

2 TORÇÃO EM VIGAS

2.1. Notas Iniciais

As teorias clássicas para torção em materiais homogêneos isotrópicos, e posteriormente para elementos de concreto de seção retangular são analisadas e discutidas neste capítulo.

2.2. Torção em Elementos de Seção Circular

A torção foi primeiramente estudada por Coulomb em 1784 ao analisar experimentalmente o ângulo de torção gerado pela aplicação de cargas elétricas numa esfera de aço suspensa por um fio de aço. O objetivo dessa pesquisa era a investigação das propriedades dos campos elétricos, mas foi possível estabelecer uma relação empírica que descreve o comportamento elástico de elementos homogêneos submetidos à torção, dada por:

$$T = \mu \frac{d^4}{l} \phi \quad (2.1)$$

onde

T – momento de torção;

μ – constante do material;

d – diâmetro do cabo de aço;

l – comprimento do cabo;

ϕ – ângulo de torção.

Em 1826 Navier apresentou um modelo teórico que analisava um eixo circular sólido de material homogêneo sujeito à torção. A Figura 2.1 ilustra as duas hipóteses básicas adotadas:

- i. as seções permanecem circulares após a torção;
- ii. as seções permanecem planas e paralelas, não há empenamento.

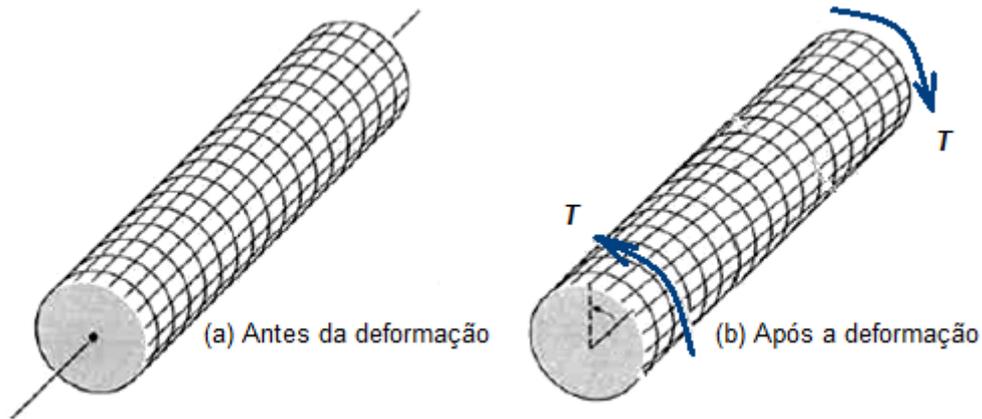


Figura 2.1 – Deformação de um eixo circular sólido submetido à torção pura.

Ao engastar uma das extremidades da barra da Figura 2.1, o plano mais afastado da restrição assumirá uma forma oblíqua (Figura 2.2). Uma linha radial em qualquer plano localizado a uma distância x do engaste terá um ângulo rotação $\phi(x)$ com relação à sua posição original na seção.

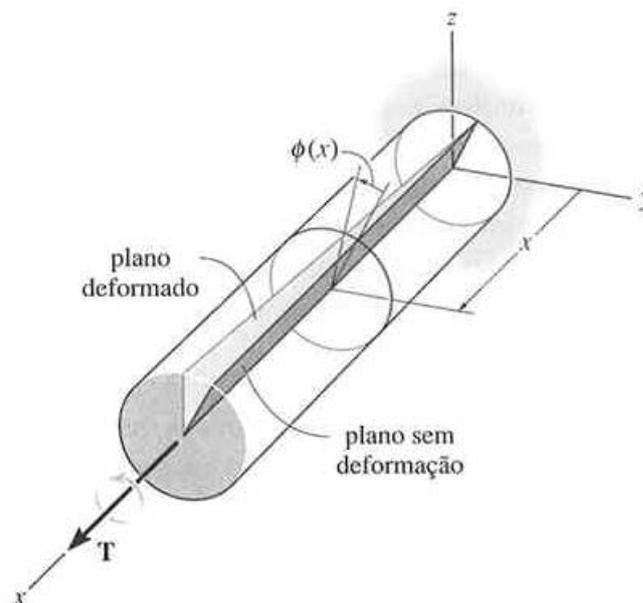


Figura 2.2 – Torção de um eixo circular engastado em uma extremidade.

Segundo a teoria de Navier em um elemento de comprimento longitudinal elementar dx , observa-se que a face distante x do engaste tem uma rotação menor que a localizada a $x + dx$ (Figura 2.3). Essa diferença provoca uma distorção γ no elemento e gera tensões cisalhantes.

