

## **2**

# **Teoria das Opções Reais**

### **2.1.**

#### **Introdução**

Este capítulo descreve os conceitos da teoria de opções reais utilizada para a avaliação de ativos reais, tais como projetos de investimento, avaliação de projetos de pesquisa, avaliação de propriedades intelectuais, entre outros. Este capítulo inicia-se com uma descrição dos principais conceitos referentes à Teoria de Opções Financeiras; a seguir descrevem-se os conceitos da Teoria das Opções Reais, finalizando com uma breve descrição dos métodos de avaliação das Opções Reais.

### **2.2.**

#### **Opções Financeiras**

A teoria das opções financeiras fundamenta os conceitos da teoria das opções reais. Por esta razão, nesta seção serão apresentadas apenas definições básicas da teoria de opções financeiras, já que o foco deste trabalho é a aplicação destes conceitos na avaliação de projetos de investimento, opções reais.

Uma opção é o direito de comprar ou vender uma quantidade específica de um bem ou ativo por um preço fixo em uma determinada data prefixada ou até esta data. O fato de ser um direito e não uma obrigação gera uma assimetria benéfica ao proprietário da opção, já que o exercício somente será feito no caso da oscilação no preço do ativo objeto ser favorável ao seu detentor.

O preço fixo para a compra ou venda do ativo objeto é chamado de preço de exercício. A data prefixada para o exercício da opção é conhecida como data de expiração, data de vencimento, ou maturidade da opção.

### 2.2.1. Opções de Compra

Uma opção de compra (*call*) é um direito que o detentor do contrato tem de comprar o bem ou ativo objeto por um preço de exercício pré-estabelecido, em uma data futura determinada [6]. O ativo objeto pode ser uma ação de determinada firma, um contrato futuro sobre outro ativo ou uma *commodity*, entre outros. Este tipo de opção apresenta uma função de remuneração dada por:

$$C_T = \max(S_T - K, 0) \quad (1)$$

onde  $C_T$  é o valor da opção de compra na data de vencimento  $T$ ,  $S_T$  é o preço do ativo objeto e  $K$  é o preço de exercício. A Figura 1 mostra como o valor da opção de compra varia em função do preço do ativo objeto na data de vencimento.

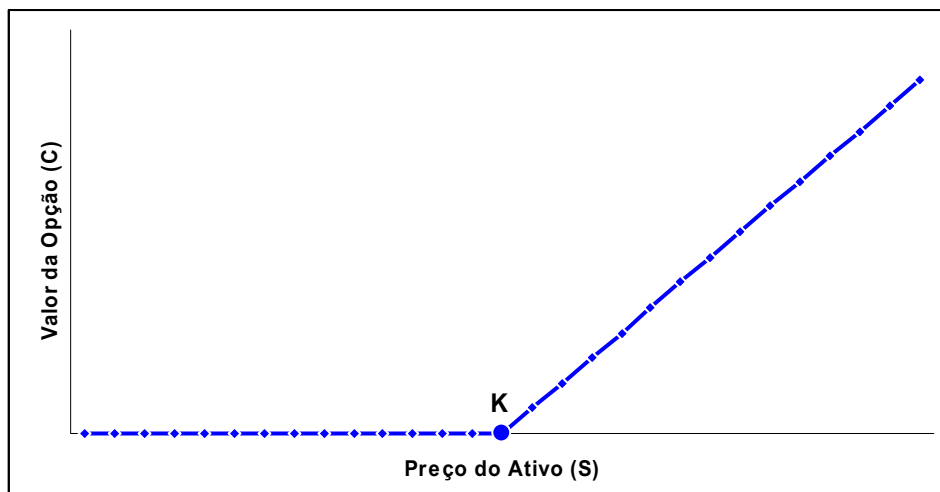


Figura 1 – Variação do valor de uma opção de compra

Observe-se que a opção só tem valor quando o preço do ativo objeto for superior ao preço de exercício.

### 2.2.2. Opções de Venda

Uma opção de venda (*put*) dá ao seu detentor o direito de vender o bem ou ativo objeto por um preço de exercício numa data futura. A função de remuneração da opção de venda, no vencimento, é dada por:

$$P_T = \max(K - S_T, 0) \quad (2)$$

onde  $P_T$  é o valor da opção de venda na data de vencimento  $T$ ,  $S_T$  é o preço do ativo objeto e  $K$  é o preço de exercício. A Figura 2 mostra como o valor da opção de venda varia em relação ao preço do ativo objeto na data de vencimento.

Neste caso, a opção de venda tem valor quando o preço do ativo objeto for menor do que o preço de exercício.

