



Renan Costa Sales

**Implementação de elementos finitos híbridos
planos para a análise de placas e cascas finas
ou moderadamente espessas**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do Centro Técnico Científico da PUC-Rio.

Orientador: Prof. Ney Augusto Dumont

Rio de Janeiro
Março de 2018



Renan Costa Sales

**Implementação de elementos finitos híbridos
planos para a análise de placas e cascas finas
ou moderadamente espessas**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Ney Augusto Dumont

Orientador

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

Prof. Raul Rosas e Silva

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

Prof. Ivan Fábio Mota de Menezes

Departamento de Engenharia Mecânica – PUC-Rio

Prof. Márcio da Silveira Carvalho

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 02 de Março de 2018

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Renan Costa Sales

Graduou-se em Engenharia Civil pela Universidade Estadual Vale do Acaraú em 2016. Durante a graduação atuou na área de mecânica da fratura em materiais compósitos.

Ficha Catalográfica

Sales, Renan Costa

Implementação de elementos finitos híbridos planos para a análise de placas e cascas finas ou moderadamente espessas / Renan Costa Sales; orientador: Ney Augusto Dumont. – Rio de Janeiro: PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental , 2018.

v., 89 f: il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental .

Inclui bibliografia

1. Engenharia Civil – Teses. 2. Elementos finitos híbridos;. 3. elementos de placa e casca;. 4. teoria de Kirchhoff;. 5. teoria de Mindlin-Reissner;. I. Dumont, Ney Augusto. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil e Ambiental . III. Título.

CDD: 620.11

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, aos meus amados pais, Reginaldo e Helena, que sempre me apoiaram e me incentivaram ao longo dessa trajetória.

À minha irmã e à minha prima, Helaine Costa e Joselice, que sempre me ajudaram e que contribuíram para a pessoa que sou hoje.

Ao meu amigo, Bruno Amorim, o qual posso sempre contar e que se aventurou comigo ao longo dessa jornada graduação/mestrado.

Aos amigos que fiz na PUC-Rio, em especial, a turma do café da sala 617, pelos momentos ímpares e felizes.

Aos meus professores que são parte da construção do meu caráter acadêmico e entusiasta pelo conhecimento.

Ao meu orientador, Prof. Ney Augusto Dumont, pelo conhecimento e ensinamentos transmitidos ao longo do desenvolvimento deste trabalho, e, também, por contribuir com a minha formação crítica no desenvolvimento da ciência.

E ao CNPq e à PUC-Rio pelos auxílios concedidos, sem os quais esta dissertação não poderia ter sido realizada.

Resumo

Sales, Renan Costa; Dumont, Ney Augusto. **Implementação de elementos finitos híbridos planos para a análise de placas e cascas finas ou moderadamente espessas**. Rio de Janeiro, 2018. 89p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A formulação híbrida dos elementos finitos, proposta por Pian, com base no princípio variacional de Hellinger-Reissner, mostrou-se uma ótima alternativa para a construção de elementos finitos eficientes que atendessem a condições tanto de compatibilidade como de equilíbrio. O potencial de Hellinger-Reissner consiste na aproximação de dois campos: um campo tensões que satisfaz, a priori, as equações diferenciais homogêneas de equilíbrio do problema, e um campo de deslocamentos que atende a compatibilidade ao longo do contorno. O conjunto de funções não-singulares que satisfazem as equações governantes de um problema é conhecido como soluções fundamentais ou soluções de Trefftz, e é a base para a interpolação do campo de tensões no método híbrido de elementos finitos. O presente trabalho apresenta uma metodologia geral para a formulação de uma família de elementos finitos híbridos poligonais de membrana para problemas de elasticidade bidimensional, assim como elementos finitos híbridos simples e eficientes para análise numérica de problemas de placa de Kirchhoff e Mindlin-Reissner. Algumas contribuições conceituais são introduzidas nas soluções fundamentais para a correta concepção dos elementos híbridos em problemas de placa espessa. O desempenho dos elementos é avaliado através de alguns exemplos numéricos, os quais os resultados são confrontados com os de outros elementos encontrados na literatura.

