

5 Estudo de Casos: Valor da Opção de Expansão por Aproximação com Números *Fuzzy*

5.1. Introdução

Este capítulo apresenta o primeiro estudo de casos, no qual empregam-se números *fuzzy* na representação de incertezas técnicas e processos estocásticos para representar a incerteza de mercado (preço da *commodity*), juntamente com a simulação Monte Carlo, com o objetivo de reduzir o tempo computacional da simulação e obter uma boa aproximação do valor da opção real.

Este estudo de caso trata especificamente do problema de avaliação de uma opção de expansão em uma reserva de petróleo, considerando incertezas técnicas e de mercado, respectivamente, o tamanho da jazida de petróleo e o preço do petróleo. A fim de comparar os resultados da metodologia proposta, este problema também foi resolvido da forma tradicional, isto é, aplicando-se a metodologia de simulação estocástica, representando-se as incertezas técnicas por distribuições de probabilidade triangular e o preço do petróleo (incerteza de mercado) por processos estocásticos conhecidos: Movimento Geométrico Browniano, Processo de Reversão à Média e Processo de Reversão à Média com Saltos (que são muito usados para representar os preços das *commodities*, conforme discutido no Apêndice C). A curva de gatilho, que determina o conjunto de pontos de valor crítico, onde é indiferente manter a opção ou exercê-la naquele tempo, foi calculada empregando-se o algoritmo proposto por Grant, Vora e Weeks [4] e foram considerados os mesmos parâmetros para ambos casos. (números *fuzzy* e distribuição triangular).

Ressalta-se que a metodologia proposta é comparada com a metodologia tradicional por ser esta metodologia tradicional a melhor que existe atualmente para avaliação de opções reais sob incerteza. Além disso, esta comparação é a mais adequada por não ser possível comparar com um caso real já ocorrido, dado que um caso real é apenas uma das realizações que se seguem nas metodologias

de simulação, e pelo fato da tomada de decisão de investir ser feita baseando-se em estimativas futuras.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira:

- Descrição do problema da avaliação de uma opção de expansão em uma reserva de petróleo considerando incertezas técnicas e de mercado;
- Apresentação da solução por simulação estocástica para este problema;
- Modelagem da metodologia proposta baseada em números *fuzzy* para representar as incertezas técnicas, e;
- Comparação dos resultados obtidos pelas duas metodologias nos diferentes experimentos realizados.

5.2. Descrição do Problema

Neste estudo de caso investiga-se o cálculo do valor da opção de expansão de um campo de petróleo [79], descrito a seguir.

Considere um campo de petróleo descoberto, mas ainda não desenvolvido. Existe o interesse de avaliar uma alternativa de desenvolvimento da produção em que se embute no projeto a flexibilidade de expandir a produção por meio de um poço adicional no futuro, dependendo das condições de mercado e das informações técnicas geradas pela produção inicial do campo.

Para embutir essa flexibilidade de expandir a produção através desse poço extra, denominado poço opcional, incorre-se em custos devido à necessidade da plataforma de produção ter área e capacidade de carga para receber o poço adicional e devido ao *lay-out* submarino que deverá permitir a interligação deste novo poço. Esses custos totalizam US\$ 10 milhões, isto é, sem a opção de expansão a plataforma e o *lay-out* submarino custariam US\$ 10 milhões a menos neste estudo de caso. Assim, o custo adicional de embutir a opção é o prêmio a ser pago para se ter essa possibilidade.

Deseja-se determinar se o valor da opção de expansão é maior ou igual a esse custo ou prêmio (ou seja, se o valor líquido da opção é maior ou igual a zero).

O resultado possibilitará à gerência decidir se vale ou não a pena pagar os US\$ 10 milhões exigidos para embutir a flexibilidade de expandir a produção do campo.

O custo para o exercício da opção do poço opcional totaliza um investimento de US\$ 17,5 milhões, que é dividido da seguinte forma: US\$ 3,5 milhões de linhas e *risers* flexíveis, US\$ 7 milhões para perfuração e US\$ 7 milhões para o término do poço.

Na modelagem são consideradas as incertezas técnicas e de mercado. A incerteza técnica corresponde ao tamanho da jazida, enquanto que a incerteza de mercado usará um processo estocástico para o preço do petróleo: Movimento geométrico Browniano ou processo de Reversão à Média (vide Apêndice C).

Para determinar o valor da opção serão aplicadas duas metodologias. A primeira, que é a mais usada neste tipo de problema, corresponde à metodologia de simulação estocástica. Nesta metodologia as incertezas técnicas são representadas por distribuições de probabilidade triangulares do volume reserva a ser drenado na área do poço opcional, B .

A segunda envolve uma metodologia híbrida que une a simulação estocástica com números *fuzzy*. Nesta metodologia a incerteza técnica do volume da reserva a ser drenado pelo poço opcional é representada através de números *fuzzy*, ao invés das distribuições de probabilidade triangulares.

Os valores da incerteza técnica correspondente ao volume da reserva, B , a ser drenado na área do poço opcional, determinam a produção inicial e o perfil de produção subsequente. Neste caso, será considerado que um ano após o início da produção é revelado o verdadeiro cenário técnico desse parâmetro (produção inicial para o poço opcional).

É considerado um horizonte de investimentos mais produção limitada a 30 anos. A produção do poço opcional gera uma receita líquida cujo valor presente na data de exercício da opção é dado pela seguinte integral [79]:

$$V = \int_0^{30} \text{Max}(0, \{ [P(t) * Q(\tau)] - [\text{COV} * Q(\tau)] - \text{COF} - [\text{ROY} * P(t) * Q(\tau)] \}) * (1 - T_c) * e^{-\rho * \tau} \, d\tau \quad (42)$$

onde:

$P(t)$ = preço do petróleo no instante t , em US\$/barril;

$Q(\tau)$ = produção anual no ano t ($\tau = t$ – instante de exercício da opção);

COV = custo operacional variável (tratamento e transporte do óleo/gás), em US\$/barril;

COF = custo operacional fixo (workover, inspeção, outros), em milhões US\$/ano;

ROY = alíquota de *royalties*, em porcentagem (considera-se 10%);

Tc = alíquota de imposto de renda mais contribuição social (= 33%);

ρ = taxa de juros ajustada ao risco (= 12%);

V é o valor do “*underlying asset*” que, neste caso, corresponde ao valor da opção.

O resultado da integral V , mostrada na equação (42), é o valor do ativo-objeto da opção, isto é, pagando-se o preço de exercício igual a US\$ 17,5 milhões do poço opcional, obtém-se um determinado valor V para o ativo-objeto.

Na equação (42) acima o operador de maximização “*Max*” significa que caso a receita bruta da produção não consiga pagar o custo operacional e os tributos (receita negativa), o poço será fechado.

Por motivos de simplificação não foram considerados o custo de abandono nem a eventual receita não operacional de abandono do poço proveniente da venda da linha flexível e do equipamento do poço, isto é, será considerado que estes valores se anulam. O preço do petróleo será simulado por um processo real, de forma que se deve descontar a taxa de desconto ajustada ao risco.

São consideradas as seguintes funções de custo operacional para o poço:

$$\text{COF} = 0,5 \text{ MMUS\$/ano}$$

$$\text{COV} = 0,8 \text{ US\$/barril}$$

As equações para a produção do poço opcional são:

$$Q(\tau) = Q'(0)e^{-\alpha\tau} \quad (43)$$

$$Q'(\tau) = Q(0)e^{-\beta(t-4)} \quad (44)$$

$$Q(0) = \frac{1000000 * B}{365 * \sum_{\tau=0}^{29} e^{-\alpha\tau}} \quad (45)$$

onde:

$Q(0)$ = produção inicial do poço caso o início da produção ocorra no ano 4 (barris/dia);

$Q'(0)$ = produção inicial do poço na data de exercício da opção (barris/dia);

B = reserva a ser drenada pelo poço (em MM barris);

α = fator de declínio exponencial da produção do poço (%/ano); e

β = fator de declínio exponencial da vazão inicial do poço devido à depleção do campo (%/ano).

Aqui a demora do exercício da opção tem um custo adicional que é a depleção do reservatório, a qual reduz a produção inicial do poço opcional. Isto se deve à produção dos outros poços que acarreta uma redução da pressão do reservatório e uma migração do petróleo na área do poço opcional para a área dos outros poços. Assim, postergando-se a produção, a vazão inicial $Q(0)$ vai sendo reduzida com um declínio do reservatório β (menor que o declínio do poço opcional α), de forma que se parte de um patamar de produção inicial $Q'(0) \leq Q(0)$.

No estudo em questão os parâmetros α e β do poço opcional são determinísticos e o parâmetro B é incerto, seguindo distribuições triangulares (na solução por simulação estocástica), e apresentando os seguintes valores:

$$\alpha = 10\%$$

$$\beta = 1\%$$

$$B \sim \text{Distribuição Triangular ou Número } Fuzzy.$$

Os cenários técnicos de B são revelados com um ano de produção ($t = 4$).

O exercício da opção de investir no poço opcional será limitado a um período de 5 anos (Figura 26), isto é, a opção de investir num poço opcional inicia sua vigência com a revelação dos cenários técnicos (no ano $t = 4$) e a partir deste momento a opção poderá ser exercida em qualquer instante durante os próximos 5 anos. Passado este período, vence a opção (no ano $t = 9$). Após o exercício da opção, o poço poderá produzir por até 30 anos.

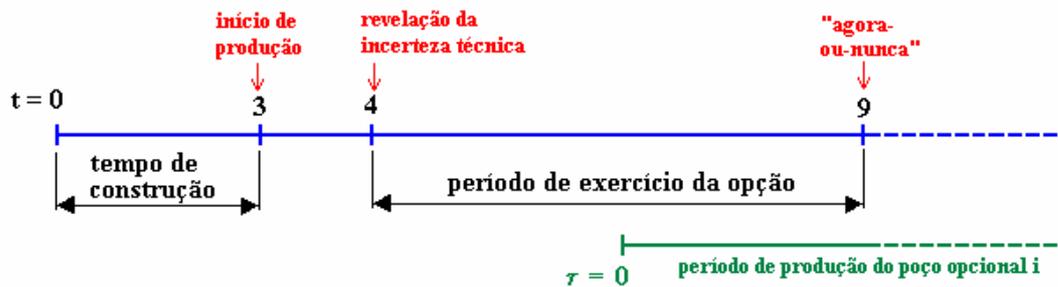


Figura 26 - Período de exercício da opção

A modelagem analítica do problema é apresentada no Apêndice G. Desta modelagem analítica obtém-se uma equação diferencial parcial. Logo, o método de solução se torna bastante complexo. Algumas simplificações poderiam ser feitas com o intuito de aproximá-la a uma equação diferencial ordinária, porém, a qualidade dos resultados poderia ser comprometida já que se estaria adaptando um modelo teórico para solucionar um problema prático. Deste modo, o método de solução empregado será o numérico (método de simulação estocástica).

