

Referências Bibliográficas

- [1] Dixit, A. K.; Pindyck, R. S., Investment under Uncertainty, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1994.
- [2] Copeland, Tom; Antikarov, Vladimir, Real Options - A Practitioner's Guide, Texere LLC Publishing, 2001.
- [3] Trigeorgis, L., Real Options - Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation, MIT Press, Cambridge, MA, 1996, pp. 427.
- [4] Grant, D.; Vora, G.; Weeks, D. E., Path-Dependent Options: Extending the Monte Carlo Simulation Approach. Management Science, Vol 43, N° 11, November 1997, pp. 1589-1602.
- [5] Ibáñez, A.; Zapatero, F., Monte Carlo Valuation of American Option Through Computation of the Optimal Exercise Frontier, Working Paper, Instituto Tecnológico de México & University of South California, August 1999, pp. 30.
- [6] Hull, J. C., Options, Futures, & Other Derivatives, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 4th ed. 1999, pp. 698.
- [7] Schwartz, E. S., The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for valuation and Hedging, Journal of Finance, vol. 52, N° 3, July 1997, pp.923-973.
- [8] <http://www.puc-rio.br/marco.ind>
- [9] McKay, M. D., Conover, W. J. and Beckman, R. J., A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in Analysis of Output from a Computer Code, Technometrics, 21, 1979, pp. 239-245.
- [10] Owen, A. B., Orthogonal Arrays for Computer Experiments, Integration and Visualization. Statistica Sinica, 2, 1992, pp. 439-452.
- [11] Tang, B., Orthogonal Array-based Latin Hypercube, Journal of the American Statistical Association, 88, 1993, pp. 1392-1397.
- [12] Goldberg, David E. Genetic Algorithms in Search, Optimization, and machine Learning, Addison-Wesley Publishing Company, Inc. 1989.
- [13] Koza, John R.: Genetic Programming: On the Programming of Computers by Means of Natural Selection, MIT Press, USA, 1992.
- [14] Michalewicz. Zbigniew, Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution programs, Springer-Verlag, USA, 1996.
- [15] Holland, J. H.: Adaptation in Natural and Artificial Systems. MIT Press, Boston, MA, 1992.

- [16] Pedrycz, Witold; Gomide Fernando, An Introduction to Fuzzy Sets: Analysis and Design, MIT Press, April 10, 1998, ISBN: 0262161710.
- [17] Zimmermann, Hans-J., Fuzzy Set Theory and its Applications, Kluwer Academic Publishers, 2nd ed. 1991.
- [18] Bojadziev, George; Bojadziev, Maria, Fuzzy Logic for Business, Finance and Management, Ed. World Scientific Publishing Co. Ltd., December 1997, ISBN 9810228945.
- [19] Hans Schjaer-Jacobsen, Representation and Calculation of Economic Uncertainties: Intervals, Fuzzy Numbers, and Probabilities, International Journal of Production Economics, Volume 78, Issue 1, 1 July 2002, pp. 91-98.
- [20] Collan, Mikael; Carlsson, Christer and Majlender, Péter, Fuzzy Black and Scholes Real Options Pricing, 12th Mini Euro Conference, April, 2-5, 2002, Brussels – Belgium.
- [21] Hanss, Michael; Willner, Kai, On Using Fuzzy Arithmetic to Solve Problems with Uncertain Model Parameter. Proceedings of the International Colloquium on Numerical Modelling of Uncertainties, Valenciennes, France, 1999, pp 85-92.
- [22] Klir, George J., Fuzzy Arithmetic with Requisite Constraints, Fuzzy Sets and Systems Vol. 91, N° 2, 1997, pp. 165-175.
- [23] Dias, Marco Antonio G. , Real Option Evaluation: Optimization under Uncertainty with Genetic Algorithms and Monte Carlo Simulation, Working paper, Dpt. of Electrical Engineering, PUC-Rio, Brazil, July 2000. 23 pp.
- [24] Dias, Marco Antonio G., Investment in Information for Oil Field Development Using Evolutionary Approach with Monte Carlo Simulation, 5th Annual International Conference on Real Options – Theory Meets Practice, UCLA, Los Angeles, USA, July 13-14, 2001.
- [25] Lazo, Juan G. Lazo; Pacheco, Marco Aurélio C.; Vellasco, Marley Maria R.; Dias, Marco A. G., Análise de Alternativas de Desenvolvimento de um Campo de Petróleo Sob Incerteza de Mercado por Algoritmos Genéticos e Simulação Monte Carlo, Anais Resumos do 1º Congresso Brasileiro de P&D em Petróleo e Gás, pp. 127, Natal/RN - Brasil, 25-28 Novembro 2001.
- [26] Lazo, Juan G. Lazo; Pacheco, Marco Aurélio C.; Vellasco, Marley Maria R.; Dias, Marco A. G., Real Option Decision Rules for Oil Field Development Under Market Uncertainty Using Genetic Algorithms and Monte Carlo Simulation, Proceedings 7th Annual International Conference on Real Options - Theory Meets Practice, Washington DC,USA, July 10-12, 2003.
- [27] Black, F.; Scholes, M. The Pricing of Options and Corporate Liabilities, Journal of Political Economy, N° 81, 1973, pp. 637-659.
- [28] Trigeorgis, L. e S. P. Mason. Valuing Managerial Flexibility, Midland Corporate Finance Journal Vol. 5, N° 1, 1987, pp. 14-21.
- [29] Kensinger, J. W. Project Abandonment as a Put Option: Dealing with the Capital Investment Decision and Operating Risk using Option Pricing Theory. The Annual Meeting of the Financial Management Association, October, 1980.

- [30] Kensinger, J. W. The Capital Investment Project as a Set of Exchange Options, Finance Department Working Paper, University of Texas at Austin, first draft: August, revised: November, 1986.
- [31] Brealey, R. A. e Myers, S. C. Princípios de Finanças Empresariais, McGraw-Hill - Portugal, 1998.
- [32] Ross, S. A., Westerfield, R. W. e Jaffe, J. Corporate Finance, Editorial Irwin, International Student Edition, 4ª Edition, USA, 1996.
- [33] Longstaff, F. A., Schwartz E. S., Valuing American options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach, The review of Financial Studies, The Society for Financial Studies, Vol. 14, Nº 1, pp. 113-147, Spring 2001.
- [34] Elton, Edwin J. e Gruber, Martin J., Modern Portfolio Theory and Investment Analysis, John Wiley & Sons, Inc. 5ed, 1995.
- [35] Levy, Haim e Sarnat, Marshall. Portfolio and Investment Selection: Theory and Practice, Prentice-Hall International, Inc. 1984.
- [36] Brennan, M. e Schwartz, E., Finite Difference Methods and Jump Process Arising in the Pricing of Contingent Claims: A Synthesis. Journal of Financial and Quantitative Analysis, Vol. 13, 1978, pp. 462-474.
- [37] Cox, J., Ross, S. e Rubinstein, M. Option Pricing. A Simplified Approach. Journal of Financial Economics Vol. 7, 1979, pp. 229-263.
- [38] Bellman, R. S. Dynamic Programming. Princeton University Press, Princeton, 1957.
- [39] Hammersley, J. M. e Handscomb, D. C. Monte Carlo Methods. Methuen & Co., Londres, 1964.
- [40] Boyle, P. Options: A Monte Carlo Approach, Journal of Financial Economics, Vol. 4, 1977, pp. 323-338.
- [41] Boyle, P., Broadie, M., Glasserman, P. Monte Carlo Methods for Security Pricing, Journal of Economic Dynamics and Control, Vol.21, 1997, pp.1267-1321.
- [42] Broadie, M., Glasserman P. Pricing American-Style Securities using Simulation. Journal of Economic Dynamics and Control, Vol. 21, 1997, pp. 1323-1352.
- [43] Mitchell, Melanie. An Introduction to Genetic Algorithms, The MIT Press, USA, 1994.
- [44] Back, T. Evolutionary Algorithms in Theory and Practice, Oxford University Press, 1996.
- [45] Fogel, L. J., Owens, A.J, Walsh, M.J.: Artificial Intelligence Through Simulated Evolution. John Wiley and Sons, NY, 1966.
- [46] Davis, Lawrence, Handbook of Genetic Algorithms, Van Nostrand Reinhold, USA, 1991.
- [47] Zadeh, L.A. Fuzzy Sets, Information and Control. 8, 1965, pp. 338-353.
- [48] Zadeh, L.A. Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility, Fuzzy Sets and Systems Vol. 1, 1978, pp. 3-28.

- [49] Dubois, D. and Prade, H., Unfair Coins and Necessity Measures: Towards a Possibilistic interpretation of histograms, *Fuzzy Sets and Systems* Vol. 10, 1983, pp. 15-20.
- [50] Dubois, D. and Prade, H., On Several Representations of Uncertain Body of evidence, in M.M. Gupta and E. Sanchez Eds., *Fuzzy Information and Decision Process*, North-Holland, Amsterdam, 1982, pp. 167-182.
- [51] Dubois, D., Sur les Liens entre les Notions de Probabilite et de Possibilite (Quelques Remarques), *CNRS Round Table Quelques Applications Concretes Utilisant lês Derniers Perfections de la Theorie du Flou*, Lyon, 1980, pp. 23-25.
- [52] Delgado, M. and Moral, S., On the Concept of Possibility-Probability Consistency, *Fuzzy Sets and Systems* Vol. 21, 1987, pp. 311-318.
- [53] Xuecheng, Liu. On the Concept of Possibility-Probability Consistency Measure-General Cases, *Intelligent Processing Systems*, 1997. ICIPS '97. 1997 IEEE International Conference on, Vol. 2, 28-31 Oct. 1997, pp. 1889-1893.
- [54] Dubois, D. and Prade, H., *Possibility Theory*, Plenum Press, New York, 1988.
- [55] Yamada, K., Probability-Possibility Transformation Based on Evidence Theory, *IFSA World Congress and 20th NAFIPS International Conference*, 2001. Joint 9th , Vol.1, 25-28 July 2001, pp.70-75.
- [56] Kosko, Bart, *Fuzzy Engineering*, Prentice Hall, 1st edition, October, 1996, ISBN: 0131249916.
- [57] Fang, J. H. and Chen, H.C., Uncertainties are Better Handled by Fuzzy Arithmetic, *The American Association of Petroleum Geologists Bulletin*, VI. 74 N. 8, 1990, pp. 1228-1233.
- [58] Guiachetti, Ronald, Young, Robert E., A Parametric Representation of Fuzzy Numbers and Their Arithmetic Operators, *Fuzzy Sets and Systems* Vol. 91, 1997, pp. 185-202.
- [59] Moore, Ramon E., *Interval Analysis*, Prentice-Hall Series in Automatic Computation. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1966.
- [60] Moore, Ramon E., *Methods and Applications of Interval Analysis*, SIAM Studies in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, 1979.
- [61] Dimitrova, N. S., Markov, S. M., Popovo, E. D. *Extended Interval Arithmetics: New Results and Applications*, *Computer Arithmetic and Enclosure Methods*, Atanasova, L.; Herzberger, J. (Eds.), Elsevier Sci. Publishers B. V., 1992, pp. 225-232.
- [62] Anile, A.M., Deodato, S., Privitera, G. *Implementing Fuzzy Arithmetic*, *Fuzzy Sets and Systems* Vol. 72, 1995, pp. 239-250.
- [63] Pereira, S. C. A., *Tratamento de Incertezas em Modelagem de Bacias*, Tese de Doutorado em Ciências em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE/UFRJ, 2002.