Palavras-chave

Elementos finitos híbridos; elementos de placa e casca; teoria de Kirchhoff; teoria de Mindlin-Reissner;

Abstract

Sales, Renan Costa; Dumont, Ney Augusto (Advisor). **Implementation of plane hybrid finite elements for the analysis of thin or moderately thick plates and shells**. Rio de Janeiro, 2018. 89p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental , Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The hybrid finite element formulation, proposed by Pian, on the basis of the Hellinger-Reissner variational principle, has proved to be a good alternative for the development of efficient finite elements that best attend compatibility and equilibrium conditions. The Hellinger-Reissner potential assumes two trial fields: a stress field that satisfies the equilibrium homogenous differential equation in the domain and a displacement field that attends the compatibility along the boundary. The set of nonsingular functions that satisfy the governing equations of the problem is known as Trefftz or fundamental solutions. This work presents a general methodology for the formulation of a family of polygonal hybrid elements for plane strain problems, as well as simple and efficient plate elements for the numerical evaluation of Kirchhoff and Mindlin-Reissner plate problems. Conceptual approaches are introduced for the correct use of fundamental solutions in the plate elements formulation. The performance of the proposed hybrid elements is assessed by means of several numerical examples from the literature.

Keywords

Hybrid finite elements; plate and shell elements; Kirchhoff theory; Mindlin-Reissner theory;

Sumário

1	Introdução	14
1.1	Apresentação do problema	14
1.2	Breve histórico sobre a formulação híbrida para elementos de placa	14
1.3	Objetivos	17
1.4	Estrutura do trabalho	18
2	Conceitos teóricos	19
2.1	Conceitos de teoria da elasticidade	19
2.2	Teoria de placas	21
2.2.1	Conceitos teóricos da teoria de Mindlin-Reissner	21
2.2.1.1	Equações de equilíbrio no elemento infinitesimal de placa	22
2.2.1.2	Avaliação consistente da deformação cisalhante	24
2.2.1.3	Equações governantes do problema geral de placa	25
2.3	Método híbrido dos elementos finitos	27
2.3.1	Soluções fundamentais	27
2.3.2	Potencial de Hellinger-Reissner	28
2.3.3	Formulação do método híbrido dos elementos finitos	29
2.3.3.1	Formulação do potencial de Hellinger-Reissner para o caso de soluções não-singulares	29
2.3.3.2	Particularização do potencial de Hellinger-Reissner para o problema de placas	32
2.3.3.3	Propriedades espectrais das matrizes H e F	34
3	Soluções fundamentais não-singulares	36
3.1	Elastostática	36
3.2	Problema geral de placas	39
3.3	Solução particular associada a carregamento uniformemente distribuído em problemas de placa	42
4	Formulação dos elementos híbridos	43
4.1	Elemento híbrido triangular de deformação constante - HELMT3	44
4.1.1	Formulação do problema	44
4.1.2	Matriz de rigidez do elemento	45
4.2	Elemento híbrido quadrilateral - HELMQ4	48
4.2.1	Formulação do problema	48
4.2.2	Matriz de rigidez do elemento	48
4.3	Elementos de placa de Kirchhoff	50
4.3.1	Elemento híbrido triangular de placa de Kirchhoff - HKPT6	50
4.3.1.1	Formulação do problema	50
4.3.1.2	Matriz de rigidez do elemento	51
4.3.2	Elemento híbrido quadrangular de placa de Kirchhoff - HKPQ8	55
4.3.2.1	Formulação do problema	55
4.3.2.2	Matriz de rigidez do elemento	55
4.4	Elementos de placa de Mindlin-Reissner	57

4.4.1	Elemento híbrido triangular de placa de Mindlin-Reissner - HMPT6	57
4.4.1.1	Formulação do problema	57
4.4.1.2	Matriz de rigidez do elemento	57
4.4.2	Elemento híbrido quadrilateral de placa de Mindlin-Reissner - HMPQ8	57
4.4.2.1	Formulação do problema	57
4.4.2.2	Matriz de rigidez do elemento	58
5	Avaliação numérica	59
5.1	Elementos de membrana	59
5.1.1	Avaliação dos autovalores e suficiência de posto	59
5.1.2	<i>Patch test</i> para problemas de elasticidade plana	60
5.1.3	Exemplos numéricos para os elementos de membrana	65
5.1.3.1	Viga engastada sob carregamento axial uniformemente distribuído na extremidade livre	65
5.1.3.2	Viga engastada com momento aplicado na extremidade livre	66
5.1.3.3	Problema da membrana de Cook	68
5.2	Elementos híbridos de placa	69
5.2.1	Avaliação dos autovalores e suficiência de posto	69
5.2.2	<i>Patch test</i> para problemas de placas	70
5.2.3	Exemplos numéricos para os elementos de placa	73
5.2.3.1	Placa quadrada simplesmente apoiada sob carregamento uniformemente distribuído	74
5.2.3.2	Placa quadrada simplesmente apoiada com carregamento pontual centrado	76
5.2.3.3	Placa esconsa simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído	77
6	Conclusão	83
6.1	Sugestões para trabalhos futuros	83
	Referências bibliográficas	85