5.3. Solução por Simulação Estocástica

A metodologia empregada para a solução numérica do problema é formado pela simulação de Monte Carlo (SMC), juntamente com programação dinâmica, e emprega-se o algoritmo de Grant, Vora e Weeks [4] para a curva de gatilho da opção. Este método, que se caracteriza pelo cálculo da curva de gatilho, é um método geral, numericamente eficiente e preciso, aplicado a diferentes tipos de opções (vide Apêndice D).

Neste caso a incerteza técnica é representada por distribuições de probabilidade triangular e os parâmetros do problema são:

- Início da Opção: 4 anos;
- Expiração da Opção: 9 anos;
- Tempo de Produção de cada poço opcional: 30 anos;
- Discretização do tempo de vida da opção: 0.08333 meses;
- Preço atual do Petróleo: 20 US\$/barril;
- Número de SMC a cada nova iteração do problema: 1000 e 5000 simulações;

- Taxa de Juros ajustada ao risco: 12% a.a.;
- Volatilidade do preço do Petróleo: 25% a.a.;
- Taxa de juros livre de risco: 8%;
- Alíquota de *royalties*: 10%;
- Alíquota de imposto de renda: 33%;
- Preço de exercício da opção de expansão: US\$ 10 milhões;
- Número de sorteios para os parâmetros de incerteza técnica B: 500 e 1000;
- Velocidade de reversão para à média: 0.3466;
- Preço de longo prazo para o Petróleo: 20 US\$/barril.

Parâmetros para o Poço Opcional:

- Fator de declínio exponencial da produção (α): 10%;
- Reserva a ser drenada (B): Distribuição Triangular (1; 6.5; 12);
- Preço de exercício da opção: US\$ 17.5 milhões;
- Custo operacional fixo: 0.5 MMUS\$/ano;
- Custo operacional variável: 0.8 US\$/barril;
- Fator de declínio exponencial da vazão inicial do poço devido à depleção do campo: 1%/ano.

A análise de investimento em uma opção de expansão pode ser vista como uma opção financeira de compra (*call*) do tipo americana. Feita esta analogia, é possível utilizar o algoritmo de Grant, Vora e Weeks [4] para determinar a curva de gatilho da opção. A descrição do algoritmo de Grant, Vora e Weeks é feita no Apêndice D. Um problema similar foi analisado por Batista [79]. Nas seções seguintes são apresentadas as metodologias de avaliação da opção de expansão, tanto pela forma tradicional quanto pela metodologia híbrida com números *fuzzy* proposta.

5.3.1. Avaliação da Opção de Expansão pela Metodologia Tradicional

Nesta seção é descrita a metodologia tradicional usada para calcular o valor da opção de expansão que considera incertezas técnicas e de mercado.

A incerteza de mercado, preço do petróleo, será representada por processos estocásticos conhecidos. Os processos estocásticos utilizados são:

- Movimento Geométrico Browniano (MGB)
- Processo de Reversão à Média (PRM - Dias)
- Processo de Reversão à Média com Saltos

A incerteza técnica será representada pelo tamanho da jazida. Essa incerteza é traduzida por distribuições de probabilidades triangulares no volume de reservas B a ser drenado na área do poço opcional. Esses valores determinam a produção inicial e o perfil de produção subsequente.

Definida a distribuição de probabilidade triangular para o volume de reserva B , o processo começa tomando-se uma amostra da distribuição triangular, B_i . Com esta amostra calcula-se a produção inicial do poço, $Q(0)$ (vide equação (45)). Com este valor da produção inicial do poço calcula-se a produção na data de exercício da opção, considerando o declínio exponencial da produção do poço por ano, e o declínio exponencial da vazão inicial do poço devido à depleção do campo, também por ano, usando as equações (43) e (44).

Com estes resultados efetua-se o cálculo da curva de gatilho da opção empregando o algoritmo de Grant, Vora e Weeks [4], descrito no Apêndice D. A adaptação deste algoritmo para este problema é descrito a seguir.

Iniciando-se no vencimento, instante T , e dado que é ótimo exercer a opção sempre que ela estiver “*in the money*”, isto é, $S_T^* = X$ (valor crítico). Para o problema em estudo o valor crítico (primeiro ponto da curva de gatilho) obtém-se igualando o valor presente da receita líquida com o investimento ($V_T = I$). Com o valor de V_T determina-se o preço do petróleo crítico resolvendo-se a equação (42), apresentada novamente abaixo, estipulando-se valores para P_T . Para estipular valores para P_T foi definido um intervalo de preço (com um valor mínimo de US\$ 10 e um valor máximo de US\$ 100). A partir de um algoritmo de busca binária é estipulado um primeiro valor de P_T e, com este valor, calcula-se a receita (equação (42)). O resultado é então comparado com o valor de V_T , e o procedimento continua até que a diferença $V_T - V$ seja mínima.

$$V = \int_0^{30} \text{Max}(0, \{[P(t) * Q(\tau)] - [\text{COV} * Q(\tau)] - \text{COF} - [\text{ROY} * P(t) * Q(\tau)]\}) * (1 - T_c) * e^{-\rho * \tau} \, d\tau$$

Desta forma, é calculado o preço do petróleo crítico no vencimento. Em seguida, em um instante antes do vencimento, $t_{T-\tau}$, inicia-se a otimização com um valor de $V_{T-\tau} = V_T$ e calcula-se o preço crítico do petróleo, $P_{T-\tau}$, para este tempo, $t_{T-\tau}$, resolvendo a equação (42), da mesma forma como foi feito anteriormente. Com este preço é avaliada a equação (42) e se inicia a simulação Monte Carlo. São simulados vários caminhos para o preço do petróleo que são usados na equação (42), chegando-se a diversos valores de V no instante T . Logo, o valor final da opção no tempo $t_{T-\tau}$ é a média dos valores descontados e^{-t} . Verifica-se se o respectivo ponto pertence à curva de gatilho: $V_t - I = e^{-rt} E_t[F_{t+1}(V_{t+1})]$ (equação de Bellman). Caso não pertença, faz-se um novo acréscimo (ΔP) ao preço crítico encontrado anteriormente, $P_{T-\tau}$, e reinicia-se o processo da simulação Monte Carlo. Continua-se com este processo para todos os instantes de exercício antecipado até o início da vida da opção, obtendo-se desta maneira a curva de gatilho da opção.

Concluída a curva de gatilho, fazem-se novas simulações para o preço do petróleo a partir do preço inicial, P_0 ; o valor final da opção, V_i , é a média de todos os valores alcançados na simulação trazidos ao valor presente.

No passo seguinte é tomada a segunda amostra da distribuição triangular de B e é repetido todo o processo anterior para se obter um novo valor da opção, V_i . Para terminar, repete-se todo este processo para todas as amostras da distribuição triangular de B , sendo a resposta final a média de todos os V_i .

No Apêndice F é descrita de forma esquemática (ver figuras 39, 40, 41, 42, 43, 44 e 45) esta metodologia tradicional de avaliação de opções reais.

5.4. Solução pela Metodologia Híbrida Estocástica com Números Fuzzy

Nesta seção é descrita a metodologia que combina a simulação Monte Carlo com números *fuzzy* para calcular o valor da opção de expansão que considera incertezas técnicas e de mercado.

A incerteza de mercado, preço do petróleo, do mesmo modo que na seção 5.3.1, será representada por processos estocásticos conhecidos. Os processos estocásticos utilizados são:

- Movimento Geométrico Browniano (MGB)
- Processo de Reversão à Média (PRM - Dias)
- Processo de Reversão à Média com Saltos

A incerteza técnica que representa o tamanho da jazida, B , neste caso será modelada por um número *fuzzy* triangular ao invés da distribuição de probabilidade triangular usada anteriormente. O número *fuzzy* triangular apresenta os mesmos parâmetros usados para a distribuição de probabilidade triangular.

Neste caso o número *fuzzy*, que substitui a distribuição de probabilidade, é usado integralmente para operar em todas as equações utilizadas. Este fato implica que as equações empregadas, (42), (43), (44) e (45), devem ser transformadas para equações *fuzzy*. Para isto, as variáveis não *fuzzy* são consideradas como singletons. A seguir apresentam-se as pequenas variações destas equações:

$$V_F = \int_0^{30} \text{Max}(0, \{[P(t) * Q_F(\tau)] - [\text{COV} * Q_F(\tau)] - \text{COF} - [\text{ROY} * P(t) * Q_F(\tau)]\}) * (1 - T_c) * e^{-\rho * \tau} \, d\tau \quad (46)$$

$$Q_F(\tau) = Q'_F(0) e^{-\alpha \tau} \quad (47)$$

$$Q'_F(\tau) = Q'_F(0) e^{-\beta(t-\tau)} \quad (48)$$

$$Q'_F(0) = \frac{1000000 * B_F}{365 * \sum_{\tau=0}^{29} e^{-\alpha \tau}} \quad (49)$$

onde o sub-índice F indica que essa é uma variável *fuzzy*.

Do mesmo modo, o algoritmo de Grant, Vora e Weeks foi adaptado para trabalhar com números *fuzzy* de forma a determinar a curva de gatilho; para este caso, cada ponto da curva de gatilho é na realidade um número *fuzzy*, como foi descrito na seção 4.2.4.

O processo inicia-se tomando-se o número *fuzzy* triangular, B_F , para calcular a produção do poço, $Q_F(\tau)$, segundo as equações (47), (48) e (49).