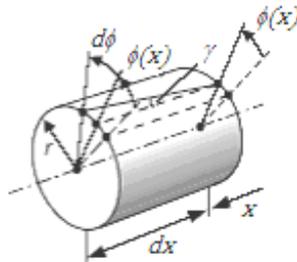


Figura 2.3 – Elemento longitudinal de uma barra de seção circular submetida à torção.

Observando-se a Figura 2.3 tem-se que:

$$\tan \gamma = \frac{r d\phi}{dx} \quad (2.2)$$

onde

r – distância radial;

$d\phi$ – elemento diferencial angular.

Quando a distorção é pequena é válido adotar:

$$\tan \gamma = \gamma \quad (2.3)$$

Reescrevendo-se a expressão (2.2):

$$\gamma = \frac{r d\phi}{dx} \quad (2.4)$$

Definindo-se o ângulo de torção por unidade de comprimento:

$$\theta = \frac{d\phi}{dx} \quad (2.5)$$

tem-se

$$\gamma = r \theta \quad (2.6)$$

Para um momento de torção tem-se que θ é constante para todos os pontos localizados na seção distante x do engaste. Navier concluiu que a intensidade da

distorção varia linearmente com a distância radial r , alcançando seu valor máximo quando $r = R$:

$$\gamma_{m\acute{a}x} = R \theta \quad (2.7)$$

De acordo com a hipótese de que durante a torção as seções transversais permanecem planas, isto é, não empenam, ou variam de dimensão, então com a Lei de Hooke se tem a tensão de cisalhamento:

$$\tau(r) = G \gamma \quad (2.8)$$

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.9)$$

onde

$\tau(r)$ – tensão cisalhante na coordenada radial r ;

G – módulo de deformação transversal do material da barra.

Substituindo-se a expressão (2.6) resulta:

$$\tau(r) = G r \theta \quad (2.10)$$

Análogo à distorção, como G e θ são constantes, a tensão cisalhante varia linearmente com relação a r , apresentando valor nulo no eixo longitudinal da barra circular e valor máximo na coordenada equivalente ao raio R (Figura 2.4):

$$\tau_{m\acute{a}x} = G R \theta \quad (2.11)$$

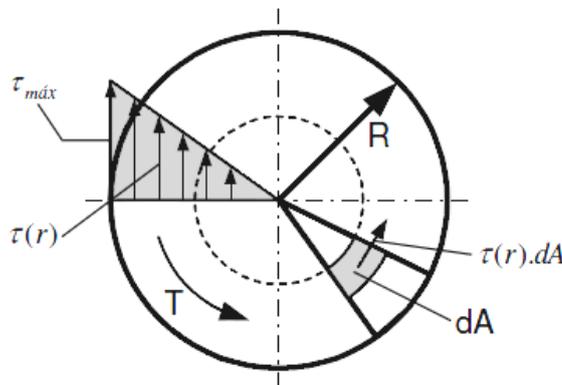


Figura 2.4 – Distribuição de tensão cisalhante em uma seção circular.

O momento de torção T é equilibrado pelo momento gerado pelas tensões cisalhantes. Observando-se a Figura 2.4 segue-se:

$$T = \int \tau r dA \quad (2.12)$$

Substituindo-se a expressão (2.10):

$$T = G \theta \int r^2 dA \quad (2.13)$$

Considerando-se o momento polar de inércia para seções circulares maciças:

$$I_p = \int r^2 dA \quad (2.14)$$

Com as expressões (2.14) na expressão (2.13) resulta:

$$T = G I_p \theta \quad (2.15)$$

A expressão (2.15) mostra que o momento de torção é diretamente proporcional ao ângulo de torção. A constante $G I_p$ é denominada rigidez à torção da seção circular.

Isolando-se $G \theta$ da expressão (2.15) e com a expressão (2.10) observa-se que a relação entre o momento de torção e as tensões cisalhantes é função apenas das propriedades geométricas da seção:

$$\tau = \frac{T r}{I_p} \quad (2.16)$$

A expressão para a tensão cisalhante máxima para uma seção circular é:

$$\tau_{m\acute{a}x} = \frac{T R}{I_p} \quad (2.17)$$

onde o momento de inércia polar é dado por

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \quad (2.18)$$

Substituindo-se a expressão (2.18) na expressão (2.15) tem-se:

$$T = \frac{\pi}{32} G d^4 \theta \quad (2.19)$$

Para um momento de torção constante pode-se simplificar o ângulo de torção da expressão (2.5):

$$\theta = \frac{d\phi}{dx} = \frac{\phi}{l} \quad (2.20)$$

onde ϕ é o ângulo de torção na extremidade livre da barra.

Com a expressão (2.20) na expressão (2.19) tem-se:

$$T = \left(\frac{\pi}{32} G \right) \frac{d^4}{l} \phi \quad (2.21)$$

Considerando-se a hipótese:

$$\mu = \left(\frac{\pi}{32} \right) G \quad (2.22)$$

Aplicando-se a expressão (2.22) na expressão (2.21) obtém-se a expressão (2.1), que é a expressão experimental obtida por Coulomb. Essa associação permitiu validar as hipóteses adotadas por Navier.