Lista de figuras

Figura 2.1	Corpo elástico.	20
Figura 2.2	Sentido das rotações β_x e β_y .	22
Figura 2.3	Esquema para obtenção das equações de equilíbrio da placa.	23
2.3(a)	Elemento infinitesimal de placa.	23
2.3(b)	Seção do elemento infinitesimal de placa para equilíbrio no contorno.	23
Figura 2.4	Plano de referência da placa sujeita a rotações no plano, dadas por dh_{xz} e dh_{yz} .	25
Figura 2.5	Gráfico da energia interna de um corpo elastico.	29
Figura 3.1	Compatibilidade das deformações cisalhantes no elemento infinitesimal de placa.	41
Figura 4.1	Geometria do elemento HELMT3 em termos das projeções e graus de liberdade nodais.	44
Figura 4.2	Contorno de um trecho Γ_i do elemento triangular, com indicação da direção dos graus de liberdade e da normal.	46
Figura 4.3	Elemento HELMQ4 para elasticidade plana com 4 nós e 8 GDL.	49
Figura 4.4	Sentido dos deslocamentos e rotações no sistema local de coordenadas do elemento.	50
Figura 4.5	Contorno do elemento de placa com indicação dos graus de liberdade e direção da normal no contorno	53
Figura 4.6	Contorno do elemento de placa com indicação dos graus de liberdade e direção da normal no contorno	54
Figura 4.7	Elemento híbrido de placa HKPQ8.	56
Figura 5.1	Geometria dos elementos irregulares HELMT3 e HELMQ4 para análise dos autovalores.	59
5.1(a)	Elemento irregular HELMT3	59
5.1(b)	Elemento irregular HELMQ4	59
Figura 5.2	Autovalores do elemento irregular HELMT3 para diferentes valores de ν .	60
Figura 5.3	Autovalores do elemento irregular HELMQ4 para diferentes valores de ν .	61
Figura 5.4	Malha para aplicação do segundo <i>patch test</i> nos elementos de membrana.	62
5.4(a)	Malha para elemento HELMQ4	62
5.4(b)	Malha adaptada para elementos triangulares	62
Figura 5.5	Malha para <i>patch test</i> com o elemento HELMP5.	64
Figura 5.6	Geometria da viga engastada livre sob carregamento axial uniformemente distribuído na extremidade livre.	65
Figura 5.7	Exemplo da discretização da viga em elementos HELMT3 e HELMQ4.	66