Com este resultado, o passo seguinte é determinar a curva de gatilho usando o algoritmo de Grant, Vora e Weeks adaptado para trabalhar com operações *fuzzy*, conforme descrito a seguir.

Iniciando-se no vencimento, T , e considerando um exercício ótimo da opção, iguala-se o valor presente da receita líquida ao investimento ($V_T = I$). Com V_T determina-se o preço do petróleo crítico resolvendo a equação (46). São estipulados valores para P_T , comparando o resultado de V_T , e continua-se até que a diferença $V_T - V$ seja mínima. Neste caso foi obtida a média do número *fuzzy* para se efetuar a diferença [75] [76] [77].

Desta forma é calculado o preço do petróleo crítico no vencimento. A seguir, para um instante antes do vencimento, $t_{T-\Delta t}$, inicia-se a otimização com um valor de $V_{T-\Delta t} = V_T$ e calcula-se o preço crítico do petróleo, $P_{T-\Delta t}$, para este tempo, $t_{T-\Delta t}$, resolvendo a equação (46), da mesma forma como foi feito anteriormente. Note-se que na equação o preço do petróleo é considerado como um singleton. Com este preço é avaliada a equação (46) e se inicia a simulação Monte Carlo chegando-se a diversos valores de V no instante T . Logo, o valor final da opção no tempo $t_{T-\Delta t}$ é a média *fuzzy* [75] [76] [77] (vide Apêndice E) dos valores, descontados e^{-t} . Verifica-se se o respectivo ponto pertence à curva de gatilho: $V_t - I = e^{-rt} E_t [F_{t+1}(V_{t+1})]$ (equação de Bellman). Caso não pertença, faz-se um novo acréscimo ao preço crítico encontrado anteriormente, $P_{T-\Delta t}$, e reinicia-se o processo da simulação Monte Carlo. Continua-se com este processo para todos os instantes de exercício antecipado até o início da vida da opção. Desta maneira é construída a curva de gatilho da opção.

Construída a curva de gatilho fazem-se novas simulações para o preço do petróleo a partir do preço inicial, P_0 ; o valor da opção, V_{iF} , será a média *fuzzy* de todos os valores que alcancem ou superem a curva de gatilho na simulação, trazidos ao valor presente.

Conforme já mencionado, esta metodologia de avaliação de opções reais está descrita no Apêndice F.

Foram realizados vários experimentos empregando ambas as metodologias de solução para determinar o valor da opção de expansão; os resultados são apresentados e comparados na seção seguinte.

5.5. Experimentos e Resultados

Nesta seção são apresentados os oito experimentos realizados com ambas metodologias de solução: pela metodologia estocástica e pela metodologia híbrida estocástica com números *fuzzy*. Em todos estes experimentos foram considerados os mesmos parâmetros, substituindo-se unicamente a distribuição de probabilidade triangular por um número *fuzzy* triangular.

A seguir são descritos estes oito experimentos, os resultados obtidos com ambas metodologias são mostrados e comparados em tabelas para cada experimento.

As métricas usadas nas tabelas para comparar os resultados em cada experimento são: o valor da opção de expansão, o tempo empregado em cada execução do experimento, o tempo total empregado em todas as execuções, a média e a variância do valor da opção do experimento, o erro médio relativo da metodologia híbrida estocástica com números *fuzzy* em relação à metodologia de simulação estocástica e a eficiência em tempo da metodologia híbrida proposta. Esta eficiência em tempo é calculada através da seguinte equação:

$$Eficiência = 1 - \frac{Tempo_{FROV}}{Tempo_{ROV}} \quad (50)$$

Onde $Tempo_{FROV}$ é o tempo empregado em todas as execuções do experimento pela metodologia híbrida proposta e $Tempo_{ROV}$ é o tempo empregado em todas as execuções pela metodologia de simulação estocástica.

Todos os experimentos foram executados em um computador com processador AMD Athlon de 1.5GHz com 256Mb de memória RAM.

5.5.1. Experimento 1

Neste experimento foi determinado o valor da opção real de expansão em um poço opcional num campo de petróleo, usando a metodologia de simulação estocástica, ou simulação Monte Carlo (ROV – Real Option Value), e a metodologia Híbrida Estocástica com Números *Fuzzy* (FROV – *Fuzzy Real Option Value*); o Movimento Geométrico Browniano é utilizado para representar o processo que segue o preço do petróleo.

Foi usado um gerador de números Quase Aleatório ou Quase Monte Carlo (vide Apêndice B), para realizar a amostragem da distribuição de probabilidade e para o processo estocástico que segue o preço do petróleo.

Adicionalmente foi feito o teste com o método de simulação estocástica considerando como incerteza técnica o valor esperado da distribuição de probabilidade triangular. O objetivo deste teste foi verificar se os resultados obtidos pelas metodologias que usam a simulação estocástica (a tradicional e a híbrida proposta) conseguem captar o valor da incerteza, isto é, verificar se os resultados obtidos com as metodologias que usam a simulação estocástica são diferentes dos obtidos neste teste, comprovando-se assim o efeito da incerteza no valor da opção.

Na Tabela 2 são apresentados os valores dos parâmetros utilizados neste experimento. Observa-se que a diferença fundamental está na representação da incerteza técnica, isto é, o tamanho da reserva B , que num caso é uma distribuição de probabilidade triangular e no outro é um número *fuzzy* triangular, ambos com os mesmos parâmetros.

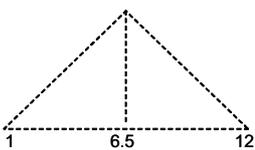
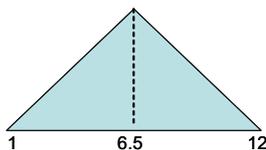
	ROV <i>(Simulação M. Carlo)</i>	FROV <i>(Híbrido com Fuzzy)</i>
Incerteza: B 	Distribuição Triangular 	Número <i>Fuzzy</i> Triangular
Simulações para o Preço do Petróleo (<i>Paths</i>)	1 000	1 000
Número de Amostras da Incerteza Técnica	500	Número <i>Fuzzy</i> Triangular
Processo Estocástico para o Preço do Petróleo	Movimento Geométrico Browniano	Movimento Geométrico Browniano
Tipo de Amostragem	Quase Monte Carlo	Quase Monte Carlo
Discretização do Tempo	0.08333333	0.08333333
Solução por:	Arbitragem	Arbitragem
Custo de Investimento: I	10 MM US\$	10 MM US\$

Tabela 2 - Parâmetros usados no experimento 1

Este experimento foi executado 41 vezes. A Tabela 3 apresenta os resultados obtidos com ambas metodologias (a metodologia híbrida estocástica com números *fuzzy* e a metodologia de simulação estocástica).

Na segunda parte da tabela mostram-se os resultados quando é considerada como incerteza técnica a média da distribuição triangular no método de simulação estocástica.

QMC1000-MGB						
Tempo	Fuzzy ROV		ROV		Tempo	
	horas	Poço1	V. Opção	Poço1		
1	0:00:59	17.37	7.37	17.33	7.33	0:05:20
2	0:00:58	18.81	8.81	19.12	9.12	0:10:12
3	0:00:57	19.51	9.51	18.96	8.96	0:10:25
4	0:01:08	18.98	8.98	18.92	8.92	0:07:46
5	0:00:57	19.54	9.54	17.04	7.04	0:14:15
6	0:00:55	17.18	7.18	18.35	8.35	0:05:20
7	0:00:51	19.71	9.71	18.83	8.83	0:13:02
8	0:00:57	19.73	9.73	19.39	9.39	0:07:22
9	0:01:01	18.45	8.45	18.74	8.74	0:09:54
10	0:00:53	17.59	7.59	19.81	9.81	0:08:33
11	0:00:54	18.83	8.83	17.79	7.79	0:12:17
12	0:01:04	18.21	8.21	18.58	8.58	0:05:35
13	0:00:56	18.44	8.44	19.12	9.12	0:08:58
14	0:01:28	18.13	8.13	19.12	9.12	0:10:29
15	0:00:56	19.05	9.05	18.79	8.79	0:10:07
16	0:01:05	18.91	8.91	16.9	6.9	0:12:08
17	0:00:49	16.05	6.05	18.68	8.68	0:10:10
18	0:01:03	18.25	8.25	18.54	8.54	0:06:20
19	0:01:09	19.4	9.4	19.47	9.47	0:08:16
20	0:01:03	19.17	9.17	18.75	8.75	0:06:18
21	0:01:03	18.67	8.67	19.46	9.46	0:06:39
22	0:01:05	18.98	8.98	19.17	9.17	0:07:34
23	0:00:51	17.99	7.99	19.26	9.26	0:10:26
24	0:01:02	20.08	10.08	20.31	10.31	0:06:21
25	0:00:50	18.76	8.76	19.1	9.1	0:07:44
26	0:00:59	19.14	9.14	18.92	8.92	0:07:23
27	0:00:58	16.85	6.85	16.77	6.77	0:17:04
28	0:01:05	19.73	9.73	18.6	8.6	0:04:56
29	0:01:11	19.05	9.05	18.68	8.68	0:09:26
30	0:01:10	18.12	8.12	19.03	9.03	0:08:30
31	0:00:53	19.1	9.1	18.65	8.65	0:07:49
32	0:01:00	18.53	8.53	18.88	8.88	0:06:43
33	0:01:11	22.4	12.4	18.86	8.86	0:09:28
34	0:00:53	18.72	8.72	20.11	10.11	0:06:47
35	0:00:57	18.95	8.95	19.84	9.84	0:07:03
36	0:01:04	19.64	9.64	17.85	7.85	0:09:29
37	0:01:01	19.13	9.13	19.95	9.95	0:12:59
38	0:01:00	18.73	8.73	18.5	8.5	0:06:12
39	0:01:03	18.56	8.56	18.44	8.44	0:10:06
40	0:00:58	18.76	8.76	21.19	10.19	0:06:12
41	0:00:54	18.08	8.08	17.32	7.32	0:06:53