2.3. Torção em Elementos de Concreto de Seção Retangular

A análise do comportamento de elementos de concreto de seção retangular submetidos à torção é efetuada por meio de três teorias:

- i. Análise Elástica.
- ii. Análise Plástica.
- iii. Flexão-Esconsa.

2.3.1. Análise Elástica

Navier em 1826 supôs que as expressões deduzidas para seções circulares poderiam ser aplicadas a seções retangulares, com a substituição do momento polar de inércia adequado.

A extrapolação de Navier não foi validada pelos testes experimentais realizados por Duleau em 1820. Esse observou que a rigidez das seções retangulares é cerca de 20% menor que das seções circulares para um mesmo material.

Somente em 1855, após o desenvolvimento das Séries de Fourier e da Teoria da Elasticidade, Barré de Saint-Venant apresentou a solução que satisfaz os estudos experimentais existentes.

Ressalta-se que duas novas hipóteses foram propostas por Saint-Venant para descrever o comportamento das seções retangulares a partir de observações experimentais:

- i. o formato da seção permanece inalterado após a torção;
- ii. ocorre empenamento constante das seções ao longo do comprimento do elemento de seção retangular (Figura 2.5).

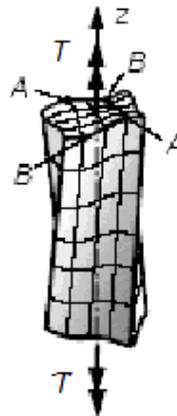


Figura 2.5 – Empenamento das seções retangulares solicitadas à torção.

O empenamento da seção contribui para a não linearidade da distribuição de tensões cisalhantes. A Figura 2.6 mostra a distribuição de tensões tangenciais ao longo do perímetro de uma seção retangular.

Por meio de análise teórica Saint-Venant obteve a constante C que leva em consideração a rigidez devido à forma da seção:

$$C = \beta x^3 y \quad (2.23)$$

onde

β – função de y/x (Tabela 2.1);

x – menor lado da seção retangular;

y – maior lado da seção retangular.

A constante C de Saint-Venant substitui o momento polar de inércia utilizado na dedução de Navier. O momento de torção de uma seção circular de um elemento com material homogêneo e isótropo é dado por:

$$T = C G \theta \quad (2.24)$$

Análogo às seções circulares, a parcela CG é a rigidez à torção das seções retangulares em regime elástico.

Aplicando-se a expressão (2.23) na expressão (2.24) tem-se:

$$T = \beta x^3 y G \theta \quad (2.25)$$

onde β adimensional é um coeficiente obtido da Tabela 2.1.

Tabela 2.1 – Coeficientes adimensionais de Saint-Venant para seções retangulares.

y/x	k	β	α
1,0	0,675	0,141	0,208
1,2	0,759	0,166	0,219
1,4	0,822	0,187	0,227
1,6	0,869	0,204	0,234
1,8	0,904	0,217	0,240
2,0	0,930	0,229	0,246
2,5	0,968	0,249	0,258
3,0	0,985	0,264	0,267
4,0	0,997	0,281	0,282
5,0	0,999	0,291	0,291
10,0	1,00	0,312	0,312
100	1,00	0,331	0,331
∞	1,00	0,333	0,333

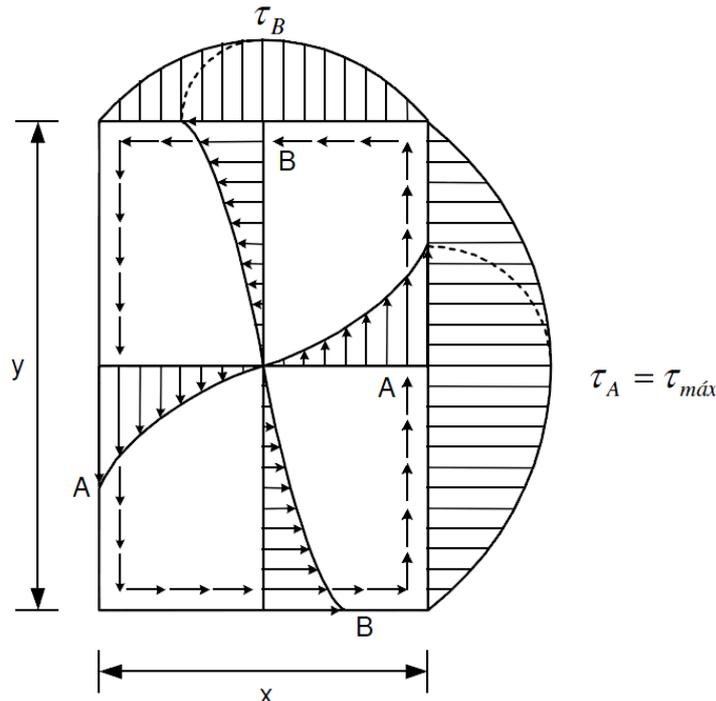


Figura 2.6 – Distribuição de tensões cisalhantes devido à torção numa seção retangular.