5.7(a)Malha 32×2 de elementos HELMT3	66
5.7(b)Malha 32×2 de elementos HELMQ4	66
Figura 5.8 Malha para <i>patch test</i> em elemento HELMP5.	67
Figura 5.9 Discretização da malha 8×2 em elementos HELMT3 e HELMQ4.	67
5.9(a)Malha 8×2 de elementos HELMT3	67
5.9(b)Malha 8×2 de elementos HELMQ4	67
Figura 5.10 Comparação do desempenho dos elementos HELMT3 e HELMQ4 com outros elementos encontrados na literatura, no segundo exemplo numérico.	68
Figura 5.11 Membrana de Cook.	69
Figura 5.12 Discretização do problema de Cook.	70
5.12(a) Malha 16×16 de elementos HELMT3	70
5.12(b) Malha 16×16 de elementos HELMQ4	70
Figura 5.13 Resultados dos deslocamentos da membrana de Cook.	71
Figura 5.14 Geometria dos elementos irregulares HELMT3 e HELMQ4 para análise de autovalores.	72
5.14(a) HKPT6.	72
5.14(b) HKPQ8 e HMPQ8.	72
Figura 5.15 Análise dos autovalores dos elementos HKPT6, HKPQ8 e HMPQ8.	73
Figura 5.16 Malha para avaliação dos elementos de placa quanto aos estados de curvatura constante.	74
5.16(a) Malha com elementos triangulares.	74
5.16(b) Malha com elementos quadriláteros.	74
Figura 5.17 Placa quadrada simplesmente apoiada.	75
Figura 5.18 Exemplos de discretização da malha para placa quadrada 8×8 .	75
5.18(a) HKPT6.	75
5.18(b) HKPQ8 e HMPQ8.	75
Figura 5.19 Comparação do desempenho dos elementos para deslocamento central na placa simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído.	79
5.19(a) Relação $t/L = 0.10$	79
5.19(b) Relação $t/L = 0.001$	79
Figura 5.20 Comparação do desempenho dos elementos para momento central na placa simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído.	80
5.20(a) Relação $t/L = 0.10$	80
5.20(b) Relação $t/L = 0.001$	80
Figura 5.21 Resultados para o deslocamento máximo na placa	81
Figura 5.22 Resultados para reação no canto da placa.	81
Figura 5.23 Geometria da placa esconsa simplesmente apoiada.	81
Figura 5.24 Exemplo do refinamento 4×4 para a placa esconsa.	82
5.24(a) HKPT6.	82
5.24(b) HKPQ8 e HMPQ8.	82

Figura 5.25 Comparação do desempenho dos elementos para deslocamento máximo em placa esbessa simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído. ($t/L = 0.010$).

82

Lista de tabelas

Tabela 4.1	Convenção dos sinais para o grau de liberdade de rotação do sistema local para sistema global.	55
Tabela 5.1	Solução do <i>patch test</i> para as malha da Fig. 5.4 nos elementos HELMT3 e HELMQ4.	63
Tabela 5.2	Avaliação dos autovalores e dos modos espúrios de um elemento híbrido regular HELMP5	63
Tabela 5.3	Resultado dos deslocamentos obtidos para a viga engastada com carregamento axial.	66
Tabela 5.4	Resultado dos deslocamentos obtidos para a viga engastada com momento aplicado na extremidade livre.	67
Tabela 5.5	Resultado das forças nos nós internos para <i>patch test</i> de curvatura constante	73
Tabela 5.6	Deslocamento e momentos no centro da placa simplesmente apoiada sob carregamento uniformemente distribuído com $t = 1$ e $t = 0.01$	76
Tabela 5.7	Deslocamento máximo e reação no canto da placa quadrada simplesmente apoiada sob carregamento pontual centrado para $t/L = 0.10$.	77
Tabela 5.8	Deslocamento máximo da placa esbessa simplesmente apoiada sob carregamento uniformemente distribuído para $t/L = 0.010$.	78

Lista de Abreviaturas

CST – *Constant Strain Triangle*

DKT – *Discrete Kirchhoff Triangle*

DST – *Discrete Shear Triangle*

GDL – grau(s) de liberdade

HELMT3 – elemento triangular híbrido com 6 GDL

HELMQ4 – elemento quadrilateral híbrido com 8 GDL

HELMP5 – elemento pentagonal híbrido com 10 GDL

HKPT6 – elemento triangular híbrido de placa de Kirchhoff com 6 GDL

HKPQ8 – elemento quadrilateral híbrido de placa de Kirchhoff com 8 GDL

HMPQ8 – elemento quadrilateral híbrido de placa de Mindlin-Reissner com 8 GDL

1 Introdução

1.1 Apresentação do problema

1.2 Breve histórico sobre a formulação híbrida para elementos de placa

Desde o início da era computacional e dos estudos sobre elementos finitos na década de 50, uma série de trabalhos foi desenvolvida para elementos de placa. Dentre os elementos baseados na formulação dos métodos dos deslocamentos (formulação convencional de elementos finitos), pode-se destacar os elementos triangulares de placa propostos por Bazeley et al [1] utilizando soluções conformes e não-conformes. Veubeke [2] propôs em 1968 um elemento com 16 graus de liberdade (GDL) formado pela combinação de campos de deflexão cúbica em quatro regiões triangulares delimitadas pelas bordas de um elemento quadrilátero e suas diagonais. Neste elemento, a continuidade das deflexões e rotações na interface foi satisfeita, e boa convergência foi obtida nos resultados. Outros elementos de placa baseados no método dos deslocamentos são: DKT (da sigla em inglês, *Discrete Kirchhoff Triangle*) proposto por Batoz et al [3] e o elemento de placa de momentos constantes, desenvolvido por Morley [4].