- [64] G. Marsaglia, M. D. Maclaren, and T. A. Bray, A Fast Procedure for Generating Normal Random Variables, *Communications of the ACM*, Vol. 7, 1964, pp. 4-10.
- [65] P. L'Ecuyer, Random Numbers for Simulation. *Communications of the ACM*, Vol. 33 (10), 1990, pp.85-97.
- [66] P. L'Ecuyer, Efficient and Portable Combined Random Number Generators, *Communications of the ACM*, Vol. 31(6), 1988, pp. 742-749.
- [67] P. L'Ecuyer, Uniform Random Number Generation, *Annals of Operations Research*, Vol. 53, 1994, pp. 77-120.
- [68] P. L'Ecuyer, Testing Random Number Generators. In *Proceedings of the 1992 Winter Simulation Conference*, IEEE Press, Dec 1992, pp. 305-313.
- [69] Morokoff, William J., Caflish, Russel E., Quasi-Monte Carlo Integration, *Journal of Computational Physics*, N° 122, 1995, pp. 218-230.
- [70] Niederreiter, Harald, Quasirandom Sampling Computer Graphics, In *Proceedings of the 3rd International Seminar on Digital Image Processing in Medicine*, 1992, pp. 29-33.
- [71] Niederreiter, Harald, Random Number Generation and Quasi Monte Carlo Methods, SIAM, CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, N° 63, 1992.
- [72] Harald Niederreiter, Random Number Generation and Quasi-Monte Carlo Methods, Society for Industrial & Applied Mathematics, 1992.
- [73] Devroye, L. Simulating Theta Random Variates, *Statistics and Probability Letters*, Vol. 31, 1997, pp. 275-2791.
- [74] Devroye, L. Random Variate Generation for Multivariate Unimodal Densities, *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*, Vol. 7, 1997, pp. 447-477.
- [75] Gao, Lun S., The Fuzzy Arithmetic Mean, *Fuzzy Sets and Systems* Vol. 107, 1999, pp. 335-348.
- [76] Carlsson, Christer, Fullér, Robert, On Possibilistic Mean Value and Variance of Fuzzy Numbers, *Fuzzy Sets and Systems* Vol. 122, 2001, pp. 315-326.
- [77] Dong, W.M., Wong, F.S. Fuzzy Weighted Averages and Implementation of the Extension Principle, *Fuzzy Sets and Systems* Vol. 21, 1987, pp. 183-199.
- [78] Saliby, Eduardo, Descriptive Sampling: an Improvement Over Latin Hypercube Sampling, *Proceedings of Winter Simulation Conference*, ed. S. Andradóttir, K. J. Healy, D. H. Withers, and B. L. Nelson, 1997.
- [79] Batista, Fabio R. S. Avaliação de Opções de Investimento em Projetos de Exploração e Produção de Petróleo por Meio da Fronteira de Exercício Ótimo da Opção Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Industrial, PUC-RIO, 2002.
- [80] Dias, Marco A. G., Investimento Sob Incerteza em Exploração & Produção de Petróleo, Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Industrial, PUC-RIO, 1996.

- [81] Brealey and Myers, Principles of Corporate Finance, McGraw-Hill, Inc., sixth ed., 1999, pp. 1093.
- [82] Lazo, Juan G. Lazo; Pacheco, Marco Aurélio C.; Vellasco, Marley Maria R.; Dias, Marco A. G., Análise de Alternativas de Desenvolvimento de um Campo de Petróleo Sob Incerteza de Mercado por Algoritmos Genéticos e Simulação de Monte Carlo, Revista Técnica de Energia , Petróleo e Gás, N° 1 Ano 1 abril/maio/junho 2002.
- [83] Stein, M. Large Sample Properties of Simulations Using Latin Hypercube Sampling, Technometrics 29, 1987, pp. 143-151.
- [84] Avramidis, A. N. and Wilson, J. R., Correlation Induction Techniques for Estimating Quantiles in Simulation Experiments. Technical Report, Department of Industrial Engineering, North Carolina State University, Raleigh, North Carolina, 1996.
- [85] Paskov, S. New Methodologies for Valuing Derivatives, Mathematics of Derivative Securities, edited by S. Pliska and M. Dempster, Isaac Newton Institute, Cambridge, Cambridge University Press, UK, 1997, pp. 545-582.
- [86] Wang, Xiaoqun, Variance Reduction Techniques and Quasi-Monte Carlo Methods, Journal of Computational and Applied Mathematics, N° 132, 2001, pp.309-318.
- [87] Sobol, I.M., On the Distribution of Points in Cube and the Approximate Evaluation of Integrals. U.S.S.R. Computational Mathematics and Mathematical Physics, Vol. 7(4), 1967, pp. 86-112.
- [88] Halton, J.H., On the Efficiency of Certain Quasi-Random Sequences of Points in Evaluating Multidimensional Integrals, Numerische Mathematik, N° 2, 1960, pp. 84-90.
- [89] Faure, H., Discrepance de Suites Associees a un Systeme de Numeration (en dimension s) Acta Arithmetica, N° 41, 1982, pp.337-351.
- [90] Pindyck, R. S., Rubinfeld, D. L., Econometric Models and Econometric Forecasts, Mac Graw-Hill, New York, third edition, 1991.
- [91] Dixit, A. K. Entry and Exit Decisions Under Uncertainty, Journal of Political Economy, Vol. 97, N° 3, 1989, pp. 620-638.
- [92] Goetschel, R., Voxman, W., Elementary Fuzzy Calculus, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 18, 1986, pp. 31-43.

Apêndice A

Este apêndice descreve os tipos de incertezas que geralmente são encontradas em projetos de investimento.

Tipos de Incerteza em Projetos de Investimento

Do ponto de vista econômico, os tipos de incertezas que geralmente se encontram em projetos de investimento e inovações tecnológicas são dois: a incerteza de mercado e a incerteza técnica.

Incerteza de Mercado

A incerteza de mercado deve-se a fatores externos ao projeto, sendo geralmente representada pelas oscilações estocásticas do preço do produto e pelos custos. Esta incerteza está correlacionada aos movimentos gerais da economia, que, por sua vez, estão sujeitos a acontecimentos aleatórios como recessões, guerras ou descobertas de novas tecnologias.

Este tipo de incerteza não pode ser reduzido com a realização do projeto, dado que os preços dependem exclusivamente de fatores externos.

Segundo Dias [80], as incertezas de mercado afetam negativamente os investimentos e não podem ser totalmente diversificáveis. Quanto maior a incerteza de mercado, maior a tendência por parte do investidor de esperar, ou maior o retorno exigido para que se inicie a produção. Muitos projetos que estão “*in the money*” são postergados e só são realizados projetos “*deep in the money*”. Isto é, quanto maior a incerteza do mercado, maior a exigência de lucratividade do projeto para que o gerente exerça a opção de investimento.

Incerteza Técnica

A incerteza técnica se deve a fatores internos ao projeto, como a incerteza sobre o tamanho da produção e o desempenho dos projetos em função do emprego

de tecnologia. Esta incerteza não é influenciada pelos movimentos macroeconômicos.

Segundo Dias [80], este tipo de incerteza caracteriza-se pela redução de seu valor a medida que os investimentos são realizados. Assim, todo investimento traz benefício adicional de redução de incerteza e a teoria das opções é capaz de quantificá-la.

Logo, a diferença entre um investidor que possui uma carteira de ativos financeiros e um gerente que possui uma carteira de projetos é que o investidor não pode tirar vantagem da incerteza técnica para maximizar sua riqueza; o melhor que pode ser feito é diversificar a carteira de forma a tornar esse risco irrelevante. Ao contrário do investidor, o gerente pode agir revisando a alocação de recursos de forma a tirar vantagem da incerteza técnica e maximizar o valor da empresa.

Apêndice B

Este apêndice descreve as técnicas de redução de variância usadas nesta tese.

Técnicas de Redução de Variância

A simulação Monte Carlo é muito usada para avaliar o valor esperado de uma variável, a qual é função de várias variáveis estocásticas, que não pode ser tratado analiticamente. Neste contexto, um dos métodos usados para a precificação de opções americanas é a combinação da simulação Monte Carlo e a programação dinâmica.

Normalmente, a simulação Monte Carlo usa o procedimento de *simple random sampling* (SRS) ou pseudo-aleatório para gerar amostras de uma determinada distribuição, sendo amplamente usado devido a sua simplicidade. Porém, para se reduzir o erro da estimativa do valor da opção (equação (15), capítulo 2), a amostra deve ser muito grande, para que se atinja uma precisão aceitável. Entretanto, quanto maior o número de amostras, maior o custo computacional. O erro das estimativas pode também ser reduzido se o desvio padrão das estimativas puder ser reduzido de alguma forma.

Deste modo, métodos de redução de variância são de grande importância para melhorar a precisão da estimativa do valor da opção. Neste trabalho foram utilizados como técnicas de redução de variância o *Latin Hypercube Sampling* e as seqüências de baixa discrepância ou Quase Monte Carlo.

Um caminho para reduzir a variância é espalhar as amostras o mais uniformemente possível sobre o espaço amostral. Esta é a idéia básica de várias técnicas conhecidas como métodos Quase Monte Carlo. Esta uniformidade pode ser conseguida estratificando-se o espaço amostral (distribuição de probabilidade).

Estratificação: envolve a divisão em intervalos iguais ou de preferência com probabilidade de ocorrência iguais. Tomam-se amostras de cada intervalo, de acordo com a sua probabilidade. Se o número de intervalos for grande, a média ou

mediana condicional do intervalo pode ser usada como valor representativo para o intervalo.

Latin Hypercube Sampling

McKay, Conover e Beckman [9] introduziram o *Latin Hypercube Sampling* (LHS) para reduzir a variância da simulação Monte Carlo. Owen [10] and Tang [11] generalizaram o LHS usando arranjos ortogonais.

Latin Hypercube Sampling [9] [41] [78] foi sugerido como uma técnica de redução de variância, mas pode também ser visto como uma técnica de seleção, onde a seleção dos valores da amostra é altamente controlada.

A base do LHS é a total estratificação da distribuição amostrada com uma seleção aleatória dentro de cada estrato. Os valores da amostra são embaralhados aleatoriamente entre diferentes variáveis.

Ao se usar o LHS só para amostrar uma variável, as amostras são geradas baseadas no método da transformada inversa, apresentado na equação (57).

$$xh_{i,j} = F^{-1}[(i + U_i - 1)/n_j] \quad i=1, \dots, n_j, \quad j=1, \dots, k \quad (57)$$

onde $xh_{i,j}$ é uma amostra obtida por LHS, i, j são dimensões do LHS; n, k são estados de cada dimensão do LHS; U_i são amostras aleatórias independentes de uma distribuição uniforme $[0,1]$; $F^{-1}(U)$, $U_i \in (0,1)$, é a transformada inversa para uma distribuição de probabilidade particular de entrada (em muitas aplicações é utilizada a inversa da distribuição normal cumulativa).

Entre os principais resultados teóricos acerca do LHS tem-se: as estimativas do LHS são não viciadas [10] e a variância das estimativas é assintoticamente menor que com o *simple random sampling* [83]. Avramidis e Wilson [84] mostraram que as estimativas de LHS têm um erro quadrático médio 40% menor do que as estimativas com simulação Monte Carlo com SRS para o verdadeiro valor.

A Figura 34 apresenta duas amostras aleatórias de 1000 pontos de uma distribuição normal, a primeira obtida com SRS e a segunda, com LHS. No histograma e no gráfico do QQ-plot, teste básico de normalidade, pode-se observar que a amostra obtida com LHS é mais representativa da distribuição

normal que a obtida com SRS. Isto significa que com LHS são necessárias menos amostras para representar uma distribuição normal do que seria necessário usando SRS (ou números pseudo-aleatórios).