Valor Esperado da Incerteza

Técnica: $E[B] = 6.5$

V. Opção	horas
8.88	0:00:20
9.01	0:00:12
9.12	0:00:14
9.12	0:00:23
8.99	0:00:13
8.98	0:00:12
8.86	0:00:17
8.91	0:00:17
9.16	0:00:13
9.07	0:00:13
8.8	0:00:24
9	0:00:12
8.83	0:00:27
9.12	0:00:12
8.91	0:00:25
9.01	0:00:11
8.94	0:00:16
9.08	0:00:11
8.95	0:00:20
9.12	0:00:13
8.92	0:00:27
8.88	0:00:21
9.12	0:00:26
8.96	0:00:19
9.2	0:00:12
8.97	0:00:10
9.25	0:00:26
9.04	0:00:11
9.06	0:00:21
9.06	0:00:12
9.06	0:00:13
9.01	0:00:13
9.03	0:00:15
9.01	0:00:12
9.05	0:00:11
9.04	0:00:11
9.09	0:00:12
8.9	0:00:24
9.03	0:00:18
8.95	0:00:21
9.18	0:00:13

	Tempo	Fuzzy ROV		ROV		Tempo
		Poço1	V. Opção	Poço1	V. Opção	
MÉDIA DOS EXPERIMENTOS	0:01:00	18.76	8.76	18.81	8.78	0:08:45
VARIÂNCIA DOS EXPERIMENTOS			1.01		0.73	
TEMPO TOTAL	0:41:11					5:58:31

V. Opção	Tempo
9.02	0:00:16
0.01	
	0:11:13

ERRO MÉDIO	0.23%
EFICIÊNCIA MÉDIA	88.51%
	8.71
	Veze mais rápido com Números Fuzzy

Tabela 3 - Comparação de Resultados utilizando o Movimento Geométrico Browniano

Observa-se que o erro médio relativo das simulações entre as metodologias é pequeno (inferior a 1%) e aceitável para o tipo de aplicação. Note-se que o número de simulações para o preço do petróleo usado pode ser incrementado para assim melhorar a precisão da resposta, do mesmo modo que o número de amostras da incerteza técnica na metodologia de simulação estocástica. Todavia, estes incrementos implicarão em um significativo aumento do tempo computacional.

É importante destacar a significativa diferença de tempo computacional entre ambas as metodologias: 5:58 horas para a metodologia de simulação estocástica e 41 minutos para a metodologia híbrida proposta, apresentando uma boa eficiência computacional, sendo esta última 8.7 vezes mais rápida.

Da mesma forma, observa-se que o valor da opção, quando se considera a média da distribuição triangular como incerteza técnica no método de simulação estocástica, é diferente daquele obtido quando se considera a incerteza técnica como uma distribuição triangular ou um número *fuzzy* triangular.

5.5.2. Experimento 2

Este experimento é similar ao anterior, isto é, foi determinado o valor da opção real de expansão usando a metodologia de simulação estocástica, ou simulação Monte Carlo (ROV) e a metodologia Híbrida Estocástica com Números *Fuzzy* (FROV). Foram utilizados os mesmos parâmetros que no experimento anterior exceto pelo número de simulações para o preço do petróleo, que foi aumentado para 5000.

Também foi usado um gerador de números Quase Aleatório ou Quase Monte Carlo (vide Apêndice B) para realizar amostragem da distribuição de probabilidade e para o processo estocástico que segue o preço do petróleo.

Realizou-se também o teste considerando na incerteza técnica o valor esperado da distribuição de probabilidade triangular.

Os valores dos parâmetros utilizados são mostrados na Tabela 4.

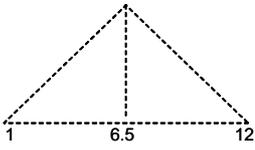
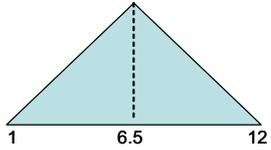
	ROV <i>(Simulação M. Carlo)</i>	FROV <i>(Híbrido com Fuzzy)</i>
Incerteza: B	Distribuição Triangular 	Número <i>Fuzzy</i> Triangular 
Simulações para o Preço do Petróleo (<i>Paths</i>)	5 000	5 000
Número de Amostras da Incerteza Técnica	500	Número <i>Fuzzy</i> Triangular
Processo Estocástico para o Preço do Petróleo	Movimento Geométrico Browniano	Movimento Geométrico Browniano
Tipo de Amostragem	Quase Monte Carlo	Quase Monte Carlo
Discretização do Tempo	0.08333333	0.08333333
Solução por:	Arbitragem	Arbitragem
Custo de Investimento: I	10 MM US\$	10 MM US\$

Tabela 4 - Parâmetros usados no experimento 2

O experimento foi executado 41 vezes. A Tabela 5 apresenta os resultados obtidos, incluindo também os resultados quando é considerada como incerteza técnica a média da distribuição triangular no método de simulação estocástica.

QMC5000-MGB							Valor Esperado da Incerteza Técnica: E[B] = 6.5	
	Fuzzy ROV		ROV		Tempo horas	Tempo horas	V. Opção	horas
	Poço1	V. Opção	Poço1	V. Opção				
1	0:03:34	19.09	9.09	19.65	9.65	0:13:39	9.06	0:00:57
2	0:02:39	19.07	9.07	19.48	9.48	0:16:00	9.05	0:00:44
3	0:03:26	19.13	9.13	19.11	9.11	0:12:36	9.04	0:00:43
4	0:02:34	19.07	9.07	18.75	8.75	0:20:14	9.04	0:00:43
5	0:02:39	19.07	9.07	19.27	9.27	0:14:36	9.03	0:01:01
6	0:03:30	19.08	9.08	19.2	9.2	0:20:03	9.01	0:00:44
7	0:03:30	19.08	9.08	19.21	9.21	0:19:29	8.77	0:02:06
8	0:02:52	19.17	9.17	19.72	9.72	0:13:47	9.03	0:00:45
9	0:02:33	19.06	9.06	18.59	8.59	0:20:17	9.09	0:00:45
10	0:03:28	19	9	18.65	8.65	0:14:06	9.05	0:00:43
11	0:03:32	19.07	9.07	19.34	9.34	0:14:48	9.06	0:01:00
12	0:03:32	19.07	9.07	19.12	9.12	0:13:14	8.98	0:00:45
13	0:02:36	19.05	9.05	18.92	8.92	0:14:29	9.13	0:00:44
14	0:02:19	19.05	9.05	19.11	9.11	0:15:05	8.99	0:00:43
15	0:02:43	19.14	9.14	19.26	9.26	0:14:04	9.1	0:00:45
16	0:02:38	19.08	9.08	19.47	9.47	0:17:50	9.03	0:00:44
17	0:03:46	19	9	18.92	8.92	0:13:44	9.03	0:00:58
18	0:02:37	19.04	9.04	19.5	9.5	0:14:12	9.01	0:01:43
19	0:02:38	19.06	9.06	19.17	9.17	0:14:05	9.11	0:00:44
20	0:03:45	19.05	9.05	19.57	9.57	0:14:27	9.08	0:00:45
21	0:02:39	19.09	9.09	19.45	9.45	0:14:20	9.05	0:01:02
22	0:02:46	19.11	9.11	19.46	9.46	0:13:04	9.03	0:01:00
23	0:02:29	19.08	9.08	19.05	9.05	0:14:34	9.05	0:00:42
24	0:03:23	19.17	9.17	19.78	9.78	0:16:37	9.08	0:00:46
25	0:02:54	19.04	9.04	18.68	8.68	0:14:30	9.06	0:00:58
26	0:02:45	19.14	9.14	19.03	9.03	0:12:17	9.04	0:00:43
27	0:03:26	19.02	9.02	18.42	8.42	0:19:34	9.08	0:00:43
28	0:02:49	19.05	9.05	18.86	8.86	0:13:51	9.02	0:00:46
29	0:02:18	18.99	8.99	19.54	9.54	0:13:51	9.04	0:00:43
30	0:02:47	19.08	9.08	19.46	9.46	0:18:37	9.05	0:00:41
31	0:02:27	19.03	9.03	19.07	9.07	0:14:14	9.09	0:00:46
32	0:03:40	19.05	9.05	19.26	9.26	0:13:54	9.02	0:01:03
33	0:02:36	19.03	9.03	19.03	9.03	0:19:34	9.05	0:00:47
34	0:02:47	19.03	9.03	18.62	8.62	0:15:01	9.07	0:00:44
35	0:03:32	19.02	9.02	19.78	9.78	0:17:42	9.06	0:00:46
36	0:02:40	19.1	9.1	19.39	9.39	0:13:10	8.97	0:00:44
37	0:02:22	19.03	9.03	19.32	9.32	0:14:49	9.05	0:00:44
38	0:03:41	19.05	9.05	19.12	9.12	0:14:01	9.08	0:00:59
39	0:02:33	19.07	9.07	19.49	9.49	0:14:01	9.03	0:00:43
40	0:02:35	19.05	9.05	19.63	9.63	0:18:47	9.02	0:00:46
41	0:02:40	19.07	9.07	18.14	8.14	0:15:02	9.03	0:00:43

	Fuzzy ROV		ROV		Tempo	V. Opção	Tempo	
	Poço1	V. Opção	Poço1	V. Opção				
MÉDIA DOS EXPERIMENTOS	0:02:57	19.07	9.07	19.19	9.19	0:15:25	9.04	0:00:51
VARIÂNCIA DOS EXPERIMENTOS			0.0017		0.1449		0.003	
TEMPO TOTAL	2:00:40					10:32:15		0:34:51
ERRO MÉDIO	1.29%							
EFICIÊNCIA MÉDIA	80.91%	5.24	Vezes mais rápido com Números Fuzzy					

Tabela 5 - Comparação de Resultados utilizando o Movimento Geométrico Browniano com 5000 simulações para o preço do petróleo

Observa-se que o erro médio relativo das simulações entre as metodologias é também pequeno (inferior a 2%) e aceitável para o tipo de aplicação. Apesar de

ser superior ao experimento anterior, a diferença no valor da opção e no erro médio deste experimento em relação ao anterior é devido ao aumento no número de simulações (maior amostragem aleatória); neste caso está mais próximo da convergência para o verdadeiro valor. Note-se que, com o aumento do número de simulações para o preço do petróleo, a variância dos experimentos diminuiu, mas teve um significativo aumento do tempo computacional.