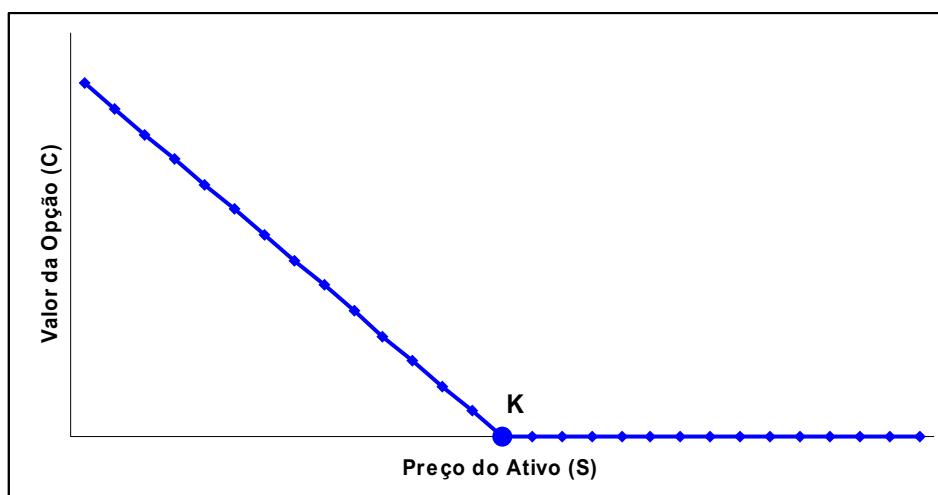


Figura 2 – Variação do valor de uma opção de venda

A opção de compra tem uma grande importância devido a sua analogia com uma oportunidade de investimento. Já a opção de venda pode ser pensada como um seguro, pois o detentor da opção, que também detém a ação, limita as suas perdas. Assim, caso o valor da ação caia, pode-se exercer a opção e vender a ação por um preço pré-determinado como o mínimo adequado.

As opções também podem ser diferenciadas quanto à data de exercício. Opções europeias são aquelas onde os direitos podem ser exercidos somente na data de vencimento do título, enquanto as opções americanas são aquelas onde o detentor pode exercê-las em qualquer período até a data de vencimento.

As opções europeias são em geral resolvidas mediante a equação de Black e Scholes [27]. Segundo Black e Scholes, o valor da opção financeira antes do vencimento depende apenas de 6 parâmetros:

- Preço do ativo objeto (ação),  $S$ ;
- Preço de exercício da opção,  $K$ ;

- Volatilidade do ativo objeto,  $\sigma$ ;
- Tempo que falta para a expiração da opção,  $\tau$ ;
- Taxa de juros livre de risco,  $r$ ; e;
- Dividendos do ativo objeto,  $\delta$ .

A equação de Black e Scholes que avalia uma opção de compra européia sobre uma ação que paga dividendos é uma equação diferencial cuja solução é dada por:

$$C = Se^{-\delta(T-t)}N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \quad (3)$$

onde  $C$  é o valor da opção de compra e  $N(d_x)$  é a função de distribuição normal cumulativa da variável  $d_x$ ,

$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r - \delta + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, e;$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Para a correta utilização da fórmula desenvolvida por Black e Scholes, é necessário que o mercado seja suficientemente completo de forma a não permitir oportunidades de arbitragem, já que a fórmula foi deduzida através da avaliação por arbitragem.

As opções americanas são em geral resolvidas numericamente ou usando aproximações analíticas. Em alguns casos, o valor da opção européia é usado como um dos parâmetros para avaliar a opção americana através de relações do tipo:

$$\textit{Opção Americana} = \textit{Opção Européia} + \textit{Prêmio de Exercício Antecipado}.$$

A avaliação de opções americanas requer a determinação de uma política ótima de investimento, ou seja, deve-se determinar a partir de qual valor do preço do ativo objeto a opção deve ser exercida, de modo a maximizar o valor presente de sua remuneração. Para a teoria das opções reais, a determinação desta política é o fator central, já que pode estar sendo determinado o melhor momento para se investir em um projeto.

### 2.3. Opções Reais

Determinar a viabilidade e a prioridade de investimentos potenciais é um passo crítico na tomada de decisões gerenciais, as quais são tomadas em ambientes incertos. Estas incertezas podem representar um custo elevado, mas também podem criar oportunidades de valor elevado para os investidores. Diversos fatores determinam o surgimento dessas incertezas (como as condições do mercado, vide Apêndice A) e o gerente responsável pela tomada de decisões deverá acompanhar a evolução do mercado para assim realizar mudanças nos planos de investimento.

O dinamismo do mercado e a flexibilidade gerencial na avaliação de projetos de investimento (que está relacionada com a aparição de novas informações relativas ao projeto) podem levar uma empresa a alterar o cenário definido originalmente, como por exemplo: diferir o projeto, expandi-lo, prorrogá-lo ou abandoná-lo após a fase de planejamento. Quando exercitadas de forma ótima, todas estas opções proporcionam flexibilidade que aumenta o valor do projeto.

A análise de opções reais captura o valor dessa flexibilidade, o que os métodos tradicionais de avaliação de investimentos não conseguem fazer. Métodos como o Valor Presente Líquido (VPL) ou o Fluxo de Caixa Descontado (FCD) não são suficientes para captar o valor associado à flexibilidade, pois eles tratam apenas de fluxos de caixa previstos, descontados a uma taxa constante, por considerar o risco constante durante a vida do projeto. Tais limitações tornam esses métodos inadequados para análises quantitativas por induzir na maioria das vezes a taxas de desconto intuitivas. Em procedimentos deste tipo, existe forte tendência a valorizar excessivamente a aversão ao risco. Neste sentido estes métodos subestimam sistematicamente todo projeto.