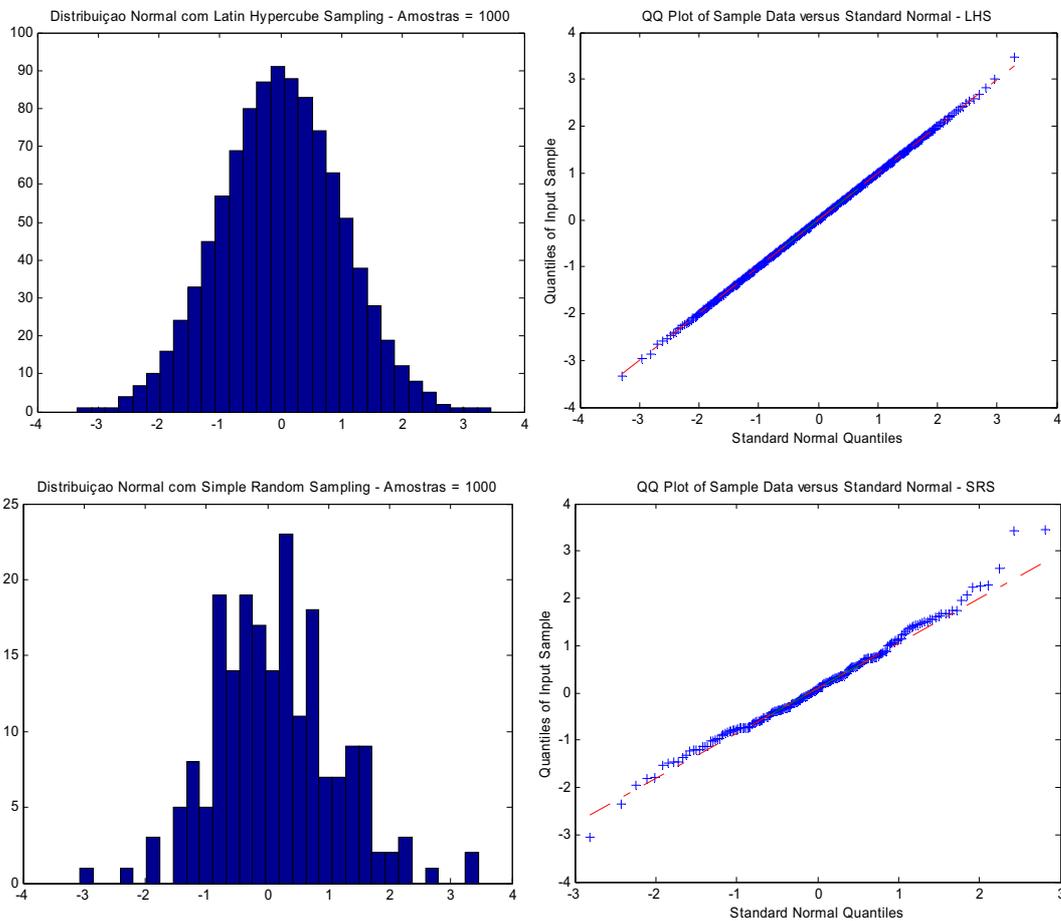


Figura 34 - Histograma e QQ-Plot para amostras aleatórias obtidas com SRS e com LHS.

Seqüências de Baixa Discrepância ou Quase Monte Carlo

Nestas seqüências é usada uma pré-seleção determinística de pontos de modo a se preencher igualmente todo o domínio da simulação. A utilização de seqüências de baixa discrepância, também chamadas de seqüências quase aleatórias, pode acelerar substancialmente a convergência da simulação Monte Carlo, devido à necessidade de um número menor de simulações para atingir a precisão desejada [6] [8] [41] [85] [86]. Existem três tipos de seqüências de números quase aleatórios: seqüência quase aleatória de Faure, de Sobol e de Halton [87] [88] [89].

Na Figura 35 apresentam-se duas amostras de 1000 pontos, obtidas, respectivamente, de uma seqüência pseudo aleatória bidimensional e de uma seqüência de Sobol bidimensional. Como pode ser visto na Figura 35, os pontos correspondentes à seqüência pseudo aleatória não estão uniformemente distribuídos ao longo do espaço retangular, apresentando regiões não preenchidas e regiões onde existem agrupamentos de pontos. Já os pontos da seqüência de Sobol preenchem o espaço bidimensional de maneira mais uniforme, evitando agrupamentos e regiões sem pontos. A Figura 36 apresenta duas amostra de 1000 pontos de uma distribuição normal, a primeira obtida a partir de uma seqüência pseudo aleatória e a segunda de uma seqüência quase aleatória de Sobol.

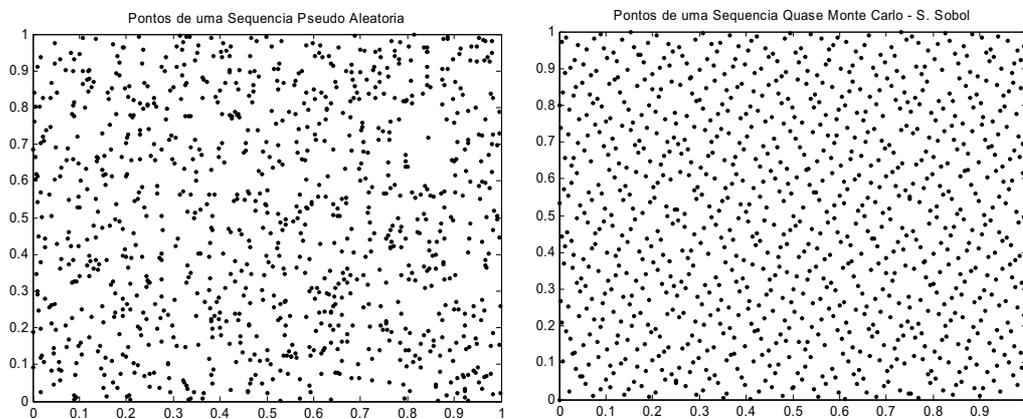


Figura 35 – Comparação de pontos de uma seqüência pseudo aleatória e seqüência quase Monte Carlo de Sobol.

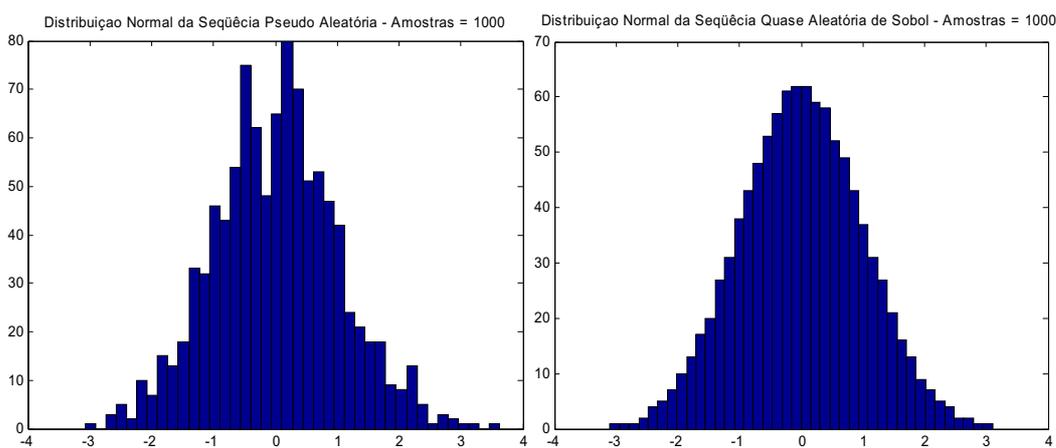


Figura 36 – Comparação de duas amostras de uma distribuição normal obtidas de uma seqüência pseudo aleatória e seqüência quase Monte Carlo de Sobol.

Apêndice C

Este apêndice descreve o conceito de processos estocásticos e descreve os processos estocásticos mais usados para modelar os preços das *commodities*.

Processos Estocásticos

Uma variável cujo valor muda de forma aleatória com o tempo segue um processo estocástico. Estes processos podem ser classificados como a tempo discreto ou a tempo contínuo. Em um processo estocástico a tempo discreto o valor da variável muda apenas em determinados pontos fixos no tempo, enquanto, num processo estocástico a tempo contínuo as mudanças podem ocorrer em qualquer tempo.

Existem vários processos estocásticos usados para modelar os preços das *commodities*; a seguir serão descritos os processos estocásticos mais usados.

Processo de Markov

O processo de Markov é um tipo específico de processo estocástico onde apenas o valor corrente de uma variável é relevante para se prever o futuro. O histórico de uma variável e a maneira como o presente emergiu do passado são irrelevantes, ou seja, o valor atual da variável encerra todas as informações contidas em seu histórico de valores passados [1] [6].

Processo de Wiener

O processo de Wiener é um tipo particular do processo estocástico de Markov que tem sido utilizado pela física para descrever o movimento de uma partícula sujeita a uma grande quantidade de pequenos choques moleculares, às vezes denominado de Movimento Browniano.

O comportamento de uma variável z , que acompanha o processo de Wiener, pode ser compreendido pelas mudanças em seu valor em pequenos intervalos de

tempo. Considerando um intervalo de tempo infinitesimal, de extensão dt , e definindo dz como a mudança em z durante dt , para que z siga um processo de Wiener, dz deve cumprir as seguintes propriedades básicas:

- dz relaciona-se a dt na equação (58):

$$dz = \varepsilon \sqrt{dt} \quad (58)$$

onde ε é uma variável aleatória de uma distribuição normal com média zero e desvio padrão 1.0.

- Os valores de dz , para quaisquer dois pequenos intervalos de tempo dt distintos, são independentes.

Logo, a partir da primeira propriedade, dz possui distribuição normal, com:

$$E[dz] = 0 \quad (59)$$

$$Var[dz] = dt \quad (60)$$

A segunda propriedade indica que z segue o processo de Markov.

Processo Generalizado de Wiener

O processo Generalizado de Wiener para uma variável x pode ser definido em termos de dz da seguinte forma:

$$dx = a dt + b dz \quad (61)$$

onde a e b são constantes.

O termo $a dt$ na equação (61) indica que x possui taxa de desvio esperado de a por unidade de tempo. O termo $b dz$ é o que agrega ruído ou variabilidade à trajetória seguida por x , onde a medida desse ruído é b vezes o processo de Wiener [1].

Substituindo a equação (58) na equação (61) obtêm-se:

$$dx = a dt + b \varepsilon \sqrt{dt} \quad (62)$$

onde ε é uma variável aleatória de uma distribuição normal (0, 1). Assim, dx possui distribuição normal com:

$$E[dx] = a dt \quad (63)$$

$$Var[dx] = b^2 dt \quad (64)$$

Processo de Itô

Este processo estocástico é semelhante ao Processo Generalizado de Wiener, sendo que neste caso os parâmetros a e b são funções do valor da variável objeto, x , e do tempo, t . Algebricamente, o processo de Itô pode ser escrito como:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)dz \quad (65)$$

onde os parâmetros a e b são conhecidos como taxas de crescimento esperado instantâneo e taxa de variância instantânea, respectivamente, deste processo. Observa-se que em qualquer intervalo de tempo, a variação de x é normalmente distribuída [1] [6].

Lema de Itô

Segundo Hull [6], o preço de uma opção é função do preço da ação objeto e do tempo. Genericamente, pode-se dizer que o preço de qualquer derivativo é uma função de suas variáveis estocásticas e do tempo. Portanto, no estudo de derivativos, é essencial compreender um pouco do comportamento das funções de variáveis estocásticas. Um resultado importante nessa área é conhecido como o lema de Itô.

Supondo que o valor de uma variável x siga o processo de Itô dado pela equação (65), e considerando a existência de um derivativo G em função de x e t , ou seja,

$$G = f(x, t) \quad (66)$$

O lema de Itô define o processo seguido por G como:

$$dG = \left[\frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right] dt + \frac{\partial G}{\partial x} b dz \quad (67)$$

Movimento Geométrico Browniano

O Movimento Geométrico Browniano (MGB) [1] [6] [8] [80] é um importante caso especial do processo de Itô, descrito na equação (65). Este processo estocástico é o mais usado em finanças para representar o preço de ações, mas para *commodities* não é tão eficiente.