A tensão máxima (Figura 2.6) é dada por:

$$\tau_{máx} = k G \theta x \quad (2.26)$$

sendo k é uma função de y/x (Tabela 2.1).

Isolando-se $G\theta$ nas expressões (2.25) e (2.26) tem-se:

$$T = \frac{\beta}{k} x^2 y \tau_{máx} \quad (2.27)$$

Sendo o coeficiente α a razão entre β e k , e isolando-se $\tau_{máx}$ obtém-se:

$$\tau_{máx} = \frac{T}{\alpha x^2 y} \quad (2.28)$$

As distribuições de tensões ao longo das faces externas de seções retangulares genéricas são apresentadas na Figura 2.7, para diferentes razões entre os lados x e y .

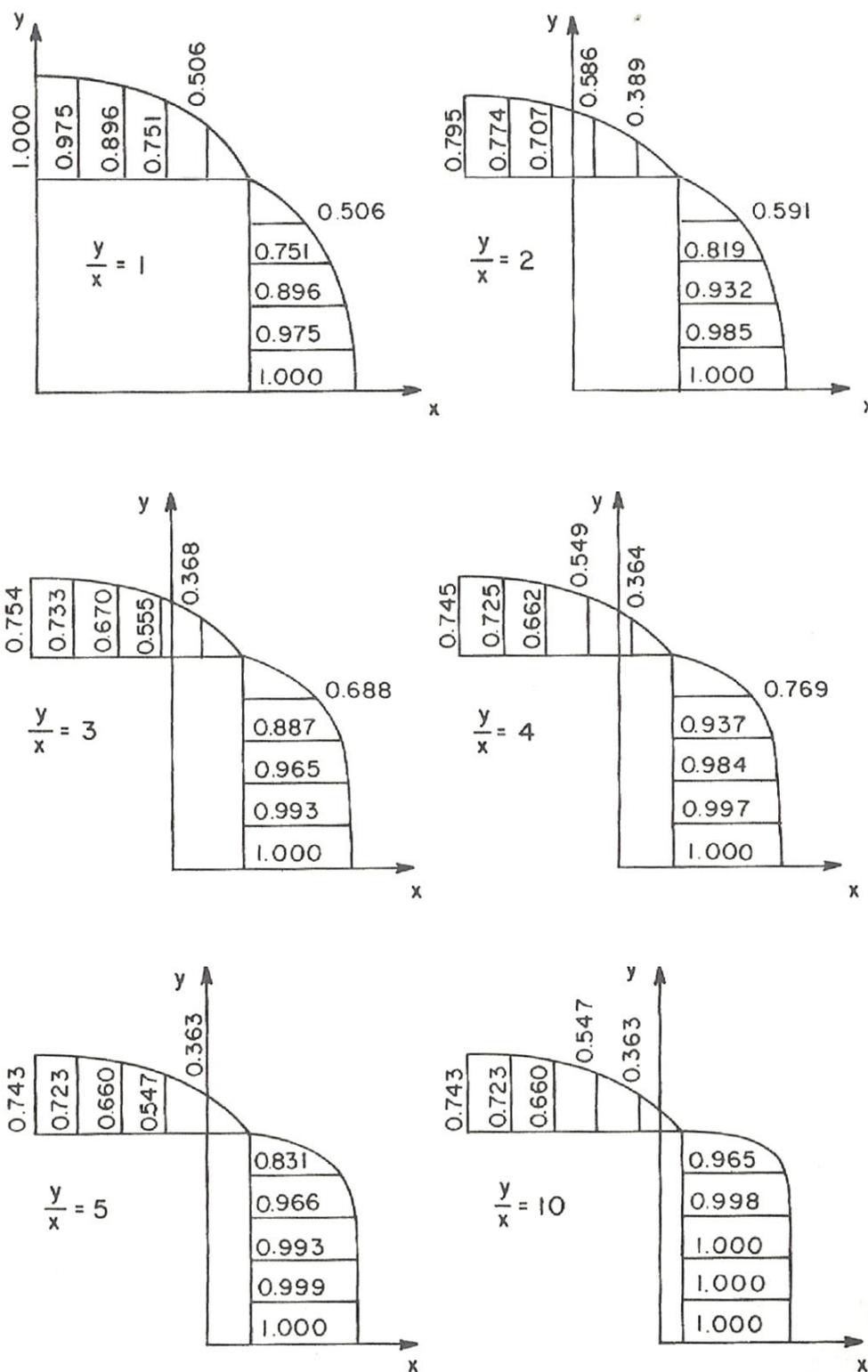


Figura 2.7 – Distribuição de tensões de St. Venant ao longo das faces de uma seção retangular (escala horizontal expandida). Adaptado de Hsu (1984).