As opções reais são conseqüências naturais de circunstâncias criadas por situações do mundo real que proporcionam as características de irreversibilidade, incerteza e possibilidade de adiamento. Essas características permitem estabelecer a seguinte analogia entre a oportunidade de investimento (opção real) e a opção financeira [1] [2]: uma firma com uma oportunidade de investimento irreversível carrega uma opção de investir no futuro (ou de esperar); ela tem o direito – mas

não a obrigação – de comprar um ativo (o projeto) no futuro, a um preço de exercício (o investimento). Quando a firma investe, ela exerce a opção e paga um custo de oportunidade igual ao seu valor. O exercício da opção (o investimento) é irreversível, mas a firma sempre tem a possibilidade de preservar o valor de sua opção (adiar o investimento) até que as condições de mercado se tornem mais favoráveis.

A Tabela 1 apresenta a analogia entre a opção real (oportunidade de investimento) e a opção financeira. Estabelecida esta analogia é possível calcular o valor de uma opção real empregando os mesmos métodos usados para determinar o valor de uma opção financeira.

<b>OPÇÃO FINANCEIRA</b>	<b>OPÇÃO REAL</b>
Preço de exercício da opção.	Custo de investimento no projeto
Ativo subjacente: Ação	Projeto
Retorno da ação	Retorno do projeto
Volatilidade no preço de ação.	Volatilidade no valor do projeto
Fluxo de dividendos da ação	Fluxo de caixa líquido do projeto
Tempo de expiração da opção.	Tempo expiração da oportunidade de investimento.
Taxa de juros livre de risco	Taxa de juros livre de risco

Tabela 1 – Analogia entre opções financeiras e opções reais.

### **2.3.1. Tipos de Opções Reais**

A seguir descrevem-se alguns dos tipos de opções reais identificados na bibliografia [1] [2] [3] [28] [29].

- **Opção de Abandono:**

Trigeorgis [28] divide esse tipo de opção em duas classes: opção para desistir quando a construção estiver em curso e opção para abandonar pelo valor residual.

**Opção para Desistir quando a Construção estiver em Curso:** na grande maioria dos projetos, o investimento necessário não se concentra em uma única despesa inicial; o investimento é fracionado. Esta situação específica, de projetos com despesas de investimento fracionadas ao longo do horizonte temporal, criam valiosas opções para desistência em qualquer fase (exemplo: no caso da exploração de reservas de petróleo, quando as respectivas reservas ou os preços do petróleo se tornarem tão baixos que não justifiquem a continuação desse projeto de investimento).

Desta forma, cada fase do investimento em questão pode ser vista como uma opção sobre o valor das fases subseqüentes, ao requerer a despesa necessária para prosseguir para a etapa seguinte. Assim, cada fase do investimento pode ser avaliada de forma semelhante às opções sobre opções.

**Opção para Abandonar pelo Valor Residual:** quando o funcionamento do projeto se torna prejudicial por qualquer motivo, a gerência não precisa continuar a incorrer com os custos fixos desse investimento. Nesta situação, a gerência poderá possuir uma valiosa opção de abandono por completo do investimento, em troca do seu valor residual encontrado no mercado secundário, através do preço de revenda dos equipamentos e/ou outros ativos do investimento.

- **Opção de Fechamento Temporário:**

Trigeorgis e Mason [28] mostraram que a flexibilidade para fechar a produção temporariamente, ou de não funcionar por completo em qualquer período de vida do projeto, torna-se valiosa se as receitas não forem suficientes para cobrir os custos variáveis de funcionamento nesse período. Assim, em um dado momento, a gerência pode continuar com a produção e obter a diferença entre as receitas e o total de custos de funcionamento, ou então fechar e somente pagar os custos fixos associados ao projeto nesse momento.

Deste modo, a flexibilidade de funcionamento (ou não), em qualquer ano, pode ser vista como uma opção de compra da receita desse ano, ao pagar os custos variáveis como preço de exercício.

- **Opção de Troca de um Conjunto de Mercadorias por Outro:**

J. Kensinger [29] [30] analisou um projeto como uma carteira de opções de troca de um conjunto de mercadorias por outro, carteira que passa a ser administrada no futuro pela gerência.

Pode-se ilustrar a análise das opções de troca através de um simples caso de uma máquina que converte uma mercadoria em outra. Neste caso, a empresa que compra a máquina adquire a oportunidade de comprar a mercadoria de *entrada*, convertê-la e vender a mercadoria de *saída* - desde que seja rentável fazê-lo. Se tal atividade não for rentável em determinado instante, a empresa não precisa exercer a opção. A empresa detém a carteira dessas opções com diferentes maturidades, uma para cada período de vida da máquina.

Esta flexibilidade, de trocar os usos ou abandonar um projeto mais cedo em troca do seu “valor de recuperação”, permite à gerência selecionar o valor máximo do projeto no seu atual uso ou no seu melhor uso alternativo. Assim, uma oportunidade de investimento, com a flexibilidade de troca de uso, pode ser vista como a soma do projeto em seu atual uso mais uma opção de venda sobre o mesmo, com um preço de exercício igual ao valor de seu melhor uso alternativo [28].

Estas opções de flexibilidade consistem em uma carteira de opções de compra e venda, e um dos exemplos mais interessantes é constituído por uma empresa industrial flexível que pode produzir dois produtos diferentes.