Fazendo na equação (65) $a(x,t) = \alpha x$ e $b(x,t) = \sigma x$, onde x representa o preço, α e σ são constantes, obtém-se:

$$dx = \alpha x dt + \sigma x dz \quad (68)$$

$$\frac{dx}{x} = \alpha dt + \sigma dz \quad (69)$$

Como foi visto nas equações (61) e (62), o percentual de variação de x , $\Delta x/x$, é normalmente distribuídos.

Utilizando o Lema de Itô, equação (67), para derivar o processo seguido pelo $\ln x$, define-se $G = \ln x$. Logo:

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial G}{\partial t} = 0$$

Considerando os valores para a e b usados na equação (68), a equação (67) se transforma na equação (70):

$$dG = \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dt + \sigma dz \quad (70)$$

Visto que α e σ são constantes, a equação (70) indica que G segue um processo generalizado de Wiener, que possui taxa de desvio constante de $\alpha - \sigma^2/2$ e taxa de variância constante σ^2 . Assim, em um intervalo finito de tempo Δt , a variação no logaritmo de x , $\ln x_t - \ln x_{t-1}$, é normalmente distribuído com:

$$E \left[\ln \frac{x_t}{x_{t-1}} \right] = \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t \quad (71)$$

$$Var \left[\ln \frac{x_t}{x_{t-1}} \right] = \sigma^2 \Delta t \quad (72)$$

Em seguida, discretiza-se a equação (70), considerando-se a variação no logaritmo de x e notando que dz corresponde ao incremento de Wiener (ver equação (58)):

$$\ln \left(\frac{x_t}{x_{t-1}} \right) = \left(\alpha - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \varepsilon \sqrt{\Delta t} \quad (73)$$

Rearrmando a equação (73), chega-se à expressão recursiva do Movimento Geométrico Browniano para simular o preço futuro de uma ação:

$$x_t = x_{t-1} \exp\left[\left(\alpha - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\varepsilon\sqrt{\Delta t}\right], \quad \varepsilon \sim N(0,1) \quad (74)$$

Este modelo é bastante usado e corresponde a uma extensão do modelo apresentado por Dixit [1] [8] [23].

Processo de Reversão à Média

Do ponto de vista econômico, este processo estocástico é o mais adequado para preços de *commodities*, especialmente sob a ótica de longo prazo [80], embora seja mais complexo matematicamente do que o clássico Movimento Geométrico Browniano. Neste processo a tendência é o preço reverter em direção à média de longo prazo [1], entendida como o custo marginal médio da *commodity*, incluída a remuneração ao capital de risco.

Segundo este processo, se o preço de uma *commodity* estiver muito abaixo da média de longo prazo, várias firmas deixarão de produzi-la, fazendo com que seu preço suba devido à queda da oferta global do produto. Este mesmo raciocínio é válido em sentido oposto, isto é, se os preços estiverem muito acima da média de longo prazo, a tendência será de queda nos preços causada pela concorrência com a entrada de novos produtores ou pela entrada de produtos substitutos. Assim, em uma economia competitiva, não há espaço nem para ganhos elevadíssimos durante muito tempo, e nem para perdas substanciais por um período muito longo, devido às próprias forças do mercado.

Segundo Pindyck e Rubinfeld [90] o processo de reversão à média é tipicamente lento, sendo difícil a sua identificação em séries temporais de curta duração.

O modelo mais simples de reversão à média é o modelo aritmético de Ornstein-Uhlenbeck. Este modelo atribui probabilidades positivas para valores negativos da variável estocástica. Sua equação difere do movimento aritmético browniano apenas no termo da tendência, conforme pode ser verificado em:

$$dx = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma dz \quad (75)$$

onde η é a velocidade de reversão à média, \bar{x} é o preço de longo prazo, x é o preço atual, dt é o incremento no tempo, σ é a volatilidade do preço do ativo e dz é o incremento de Wiener.

Outro modelo muito conhecido é apresentado por Dixit e Pindyck [1], ou modelo geométrico de Ornstein-Uhlenbeck. Segundo Dias [8], além de possuir uma lógica intuitiva adequada, este modelo é rigoroso em não atribuir probabilidades positivas para preços negativos.

A equação estocástica do modelo geométrico de Ornstein-Uhlenbeck é dada pela equação (76):

$$dx = \eta(\bar{x} - x)xdt + \sigma x dz \quad (76)$$

Segundo Dixit [91], o modelo de reversão à média aumenta a histerese, isto é, aumenta o intervalo entre os preços de entrada e saída de uma indústria onde o gerente tende a adiar o investimento. Se os preços estão altos, e conseqüentemente acima da média de longo prazo, a reversão indica uma maior tendência de queda dos preços, fazendo com que a firma se torne ainda mais relutante em investir. Por outro lado, se os preços estiverem abaixo da média, as firmas ficarão ainda mais relutantes em exercer a opção de abandono, já que a probabilidade de recuperação dos preços é maior.

Portanto, os efeitos da incerteza e da tendência na regra de decisão, causados pela adoção do modelo de reversão à média, podem ser opostos, se a média de longo prazo trabalhar com uma tendência contrária ao exercício da opção e não for alta o suficiente para deixar a opção “*in the money*”.

Modelo de Reversão à Média de Schwartz

O modelo de Schwartz [7] é um dos mais famosos modelos de reversão à média. Schwartz apresentou três modelos para preços de *commodities*. No primeiro, o modelo de um fator, considera que o logaritmo do preço spot segue um processo de reversão à média do tipo Ornstein-Uhlenbeck. O segundo modelo inclui outro fator estocástico, o qual também segue um processo de reversão à média e é positivamente correlacionado com o preço *spot*. O modelo de três fatores é uma extensão do segundo, incluindo a taxa de juros estocástica.

Segundo Schwartz, os três modelos são bastante tratáveis, já que eles contam com formas fechadas de solução para preços futuros e relações lineares entre o logaritmo dos preços futuros e os fatores em questão.

Neste trabalho é considerado o modelo de um fator, em que o preço da *commodity* segue o seguinte processo estocástico:

$$dx = \eta(\ln \bar{x} - \ln x)xdt + \sigma x dz \quad (77)$$

onde \bar{x} é a média de longo prazo, η é a velocidade de reversão à média, dt é incremento no tempo, σ é a volatilidade do preço do ativo e dz é o incremento de Wiener.

Segundo Dias [24], este modelo não é muito intuitivo, pois se presume que investidores não possuem muita sensibilidade a valores expressos em logaritmos. Por outro lado, ele facilita a estimativa de parâmetros, uma vez que considera o seguinte processo estocástico para a variável x :

$$x = \ln P \quad (78)$$

onde P é o preço.

Aplicando o teorema de Itô é possível derivar o processo seguido por x . Assim, das equações (77) e (78), obtém-se:

$$\begin{aligned} dx &= \left[\frac{\partial x}{\partial P} a + \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 x}{\partial P^2} b^2 \right] dt + \frac{\partial x}{\partial P} b dz \\ dx &= \left[\frac{1}{P} \eta (\ln \bar{P} - \ln P) P + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{P^2} \right) \sigma^2 P^2 \right] dt + \frac{1}{P} \sigma P dz \\ dx &= \left[\eta (\ln \bar{P} - \ln P) - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] dt + \sigma dz \\ dx &= \eta \left[(\ln \bar{P} - \ln P) - \frac{1}{2\eta} \sigma^2 \right] dt + \sigma dz \\ dx &= \eta \left[\ln \bar{P} - \frac{1}{2\eta} \sigma^2 - \ln P \right] dt + \sigma dz \\ dx &= \eta [\bar{x} - x] dt + \sigma dz \end{aligned}$$

onde

$$\bar{x} = \ln \bar{P} - \frac{1}{2\eta} \sigma^2 \quad (79)$$

Da equação acima percebe-se que a variação esperada de x depende da diferença entre x e \bar{x} . Segundo Schwartz, a variável x tem distribuição normal com:

$$E[x_t] = \bar{x} + (x_0 - \bar{x})e^{-\eta(t-t_0)} \quad (80)$$

$$Var[x_t] = \frac{\sigma^2}{2\eta} (1 - e^{-2\eta(t-t_0)}) \quad (81)$$

Observa-se na equação (81) que existe um termo no qual a variância decai com o tempo. Para um horizonte de longo prazo, a variância do processo tende a $\frac{\sigma^2}{2\eta}$. Logo, neste processo de reversão à média a variância não cresce indefinidamente como acontece com a variância do movimento geométrico browniano.

Modelo de Reversão à Média de Dias

O modelo de reversão à média proposto por Dias [8] [24] é uma variação do modelo de um fator descrito por Schwartz. Este modelo fornece uma interpretação mais direta do nível do preço de equilíbrio de longo prazo. Considera inicialmente o processo aritmético de Ornstein-Uhlenbeck, adotado por Schwartz para a variável estocástica x [1] (ver equação (82)):

$$dx = \eta(\bar{x} - x)dt + \sigma dz \quad (82)$$

onde a variável x é normalmente distribuída com média e variância iguais a:

$$E[x_t] = x_0 e^{-\eta(t-t_0)} + \bar{x}(1 - e^{-\eta(t-t_0)}) \quad (83)$$

$$Var[x_t] = \frac{\sigma^2}{2\eta} (1 - e^{-2\eta(t-t_0)}) \quad (84)$$

Porém, neste modelo é considerando que $\bar{x} = \ln \bar{P}$, onde \bar{P} é o preço de equilíbrio de longo prazo. A idéia é definir o preço do ativo como uma distribuição Log-normal com média igual a:

$$E[P_T] = e^{E[x(T)]} \quad (85)$$

Segundo Dias, o processo $P(t) = e^{x(t)}$ não funciona porque a exponencial da distribuição Normal adiciona metade da variância na distribuição Log-normal. Assim, com o intuito de anular este acréscimo, metade da variância é compensada relacionando x e P conforme a equação (86).

$$P(t) = \exp\{x(t) - 0.5Var[x(t)]\} \quad (86)$$

Em um formato neutro ao risco² o processo $x(t)$ é simulado usando a equação (87) para tempo discreto:

$$x_t = x_{t-1} \exp(-\eta\Delta t) + \left[\ln(\bar{P}) + \frac{r - \rho}{\eta} \right] (1 - \exp(-\eta\Delta t)) + \sigma \sqrt{\frac{1 - \exp(-2\eta\Delta t)}{2\eta}} N(0,1) \quad (87)$$

onde ρ é a taxa de desconto ajustada ao risco, η é a velocidade de reversão à média e r é a taxa livre de risco.

² O formato neutro ao risco permite o uso da taxa de interesse livre de risco como uma adequada taxa de desconto. O processo é neutralizado ao risco mudando a tendência. Neste formato, a tendência α do processo é substituído por $r - \delta$, onde δ é o dividendo. Para o caso da reversão à média, o dividendo não é constante, sendo uma função de x : $\delta = \rho - \alpha = \rho - \eta (\bar{x} - x)$. Observe que, na equação (84), a neutralização ao risco pode ser interpretada como a subtração do nível de equilíbrio (média de longo prazo) \bar{x} do *risk-premium* normalizado $((\rho - r)/\eta)$.

Apêndice D

Este apêndice descreve o algoritmo proposto por Grant, Vora e Weeks para determinar o valor de uma opção americana, através da transformação de uma opção americana em uma opção europeia mediante a determinação da fronteira de exercício ótima ou curva de gatilho.

Algoritmo de Grant, Vora e Weeks

A seguir descreve-se o algoritmo de Grant, Vora e Weeks. Para isso são definidos S como o valor do ativo objeto, X como o preço de exercício da opção, I como seu valor intrínseco e C como o valor da opção de compra. Para um dado tempo t o exercício da opção será ótimo quando:

$$C_t(S_t^*, X) = I_t(S_t^*, X) \quad (88)$$

onde S_t^* é um ponto da curva de gatilho.