Apesar da boa convergência dos resultados, os elementos baseados em deslocamentos frequentemente apresentavam problemas de enrijecimento na situação limite em que a espessura da placa espessa tende a ser fina. Como forma de evitar este problema, o uso de integração numérica reduzida foi utilizado por diversos autores [1]. Contudo, isto não garantia a suficiência de posto da matriz de rigidez.

Uma forma alternativa para a construção de elementos livres de travamento foi proposta por Pian e Lee [5] em 1978 com o uso de um princípio variacional híbrido, especificamente o potencial de Hellinger-Reissner, para a formulação de elementos de placa e casca. Os autores propuseram um elemento quadrilátero curvo (24 GDL) e um elemento triangular curvo (18 GDL). Vale mencionar que antes de Pian e Lee [5], Jirousek e Leon [6] em 1977 apresen-

taram uma forma geral de obtenção de elementos poligonais de placa a partir do método variacional de Trefftz.

Um elemento híbrido quadrilátero, QHI, do tipo *serendipity* com 8 nós para problemas de placa espessa e delgada foi desenvolvido por Munir e Spilker [7]-[8] em 1980. Como forma de evitar modos espúrios e o travamento, os autores utilizaram 22 soluções polinomiais que satisfaziam as equações diferenciais tridimensionais de equilíbrio do problema de placa.

Na década de 80, um conjunto de elementos híbridos foi desenvolvido a partir do princípio variacional de Hellinger-Reissner. Em 1982, Tong [9] formulou uma família de elementos triangulares com distribuição de momento constante, linear e quadrático no domínio. Ainda neste mesmo ano, os elementos quadriláteros PLAT8 (elemento *serendipity*) e PLAT8H, com aproximação das deformações cisalhantes independentes dos deslocamentos e das demais deformações, foram propostos como um meio de evitar o travamento. Os parâmetros que regiam as funções lineares para a deformação cisalhante, contudo, quando admitiam pequenos valores ainda exibiam modos espúrios e havia presença do efeito de travamento. Inspirado nestes elementos, PLAT8 e PLAT8H, Lee e Zhang [10] em 1985 desenvolveram, também, um elemento triangular com aproximação da deformação cisalhante independente.

Uma grande contribuição na formulação híbrida de placa com base na formulação de Trefftz foi o conjunto de elementos propostos por Jirousek e Guex [11] em 1986 para problemas de flexão de placas, e problemas particulares, como no caso de singularidades nos cantos e placas com furos circulares. Em 1987, um eficiente elemento híbrido quadrilátero, HMPL5, para problemas tanto de placa espessa como delgada foi sugerido por Saleeb e Chang [12] com base, novamente, no princípio de Hellinger-Reissner. Este elemento tem 5 nós com 3 GDL por nó, sendo quatro no canto e um nó interno. Porém, este nó interno é eliminado por condensação estática, resultando o total de 12 GDL no elemento. Como forma de evitar o travamento, o número de funções para aproximação do campo de tensões foi estabelecido a partir do índice de restrições (do inglês, *constrained index*) proposto por Malkus e Hughes [13] em 1978. Este índice é definido por $c_i = n_k - n_c$, onde n_k é o número de GDL acrescentados por um elemento quando adicionado a uma malha existente de elementos finitos, e n_c é o número de restrições aplicadas em situações limite, como é o caso do problema de placa fina. Assim, para que o modelo seja livre de travamento, o índice de restrição deve ser $c_i \geq 1$.

Ainda no final da década de 80, Batoz e Lardeur [14] desenvolveram o elemento triangular DST (da sigla em inglês, *Discrete Shear Triangle*), para problemas de Mindlin-Reissner, como uma generalização do conhecido

elemento DKT. Uma interessante característica deste elemento é que à medida que o efeito cisalhante pode ser negligenciado, o elemento DST tende ao elemento DKT [14].