A Teoria de Saint-Venant gera resultados bastante precisos para análises elásticas em vigas de concreto de seção retangular submetidas a momentos de

torção de baixas magnitudes. Quando o valor da sollicitação é elevado há o surgimento de microfissuras que afastam o material do seu comportamento elástico-linear. A Figura 2.8 mostra o comportamento de uma curva experimental sobreposta com a reta obtida pela Teoria Elástica clássica.

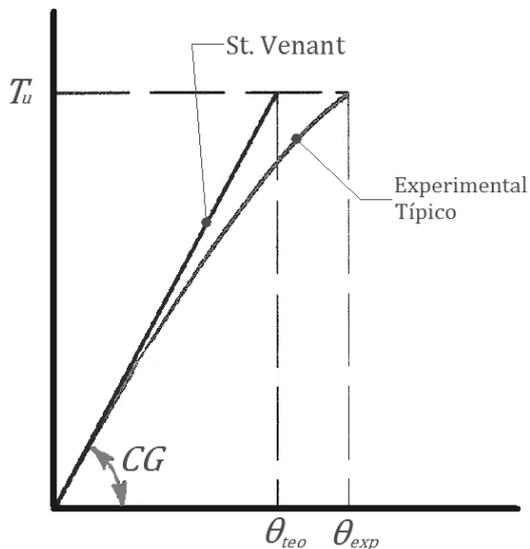


Figura 2.8 — Curva típica momento de torção versus ângulo de torção por unidade de comprimento. Adaptado de Hsu (1984).

A ruptura do concreto é frágil, logo a divergência entre as curvas teórica e experimental é pequena, permitindo que o método seja utilizado para determinar uma aproximação do momento de torção de ruptura. Adota-se a hipótese de que a ruptura ocorra quando a tensão principal máxima atuante $\sigma_{máx}$ se iguala a resistência à tração do concreto f_t . Como $\sigma_{máx} = \tau_{máx}$ na torção pura (Figura 2.9), o momento de torção de ruptura é dado por:

$$T_{u,elástico} = \alpha x^2 y f_t \quad (2.29)$$

onde f_t é a resistência média à tração do concreto, obtida experimentalmente.

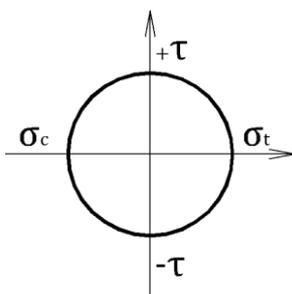


Figura 2.9 – Círculo de Mohr para torção pura.

2.3.2. Análise Plástica

Nadai em 1923 utilizou uma teoria semelhante à Analogia da Membrana de Prandtl proposta em 1903, para uma análise plástica do problema da torção de elementos homogêneos. As mesmas hipóteses da Teoria de Saint-Venant foram utilizadas e foi obtida uma expressão para o momento de torção de ruptura similar a do método elástico. O momento de torção admitindo-se que o material esteja no regime plástico perfeito é dado por:

$$T_{u,plástico} = \alpha_p x^2 y f_t \quad (2.30)$$

onde α_p é uma função de x e y :

$$\alpha_p = \left(0,5 - \frac{x}{6y}\right) \quad (2.31)$$

O coeficiente α_p é aproximadamente 50% maior que o α utilizado na Teoria Elástica. Isso justificaria o acréscimo de resistência apresentado nos experimentos após a fissuração.

Existem três fatores que questionam a validade da Teoria Plástica para análise de vigas de concreto, ou seja: a) não é possível observar um comportamento plástico expressivo do concreto na tração, b) a ruptura de elementos de concreto solicitados à torção é frágil; não se consegue obter experimentalmente uma rotação plástica expressiva. Tem-se também o efeito de escala para elementos de pequenas dimensões; o valor teórico do momento de torção de ruptura é menor que o experimental, ocorrendo o inverso para elementos de grande porte.

A Figura 2.10 mostra o comportamento típico à tração e à compressão de corpos de prova de concreto.