Para um instante t entre a data inicial, t_0 , e a data de exercício, t_T , em uma determinada iteração i , o valor da opção é dado por C_t . O valor da opção americana de compra (opção de expansão), C_t , é dado por:

$$C_t^{(i)}(S_t^*) = \max\{S_t - X, e^{-r\Delta t} E_t[C_{t+\Delta t}(S_{t+\Delta t})]\} \quad (89)$$

onde S_t é o preço do petróleo no instante t , Δt representa um pequeno intervalo de tempo, r é a taxa de juros livre de risco (taxa de desconto), $e^{-r\Delta t}$ é o fator de desconto e E indica o valor esperado.

Separando os termos da equação (89) temos o instante em que a opção será exercida (no primeiro termo, se o preço em t , S_t , for maior que o preço da curva de gatilho, S_t^*) e o instante em que é conveniente manter a opção (no segundo termo, se o preço em t , S_t , for menor que o preço da curva de gatilho, S_t^*):

$$\begin{cases} S_t - X & \text{se } S_t > S_t^* & (\text{exercer a opção}) \\ e^{-r\Delta t} E_t [C_{t+\Delta t}(S_{t+\Delta t})] & \text{se } S_t < S_t^* & (\text{manter a opção}) \end{cases} \quad (90)$$

No instante T , no vencimento, é ótimo exercer a opção sempre que ela estiver “*in the money*”, isto é, quando seu valor é $C_T(S_T) = \max[0, S_T - X] = S_T - X = 0$, o que significa que $S_T^* = X$ (valor crítico igual ao preço de exercício).

O processo de otimização começa na última data de exercício antecipado, $t_{T-\Delta t}$, antes do vencimento da opção. O portador da opção poderá exercê-la imediatamente ou mantê-la até o vencimento. Assim, em t_{T-t} , o valor da opção será:

$$C_{T-\Delta t} = \begin{cases} S_{T-\Delta t} - X & \text{se } S_{T-\Delta t} > S_{T-\Delta t}^* \\ e^{-r\Delta t} E[C_T] & \text{se } S_{T-\Delta t} < S_{T-\Delta t}^* \end{cases}$$

A procura do preço de exercício crítico, $S_{T-\Delta t}^*$, é feita dando pequenos incrementos no preço, $\Delta S_{T-\Delta t}$, até encontrar o preço do ativo no qual é indiferente exercer imediatamente ou manter a opção viva, isto é:

$$S_t^* - X = e^{-r\Delta t} E[C_{t+\Delta t}(S_{t+\Delta t}^*)] \quad (91)$$

Determinado o preço crítico em $t_{T-\Delta t}$, continuando com a otimização, procura-se no instante anterior o preço crítico, $S_{T-2\Delta t}^*$, condicional ao conhecimento dos preços $S_{T-\Delta t}^*$ e S_T^* . Todavia, a determinação do preço crítico em um instante depende dos preços críticos nos instantes futuros. Como estes preços futuros ainda não são conhecidos, emprega-se a simulação Monte Carlo, que começa no instante $t_{T-\Delta t}$. Simula-se valores para S_T , calculando-se o valor esperado da opção através de:

$$C_t(S_t^*) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N C_t^{(i)}(S_t^*) \quad (92)$$

onde N é o número de iterações da simulação Monte Carlo.

O resultado obtido é comparado com a remuneração oriunda do exercício da opção:

$$E[C_{T-\Delta t}] = S_{T-\Delta t}^* - X \quad (93)$$

Determinado o preço $S_{T-\Delta t}$, se este não é o preço crítico, este é incrementado e repete-se a simulação Monte Carlo. Este processo se repete até a determinação do preço crítico.

Desta forma, continua-se caminhando para trás no tempo ao longo da vida da opção, determinando assim a curva de gatilho. Com a curva de gatilho é estimado o valor da opção usando-se a simulação Monte Carlo (simulando o preço a partir do tempo t_0 , com um preço inicial S_0 tomado do mercado). O valor da opção para cada simulação será no exercício antecipado em qualquer data t_i . O exercício antecipado ocorre na primeira data em que o preço da ação ultrapassa a curva de gatilho.

A seguir é descrito o algoritmo de forma esquemática:

Passo 1: Discretiza-se o tempo de vida da opção em um número determinado de intervalos e considera-se como condição $S_T^* = X$ (Figura 37).

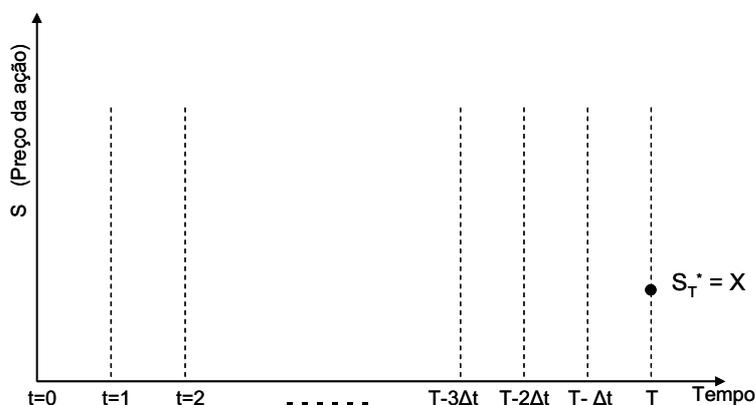


Figura 37 - Discretização do tempo no algoritmo de Grant, Vora e Weeks

Passo 2: No instante $T - \Delta t$ adota-se o preço inicial do ativo, $S_{T-\Delta t}$, igual ou próximo de S_T^* . Inicia-se a simulação Monte Carlo obtendo-se diversos valores para a opção no tempo T. O valor final da opção é calculado usando a equação (92) e descontado de e^{-tr} para levar o valor ao tempo $T - \Delta t$ (Figura 38).

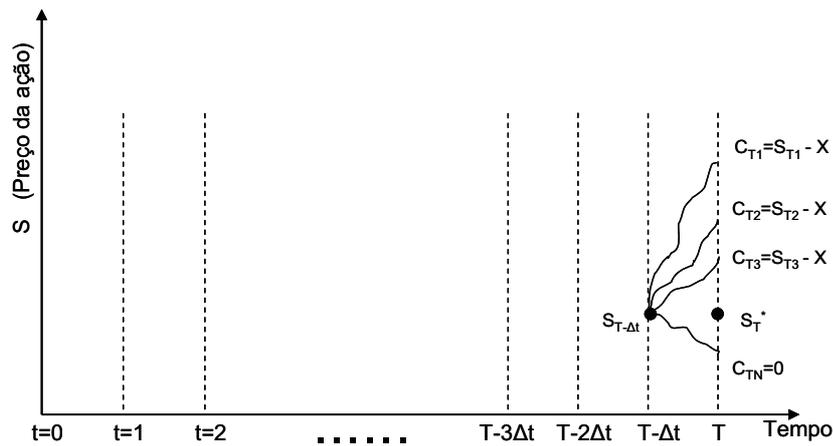


Figura 38 - Cálculo do valor da opção no tempo T por simulação Monte Carlo

Passo 3: Se o preço estimado pela equação (93), $S_{T-\Delta t}$, não for o preço crítico, este é incrementado e repete-se a simulação Monte Carlo (Figura 39).

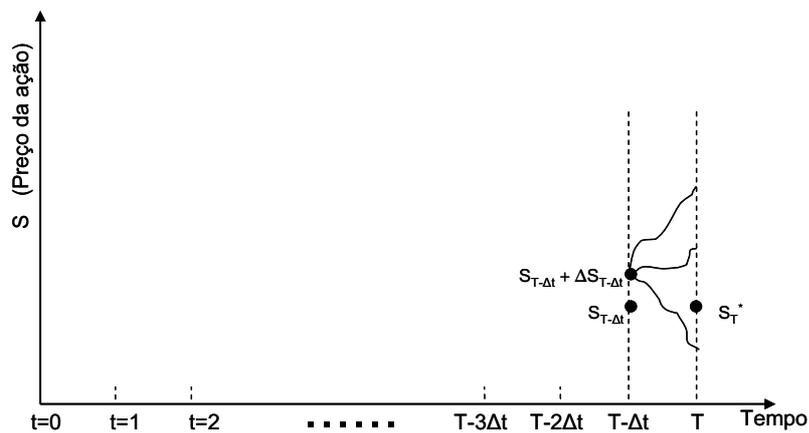


Figura 39 - Incremento de $S_{T-\Delta t}$ e simulação Monte Carlo.

Passo 4: Calculado $S_{T-\Delta t}^*$, equação (93), repetem-se os passos 2 e 3, testando a opção para todos os momentos até o vencimento, T . Continua-se recursivamente este processo até chegar ao tempo inicial, t_0 , construindo-se assim a curva de gatilho (Figura 40).

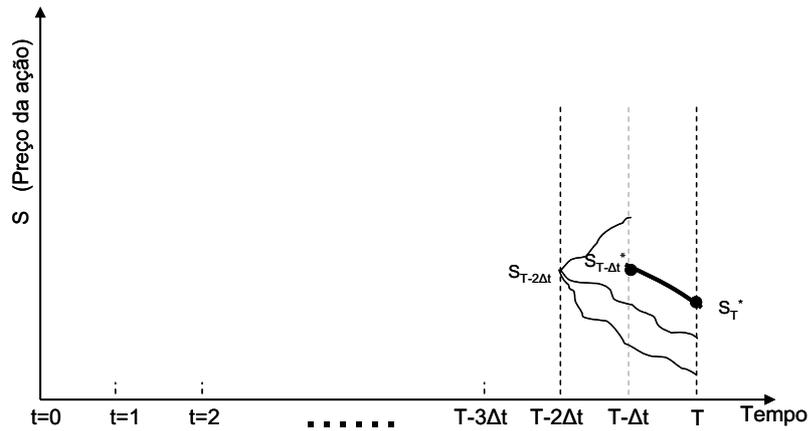


Figura 40 - Repetir recursivamente os passos 2 e 3.

Passo 5: Terminada a curva de gatilho, realizam-se novas simulações Monte Carlo a partir do preço inicial S_0 dado pelo mercado. Calcula-se o valor final da opção, que é o valor médio de todas as opções trazidas ao valor presente (Figura 41).

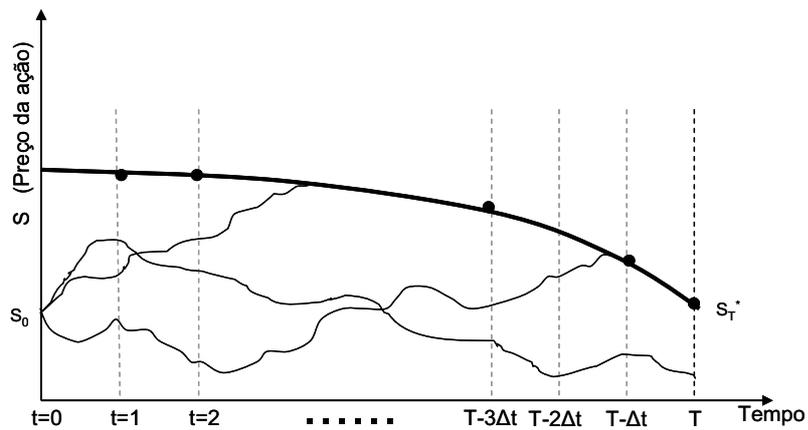


Figura 41 - Cálculo do valor final da opção.

Apêndice E

Este apêndice descreve as deduções para as expressões de cálculo da média e variância de um número *fuzzy* apresentadas por Carlsson e Fullér em [76]. Estas definições são consistentes com o princípio de extensão e com as definições de média e variância da teoria de probabilidade.