Em 1990, Petrolito [15] elaborou um conjunto de elementos quadriláteros para problemas de placa espessa, utilizando as soluções de Trefftz para a aproximação do campo de tensões nos elementos. Estas soluções satisfazem a equação biarmônica do problema e, como será mostrado posteriormente nesta dissertação, estas soluções atendem as condições de equilíbrio do problema. A interpolação do contorno é feita utilizando funções quadráticas e cúbicas. Para incluir o efeito cisalhante, duas funções relacionadas com as derivadas do laplaciano são acrescentadas às expressões de rotação. A mesma conclusão para estas funções pode ser obtida, de uma forma mais consistente, simplesmente adotando $\Psi = 0$, como será visto no Capítulo 2 deste trabalho. Apesar da construção, supostamente consistente e robusta utilizada por Petrolito, alguns elementos apresentaram modos espúrios na matriz de rigidez. Além disto, por Petrolito não ter feito uso de polinômios completos nas soluções fundamentais, a convergência exata da solução não é garantida em geral [16].

Desta forma, Jirousek et al [16] em 1995 apresentaram um conjunto de elementos com polinômios completos na aproximação do campo de tensões. Além das soluções fundamentais, dadas pela solução da equação biarmônica, soluções de Bessel modificadas de primeira espécie, inerentes à contribuição da deformação cisalhante, são utilizadas. Entretanto, essas soluções de Bessel levam a resultados divergentes ou convergentes para uma solução próxima da exata, além de serem soluções de difícil integração numérica. Um breve estudo sobre o limite para placa espessa e fina e o comportamento dessas soluções de Bessel será apresentado no Capítulo 3 deste trabalho.

Uma interessante contribuição foi feita por Piltner [17] em 1992 com modificações das equações do problema para incluir os efeitos de empenamento em um elemento híbrido baseado na formulação tridimensional de placa. Outras contribuições da década de 90 foram desenvolvidas por Auricchio e Taylor [18], com o elemento T3-2LIM, em que utilizam funções de interpolação tipo bolha para o campo de deslocamento; e os elementos quadriláteros formulados por Pereira e Freitas [19], em que polinômios de Legendre foram utilizados para aproximação dos campos de tensões nos elementos. Contudo, os elementos formulados apresentaram pouca sensibilidade a mudanças na espessura, e baixa convergência com o aumento da razão de distorção.

Os recentes trabalhos sobre elementos híbridos de placa se concentraram bastante no aprimoramento dos elementos já desenvolvidos, com destaque para os elementos MiSP3+ [20], $9\beta Q4$ [21] e, THT-7 e QHT-11 [22]. Sobre estes dois

últimos elementos, como modo de encontrar funções de forma no contorno que comportassem como a viga de Timoshenko, os autores [22] fizeram o uso das próprias funções de forma da viga de Timoshenko na interpolação ao longo do contorno, e para o campo de tensões fizeram o uso das soluções da equação biharmônica. Isto garantiu precisão e convergência dos resultados numéricos. No entanto, os elementos tinham baixa sensibilidade às distorções da malha. Essas funções de interpolação de Timoshenko ao longo do contorno foram empregadas, também, na formulação de elementos híbridos triangulares com 6 nós, TH6-15 β e TH6-27 β [23]. Os dois elementos são têm muitos graus de liberdade com um total de 18 GDL, e se distinguem entre si pelo número de soluções utilizadas para aproximar o campo de tensões. O comportamento nas avaliações numéricas do elemento TH6-27 β foi bastante satisfatório, sem a presença de travamento ou modos espúrios, além de ótima convergência dos resultados, diferentemente do elemento TH6-15 β que apresentou convergência lenta e 2 modos espúrios.

1.3

Objetivos

Em vista da série de elementos de placa apresentados, e como forma de obter os elementos mais simples de placa, este trabalho visa a:

1. Desenvolver uma metodologia geral para obtenção de elementos híbridos poligonais de membrana para problemas na elastostática, mas que sejam aplicáveis a problemas dinâmicos no domínio da frequência, assim como desenvolvido por Dumont e Prazeres [24]–[25].
2. Desenvolver uma formulação simples para construção de elementos híbridos não-conformes mais simples possíveis para problemas de Kirchhoff e Mindlin-Reissner no caso estático, mas que permitam, também, a representação no domínio da frequência;
3. Avaliar o desempenho dos elementos híbridos desenvolvidos em comparação com outros obtidos na literatura;
4. Apresentar a construção de elementos de cascas simples a partir da combinação dos elementos híbridos de membrana e de placas obtidos no trabalho.