- **Opção de Crescimento Futuro:**

A maior parte dos investimentos iniciais podem ser vistos como pré-requisitos ou como elos em cadeias de projetos inter-relacionados. O valor destes projetos iniciais resulta também das futuras oportunidades de crescimento (que poderão desencadear).

Apesar de um aparente Valor Presente Líquido negativo, a infraestrutura, experiência e potencial de geração de subprodutos, durante o desenvolvimento do produto de primeira geração, pode servir como



trampolim para o desenvolvimento de futuras gerações de produtos, com custos mais reduzidos ou de qualidade mais elevada, ou para criar aplicações totalmente novas. Mas, a menos que a empresa efetue esse investimento inicial, as gerações subsequentes ou outras aplicações não poderão ser viáveis. A infra-estrutura ou a experiência adquirida, se a empresa for proprietária das mesmas, podem colocar a empresa em uma vantagem competitiva.

De fato, as decisões de investimento hoje podem criar a base para decisões de investimento amanhã; as alterações de capital efetuadas em qualquer ano são passos vitais na realização dos objetivos estratégicos. Pela mesma analogia, um planejamento de longo prazo implica necessariamente no cultivo de oportunidades de investimento particulares e podem ter um impacto monetário direto no preço dos títulos da empresa em um período próximo. Assim, as duas atividades são diferentes, mas relacionadas, pelo mesmo fim: a maximização do valor das ações ordinárias da empresa.

- **Opção de Adiar o Investimento:**

A Opção de Adiar (Opção de Espera) um projeto por um período dá à gerência o direito, mas não a obrigação, de efetuar o investimento no próximo período; assim, a gerência esperará e só realizará o investimento se o valor do projeto no próximo período exceder o investimento necessário nessa data, isto é, a opção de espera pode ser vista como uma opção de compra americana sobre o valor presente bruto do projeto,  $V$ , com um preço de exercício igual à despesa de investimento requerida no período seguinte [28].

A opção de esperar (e aprender) [31] resume-se a possuir uma opção de compra sobre o projeto de investimento. A opção é exercida quando a empresa arranca com o projeto, sendo muito freqüentemente preferível adiar um projeto com um VPL positivo como forma de manter viva a opção de compra. Este adiamento é mais atraente quando a incerteza é elevada e os fluxos de caixa imediatos do projeto são pequenos. De fato, uma opção é muito mais valiosa quando o risco ou a incerteza sobre o futuro é maior.

A opção de espera é particularmente valiosa nas indústrias de extração de recursos e no desenvolvimento de bens imobiliários, devido à elevada incerteza e aos longos horizontes temporais associados a estes tipos de investimentos.

- **Opção de Expansão:**

Uma vez efetuado um determinado projeto de investimento, a gerência possui a flexibilidade de alterá-lo de várias formas, em diferentes momentos no decorrer da vida do mesmo.

Esta opção é similar a uma opção de compra de tipo americano para adquirir uma parte adicional ( $x\%$ ) do projeto, exigindo o custo de acompanhamento (IE) como preço de exercício. Neste sentido, a oportunidade de investimento com uma opção de expansão pode ser pensada como o projeto de escala inicial,  $V$ , mais uma opção de compra num investimento futuro, isto é,  $V + \max(xV - IE, 0)$ .

A opção de expansão pode ser de importância estratégica, especialmente se permite à empresa explorar oportunidades futuras de crescimento. Esta opção, que será exercida somente se desenvolvimentos futuros do mercado se tornarem favoráveis, pode tornar um investimento inicial, aparentemente não lucrativo, (tendo por base o método do VPL estático) num investimento que mereça ser realizado [28] [32].

- **Opção para Contrair:**

Se as condições de mercado se tornarem desfavoráveis, a gerência pode decidir funcionar abaixo da capacidade ou mesmo reduzir a sua escala de operações (em digamos,  $c\%$ ), guardando parte das despesas do investimento planejado (IC). Esta flexibilidade para atenuar perdas é análoga a uma opção de venda do tipo americana sobre parte ( $c\%$ ) do projeto (título), com um preço de exercício igual aos potenciais custos poupados (IC), dado o  $\text{Max}(IC - cV, 0)$  [28].

## 2.4. Métodos de Avaliação de Opções Reais

O problema geral de investimento sob incerteza pode ser visto como um problema de maximização de riqueza sujeito a uma ou mais incertezas (processos estocásticos, vide Apêndice A). Deste modo, é necessário um método de otimização sob incerteza. Os dois métodos mais usados são os métodos dos ativos contingentes, *Contigent Claims*, e o da programação dinâmica.

Do mesmo modo que uma opção financeira, uma opção real pode ser avaliada usando técnicas de análise de ativos contingentes. Se os investidores forem considerados neutros ao risco, então o valor da opção pode ser obtido montando-se uma carteira dinâmica, neutra ao risco, que replica o valor do ativo real. Utilizando ferramentas de cálculo estocástico, obtém-se uma equação diferencial parcial que pode ser resolvida analiticamente ou através de métodos numéricos. Este método, entretanto, é muito limitado, pois à medida que as incertezas sobre as variáveis subjacentes tornam-se mais complexas, o processo de avaliação pode tornar-se oneroso computacionalmente ou intratável algebricamente.