Média de um Número *Fuzzy*

Como foi descrito na seção 3.4, um número *fuzzy* A é um conjunto *fuzzy* normal e convexo, com domínio nos números reais e função de pertinência contínua de suporte limitado.

O conjunto de intervalos α -cut de um número *fuzzy* A é definido por:

$$A_\alpha = \begin{cases} \{t \in \mathbb{R} | A(t) \geq \alpha\} & \text{se } \alpha > 0 \\ \text{cl}\{t \in \mathbb{R} | A(t) \geq \alpha\} & \text{se } \alpha = 0 \end{cases} \quad (94)$$

Supporte fechado de A

Define-se o intervalo α -cut para qualquer número *fuzzy* $A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_3^{(\alpha)}]$

Para o caso de um número *fuzzy* triangular definido pela equação (27) o intervalo A_α é definido por:

$$A_\alpha = [(a_2 - a_1)\alpha + a_1, -(a_3 - a_2)\alpha + a_3] \quad \forall \alpha \in [0,1] \quad (95)$$

Usando o método de defuzzificação de Goetschel-Voxman [92] define-se o valor médio (valor esperado) de um número *fuzzy* de acordo com a equação (96):

$$E(A) = \int_0^1 \alpha (a_1^{(\alpha)} + a_3^{(\alpha)}) d\alpha \quad (96)$$

$$E(A) = \frac{\int_0^1 \alpha \left[\frac{a_1^{(\alpha)} + a_3^{(\alpha)}}{2} \right] (a_1^{(\alpha)} + a_3^{(\alpha)}) d\alpha}{\int_0^1 \alpha d\alpha} \quad (97)$$

Isto é, o peso da média aritmética de $a_1^{(\alpha)}$ e $a_3^{(\alpha)}$ é o próprio α .

Assim, para um número *fuzzy* triangular:

$$E(A) = \int_0^1 \alpha [(a_2 - a_1)\alpha + a_1 + a_3 - (a_3 - a_2)\alpha] d\alpha \quad (98)$$

$$E(A) = \int_0^1 \alpha [(a_2 - a_1 - a_3 + a_2)\alpha + a_1 + a_3] d\alpha \quad (99)$$

$$E(A) = \int_0^1 (2a_2 - a_1 - a_3)\alpha^2 d\alpha + \int_0^1 (a_1 + a_3)\alpha d\alpha \quad (100)$$

$$E(A) = \frac{\alpha^3}{3} (2a_2 - a_1 - a_3) \Big|_0^1 + \frac{\alpha^2}{2} (a_1 + a_3) \Big|_0^1 \quad (101)$$

$$E(A) = \frac{2a_2 - (a_1 + a_3)}{3} + \frac{(a_1 + a_3)}{2} \quad (102)$$

$$E(A) = \frac{4a_2 - 2(a_1 + a_3) + 3(a_1 + a_3)}{6} \quad (103)$$

$$E(A) = \frac{4a_2 + a_1 + a_3}{6} \quad (104)$$

Variância de um Número *Fuzzy*

Carlsson e Fullér em [76] introduziram a definição de variância de um número *fuzzy* como:

$$\begin{aligned} Var(A) = & \int_0^1 Pos[A \leq a_1^{(\alpha)}] \left[\left[\frac{a_1^{(\alpha)} + a_3^{(\alpha)}}{2} - a_1^{(\alpha)} \right]^2 \right] d\alpha + \\ & \int_0^1 Pos[A \geq a_3^{(\alpha)}] \left[\left[\frac{a_1^{(\alpha)} + a_3^{(\alpha)}}{2} - a_3^{(\alpha)} \right]^2 \right] d\alpha \end{aligned} \quad (105)$$

$$Var(A) = \int_b^t \alpha \left(\left[\frac{a_1^{(\alpha)} + a_3^{(\alpha)}}{2} - a_1^{(\alpha)} \right]^2 + \left[\frac{a_1^{(\alpha)} + a_3^{(\alpha)}}{2} - a_3^{(\alpha)} \right]^2 \right) d\alpha \quad (106)$$

A variância é definida como o valor esperado dos desvios quadrados entre a média aritmética e os pontos extremos do conjunto de intervalos α -cut de um número *fuzzy*.

Simplificando a equação (106) tem-se:

$$Var(A) = \int_b^t \alpha \left(\frac{a_1^{(\alpha)^2} + 2a_1^{(\alpha)}a_3^{(\alpha)} + a_3^{(\alpha)^2}}{4} - a_1^{(\alpha)^2} - a_1^{(\alpha)}a_3^{(\alpha)} + a_1^{(\alpha)^2} + \frac{a_1^{(\alpha)^2} + 2a_1^{(\alpha)}a_3^{(\alpha)} + a_3^{(\alpha)^2}}{4} - a_1^{(\alpha)}a_3^{(\alpha)} - a_3^{(\alpha)^2} + a_1^{(\alpha)^2} \right) d\alpha \quad (107)$$

$$Var(A) = \int_b^t \alpha \left(\frac{a_1^{(\alpha)^2} + 2a_1^{(\alpha)}a_3^{(\alpha)} + a_3^{(\alpha)^2}}{2} - 2a_1^{(\alpha)}a_3^{(\alpha)} \right) d\alpha \quad (108)$$

$$Var(A) = \frac{1}{2} \int_b^t \alpha \left(a_1^{(\alpha)^2} + 2a_1^{(\alpha)}a_3^{(\alpha)} + a_3^{(\alpha)^2} - 4a_1^{(\alpha)}a_3^{(\alpha)} \right) d\alpha \quad (109)$$

$$Var(A) = \frac{1}{2} \int_b^t \alpha \left(a_1^{(\alpha)^2} - 2a_1^{(\alpha)}a_3^{(\alpha)} + a_3^{(\alpha)^2} \right) d\alpha \quad (110)$$

$$Var(A) = \frac{1}{2} \int_b^t \alpha \left(a_1^{(\alpha)} - a_3^{(\alpha)} \right)^2 d\alpha \quad (111)$$

A partir da equação (95) tem-se que:

$$Var(A) = \frac{1}{2} \int_b^t \alpha \left[(a_2 - a_1)\alpha + a_1 - a_3 + (a_3 - a_2)\alpha \right]^2 d\alpha \quad (112)$$

$$Var(A) = \frac{1}{2} \int_b^t \alpha \left[a_2\alpha - a_1\alpha + a_1 - a_3 + a_3\alpha - a_2\alpha \right]^2 d\alpha \quad (113)$$

$$Var(A) = \frac{1}{2} \int_b^t \alpha \left[-a_1\alpha + a_1 - a_3 + a_3\alpha \right]^2 d\alpha \quad (114)$$

$$Var(A) = \frac{1}{2} \int_0^1 \alpha [(a_3 - a_1)(\alpha - 1)]^2 d\alpha \quad (115)$$

$$Var(A) = \frac{1}{2} \int_0^1 \alpha (a_3 - a_1)^2 (\alpha - 1)^2 d\alpha \quad (116)$$

$$Var(A) = \frac{1}{2} (a_3 - a_1)^2 \int_0^1 \alpha (\alpha - 1)^2 d\alpha \quad (117)$$

Assim, a variância de um número fuzzy é definida por:

$$Var(A) = \frac{(a_3 - a_1)^2}{24} \quad (118)$$

Logo, o desvio padrão de A é definido por:

$$\sigma_A = \sqrt{Var(A)} = \frac{(a_3 - a_1)}{\sqrt{24}} \quad (119)$$

Apêndice F

Neste apêndice descreve-se de forma esquemática os métodos de avaliação de opções reais, tanto o método tradicional de avaliação por simulação estocástica como o método híbrido proposto com números *fuzzy*.

Descrição da Metodologia Tradicional de Avaliação de Opções Reais

Como foi visto no capítulo 3 uma opção real pode ser avaliada do mesmo modo que uma opção financeira; deste modo, os dois métodos mais usados são os métodos dos ativos contingentes, *Contigent Claims*, e o da programação dinâmica.

Com ajuda das ferramentas de cálculo estocástico, obtém-se uma equação diferencial parcial que pode ser resolvida analiticamente ou através de métodos numéricos. O uso de técnicas analíticas de solução é muito limitado, pois à medida que as incertezas sobre as variáveis subjacentes tornam-se mais complexas ou aumenta-se o número de incertezas, o processo de avaliação da opção pode tornar-se oneroso computacionalmente ou intratável algebricamente.

A combinação das técnicas de simulação estatística, como simulação Monte Carlo e a Programação Dinâmica Estocástica permitem desenvolver métodos para avaliação de opções americanas [4] [5] [33] e permitem considerar várias incertezas, tendo por desvantagem o elevado custo computacional. Como foi visto no capítulo 2, esta mesma metodologia pode ser usada para avaliar opções reais.

A seguir descreve-se a metodologia de solução por simulação Monte Carlo. Este método consiste em modelar as incertezas por distribuições de probabilidade conhecidas. Deste modo a incerteza de mercado é modelada por processos estocásticos conhecidos (movimento geométrico browniano, processo de reversão à média, processo de reversão à média com saltos, etc.) e as incertezas técnicas por distribuições de probabilidade (triangular, trapezoidal ou normal). Escolhe-se uma distribuição de probabilidade triangular quando a informação a respeito da incerteza técnica é mínima.

O processo de simulação estocástica inicia-se tomando uma amostra da distribuição de probabilidade de cada incerteza técnica e usando o algoritmo de Grant, Vora e Weeks [4], o qual faz uso de várias amostras da incerteza de mercado (preço da *commodity*) para construir a curva de exercício ótimo da opção. Com esta curva de exercício e com a simulação do preço da *commodity* (amostras da incerteza de mercado) calcula-se o valor da opção real (V_{op}).

Este processo é repetido para um número significativo de amostras de incertezas técnicas (1000 ou 10000 amostras da incerteza técnica).

O valor da opção real resultante da simulação (V_F) é a média de todos os valores da opção (V_{op}) parciais.

A seguir é descrito o método de forma esquemática:

Passo 1: Definem-se as distribuições de probabilidade triangular para as incertezas técnicas e modela-se o preço da *commodity* (incerteza de mercado) por processos estocásticos. Logo, tomam-se amostras de cada distribuição da incerteza (Figura 42).

Incerteza de Mercado: Modelada com Processo Estocástico

Incerteza Técnica: Modelada com Distribuição de Probabilidade Triangular

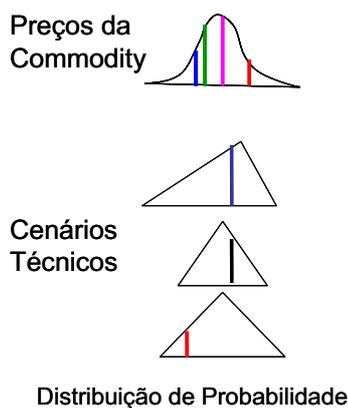


Figura 42 – Definição das distribuições para as incertezas técnicas e do processo estocástico para o preço e amostragem das incertezas.

Passo 2: Constrói-se a curva de exercício ótimo da opção (curva de gatilho) usando o algoritmo de Grant, Vora e Weeks (vide apêndice D), que usa várias

amostras da incerteza de mercado (preço da *commodity*) para construir a curva de gatilho (Figura 43).

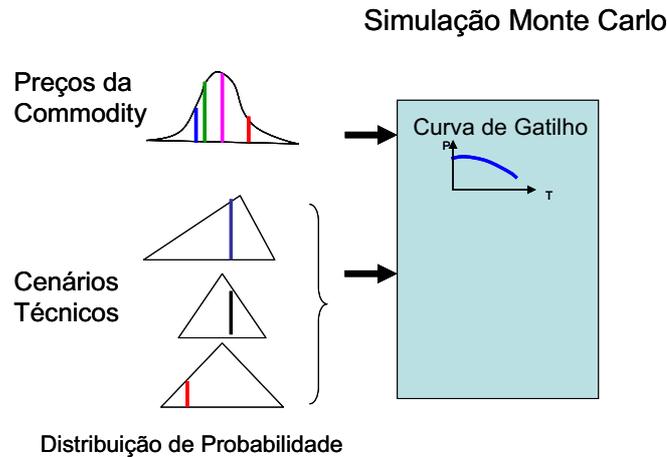


Figura 43 – Construção da curva de gatilho com o algoritmo de Grant, Vora e Weeks.