1.4

Estrutura do trabalho

Esta dissertação é dividida em seis capítulos: *Introdução*, *Revisão bibliográfica*, *Soluções fundamentais não-singulares*, *Formulação dos elementos híbridos*, *Avaliação numérica* e *Conclusão*.

No Capítulo 1, *Introdução*, são apresentados os objetivos deste trabalho e um breve histórico sobre as formulações convencional e híbrida de elementos finitos em problemas de placa.

No Capítulo 2, *Revisão bibliográfica*, os conceitos básicos de elasticidade e placa, segundo a teoria de Kirchhoff e Mindlin-Reissner, são discutidos. Além disso, o princípio variacional de Hellinger-Reissner é apresentado, e a formulação híbrida de elementos é desenvolvida, com a particularização para problemas gerais de placa.

No Capítulo 3, *Soluções fundamentais não-singulares*, são obtidas as soluções fundamentais que satisfazem as equações diferenciais governantes dos problemas para elasticidade plana e de placa.

No Capítulo 4, *Formulação dos elementos híbridos*, é apresentada a formulação geral para o desenvolvimento de elementos poligonais para problemas de membrana e de placa. Os seguintes elementos híbridos são desenvolvidos: HELMT3, HELMQ4, HKPT6, HKPQ8, HMPT6 e HMPQ8.

No Capítulo 5, *Avaliação numérica*, a convergência e o desempenho numérico dos elementos híbridos desenvolvidos no Capítulo 4 são testados e comparados com os resultados de outros elementos encontrados na literatura.

No Capítulo 6, *Conclusão*, são descritas as conclusões obtidas no desenvolvimento e na avaliação dos elementos. Além disso, são apresentadas algumas sugestões para trabalhos futuros.

2

Conceitos teóricos

Neste capítulo são apresentados os conceitos da teoria da elasticidade, da teoria de placas de Kirchhoff e Mindlin-Reissner e os fundamentos da formulação híbrida de elementos finitos.

2.1

Conceitos de teoria da elasticidade

A teoria da elasticidade consiste no estudo da resposta, em tensões e deformações, de sólidos sujeitos a carregamentos prescritos estáticos ou dinâmicos [26]. As equações básicas da teoria da elasticidade são: a equação de equilíbrio, a equação de compatibilidade e a relação constitutiva do material. A solução de um problema de elasticidade deve atender as equações básicas acima e, também, satisfazer as condições de contorno do problema, tanto em termos de forças prescritas como deslocamentos prescritos.

A abordagem dos conceitos de elasticidade pode ser entendida a partir de um sistema global de coordenadas, o qual engloba os deslocamentos u_i e as forças relacionadas f_i que atuam no domínio do corpo Ω^t , assim como as forças de superfície t_i que atuam no contorno do corpo Γ . Usa-se também um sistema infinitesimal local em que se descrevem as deformações ϵ_{ij} e as tensões σ_{ij} atuantes no corpo. No desenvolvimento a seguir, os índices i e j assumem os valores 1, 2 e 3 e se referem às coordenadas cartesianas x , y e z . Índices repetidos indicam somatório.

Seja um corpo elástico submetido a forças de corpo b_i no domínio Ω^t , a forças de superfície \bar{t}_i no contorno Γ_σ e a deslocamentos \bar{u}_i no contorno complementar Γ_u (Vide Fig. 2.1). As equações de equilíbrio que relacionam as forças, referenciadas no sistema global de coordenadas, com as tensões, referenciadas no sistema local são:

$$\sigma_{ji,j} + b_i = 0 \quad \text{em } \Omega^t \quad (2-1)$$

$$\sigma_{ji} = \sigma_{ij} \quad \text{em } \Omega^t \quad (2-2)$$

$$\sigma_{ij}\eta_j = \bar{t}_i \quad \text{em } \Gamma_\sigma \quad (2-3)$$

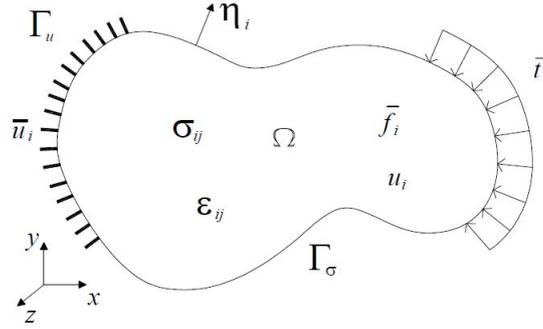


Figura 2.1: Corpo elástico.