Técnicas de simulação, como Monte Carlo e Programação Dinâmica Estocástica, podem ser utilizadas para a avaliação de opções. Simulação Monte Carlo inicialmente foi utilizada para avaliação de opções européias, devido à característica *forward* que esses títulos derivativos apresentam. Já a Programação Dinâmica Estocástica é utilizada para avaliar opções americanas, uma vez que as mesmas devem ser avaliadas com um algoritmo *backward*. A combinação da simulação Monte Carlo e a Programação Dinâmica Estocástica permite desenvolver métodos para avaliação de opções americanas, como pode ser visto em [4] [5] [33].

Em todos estes casos usualmente são obtidas equações diferenciais, com a condição de ótimo colocada nas condições de contorno dessas equações. Também nas condições de contorno se colocam as condições de decisão gerencial racional e os limites do modelo.

A condição suficiente de contorno do ótimo, na maioria dos problemas de investimentos, se dá com a condição de suavidade ou de contato suave (*smooth pasting condition*). Pela condição de suavidade, no ponto ótimo, a primeira

derivada da função valor da opção deve ter o mesmo valor, antes e depois que a opção for exercida. Alternativamente, no ótimo, a utilidade marginal deve ser igual, antes e depois da ação de investimento, conforme visto na equação (4).

$$\frac{\partial[F(P^*)]}{\partial P} = \frac{\partial[V(P^*) - I]}{\partial P} \quad (4)$$

onde  $F$  é o valor da opção,  $V$  é o retorno do investimento,  $I$  é o investimento e  $P^*$  é o valor ótimo do preço para o exercício da opção.

A condição de fronteira necessária, mas não suficiente, nos problemas de maximização de riqueza é a condição de mesmo valor de contato ou *value matching condition*. Por não ser uma condição suficiente, esta não é considerada uma condição de ótimo. A condição de mesmo valor de contato diz que no ponto ótimo é indiferente o exercício ou não da opção, conforme descrito na equação (5).

$$F(P^*) = V(P^*) - I \quad (5)$$

Vale a pena ressaltar que a condição de suavidade é suficiente para o ótimo na imensa maioria dos problemas de investimento em projetos, os quais podem usar a analogia com o problema de ótimo exercício de uma opção americana de compra, com o pagamento contínuo de dividendos (proporcionais ao valor do ativo).

A seguir, apresenta-se uma pequena descrição dos métodos de otimização sob incerteza: método de ativos contingentes, programação dinâmica, os métodos numéricos e de simulação estocástica.

#### 2.4.1. Ativos Contingentes

O método de ativos contingentes, embora um pouco mais restrito em suas aplicações do que a programação dinâmica, tem como principal vantagem evitar a necessidade de se estabelecer a taxa de desconto ajustada ao risco  $\rho$ . Em [1], Dixit e Pindyck indicam que no caso dos ativos contingentes a taxa de retorno requerida

para o ativo é derivada como uma implicação do equilíbrio geral do mercado de capitais e, portanto, oferece o melhor tratamento para a taxa de desconto.

Neste método é criada uma carteira sem risco, em que todos os ativos exigem o mesmo retorno: a taxa livre de risco. Esta carteira é composta de uma posição longa da opção de investimento  $F$  e uma posição curta de  $n$  unidades do ativo de risco negociado no mercado e correlacionado com o projeto, sendo que  $n$  é escolhido de forma a tornar esta carteira sem risco. Assim se consegue relacionar o valor da opção com os parâmetros do mercado, calculando o valor da opção supondo condições de não arbitragem.

Para poder montar uma carteira sem risco é necessário que se tenha um mercado suficientemente completo<sup>1</sup> [6] [34] [35], de forma que o valor do projeto seja perfeitamente correlacionado com um ativo negociado no mercado. Isso faz com que exista uma referência de mercado para o valor do projeto, e não uma estimativa subjetiva do valor econômico do mesmo.

A abordagem dos ativos contingentes é válida mesmo se o risco do projeto não for diretamente medido no mercado, desde que se possa construir uma carteira com ativos de mercado que reproduzam a incerteza do projeto. Isso ocorre nos projetos em que existem referências de preços de mercado, como projetos de produção de *commodities*.

#### **2.4.2. Programação Dinâmica**

A programação dinâmica é usada quando não se tem um mercado suficientemente completo [34] [35]. Quando não há condições de montar a carteira sem risco, o mercado é incompleto. Neste caso, pode-se usar a programação dinâmica, estabelecendo uma taxa arbitrária de desconto, ou usar a extensão do método de neutralidade ao risco, fazendo-se o desconto à taxa livre de risco.

Tanto o método dos ativos contingentes, como o da programação dinâmica, usam o Lema de Itô [1] [6] [8] para desenvolver a equação diferencial cuja

---

<sup>1</sup> A hipótese de mercado completo normalmente é utilizada para a formação de preço de derivativos. A condição de mercado completo deriva diretamente da condição de ausência de arbitragem, isto é, é um mercado em equilíbrio, onde um mesmo ativo tem um único preço e é possível criar carteiras de investimento sem risco. Na prática, é impossível a existência de um mercado completo devido aos custos de transação, regulamentação governamental, etc.

solução fornece o valor da opção de investir, e podem ser vistos como um problema de maximização de riqueza do investidor sujeito a um processo estocástico.