Passo 3: Com a curva de gatilho calcula-se o valor da opção para essas amostras por simulação Monte Carlo. Isto é, simulam-se os caminhos para o preço da *commodity* desde t_0 até a expiração da opção, T e calcula-se o valor da opção para cada caminho do preço que ultrapasse a curva de gatilho; se o caminho do preço passa todo o tempo de vida da opção sem alcançar a curva de gatilho o valor da opção é zero (Figura 44).

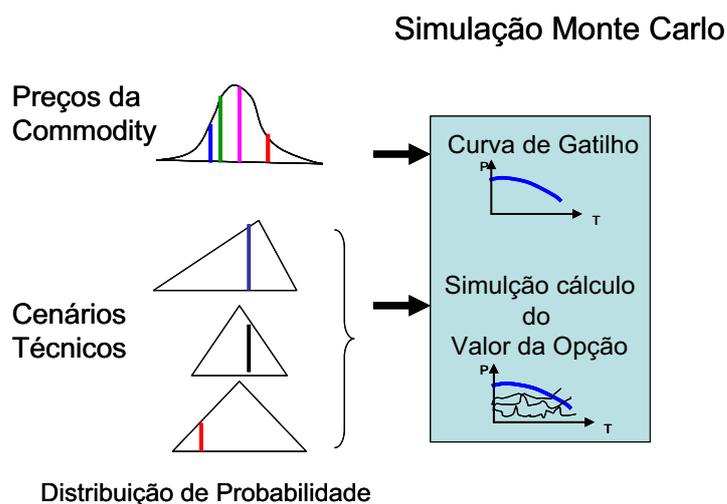


Figura 44 – Simulação Monte Carlo para o cálculo do valor da opção para as amostras da incerteza.

Passo 4: Calcula-se a média dos valores da opção obtidos de cada caminho do preço da *commodity*. Esta média representa o valor da opção para os valores amostrados da incerteza (Figura 45).

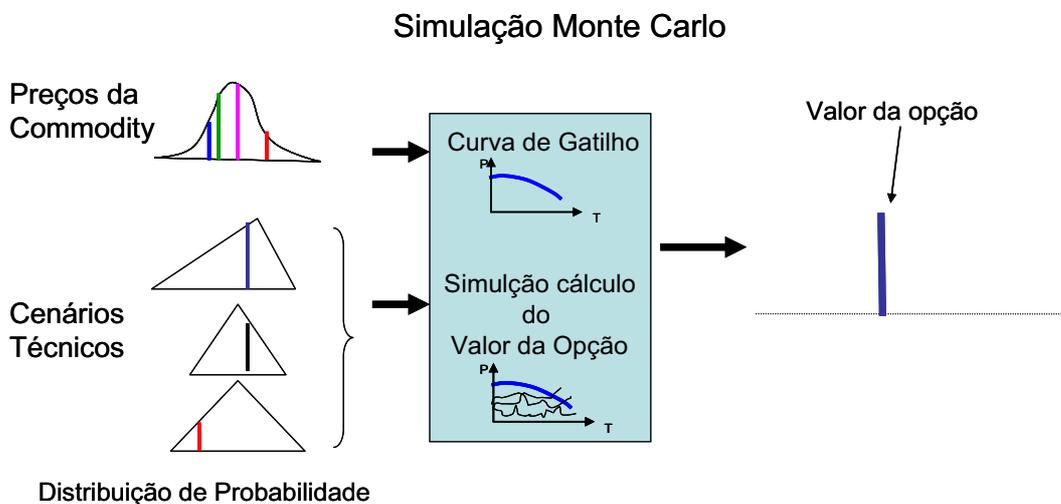


Figura 45 – Cálculo do valor da opção para as amostras da incerteza.

Passo 5: Calculado o valor da opção, tomam-se novas amostras de cada distribuição da incerteza e repetem-se os passos 2 e 3. Obtendo um novo valor da opção para estas novas amostras (Figura 46).

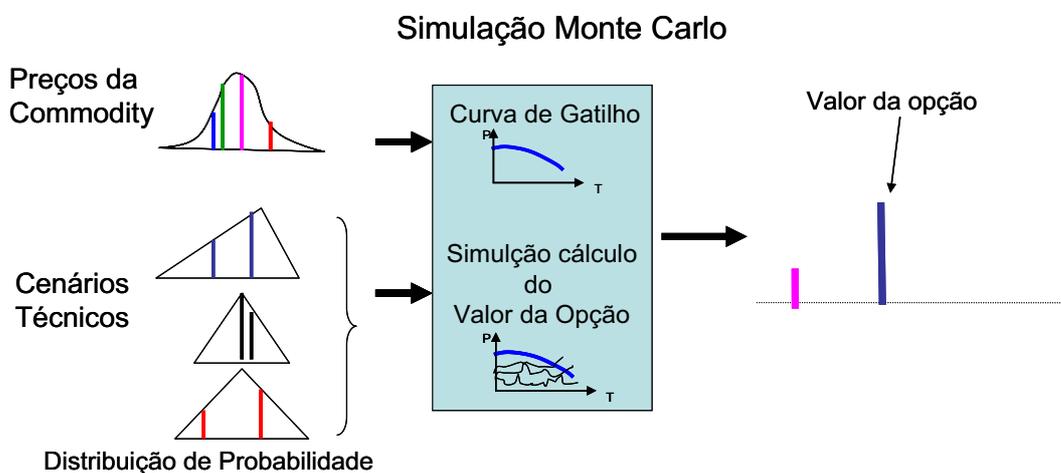


Figura 46 – Tomam-se novas amostras e calcula-se do valor da opção para as amostras da incerteza.

Este processo de simulação é repetido tantas vezes quantas amostras da incerteza sejam consideradas, isto é, o número de amostras da incerteza representa o número de iterações da simulação (Figura 47).

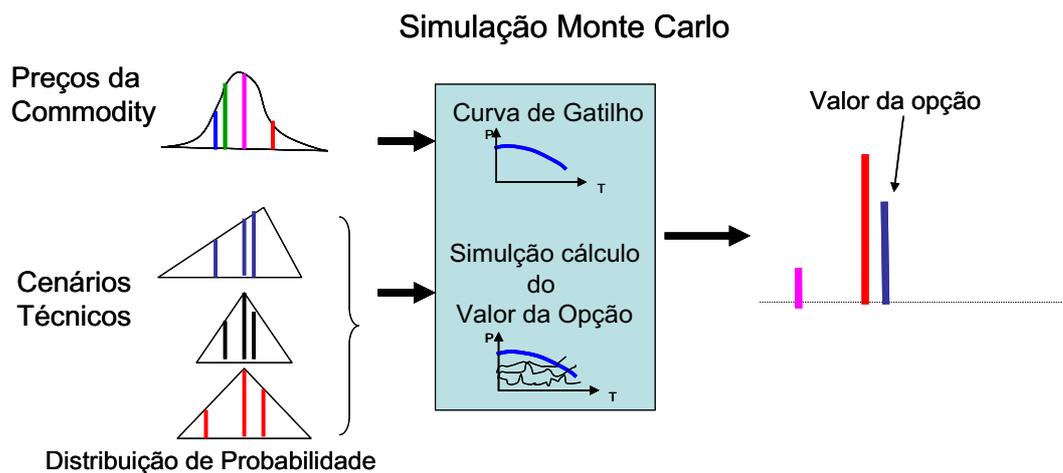


Figura 47 – Repetição do processo de cálculo do valor da opção para as amostras da incerteza.

Passo 6: O valor da opção real resultante da simulação é a média de todos os valores da opção parciais (Figura 48).

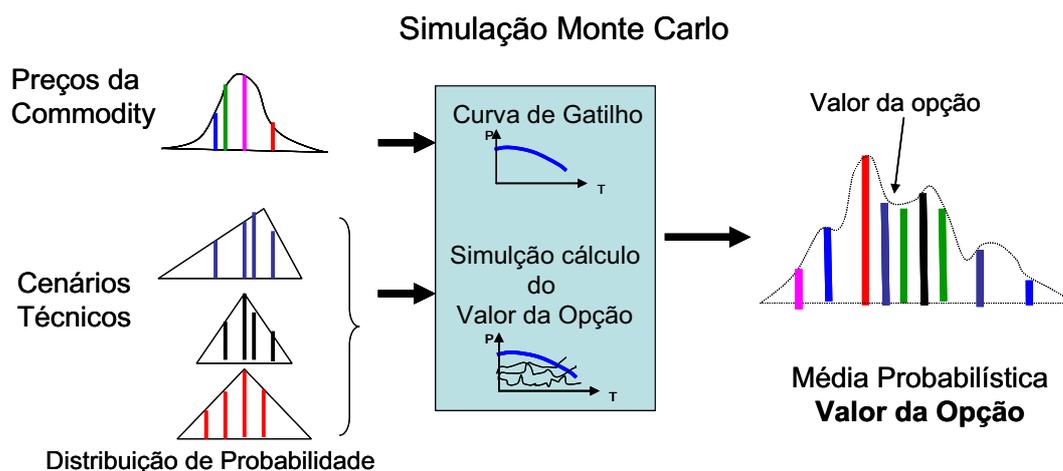


Figura 48 – Valor da opção real resultante da simulação

Descrição da Metodologia Proposta para Avaliação de Opções Reais por Aproximação com Números *Fuzzy*

Nesta seção é descrita, de forma esquemática, a metodologia proposta que combina a simulação estocástica com os números *fuzzy* para calcular o valor de uma opção real. Este método consiste em modelar a incerteza de mercado por processos estocásticos conhecidos (movimento geométrico browniano, processo de reversão à média, processo de reversão à média com saltos, etc.) e as incertezas

técnicas são modeladas por números *fuzzy* triangulares ao invés da distribuição de probabilidade triangular usada na solução tradicional.

Neste caso, ao invés de tomar uma amostra da incerteza técnica como realizado na solução tradicional, emprega-se o número *fuzzy* que representa toda a incerteza. Logo, usando o algoritmo de Grant, Vora e Weeks [4], modificado para trabalhar com números *fuzzy*, constrói-se a curva de exercício ótimo da opção. Com esta curva de exercício e com a simulação do preço da *commodity* (amostras da incerteza de mercado) calcula-se o valor da opção real (V_{opF}). Este valor é também um número *fuzzy*. O valor da opção real resultante da simulação (V_F) é a média do número *fuzzy* [75] [76] [77] que representa o valor da opção (V_{opF}).

Assim o modelo proposto que representa as incertezas técnicas por números *fuzzy* permite obter boas aproximações do valor da opção com grande economia do tempo computacional ao não precisar tomar várias amostras da incerteza técnica, dado que, o número *fuzzy* tem toda a incerteza.

A seguir é descrito o método de forma esquemática:

Passo 1: Definem-se os números *fuzzy* triangulares para as incertezas técnicas e modela-se o preço da *commodity* (incerteza de mercado) por processos estocásticos (Figura 49).

Incerteza de Mercado: Modelada com Processo Estocástico

Incerteza Técnica: Modelada com Números Fuzzy Triangular

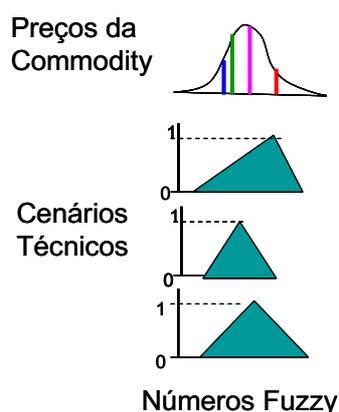


Figura 49 – Definição dos números *fuzzy* para as incertezas técnicas e do processo estocástico para o preço da *commodity*.