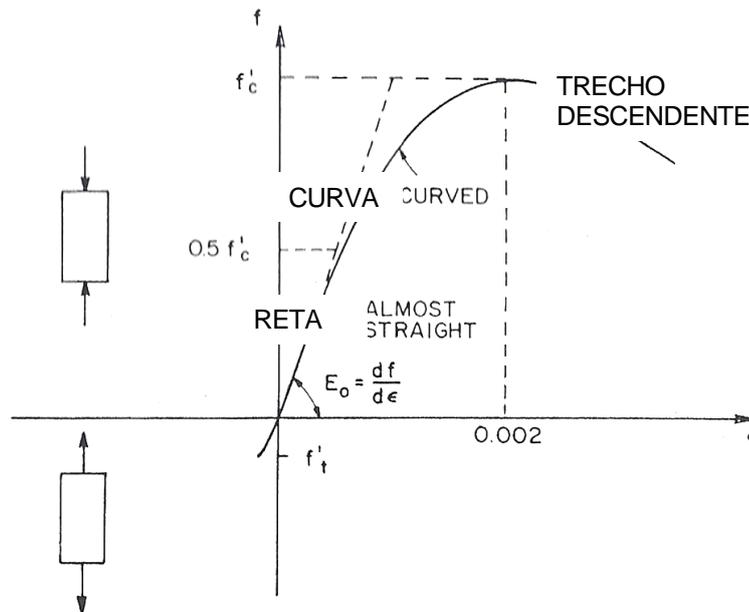


Figura 2.10 – Diagrama tensão versus deformação específica do concreto submetido a tração e compressão uniaxiais.

2.3.3. Flexão-Esconsa

Hsu (1968) concluiu que a dificuldade de utilizar as teorias elástica e plástica para determinação do momento de torção de ruptura seria um indício que essas não seriam bons modelos teóricos para representar o comportamento de vigas de concreto armado solicitadas à torção.

Esse autor ensaiou vigas de concreto com baixa taxa de armadura e solicitadas à torção. Utilizando fotogrametria observou que a primeira fissura tem inclinação de 45° com relação ao eixo da viga e forma bastante regular remetendo a um esforço de tração. A abertura aumenta de largura e comprimento progressivamente com o aumento da solicitação compressão. Na face oposta a que ocorreu a primeira fissura notou-se uma fissuração irregular, com esmagamento do concreto, remetendo à solicitação de compressão. Esse estudo reafirma o modelo de ruptura da flexão-esconsa apresentado por Lessig em 1959.

Hsu (1968) obteve uma nova expressão para o momento de torção de ruptura. Baseado na teoria da Flexão Esconsa deduziu que o momento de torção aplicado é equilibrado por duas componentes atuantes na superfície de ruptura: a componente T_b devido a flexão, e a componente T_t devido à torção (Figura 2.11).

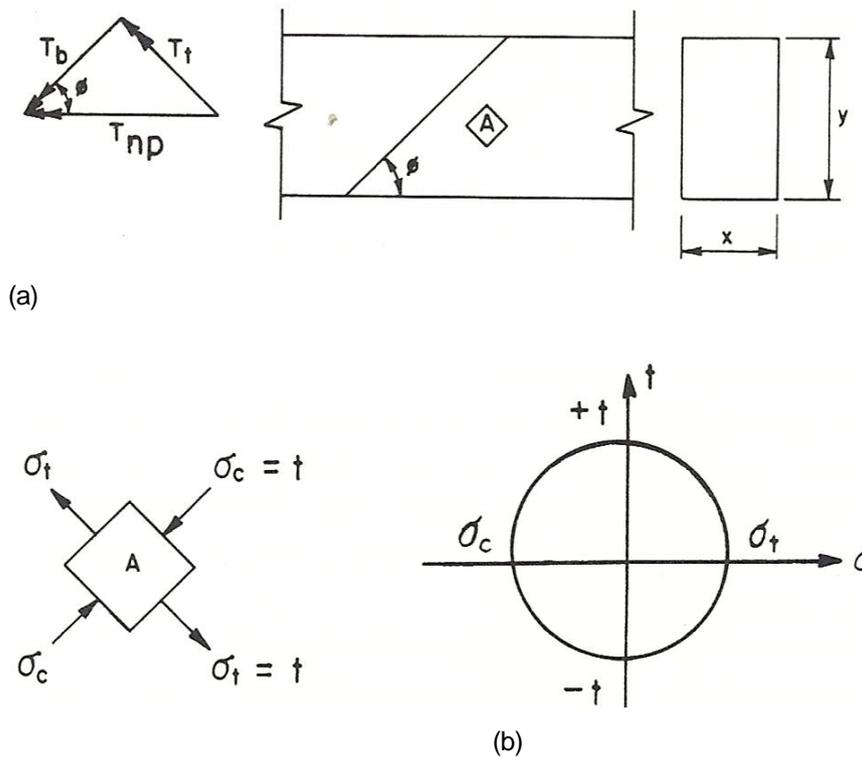


Figura 2.11 – Componentes de flexão e de torção em uma viga de concreto: (a) componentes do momento de torção; (b) tensões em um elemento na face da viga. Adaptado de Hsu (1984).

