restrições impostas, continuando até completar o número de indivíduos de uma população. Em seguida, emprega-se a simulação Monte Carlo. Para cada iteração (i) de Monte Carlo, simula-se a seqüência dos preços do petróleo, $Path_i$. A avaliação do cromossomo é dada pela média das avaliações do cromossomo para cada $Path_i$, até completar o total da população. A evolução do algoritmo genético prossegue com a aplicação dos operadores (cruzamento, mutação, etc.), aplicando-se o mesmo procedimento nas próximas gerações.

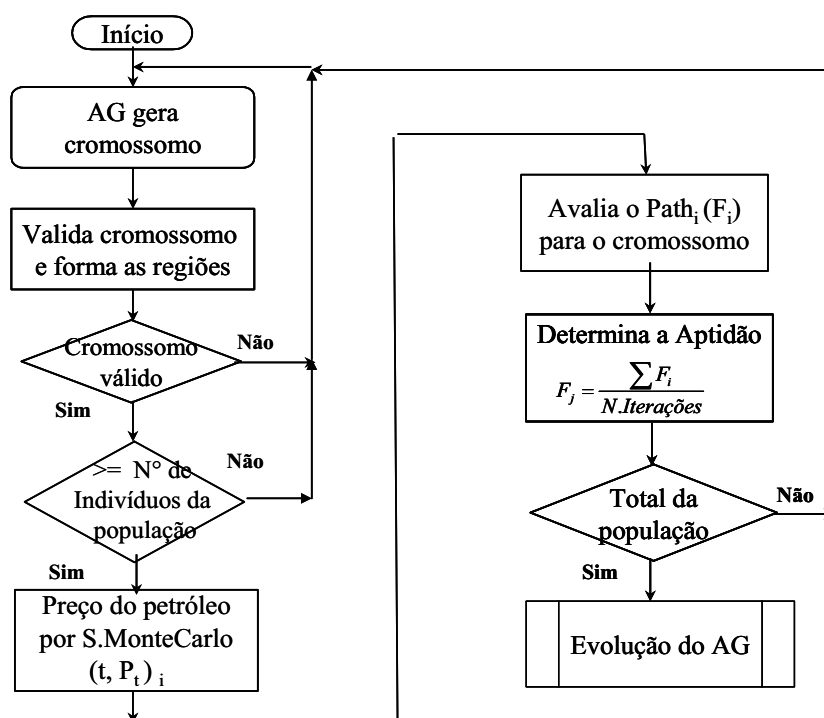


Figura 31 - Fluxograma do modelo

7.8. Resultados

Na Tabela 26 apresentam-se os resultados comparativos dos valores de VPL obtidos por meio de Algoritmos Genéticos e de Equações Diferenciais Parciais (EDP), tanto para o caso onde se considera que o preço do petróleo segue um Movimento Geométrico Browniano (MGB) quanto para o Processo de Reversão à Média (PRM). Como podem ser observados, os resultados são muito similares, demonstrando o bom desempenho do Algoritmo Genético.

	V. P. L. em MM\$	
	Algoritmo Genético	E. D. P.
MGB	325.063	323.34
MRM	305.84	313.86

Tabela 26 - Tabela comparativa do VPL obtido pelo Algoritmo Genético e por EDP

A Figura 32 apresenta a regra de decisão ótima obtida pelo algoritmo genético e a compara com a regra de decisão obtida pelo método de equações diferenciais parciais (EDP). Estas curvas são obtidas considerando-se que o preço

do petróleo segue um movimento geométrico browniano, com 10000 iterações da simulação Monte Carlo executadas para cada cromossomo. No gráfico podem ser observadas as regiões de exercício e as regiões de espera para cada alternativa.