Passo 2: Constrói-se a curva de exercício ótimo da opção (curva de gatilho) usando o algoritmo de Grant, Vora e Weeks modificado para trabalhar com números *fuzzy* (vide capítulo 4). Desta forma cada ponto da curva é um número *fuzzy* (Figura 50).

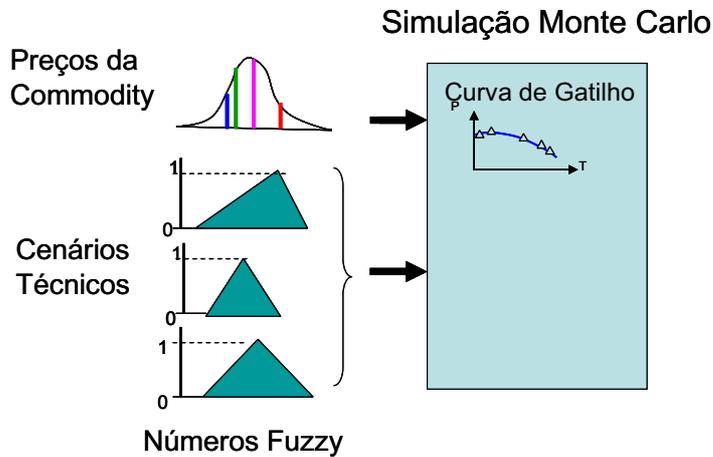


Figura 50 – Construção da curva de gatilho com o algoritmo de Grant, Vora e Weeks modificado para trabalhar com números *fuzzy*.

Passo 3: Simulam-se os caminhos para o preço da *commodity* desde t_0 até a expiração da opção, T e calcula-se o valor da opção *fuzzy* para cada caminho do preço que ultrapasse a curva de gatilho; se o caminho do preço passa todo o tempo de vida da opção sem alcançar a curva de gatilho o valor da opção é zero (Figura 51).

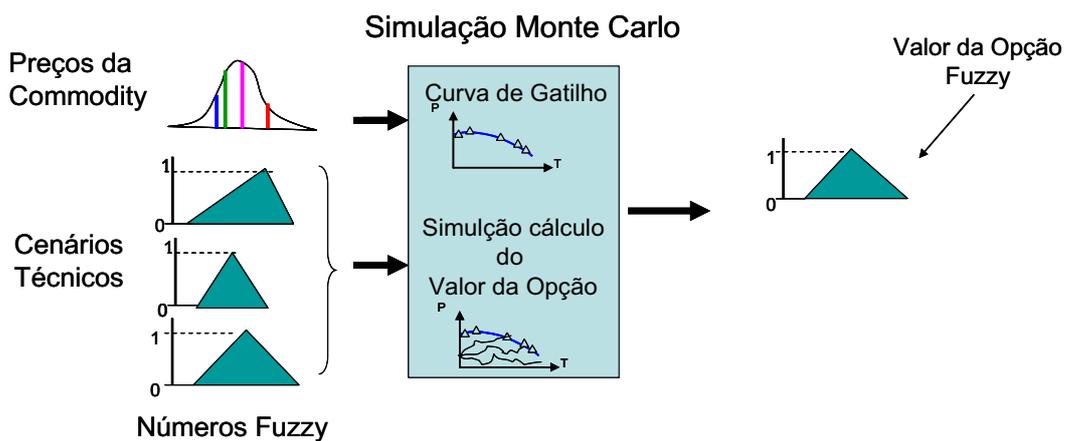


Figura 51 – Simulação Monte Carlo para o cálculo do valor da opção

Passo 4: Repete-se o passo 3 com cada caminho do preço da *commodity*; obtendo-se um novo valor da opção para esse caminho. Este procedimento é repetido para todos os caminhos (Figura 52).

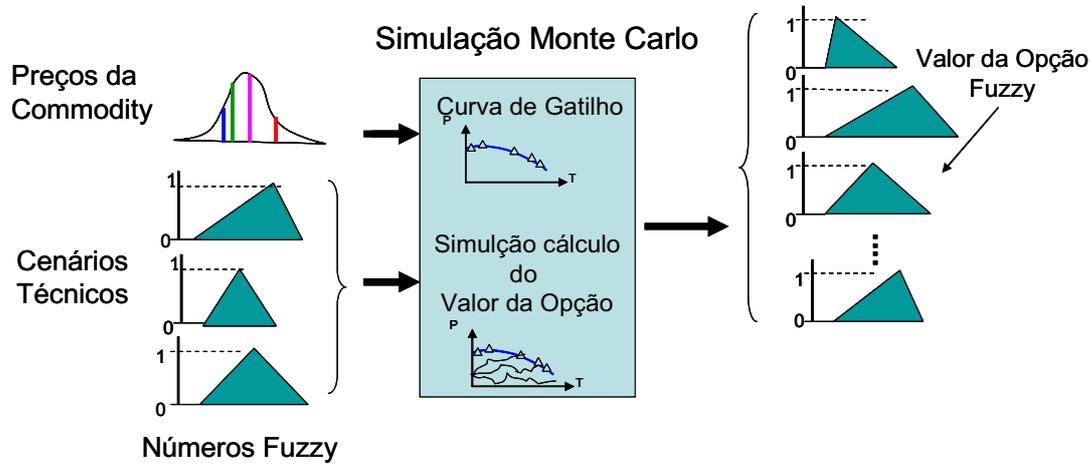


Figura 52 – Cálculo do valor da opção *fuzzy* para todos os caminhos do preço.

Passo 5: O valor da opção real resultante da simulação é a média de todos os valores da opção parciais (Figura 53).

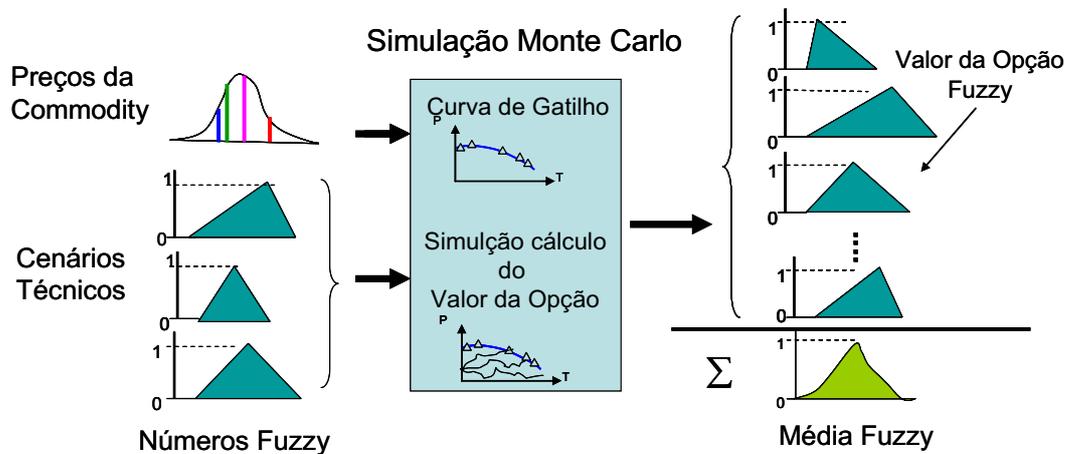


Figura 53 – Valor da opção *fuzzy* resultante da simulação.

Apêndice G

Neste apêndice é apresentada a modelagem analítica do problema da opção de expansão mostrado no capítulo 5. Este problema apresenta características semelhantes ao problema analisado por Batista em [79] e por Dixit e Pindyck em [1].

Dixit e Pindyck fazem uma analogia entre uma opção real e uma opção financeira de compra, onde o preço do ativo-objeto, o valor do projeto V , segue um processo estocástico exógeno.

Na realidade é P , o preço da mercadoria, e não V , o valor do projeto, que se comporta segundo este processo, determinando o valor do projeto e o valor da opção de investir F . Dixit e Pindyck consideraram que:

- Valor do projeto $\rightarrow V = V(P)$ quando o projeto está em andamento.
- Valor da opção de investir $\rightarrow F = F(P)$ quando o projeto ainda não foi iniciado.

Segundo Dias [80], projetos de petróleo podem ser considerados ativos contingentes ou ativos derivativos cujos valores dependem de um preço estocástico. Deste modo, pode-se montar uma carteira livre de risco e esperar que esta remunere à taxa livre de risco r . Esta condição permite a elaboração de um método de solução analítico para o valor do projeto.

Seguindo-se os passos descritos por Dixit e Pindyck [1], monta-se uma carteira livre de risco composta de F e de uma posição curta em m unidades de P . Portanto:

$$\phi = F - mP \quad (120)$$

$$d\phi = dF - mdP \quad (121)$$

onde ϕ representa o retorno da carteira.

Mantendo esta carteira por um período dt , espera-se um retorno igual ao ganho de capital no período mais os dividendos pagos, subtraídos do custo para

manter a posição curta. Observa-se que o projeto não compõe a carteira, e, portanto, não se deve considerar os seus dividendos. Logo:

Retorno Esperado = Ganho de Capital – Custos para manter a carteira

$$r\phi dt = d\phi - m\delta P dt \quad (122)$$

Expandindo $F(P)$ por Taylor:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial P} dP + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial P^2} dP^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial P \partial t} dP dt + \dots \quad (123)$$

Considerando que o preço segue um processo de reversão à média descrito na equação (77), e mostrada novamente a seguir:

$$dx = \eta(\ln \bar{x} - \ln x)x dt + \sigma x dz$$

e adaptando a equação (77) para o preço tem-se:

$$dP = \eta(\ln \bar{P} - \ln P)P dt + \sigma P dz \quad (124)$$

A partir da equação (124), tem-se que:

$$dP dt = 0 \quad (125)$$

$$dP^2 = \sigma^2 P^2 dt \quad (126)$$

substituindo as equações (124), (125) e (126) na equação (123):

$$dF = \frac{\partial F}{\partial P} [\eta(\ln \bar{P} - \ln P)P dt + \sigma P dz] + \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial P^2} \sigma^2 P^2 dt \quad (127)$$

Substituindo as equações (124) e (127) na equação (121):

$$d\phi = \left[\frac{\partial F}{\partial P} \eta (\ln \bar{P} - \ln P) P + \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial P^2} \sigma^2 P^2 - m \eta (\ln \bar{P} - \ln P) P \right] dt + \left[\frac{\partial F}{\partial P} \sigma P - m \sigma P \right] dz \quad (128)$$

Para que a carteira seja livre de risco a parte estocástica deve ser zero, portanto:

$$\frac{\partial F}{\partial P} \sigma P - m \sigma P = 0 \quad (129)$$

$$m = \frac{\partial F}{\partial P} \quad (130)$$

Logo, a equação (128) se resume a:

$$d\phi = \left[\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial P^2} \sigma^2 P^2 \right] dt \quad (131)$$

Finalmente, substituindo as equações (120) e (131) na equação (122) chega-se a equação diferencial parcial para o valor da opção de investir:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial P^2} \sigma^2 P^2 + (r - \delta) P \frac{\partial F}{\partial P} + \frac{\partial F}{\partial t} dt - Fr = 0 \quad (132)$$

Esta equação não considera dividendos, custos ou fluxo de lucro, já que somente a opção é avaliada. Por se tratar de uma equação diferencial parcial, o método de solução se torna bastante complexo. Algumas simplificações poderiam ser feitas com o intuito de aproximá-la a uma equação diferencial ordinária, porém, a qualidade dos resultados poderia ser comprometida porque se estaria adaptando um modelo teórico para solucionar um problema prático.