Destaca-se a significativa diferença de tempo computacional entre ambas as metodologias, que para a metodologia de simulação estocástica é de 10:32 horas e para a metodologia híbrida proposta é de 2:00 horas, apresentando uma boa eficiência computacional, sendo esta última 5.24 vezes mais rápida.

O valor da opção, quando se considera a média da distribuição triangular como incerteza técnica (isto é equivalente a não ter incerteza técnica) na metodologia de simulação estocástica é diferente daquele obtido quando se considera a incerteza técnica como uma distribuição triangular ou um número *fuzzy* triangular. Com este experimento verifica-se o efeito da incerteza no valor da opção, isto é, a incerteza aumenta o valor da opção. Além disso, comprova-se que os resultados obtidos pela metodologia proposta não convergem para a solução da média da distribuição (sem incerteza).

5.5.3. Experimento 3

Neste experimento foi determinado o valor da opção real de expansão em um poço opcional. Como nos casos anteriores, foram usadas também as metodologias de simulação estocástica, ou simulação Monte Carlo (ROV), e a metodologia Híbrida Estocástica com Números *Fuzzy* (FROV), sendo utilizado, neste caso, o processo de reversão à média para representar o processo que segue o preço do petróleo. Aqui também foi realizado o teste considerando-se como incerteza técnica o valor esperado da distribuição de probabilidade triangular na metodologia de simulação estocástica.

Para realizar amostragem da distribuição de probabilidade foi usado um gerador de números Quase Aleatório ou Quase Monte Carlo (Apêndice B), da mesma forma que no processo estocástico que segue o preço do petróleo.

Na Tabela 6 são apresentados os valores dos parâmetros utilizados neste experimento. Observa-se que a diferença fundamental entre as duas últimas colunas está na representação da incerteza técnica, tamanho da reserva B , que num caso é uma distribuição de probabilidade triangular e no outro é um número *fuzzy* triangular, ambos com os mesmos parâmetros. A diferença básica deste experimento para os anteriores é com relação ao método usado para representar o processo que segue o preço do petróleo.

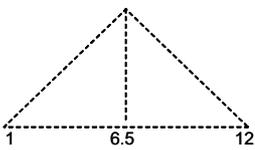
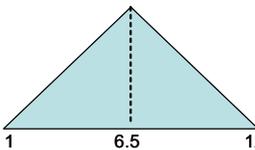
	ROV <i>(Simulação M. Carlo)</i>	FROV <i>(Híbrido com Fuzzy)</i>
Incerteza: B	Distribuição Triangular 	Número <i>Fuzzy</i> Triangular 
Simulações para o Preço do Petróleo (<i>Paths</i>)	1 000	1 000
Número de Amostras da Incerteza Técnica	500	Número <i>Fuzzy</i> Triangular
Processo Estocástico para o Preço do Petróleo	Reversão à Média	Reversão à Média
Tipo de Amostragem	Quase Monte Carlo	Quase Monte Carlo
Discretização do Tempo	0.08333333	0.08333333
Solução por:	Arbitragem	Arbitragem
Custo de Investimento: I	10 MM US\$	10 MM US\$

Tabela 6 - Parâmetros usados no experimento 3.

Este experimento foi executado 30 vezes. Na Tabela 7 são apresentados os resultados obtidos para o valor da opção de expansão e o tempo empregado em cada execução do experimento, junto com as outras métricas descritas anteriormente.

QMC1000-PRM						
Tempo	Fuzzy ROV		ROV		Tempo	
horas	Poço1	V. Opção	Poço1	V. Opção	horas	
1	0:00:22	11.48	1.48	12.41	2.41	2:39:25
2	0:00:25	11.87	1.87	12.47	2.47	2:10:06
3	0:00:25	12.27	2.27	13.18	3.18	1:37:02
4	0:00:26	11.92	1.92	12.17	2.17	2:40:43
5	0:00:23	11.99	1.99	11.91	1.91	2:13:26
6	0:00:22	11.64	1.64	12	2	2:22:54
7	0:00:26	12.34	2.34	12.35	2.35	2:41:08
8	0:00:24	11.7	1.7	12.63	2.63	2:46:23
9	0:00:24	11.98	1.98	13.36	3.36	2:23:24
10	0:00:25	12	2	12.15	2.15	2:33:03
11	0:00:23	12.22	2.22	12.96	2.96	2:55:22
12	0:00:24	11.77	1.77	11.64	1.64	2:21:23
13	0:00:24	11.92	1.92	11.91	1.91	2:45:29
14	0:00:25	11.94	1.94	13.09	3.09	2:54:29
15	0:00:23	12.06	2.06	12.04	2.04	3:13:54
16	0:00:24	12.18	2.18	11.09	1.09	2:20:23
17	0:00:25	12.21	2.21	12.47	2.47	2:51:55
18	0:00:24	11.66	1.66	12.31	2.31	2:39:09
19	0:00:21	11.52	1.52	11.84	1.84	2:51:42
20	0:00:25	11.96	1.96	12.25	2.25	2:49:13
21	0:00:25	12.26	2.26	12.08	2.08	2:18:53
22	0:00:27	11.93	1.93	11.98	1.98	2:32:06
23	0:00:22	12.06	2.06	12.56	2.56	2:45:48
24	0:00:23	11.39	1.39	12.01	2.01	1:39:21
25	0:00:25	12.55	2.55	12.28	2.28	2:40:47
26	0:00:23	11.75	1.75	12.34	2.34	2:44:05
27	0:00:24	11.98	1.98	12.44	2.44	2:55:24
28	0:00:26	12.08	2.08	12.4	2.4	1:27:07
29	0:00:24	12.04	2.04	11.39	1.39	2:09:27
30	0:00:24	11.69	1.69	12.81	2.81	2:22:05

Valor Esperado da Incerteza

Técnica: E[B] = 6.5

V. Opção	horas
1.67	0:00:38
1.66	0:00:16
1.69	0:00:12
1.77	0:00:12
1.72	0:00:12
1.75	0:00:12
1.65	0:00:40
1.74	0:00:18
1.43	0:00:46
1.63	0:00:41
1.69	0:00:13
1.75	0:00:12
1.70	0:00:12
1.72	0:00:12
1.68	0:00:40
1.80	0:00:17
1.75	0:00:40
1.70	0:00:12
1.69	0:00:39
1.73	0:00:11
1.72	0:00:12
1.73	0:00:13
1.66	0:00:12
1.74	0:00:16
1.74	0:00:12
1.82	0:00:23
1.76	0:00:12
1.73	0:00:25
1.79	0:00:36
1.73	0:00:16

	Fuzzy ROV		ROV		Tempo
	Poço1	V. Opção	Poço1	V. Opção	
MÉDIA DOS EXPERIMENTOS	11.95	1.95	12.28	2.28	2:30:51
VARIÂNCIA DOS EXPERIMENTOS		0.07		0.25	
TEMPO TOTAL	0:12:03				75:25:36

V. Opção	Tempo
1.71	0:00:21
0.0048	
	0:10:32

ERRO MÉDIO	14.83%
EFICIÊNCIA MÉDIA	99.73%
	375.57
	Vezes mais rápido com Números Fuzzy

Tabela 7 - Comparação de Resultados utilizando o Processo de Reversão à Média com 1000 simulações para o preço do petróleo

Observa-se que, apesar do erro médio relativo das simulações para a metodologia proposta ainda ser um pouco grande, este pode ser considerado aceitável para o tipo de aplicação. Este aumento no erro médio com relação aos experimentos anteriores, que usam o movimento geométrico browniano para o preço do petróleo, é devido ao número reduzido de simulações, sendo que o resultado ainda não convergiu para seu verdadeiro valor. Deve ser notado que o número de simulações para o preço do petróleo deve ser incrementado para assim

melhorar a precisão da resposta, do mesmo modo que o número de amostras da incerteza técnica para o método de simulação estocástica pode ser incrementado. Deve ser também observada a significativa diferença de tempo computacional entre ambas metodologias: de 75:25 horas para a metodologia de simulação estocástica e de 12 minutos para a metodologia híbrida proposta, sendo esta última 375.57 vezes mais rápida.

Da mesma maneira que nos experimentos anteriores, o valor da opção, quando se considera a média da distribuição triangular como incerteza técnica na metodologia de simulação estocástica, é diferente do valor da opção obtido quando a incerteza técnica é uma distribuição triangular ou um número *fuzzy* triangular. Isto acontece pelas mesmas razões explicadas anteriormente.

5.5.4. Experimento 4

Assim como nos experimentos anteriores, neste experimento foi determinado o valor da opção real de expansão usando-se a metodologia de simulação estocástica, ou simulação Monte Carlo (ROV) e a metodologia Híbrida Estocástica com Números *Fuzzy* (FROV). Desta vez foi aumentado o número de simulações para o preço do petróleo e foi considerado que o preço do petróleo segue um processo de reversão à média.

Realizou-se também o teste considerando na incerteza técnica o valor esperado da distribuição de probabilidade triangular (no método de simulação estocástica).

Os valores dos parâmetros utilizados são mostrados na Tabela 8.

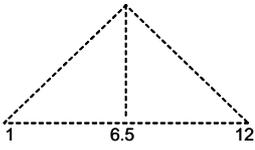
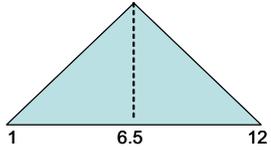
	ROV <i>(Simulação M. Carlo)</i>	FROV <i>(Híbrido com Fuzzy)</i>
Incerteza: B	Distribuição Triangular 	Número <i>Fuzzy</i> Triangular 
Simulações para o Preço do Petróleo (<i>Paths</i>)	5 000	5 000
Número de Amostras da Incerteza Técnica	500	Número <i>Fuzzy</i> Triangular
Processo Estocástico para o Preço do Petróleo	Reversão à Média	Reversão à Média
Tipo de Amostragem	Quase Monte Carlo	Quase Monte Carlo
Discretização do Tempo	0.08333333	0.08333333
Solução por:	Arbitragem	Arbitragem
Custo de Investimento: I	10 MM US\$	10 MM US\$

Tabela 8 - Parâmetros usados no experimento 4

O experimento foi executado 19 vezes. Na Tabela 9 são apresentados os resultados obtidos para o valor da opção de expansão e o tempo empregado em cada execução do experimento. Além deste, são também apresentados o tempo total empregado nas execuções, a média e a variância do valor da opção de todas as execuções, o erro médio relativo da metodologia híbrida estocástico com números *fuzzy* em relação à metodologia de simulação estocástica e a eficiência em tempo da metodologia híbrida proposta.