De acordo com a teoria elástica de flexão:

$$T_b = T_{np} \cos\phi = \frac{x^2 y}{6} \csc\phi f_r \quad (2.32)$$

$$T_{np} = \left(\frac{x^2 y}{3} f_r \right) \csc(2\phi) \quad (2.33)$$

onde

T_{np} – momento de torção;

ϕ – ângulo formado entre a fissura principal e o eixo longitudinal da viga;

f_r – tensão de fissuração do concreto.

Minimizando-se a expressão (2.33) em relação a ϕ , obtém-se o ângulo equivalente ao momento de torção mínimo:

$$\frac{dT_{np}}{d\phi} = \frac{x^2y}{3} f_r (2 \cot 2\phi \csc 2\phi) = 0 \xrightarrow{\text{tem-se}} \phi = 45^\circ \quad (2.34)$$

Substituindo-se $\phi = 45^\circ$ na expressão (2.33) obtém-se o momento de torção máximo devido à contribuição da parcela de flexão:

$$T_{np} = \frac{x^2y}{3} f_r \quad (2.35)$$

Um elemento **A** retirado da face principal da viga (Figura 2.11) está submetido a um estado de tensões de tração devido a T_b perpendicular à fissura, e a tensões de compressão de igual magnitude na direção da abertura devido a T_t . De acordo com os ensaios realizados por McHenry e Karni *apud* Hsu (1984), a parcela de compressão reduz em 15% a resistência à tração do concreto. Como a ruptura do concreto na flexão ocorre devido à tração. Hsu (1968) propôs que a expressão (2.35) deveria ser reduzida por um fator de 0,85 para consideração da parcela de compressão:

$$T_{np} = \frac{x^2y}{3} (0,85 f_r) \quad (2.36)$$

Como a tensão de fissuração do concreto não é facilmente obtida, Hsu (1984) propõe uma expressão empírica para expressá-la a partir da resistência à compressão do concreto. Nessa expressão as unidades não são consistentes, tendo-se que utilizar as tensões em *psi* e as dimensões em polegadas. Assim:

$$f_r = 21 \left(1 + \frac{10}{x^2} \right) \sqrt[3]{f_c} \quad (2.37)$$

onde f_c é a resistência média a compressão do concreto obtida experimentalmente.

A expressão (2.36) apresenta um novo critério de ruptura para vigas de concreto de seção retangular solicitadas à torção pura: a ruptura ocorre quando a tensão de tração provocada pela componente de flexão alcança a resistência do

concreto. A Figura 2.12 mostra os campos de tensões e a forma da fissura de uma viga engastada submetida à torção pura.

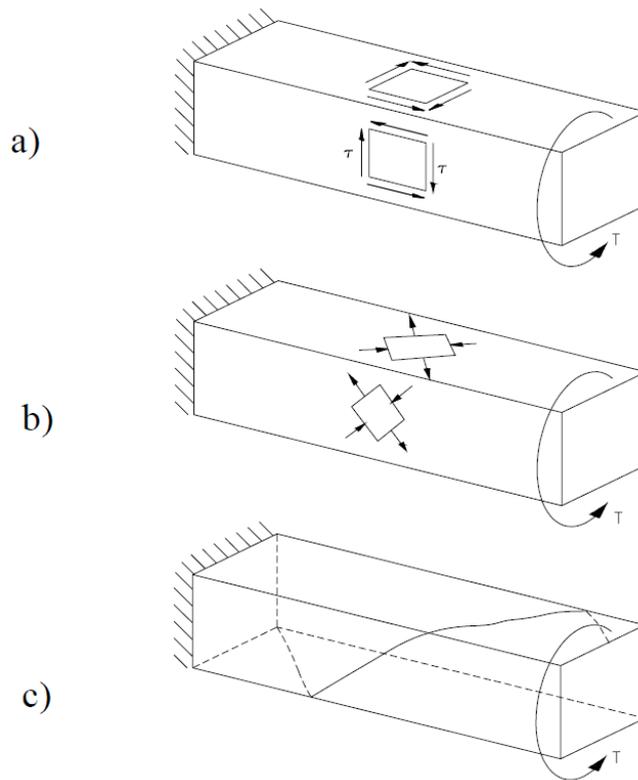


Figura 2.12 – Tensões devido à torção em uma viga de concreto de seção retangular: a) tensões de cisalhamento; b) tensões principais de T_t e T_b ; c) trajetória helicoidal das fissuras. Fonte: MacGregor *apud* Bastos (2005).

2.4. Torção em Vigas de Concreto Armado de Seção Retangular

2.4.1. Comportamento de Vigas sem Armadura Transversal

As vigas de concreto sem armadura interna se comportam de modo semelhante ao modelo descrito por Hsu (1984) para vigas de concreto subarmadas apenas com barras longitudinais.