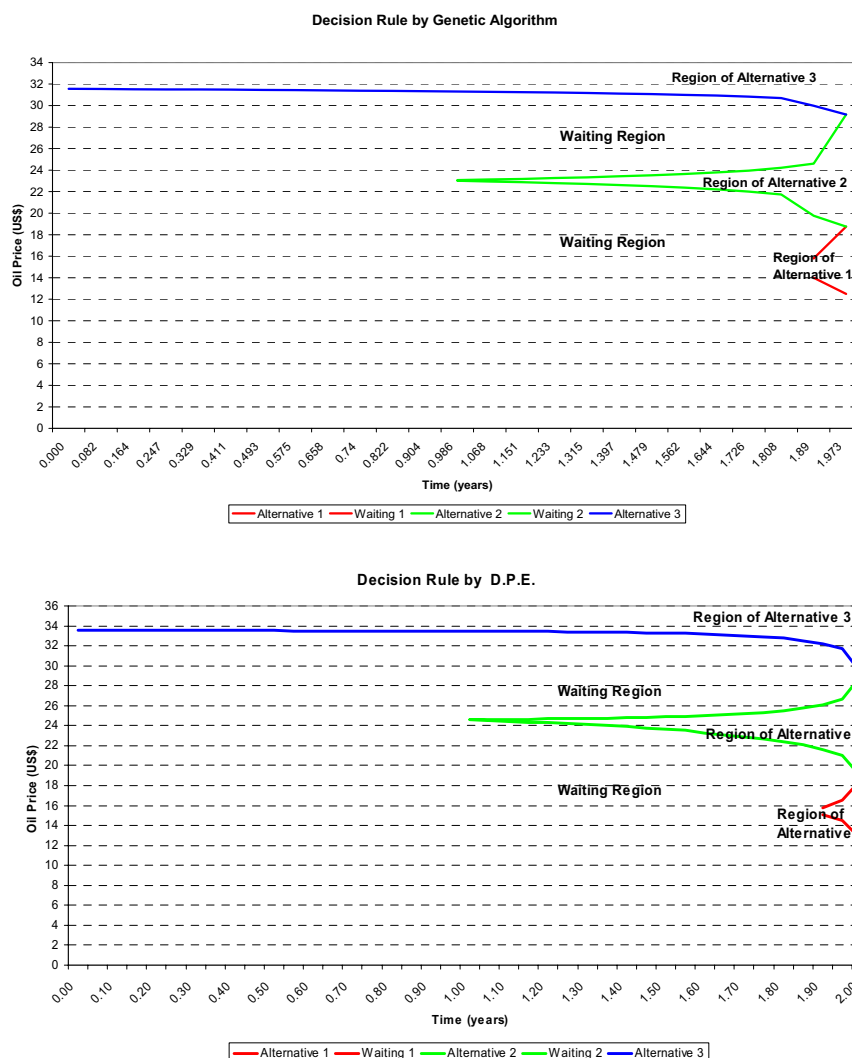


Figura 32 - Comparação das regra de decisão ótima obtidas pelo A.G. e E.D.P. quando o preço do petróleo segue um movimento geométrico browniano.

A Figura 33 apresenta a regra de decisão ótima obtida pelo algoritmo genético e a compara com a regra de decisão obtida pelo método de equações diferenciais parciais (EDP) considerando que, neste caso, o preço do petróleo segue um processo de reversão à média, com 10000 iterações da simulação Monte Carlo para cada cromossomo.

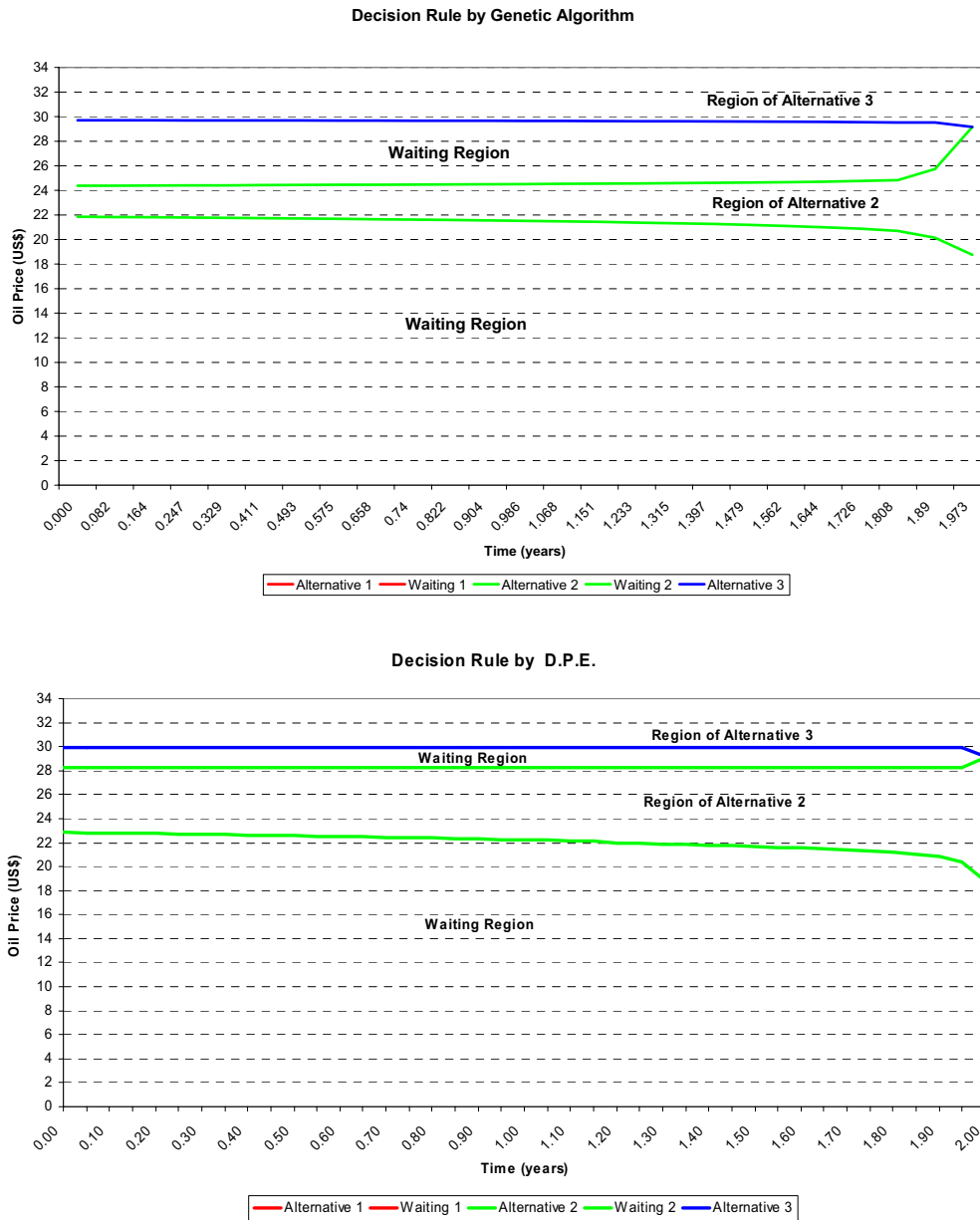


Figura 33 - Comparação das regra de decisão ótima obtidas pelo A.G. e E.D.P. quando o preço do petróleo segue um processo de reversão à média.

Os resultados obtidos pelo algoritmo genético foram similares aos resultados da análise por equações diferenciais parciais, demonstrando a eficiência do modelo que combina algoritmos genéticos e a simulação de Monte Carlo para aproximar uma regra de decisão ótima para várias alternativas (opções).