Mostram-se também os resultados do valor da opção quando é considerada como incerteza técnica o valor esperado da distribuição de probabilidade triangular, na metodologia de simulação estocástica, isto é, sem incerteza técnica.

Observa-se que, quando é considerada a média da distribuição triangular como incerteza técnica na metodologia de simulação estocástica, o valor da opção é diferente do valor da opção obtido quando se a considera a incerteza como uma distribuição triangular ou um número *fuzzy* triangular.

5.5.5. Experimento 5

Neste experimento considera-se tanto a distribuição triangular como o número *fuzzy* assimétricos para determinar o valor da opção real de expansão, usando-se a metodologia de simulação estocástica, ou simulação Monte Carlo (ROV), e a metodologia Híbrida Estocástica com Números *Fuzzy* (FROV). Foram aumentados o número de amostras da incerteza técnica e o número de simulações para o preço do petróleo. Foi também considerado que o preço do petróleo segue um processo de reversão à média.

Aqui foi realizado um teste considerando-se como incerteza técnica o valor esperado da distribuição de probabilidade triangular para o método de simulação estocástica.

Na Tabela 10 apresentam-se os valores dos parâmetros utilizados.

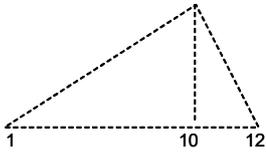
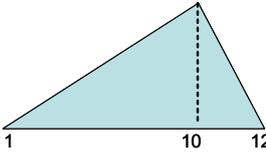
	ROV <i>(Simulação M. Carlo)</i>	FROV <i>(Híbrido com Fuzzy)</i>
Incerteza: B	Distribuição Triangular 	Número <i>Fuzzy</i> Triangular 
Simulações para o Preço do Petróleo (<i>Paths</i>)	5 000	5 000
Número de Amostras da Incerteza Técnica	1 000	Número <i>Fuzzy</i> Triangular
Processo Estocástico para o Preço do Petróleo	Reversão à Média	Reversão à Média
Tipo de Amostragem	Quase Monte Carlo	Quase Monte Carlo
Discretização do Tempo	0.08333333	0.08333333
Solução por:	Arbitragem	Arbitragem
Custo de Investimento: I	10 MM US\$	10 MM US\$

Tabela 10 - Parâmetros usados no experimento 5

O experimento foi executado 21 vezes. A Tabela 11 apresenta os resultados obtidos para o valor da opção de expansão e todas as métricas descritas anteriormente.

QMC5000-PRM						
	Tempo	Fuzzy ROV		ROV		Tempo
		Poço1	V. Opção	Poço1	V. Opção	
1	0:03:10	16.7	6.7	16.68	6.68	17:29:41
2	0:03:39	16.47	6.47	16.46	6.46	17:07:53
3	0:02:59	16.21	6.21	16.25	6.25	17:08:07
4	0:03:38	16.22	6.22	15.94	5.97	17:08:45
5	0:03:34	16.76	6.76	16.71	6.71	15:07:33
6	0:04:09	16.63	6.63	16.57	6.57	16:56:22
7	0:03:42	16.6	6.6	16.61	6.61	17:01:21
8	0:03:59	16.95	6.95	16.98	6.98	16:39:36
9	0:03:42	17.05	7.05	16.86	6.86	16:38:19
10	0:03:53	16.58	6.58	16.63	6.63	16:56:47
11	0:03:43	16.27	6.27	16.28	6.28	16:53:02
12	0:03:37	16.68	6.68	16.63	6.63	22:50:52
13	0:03:03	16.25	6.25	16.39	6.39	17:29:27
14	0:03:09	16.26	6.26	16.21	6.21	17:24:28
15	0:03:42	16.73	6.73	16.45	6.45	17:11:38
16	0:03:34	16.68	6.68	17.23	7.23	19:27:35
17	0:03:59	16.76	6.76	16.66	6.66	17:13:44
18	0:03:21	16.48	6.48	16.47	6.47	16:54:46
19	0:03:37	16.71	6.71	16.68	6.68	17:00:46
20	0:03:43	16.75	6.75	16.39	6.39	23:54:43
21	0:03:34	16.44	6.44	16.42	6.42	17:13:46

Valor Esperado da Incerteza
Técnica: $E[B] = 7.66667$

V. Opção	horas
6.36	0:01:13
6.39	0:00:53
6.38	0:00:52
6.41	0:00:50
6.41	0:00:53
6.39	0:01:12
6.39	0:00:52
6.35	0:00:53
6.36	0:00:50
6.38	0:00:54
6.38	0:01:11
6.38	0:00:55
6.42	0:00:55
6.40	0:00:52
6.37	0:00:55
6.38	0:01:12
6.41	0:00:56
6.37	0:00:53
6.39	0:00:53
6.38	0:00:50
6.40	0:00:55

	Tempo	Fuzzy ROV		ROV		Tempo
		Poço1	V. Opção	Poço1	V. Opção	
MÉDIA DOS EXPERIMENTOS	0:03:36	16.58	6.58	16.55	6.55	17:42:21
VARIÂNCIA DOS EXPERIMENTOS			0.06		0.08	
TEMPO TOTAL	1:15:27					371:49:11

V. Opção	Tempo
6.39	0:00:57
0.0003	
	0:19:49

ERRO MÉDIO	0.47%
EFICIÊNCIA MÉDIA	99.66%
	295.68
	Veze mais rápido com Números Fuzzy

Tabela 11 - Comparação de Resultados utilizando o Processo de Reversão à Média com 5000 simulações para o preço do petróleo e incerteza técnica assimétrica

Observa-se que o erro médio relativo das simulações entre ambas metodologias é pequeno e totalmente aceitável para o tipo de aplicação (inferior a 0.5%). Observa-se também que este erro médio diminuiu significativamente em relação ao experimento anterior, uma vez que, neste caso, foi também incrementado o número de amostras da incerteza técnica para a metodologia de simulação estocástica, melhorando ainda mais a precisão da resposta.

Este experimento também demonstrou que a metodologia proposta é independente da assimetria do número *fuzzy* considerado.

Como nos experimentos anteriores, o valor da opção é diferente quando se considera a média da distribuição triangular como incerteza técnica na metodologia de simulação estocástica.

Novamente destaca-se a boa eficiência computacional da metodologia híbrida proposta, por ter uma diferença significativa no tempo computacional entre ambas metodologias: 371:49 horas para a metodologia de simulação estocástica e 1:15 horas para a metodologia híbrida proposta, sendo esta última 295.68 vezes mais rápida.

5.5.6. Experimento 6

Neste experimento analisa-se o problema da opção de expansão considerando-se duas incertezas técnicas. Estas incertezas correspondem ao tamanho da reserva a ser drenada pelo poço opcional e ao fator de declínio exponencial da vazão. Estas incertezas são representadas por funções de probabilidade triangular, quando é usada a metodologia de simulação estocástica, ou simulação Monte Carlo (ROV), e representadas por números *fuzzy* triangulares para a metodologia Híbrida Estocástica com Números *Fuzzy* (FROV).

O experimento considera tanto a distribuição triangular como o número *fuzzy* simétricos para determinar o valor da opção real; também foi considerado que o preço do petróleo segue um processo de reversão à média.

Aqui também foi realizado um teste considerando-se como incerteza técnica o valor esperado das distribuições de probabilidade triangular para o método de simulação estocástica.

Os valores dos parâmetros utilizados são apresentados na Tabela 12.

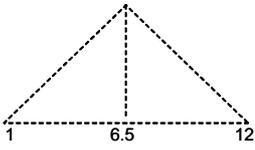
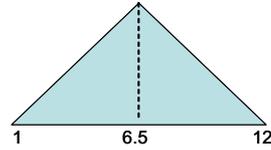
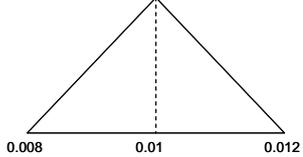
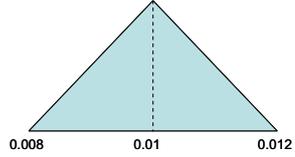
	ROV <i>(Simulação M. Carlo)</i>	FROV <i>(Híbrido com Fuzzy)</i>
Incerteza: B	Distribuição Triangular 	Número <i>Fuzzy</i> Triangular 
Incerteza: Fator de Declínio Exponencial da Vazão		
Simulações para o Preço do Petróleo (<i>Paths</i>)	5 000	5 000
Número de Amostras da Incerteza Técnica	500	Número <i>Fuzzy</i> Triangular
Processo Estocástico para o Preço do Petróleo	Reversão à Média	Reversão à Média
Tipo de Amostragem	Quase Monte Carlo	Quase Monte Carlo
Discretização do Tempo	0.08333333	0.08333333
Solução por:	Arbitragem	Arbitragem
Custo de Investimento: I	10 MM US\$	10 MM US\$

Tabela 12 - Parâmetros usados no experimento 6

O experimento foi executado 16 vezes. A Tabela 13 apresenta os resultados obtidos para o valor da opção de expansão e o tempo utilizado em cada execução do experimento. A Tabela 13 apresenta também o tempo total empregado por todas as execuções, a média e a variância do valor da opção de todas as execuções, o erro médio relativo da metodologia híbrida estocástica com números *Fuzzy* em relação à metodologia com simulação estocástica e a eficiência em tempo da metodologia híbrida proposta. Na segunda parte da tabela mostram-se os resultados quando é considerada como incerteza técnica à média da distribuição triangular no método de simulação estocástica.