A programação dinâmica torna-se equivalente ao método dos ativos contingentes quando se usa a avaliação equivalente neutra ao risco. Segundo Hull [6], a precificação da opção não envolve qualquer parâmetro que dependa de preferências do investidor ou de sua atitude em relação ao risco, e se esses parâmetros não entram na equação também não entram na solução. Portanto, a solução é válida em todos os contextos de atitude em relação ao risco.

Em [1], Dixit e Pindyck mostram que a programação dinâmica é equivalente aos ativos contingentes se no primeiro for usada a neutralidade ao risco, isto é, se o valor de  $\rho$  for considerado como igual a taxa livre de risco.

### 2.4.3. Métodos Numéricos

Na programação dinâmica, o valor da opção de investimento é calculado resolvendo-se uma equação diferencial parcial. Normalmente, equações diferenciais parciais não possuem soluções analíticas, assim, métodos numéricos devem ser utilizados para aproximar a solução. Métodos de diferença explícita e implícita foram utilizados em [36] para avaliar uma opção americana.

Outro método numérico, conhecido como árvore binomial, foi proposto em [37]. A distribuição de probabilidades do ativo em cada período, suposta log-normal, foi aproximada por uma distribuição binomial. Assim, em cada período o preço do ativo pode mudar para somente dois valores possíveis.

A vida útil da opção é dividida em  $M$  períodos de tempo e considera-se que o preço do ativo é negociado somente nestes períodos. Assim, uma árvore binomial com todos os possíveis preços do ativo é criada, conforme mostrado na Figura 3. Esta árvore é construída partindo de um valor inicial  $V$ , gerando dois preços possíveis ( $uV$  e  $dV$ ) no segundo período, três preços possíveis ( $u^2V$ ,  $udV$  e  $d^2V$ ) no terceiro período e assim por diante, até que a vida útil seja atingida.

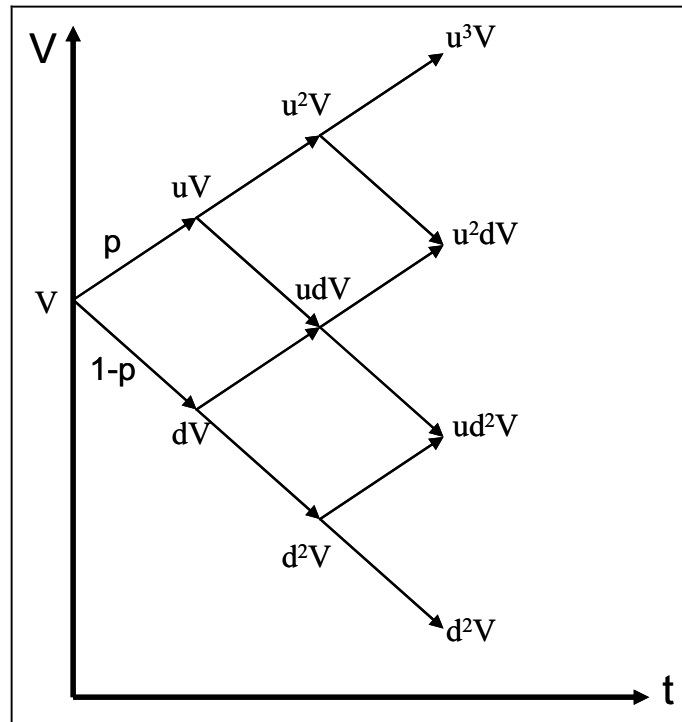


Figura 3 - Representação do modelo de árvores binomiais com três períodos.

As preferências do investidor ao risco não necessitam ser levadas em conta, já que se pode criar uma carteira dinâmica livre de risco em cada período. O processo estocástico do valor do projeto é dado por:

$$dV = \alpha V dt + \sigma V dz \quad (6)$$

onde  $\alpha$  é a taxa de crescimento de  $V$ ,  $\sigma$  é a volatilidade de  $V$  e  $dz$  é o incremento de Wiener [1] [6] [8];  $\alpha$  é substituído por  $r - \delta$ , onde  $r$  é a taxa de juros livre de risco. Os parâmetros  $u$ ,  $d$  e  $p$  são dados pelas equações (7), (8) e (9):

$$u = \sigma \sqrt{dt} \quad (7)$$

$$d = 1/u \quad (8)$$

$$p = \frac{1}{2} + \left( \alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \sqrt{dt} \quad (9)$$

Logo, o algoritmo de programação dinâmica é aplicado ao longo da árvore binomial. Em cada um dos nós terminais a remuneração da opção é calculada de acordo com a equação (10).