Antes da fissuração a curva momento de torção *versus* ângulo de torção pode ser descrita pela teoria elástica discutida no item 2.3.1. A ruptura é frágil e coincide com o aparecimento das primeiras fissuras (Figura 2.13), então:

$$T_{cr} \cong T_u \quad (2.38)$$

onde

T_{cr} – momento de torção de fissuração da viga sem armadura transversal;

T_u – momento de torção último da viga sem armadura transversal.

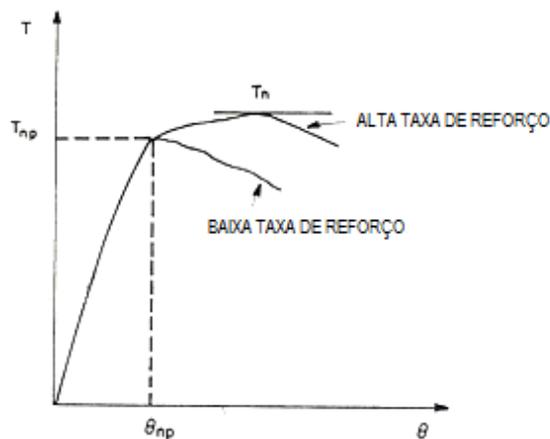


Figura 2.13 – Típica curva $T \times \theta$ para vigas de concreto sem armadura transversal, com armadura longitudinal. Fonte: Hsu (1984).

2.4.2. Comportamento de Vigas com Armadura Transversal

A Figura 2.14 apresenta os resultados obtidos por Hsu (1984) para vigas de concreto armado de mesma geometria e taxa de armadura variável. Esse autor constatou que o comportamento de todos os elementos era semelhante a das vigas sem armadura transversal até a solicitação atingir o momento de torção de fissuração. Após esse limite existe um incremento e um patamar em que a viga continua se deformando sob carregamento constante até a ruptura. Hsu observou que o acréscimo de resistência após a fissuração é proporcional à taxa de armadura de acordo com a relação empírica:

$$T_{cr}^* = (1 + 4 \rho) T_n \quad (2.39)$$

onde

T_{cr}^* – momento de torção de fissuração da viga reforçada com estribos;

ρ – taxa de armadura total (somatório da taxa longitudinal e transversal);

T_n – momento de torção último da viga com apenas armadura longitudinal.

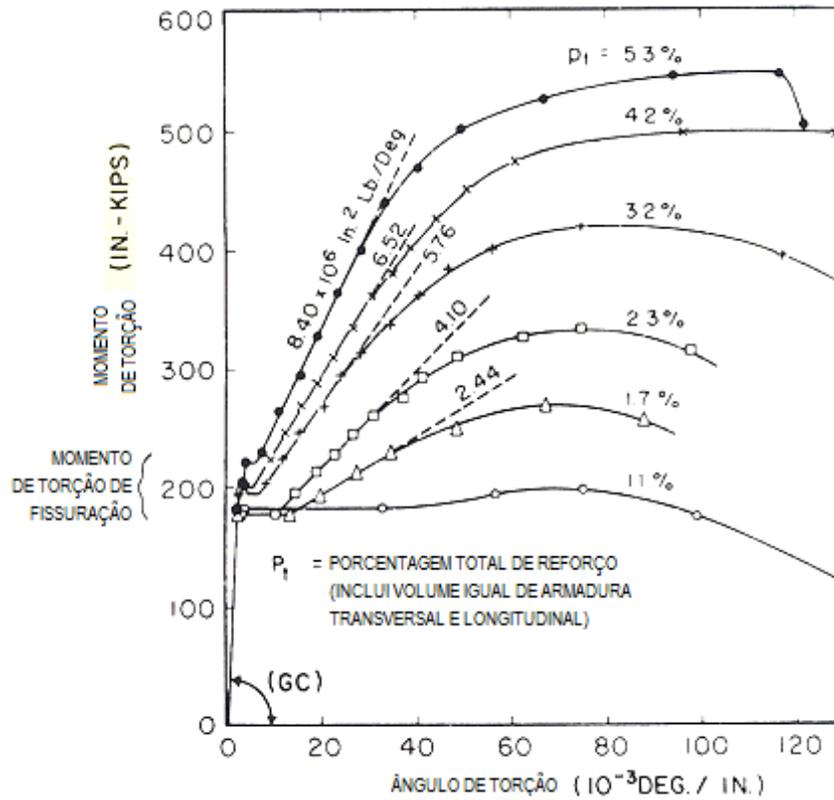


Figura 2.14 – Curvas $T \times \theta$ para vigas de concreto armadas com diferentes taxas de armadura de aço. Adaptado de Hsu (1984).

No capítulo 3 apresenta-se uma adaptação desse modelo de Hsu (1984) para análise de vigas de concreto com armadura externa composta de estribos de CFC.