QMC5000-PRM							Valor Esperado da Incerteza Técnica: E[B]=6.5, E[v]=0.01	
Tempo	Fuzzy ROV		ROV		Tempo	V. Opção	horas	
horas	Poço1	V. Opção	Poço1	V. Opção	horas	V. Opção	horas	
1	0:03:03	11.72	1.72	11.67	1.67	11:58:17	1.71	0:01:02
2	0:02:46	11.76	1.76	12.47	2.47	10:36:04	1.68	0:01:20
3	0:03:06	11.68	1.68	11.45	1.45	11:53:31	1.73	0:00:58
4	0:03:06	11.72	1.72	12.11	2.11	11:38:49	1.72	0:01:01
5	0:03:03	11.72	1.72	12.59	2.59	11:36:26	1.73	0:01:02
6	0:02:52	11.72	1.72	12.93	2.93	10:57:22	1.73	0:01:00
7	0:03:06	11.74	1.74	11.72	1.72	11:47:09	1.7	0:01:22
8	0:03:01	11.73	1.73	11.96	1.96	11:32:49	1.72	0:01:02
9	0:03:00	11.76	1.76	12.26	2.26	11:34:10	1.72	0:01:02
10	0:03:01	11.74	1.74	12.06	2.06	11:44:43	1.73	0:00:59
11	0:03:00	11.74	1.74	12.34	2.34	11:43:12	1.73	0:01:02
12	0:03:03	11.76	1.76	12.22	2.22	11:47:20	1.7	0:01:00
13	0:03:03	11.75	1.75	11.68	1.68	11:48:45	1.73	0:01:00
14	0:03:06	11.75	1.75	12.37	2.37	11:53:58	1.7	0:01:02
15	0:03:05	11.75	1.75	11.77	1.77	11:45:51	1.74	0:01:23
16	0:03:01	11.75	1.75	12.18	2.18	11:48:17	1.69	0:01:21

	Tempo	Fuzzy ROV		ROV		Tempo	V. Opção	Tempo	
		Poço1	V. Opção	Poço1	V. Opção				
MÉDIA DOS EXPERIMENTOS	0:03:01	11.74	1.74	12.11	2.11	11:37:55	1.72	0:01:06	
VARIÂNCIA DOS EXPERIMENTOS			0.0004		0.15		0.0003		
TEMPO TOTAL	0:48:22					186:06:43			0:17:36

ERRO MÉDIO	17.73%
EFICIÊNCIA MÉDIA	99.57%
	230.88
	Veze mais rápido com Números Fuzzy

Tabela 13 - Comparação de Resultados utilizando o Processo de Reversão à Média e duas incertezas técnicas

Neste experimento observa-se que o erro médio das simulações aumentou com relação aos experimentos anteriores onde se trabalha com uma incerteza. Isto é devido ao efeito das operações com números *fuzzy*, nas quais o domínio do número *fuzzy* cresce com cada operação realizada (por estar baseada na aritmética de intervalos). Da mesma forma que nos experimentos anteriores, observa-se uma significativa diferença no tempo computacional, sendo a metodologia híbrida proposta 230.88 vezes mais rápido que a metodologia de simulação estocástica.

5.5.7. Experimento 7

Neste experimento foi determinado o valor da opção real de expansão em um poço opcional. Como nos casos anteriores, foram usadas também as metodologias de simulação estocástica, ou simulação Monte Carlo (ROV), e a metodologia Híbrida Estocástica com Números *Fuzzy* (FROV), considerando que

o preço do petróleo segue um processo de reversão à média com saltos. Aqui também foi realizado o teste considerando-se como incerteza técnica o valor esperado da distribuição de probabilidade triangular no método de simulação estocástica.

Foi considerado que o preço do petróleo segue um processo de reversão à média com saltos. Este processo estocástico é o melhor para representar o preço de algumas *commodities*, como o preço do petróleo, taxa de juros, taxas de câmbio, etc., por ter uma lógica mais econômica e por considerar a grande variação do preço com a chegada de notícias raras anormais.

Na Tabela 14 apresentam-se os valores dos parâmetros utilizados.

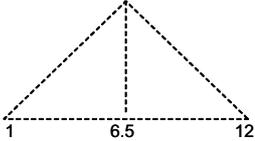
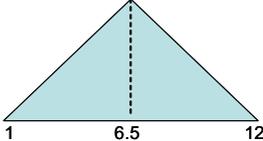
	ROV <i>(Simulação M. Carlo)</i>	FROV <i>(Híbrido com Fuzzy)</i>
Incerteza: B	Distribuição Triangular 	Número <i>Fuzzy</i> Triangular 
Simulações para o Preço do Petróleo (<i>Paths</i>)	5 000	5 000
Número de Amostras da Incerteza Técnica	1 000	Número <i>Fuzzy</i> Triangular
Processo Estocástico para o Preço do Petróleo	Reversão à Média com Saltos	Reversão à Média com Saltos
Tipo de Amostragem	Quase Monte Carlo	Quase Monte Carlo
Discretização do Tempo	0.08333333	0.08333333
Solução por:	Arbitragem	Arbitragem
Custo de Investimento: I	10 MM US\$	10 MM US\$

Tabela 14 - Parâmetros usados no experimento 7

Este experimento foi executado 13 vezes. A Tabela 15 apresenta os resultados obtidos para o valor da opção de expansão e o tempo empregado em cada execução do experimento. A Tabela 15 apresenta também todas as métricas consideradas nos experimentos anteriores.

Mostram-se também os resultados do valor da opção quando é considerado que não existe incerteza técnica (a incerteza técnica é o valor esperado da distribuição de probabilidade triangular), na metodologia de simulação estocástica.

QMC5000-PRMSaltos							Valor Esperado da Incerteza Técnica: $E[B] = 6.5$	
Tempo	Fuzzy ROV		ROV		Tempo	V. Opção	horas	
horas	Poço1	V. Opção	Poço1	V. Opção	horas			
1	0:02:06	8.46	-1.54	10.0047	0.0047	37:47:43	-1.52	0:16:12
2	0:04:06	14.15	4.15	9.92	-0.08	30:21:30	-1.86	0:19:48
3	0:05:57	17.36	7.36	8.28	-1.72	32:53:22	-0.1	0:23:24
4	0:02:23	9.9	-0.1	11.7	1.7	28:17:56	3.83	0:21:36
5	0:04:43	17.74	7.74	8.59	-1.41	26:39:56	0.01	0:28:48
6	0:02:27	10.45	0.45	16.66	6.66	43:34:34	-2.08	0:16:12
7	0:02:24	9.51	-0.49	14.8	4.8	41:35:18	-2.33	0:16:12
8	0:02:31	14.62	4.62	15.18	5.18	31:30:34	-1.77	0:18:48
9	0:02:27	8.97	-1.03	9.66	-0.34	32:09:23	3.29	0:21:36
10	0:02:32	10.79	0.79	9.72	-0.28	32:56:11	-1.55	0:19:48
11	0:02:21	8.76	-1.24	9.25	-0.75	28:35:18	-1.2	0:23:24
12	0:02:21	9.04	-0.96	8.69	-1.31	24:52:21	-0.17	0:27:00
13	0:02:11	8.1	-1.9	15.04	5.04	57:03:05	-0.15	0:21:36

	Fuzzy ROV		ROV			V. Opção	Tempo	
	Tempo	Poço1	V. Opção	Poço1	V. Opção	Tempo		
MÉDIA DOS EXPERIMENTOS	0:02:58	11.37	1.37	11.35	1.35	34:29:01	-0.43	0:21:06
VARIÂNCIA DOS EXPERIMENTOS			11.56		8.87		3.8036	
TEMPO TOTAL	0:38:29					448:17:11		4:34:24

ERRO MÉDIO	2.03%
EFICIÊNCIA MÉDIA	99.86%
	698.93
	Vezes mais rápido com Números Fuzzy

Tabela 15 - Comparação de resultados utilizando o processo de reversão à média com saltos e uma incertezas técnicas

Observa-se que na média o valor da opção para ambas metodologias são muito próximos, isto é, o erro médio relativo das simulações entre ambas metodologias é pequeno e aceitável para o tipo de aplicação. Note-se a significativa diferença de tempo computacional entre ambos métodos: 488:17 horas para o método de simulação estocástica e 38 minutos para o método híbrido proposto, apresentando uma boa eficiência computacional, sendo este último 698.93 vezes mais rápido.

Observa-se que, quando se considera a média da distribuição triangular como incerteza técnica no método de simulação estocástica, o valor da opção é diferente do valor da opção obtido quando se a considera a como uma distribuição triangular ou um número *fuzzy* triangular.

Observa-se também o efeito dos saltos estocásticos no preço do petróleo na variação do valor da opção, chegando em alguns casos a ser negativa. Isto é devido ao efeito dos saltos, os quais representam a chegada ao mercado de notícias raras anormais que influenciam drasticamente (variação grande) no preço da *commodity* (preço do petróleo).

Este mesmo efeito dos saltos causa uma diminuição no valor da opção em relação ao caso em que é usado só o processo de reversão à média, provocado pela probabilidade de ter saltos negativos.

5.5.8. Experimento 8

Este último experimento tem por objetivo observar a variação do resultado obtido por números *fuzzy*, isto é, deseja-se saber quão significativa é a variação do resultado obtido pela metodologia híbrida proposta. Para este fim, é repetido várias vezes um mesmo experimento.

Neste caso o experimento 1 (que foi executado 41 vezes na seção 5.5.1) foi repetido 30 vezes, isto é, cada bloco de 41 execuções do experimento 1 foi repetido 30, fazendo um total de $41 \cdot 30$ o número de vezes que foi executado o experimento.

No experimento determina-se o valor da opção de expansão usando a metodologia de simulação estocástica, ou simulação Monte Carlo (ROV). Utiliza-se também a metodologia Híbrida com Números *Fuzzy* (FROV). Considera-se que o preço do petróleo segue um movimento geométrico browniano.

Na Tabela 16 apresentam-se os valores dos parâmetros utilizados.