$$F_T(V_T) = \max(V_T - I, 0) \quad (10)$$

A seqüência de decisões que podem ser adotadas em cada período de tempo são decompostas em duas partes: decisão imediata e decisão futura. A decisão ótima é aquela que maximiza o valor presente líquido. A decomposição do problema em duas decisões é fundamentada no Princípio de Bellman, [1] [38]. Para o problema de avaliação de uma opção de espera, a Equação de Bellman é dada a seguir:

$$F_t(V_t) = \max \left\{ \underbrace{V_t - I}_{\text{Decisão Imediata}}, \underbrace{\frac{1}{1+r} E_t[F_{t+1}(V_{t+1})]}_{\text{Decisão Futura}} \right\} \quad (11)$$

onde,  $F_t$  representa o valor da oportunidade de investimento no tempo  $t \in [0., T)$ ,  $V_t$  o valor presente dos fluxos de caixa no tempo  $t$ ,  $I$  o custo de investimento,  $r$  taxa de desconto livre de risco e  $E_t[F_{t+1}]$  valor esperado da oportunidade de investimento em  $t+1$ , condicionado às informações em  $t$ . O valor esperado da oportunidade de investimento pode ser calculado, pois o modelo binomial disponibiliza as probabilidades de transição entre dois período de tempo consecutivos.

Como exemplo, considere um ramo da árvore binomial como na Figura 4. Em  $t+1$ , a remuneração da opção, quando o valor do ativo passa de  $V_t$  para  $uV_t$ , é dado por  $F_{t+1,u}(V_{t+1}) = \max(uV_t - I, 0)$ , e  $F_{t+1,d}(V_{t+1}) = \max(dV_t - I, 0)$  quando o valor do ativo passa de  $V_t$  para  $dV_t$ .

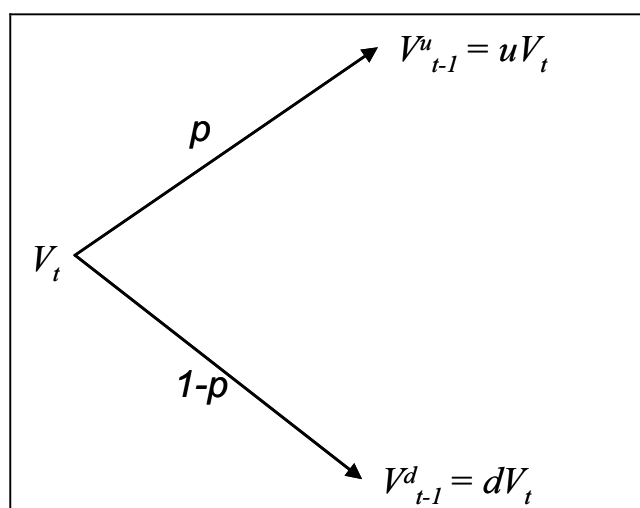


Figura 4 – Ramo da árvore binomial



Já o valor da opção em  $t$  é obtido usando a equação (11) e calculando o valor esperado da oportunidade de investimento em  $t+1$ . Estes cálculos são feitos em todos os nós da árvore, do período  $T-\Delta t$  até 0, onde o preço da oportunidade de investimento ( $F_0$ ) é calculado.

$$F_t(V_t) = \max \left\{ V_t - I, \frac{1}{1+r} [pF_{t+1,u} + (1-p)F_{t+1,d}] \right\}$$

#### 2.4.4. Técnicas de Simulação

Monte Carlo é uma ferramenta de simulação estatística que utiliza métodos de amostragem para resolver problemas de natureza estocástica ou determinística. A simulação Monte Carlo é um método apropriado para resolver problemas de dimensão alta e/ou parâmetros estocásticos e, muitas vezes, é usada para calcular o valor esperado de uma variável que é função de várias variáveis estocásticas e que não pode ser tratada analiticamente [39].

A simulação Monte Carlo é muito utilizada para avaliação de opções financeiras, principalmente do tipo europeia [40]. Neste caso, a decisão de exercício somente é tomada no vencimento do título e o valor da opção não é influenciado pelas decisões do proprietário, ao longo de sua vida útil. Supondo a não existência de oportunidades de arbitragem, o valor da opção europeia ( $F_0$ ) é dado pelo valor esperado da sua remuneração terminal ( $\pi_T$ ) descontada usando uma taxa de juros livre de risco ( $r$ ), de acordo com a equação (12), a seguir:

$$F_0 = E \left[ e^{-rT} \pi(S_T, K) | S_0 \right] \quad (12)$$

onde  $K$  é o preço de exercício,  $S_T$  é o preço do ativo na data de exercício,  $S_0$  é o preço atual do ativo e  $T$  é o tempo na expiração da opção.

Se não for possível supor a não existência de oportunidades de arbitragem, o preço da opção ainda pode ser avaliado através de simulação Monte Carlo, mas usando uma taxa de desconto arbitrária. Neste caso, o mercado é incompleto e o valor da opção é uma aproximação do valor verdadeiro.

Para avaliar uma opção europeia usando a simulação Monte Carlo é necessário seguir os seguintes passos:

1. Geram-se  $M$  caminhos (amostras) para o preço do ativo objeto até o vencimento;
2. Descontam-se as remunerações terminais da opção em cada caminho;
3. Estima-se o valor da opção através da média de todas as remunerações descontadas.