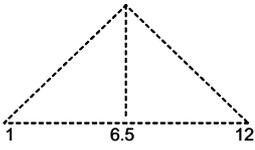
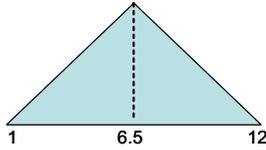
	ROV <i>(Simulação M. Carlo)</i>	FROV <i>(Híbrido com Fuzzy)</i>
Incerteza: B	Distribuição Triangular 	Número <i>Fuzzy</i> Triangular 
Simulações para o Preço do Petróleo (<i>Paths</i>)	1 000	1 000
Número de Amostras da Incerteza Técnica	500	Número <i>Fuzzy</i> Triangular
Processo Estocástico para o Preço do Petróleo	Movimento Geométrico Browniano	Movimento Geométrico Browniano
Tipo de Amostragem	Quase Monte Carlo	Quase Monte Carlo
Discretização do Tempo	0.08333333	0.08333333
Solução por:	Arbitragem	Arbitragem
Custo de Investimento: I	10 MM US\$	10 MM US\$

Tabela 16 - Parâmetros usados no experimento 8

A Tabela 17 apresenta os resultados obtidos para o valor da opção de expansão, o tempo médio utilizado em cada execução do experimento e o tempo total empregado por todas as execuções. Apresenta-se também a média e a variância do valor da opção de todas as execuções, o erro médio relativo da metodologia híbrida com números *Fuzzy* em relação à metodologia de simulação estocástica e a eficiência em tempo da metodologia híbrida proposta para cada repetição do experimento.

	Fuzzy ROV				ROV				ERRO MÉDIO	EFICIÊNCIA MÉDIA
	Tempo Média dos Experimentos	Valor da Opção Média dos Experimentos	Variância dos Experimentos	Tempo Total	Tempo Média dos Experimentos	Valor da Opção Média dos Experimentos	Variância dos Experimentos	Tempo Total		
1	0:00:49	9.28	0.50	0:33:41	0:03:30	9.28	1.14	2:23:24	0.08%	76.51%
2	0:00:49	9.28	0.63	0:33:29	0:03:54	9.29	1.22	2:40:01	0.08%	79.08%
3	0:00:51	9.28	0.79	0:34:53	0:03:48	9.28	1.92	2:35:45	0.04%	77.60%
4	0:00:48	9.29	0.48	0:32:32	0:03:33	9.29	0.80	2:25:32	0.07%	77.65%
5	0:00:48	9.28	0.80	0:32:52	0:03:40	9.28	0.59	2:30:40	0.03%	78.19%
6	0:00:47	9.28	0.60	0:31:55	0:03:31	9.28	1.04	2:24:07	0.03%	77.85%
7	0:00:42	9.29	0.78	0:28:37	0:03:26	9.27	1.22	2:20:49	0.17%	79.68%
8	0:00:54	9.28	0.56	0:36:46	0:03:41	9.28	1.55	2:31:04	0.00%	75.66%
9	0:00:55	9.28	0.90	0:37:41	0:03:26	9.28	1.99	2:21:03	0.07%	73.28%
10	0:00:53	9.28	1.10	0:36:19	0:08:04	9.28	0.69	5:31:01	0.01%	89.03%
11	0:00:49	9.28	0.65	0:33:14	0:03:30	9.29	0.78	2:23:45	0.08%	76.88%
12	0:00:50	9.28	0.53	0:33:58	0:03:31	9.28	1.62	2:24:12	0.01%	76.44%
13	0:00:49	9.27	1.03	0:33:32	0:03:37	9.29	1.27	2:28:18	0.28%	77.39%
14	0:00:54	9.29	0.64	0:36:41	0:03:49	9.28	1.77	2:36:29	0.09%	76.56%
15	0:00:42	9.28	0.56	0:28:47	0:03:33	9.28	0.87	2:25:45	0.04%	80.25%
16	0:00:49	9.28	0.37	0:33:36	0:03:27	9.29	1.10	2:21:32	0.11%	76.26%
17	0:00:46	9.28	0.77	0:31:38	0:03:29	9.28	0.78	2:22:54	0.06%	77.86%
18	0:00:47	9.28	0.33	0:32:14	0:03:38	9.29	0.72	2:29:08	0.12%	78.39%
19	0:00:46	9.28	0.48	0:31:27	0:03:31	9.29	1.02	2:24:04	0.13%	78.17%
20	0:00:44	9.28	1.15	0:29:47	0:03:38	9.29	1.19	2:29:08	0.17%	80.03%
21	0:00:43	9.28	0.82	0:29:23	0:03:31	9.28	0.61	2:24:15	0.03%	79.63%
22	0:01:03	9.29	1.44	0:42:48	0:03:36	9.29	1.65	2:27:16	0.06%	70.94%
23	0:00:51	9.28	0.79	0:35:10	0:03:39	9.29	0.97	2:29:58	0.03%	76.55%
24	0:00:51	9.29	0.63	0:35:04	0:03:20	9.29	0.65	2:16:54	0.00%	74.39%
25	0:00:47	9.29	0.45	0:32:23	0:03:34	9.28	0.84	2:25:55	0.19%	77.81%
26	0:00:48	9.28	0.65	0:32:30	0:03:44	9.27	0.67	2:33:12	0.04%	78.79%
27	0:00:49	9.29	0.98	0:33:34	0:03:40	9.28	1.41	2:30:20	0.13%	77.67%
28	0:00:50	9.29	0.52	0:34:16	0:03:37	9.29	1.15	2:28:04	0.01%	76.86%
29	0:00:50	9.29	0.84	0:33:57	0:03:28	9.28	0.77	2:21:48	0.11%	76.06%
30	0:00:50	9.28	0.35	0:34:04	0:03:36	9.28	1.15	2:27:37	0.01%	76.92%

Tabela 17 - Comparação de Resultados das 30 repetições do experimento.

Observa-se que o erro médio relativo das simulações entre ambas metodologias é pequeno e aceitável para o tipo de aplicação. Note-se que a variação dos valores das médias em todas as repetições do experimento são muito pequenas na metodologia híbrida com números *fuzzy*, próximos a 1%, que é ligeiramente menor que na metodologia de simulação estocástica, próximo ao 2%.

5.6. Conclusões

Na Tabela 18 apresenta-se um resumo dos resultados dos experimentos.

Dos resultados obtidos, observa-se que a metodologia híbrida proposta, que une a simulação Monte Carlo com os Números *Fuzzy* e processos estocásticos

para representar o comportamento do preço do petróleo, obtêm na média valores muito próximos para o valor da opção, isto é, o erro médio relativo é pequeno.

O tempo empregado nas simulações com a metodologia híbrida com número *fuzzy* é significativamente menor que o tempo empregado pela metodologia tradicional de simulação estocástica.

Da mesma forma, as variâncias das execuções são muito próximas e pequenas.

Observa-se que o erro médio relativo é menor quando o processo estocástico usado para o preço do petróleo é o Processo de Reversão à Média, sendo que neste caso a metodologia híbrida proposta com número *fuzzy* apresenta melhor eficiência no tempo computacional.

O uso de números *fuzzy* para a representação das incertezas técnicas permite executar vários experimentos em pouco tempo, obtendo-se uma boa aproximação do valor da opção.

Observa-se também que, quando o número de simulações para o preço do petróleo aumenta, a diferença entre as respostas fornecidas por ambas as metodologias diminui significativamente, isto é, o erro diminui. É aqui que a metodologia híbrida estocástica com números *fuzzy* apresenta maior eficiência quanto ao tempo computacional.

Como um número *fuzzy* representa toda a incerteza técnica, o algoritmo de Grant, Vora e Weeks [4] é executado uma única vez, resultando numa redução significativa do tempo computacional.

No caso onde é considerado que o preço do petróleo segue um Movimento Geométrico Browniano, a eficiência computacional da metodologia proposta é menor que nos casos onde se considera o processo de Reversão à Média, pois a curva de gatilho é calculada uma única vez [23] [24] [80].

Quando são consideradas mais incertezas técnicas, a aproximação do valor da opção pela metodologia híbrida com números *fuzzy* apresenta um erro médio maior. Este erro é devido ao efeito das operações com números *fuzzy*, nas quais o domínio do número *fuzzy* cresce com cada operação *fuzzy* realizada.

Observa-se que a quantidade de α -cut empregado para operar com números *fuzzy* é indiferente para esse tipo de aplicação, por obter sempre uma variação desprezível no resultado da operação.

Com uma Incerteza (Tamanho da reserva a ser drenada)

Processo Estocástico para o Preço do Petróleo	Método de Simulação Estocástica		Método Híbrido Simulação Estocástica com Números Fuzzy		Erro Médio	Eficiência em Tempo	Fator de Rapidez (Fuzzy)
	Média do Valor da Opção Real	Tempo dos Experimentos (Horas)	Média do Valor da Opção Real - Fuzzy	Tempo dos Experimentos (Horas)			
Mov. Geométrico Browniano (1000 simulações do preço) Incerteza Simétrica	8.78	5:58:31	8.76	0:41:11	0.23%	88.51	8.71
Mov. Geométrico Browniano (5000 simulações do preço) Incerteza Simétrica	9.19	10:32:15	9.07	2:00:40	1.29%	80.91%	5.24
Proc. Reversão à Média (1000 simulações do preço) Incerteza Simétrica	2.28	3:25:36	1.95	0:12:03	14.83%	99.73%	375.57
Proc. Reversão à Média (5000 simulações do preço) Incerteza Simétrica	2.24	187:33:58	2.14	0:56:17	4.37%	99.5	199.95
Proc. Reversão à Média (5000 simulações do preço) Incerteza Assimétrica	6.55	371:49:11	6.58	1:15:27	0.47%	99.66	295.68
Proc. Reversão à Média com Saltos (5000 simulações do preço) Incerteza Simétrica	1.35	448:17:11	1.37	0:38:29	2.03%	99.86	698.93

Com duas Incertezas

(Tamanho da reserva a ser drenada e Fator de declínio exponencial da vazão)

Processo Estocástico para o Preço do Petróleo	Método de Simulação Estocástica		Método Híbrido Simulação Estocástica com Números Fuzzy		Erro Médio	Eficiência em Tempo	Fator de Rapidez (Fuzzy)
	Média do Valor da Opção Real	Tempo dos Experimentos	Média do Valor da Opção Real - Fuzzy	Tempo dos Experimentos			
Proc. Reversão à Média (5000 simulações do preço) Incerteza Simétrica	2.11	186:06:43	1.74	0:48:22	17.73%	99.57	230.88

Tabela 18 – Resumo dos resultados dos experimentos.