No passo um, deve-se escolher um processo estocástico para preço do ativo objeto; este processo é utilizado para gerar a amostra do preço. Caso não exista, podem-se utilizar séries históricas do preço do ativo objeto ou então séries sintéticas futuras geradas por algum processo. No passo dois, a função de remuneração da opção é utilizada. A remuneração de uma opção de compra, venda ou exótica é utilizada para o caso de avaliar-se uma opção financeira. No caso de avaliação de opções reais é utilizada a remuneração referente à decisão gerencial. O valor da opção obtido no passo três, e dado pela equação (13), é um estimador não-tendencioso do preço verdadeiro de uma opção europeia com vencimento em  $T$  e remuneração  $\pi_T$  [40].

$$\hat{F}_0 = e^{rT} \sum_{j=1}^M \pi_{T,j}(S_{T,j}, K) \quad (13)$$

onde  $\hat{F}_0$  é o valor da opção,  $r$  é a taxa de juros livre de risco,  $M$  é o número de simulações,  $S_T$  é o preço do ativo na data de exercício,  $K$  é o preço de exercício da opção e  $T$  é tempo de expiração da opção.

Uma das grandes vantagens da simulação Monte Carlo sobre outras técnicas numéricas é a possibilidade de avaliar o erro das estimativas. O desvio padrão das amostras,  $SD(\hat{F}_0)$  (equação (14)) é uma medida da dispersão dos valores estimados em relação à média.

$$SD(\hat{F}_0) = \sqrt{\frac{1}{M-1} \left\{ \sum_{j=1}^M [\pi_{T,j}]^2 - \frac{1}{M} \left[ \sum_{j=1}^M \pi_{T,j} \right]^2 \right\}} \quad (14)$$

O erro padrão,  $SE(F_0)$ , descrito na equação (15), é uma medida do erro cometido pelas estimativas em relação à média da amostra.

$$SE(F_0) = \frac{SD(F_0)}{\sqrt{M}} \quad (15)$$

O coeficiente de variação,  $CV$  (equação (16)) é uma medida adimensional da precisão das estimativas.

$$CV = \frac{SD(F_0)}{\hat{F}_0} \quad (16)$$

As estimativas feitas com simulação Monte Carlo não possuem um padrão bem definido de convergência para o valor verdadeiro. De acordo com a equação (15), o erro das estimativas diminui com a raiz quadrada de  $M$ , logo deve-se ter uma amostra muito grande, para que uma precisão aceitável seja atingida. Entretanto, quanto maior a amostra, maior o custo computacional, podendo até inviabilizar a aplicação. Analisando novamente a equação (15), o erro das estimativas pode ser reduzido se o desvio padrão das estimativas puder ser reduzido de alguma forma. Existem várias técnicas para reduzir o erro, manipulando o desvio padrão (ou variância) das estimativas. Estas técnicas são conhecidas como técnicas de redução de variância [9] [10] [11] [41].

O valor de um projeto de investimento com flexibilidade operacional pode ser estimado usando simulação Monte Carlo. A flexibilidade operacional é dada por uma opção de compra do tipo europeia que será exercida se o valor da receita for superior ao custo variável de operação.

Diferentemente das opções europeias, as opções americanas podem ser exercidas em qualquer momento até o vencimento. Neste caso, a decisão do proprietário irá influenciar o valor da opção. Portanto, para avaliar uma opção americana a política de exercício ótimo deve ser estimada e, em seguida, o valor da opção. A estimativa da política de exercício ótimo introduz um alto grau de complexidade ao problema de avaliação de opções americanas usando simulação Monte Carlo.

A combinação da simulação Monte Carlo e a Programação Dinâmica permitem o desenvolvimento de métodos para estimar a estratégia ótima de investimento e, em seguida, estimar o preço da opção americana [4] [5] [33].

Suponha que uma opção de espera deva ser avaliada usando simulação Monte Carlo. Como já foi visto, a decisão de esperar por novas informações é análoga a uma opção americana de compra. Assim, a equação (17) permitirá avaliar a opção americana:

$$F_0 = \max_{\tau} \left\{ E \left[ e^{-r\tau} \max(V_{\tau}, I) \right] \right\} \quad (17)$$

onde  $F_0$  é o valor da opção e a equação é avaliada sobre todos os tempos de parada  $\tau \leq T$ . Caso a política de exercício ótimo seja conhecida, então a equação (18) pode ser utilizada para avaliar a opção.

$$F_0 = E \left[ e^{-r\tau} \pi(S_{\tau}, K) \right] \quad (18)$$

onde  $\tau$  é o tempo de parada. Como normalmente a política ótima não é conhecida, então ela deve ser estimada através de algum algoritmo. Uma primeira idéia seria calcular o tempo de parada ótima que satisfaça a equação (19), mas este procedimento superestima o valor da opção, [42].

$$\max_{i=0,1,\dots,d} e^{-r\tau} \pi(S_{\tau}, K) \quad (19)$$

O algoritmo que combina a simulação Monte Carlo e a Programação Dinâmica Estocástica é dado pelos seguintes passos:

1. Simule M caminhos para o preço do ativo objeto;
2. Utilize algum algoritmo para estratificar o espaço de estados do preço do ativo objeto e calcular as probabilidades de transição;
3. Aplique o algoritmo de programação dinâmica.

Outra idéia seria modificar o algoritmo anterior, aplicando a estratificação do espaço de estados na remuneração da opção, ao invés do preço do ativo objeto. Esta mudança viabiliza a avaliação de opções multidimensionais, ou seja, opções que dependem de mais de uma fonte de incerteza.