Analogamente, a equação de compatibilidade que relaciona o deslocamento u_i , no sistema global, com as deformações ϵ_{ij} no sistema local, é:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{em } \Omega^t \quad (2-4)$$

Tem-se também a equação de compatibilidade no contorno:

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2-5)$$

As tensões e deformações relacionam-se a partir da equação de compatibilidade por meio do tensor elástico C_{ijkl} :

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \equiv C_{ijkl} u_{k,l} \quad (2-6)$$

O tensor elástico C_{ijkl} tem as propriedades de simetria $C_{ijkl} = C_{jilk}$, $C_{ijkl} = C_{ijlk}$ e $C_{ijkl} = C_{klij}$. No nosso estudo, C_{ijkl} corresponderá a um material linearmente elástico, isotrópico e homogêneo. Assim, C_{ijkl} pode ser expresso como:

$$C_{ijkl} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + G(\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (2-7)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson, G é o módulo de elasticidade transversal, e δ_{ij} corresponde ao delta de Kronecker, dado por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2-8)$$

A introdução das Eqs. (2-4) e (2-7) na Eq. (2-6) conduz à conhecida equação de Navier da elasticidade:

$$G u_{i,kk} + \frac{G}{1-2\nu} u_{k,ki} + b_i = 0 \quad (2-9)$$

Vale mencionar que a equação de Navier corresponde, para problemas bidimensionais de elasticidade, ao problema no estado plano de deformações, ou seja, com $\epsilon_{xz} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zz} = 0$.

As equações acima podem também ser expressas em termos do módulo de elasticidade longitudinal ou módulo de Young, E , valendo a relação $E = 2G(1 + \nu)$.

2.2

Teoria de placas

Nesta seção é apresentada a formulação das equações que governam o problema de placa para as teorias de Kirchhoff e Mindlin-Reissner. Sabendo que a teoria de Mindlin-Reissner pode ser vista como uma generalização, para placas espessas, da teoria de Kirchhoff, a descrição matemática do comportamento da placa de Kirchhoff, neste tópico, será abordada como um caso particular da teoria de Mindlin-Reissner.

2.2.1

Conceitos teóricos da teoria de Mindlin-Reissner

Uma placa é definida como um elemento estrutural que tem suas dimensões muito grandes comparadas com sua espessura, e, devido a isto, normalmente não é necessário defini-las utilizando equações da elasticidade tridimensional [27]–[28]. Assim, seja um elemento de placa em um sistema cartesiano (x, y, z) . O domínio total Ω^t do elemento é definido neste sistema como $\Omega^t = \{(x, y, z) \in \mathfrak{R}^3 \in [-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}], (x, y) \in \Omega \in \mathfrak{R}^2\}$, onde Ω corresponde à área da placa e t é a sua espessura.

Na teoria de placas de Mindlin-Reissner, três premissas são introduzidas para descrição desta teoria:

- (i) As normais à superfície média da placa antes da deformação permanecem retas após a deformação, mas não necessariamente normais a ela;
- (ii) A tensão σ_{zz} na direção normal da superfície média tem seu efeito desprezado;
- (iii) As deformações ϵ_{zz} , ϵ_{xz} e ϵ_{yz} também são desprezadas.

De forma a definir as relações cinemáticas e constitutivas da placa, seja o seu campo de deslocamentos nas direções x , y e z , respectivamente, definidos como

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= z\beta_y \\ v(x, y, z) &= -z\beta_x \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (2-10)$$

onde β_x e β_y são rotações com respeito às direções x e y , respectivamente, conforme a Fig. 2.2. Portanto, as deformações para o problema de placa são expressas a partir deste campo de deslocamentos na Eq. (2-10) como

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= z\beta_{y,x} \\ \varepsilon_{yy} &= -z\beta_{x,y} \\ \gamma_{xy} &= z(\beta_{y,y} - \beta_{x,x})\end{aligned}\tag{2-11}$$

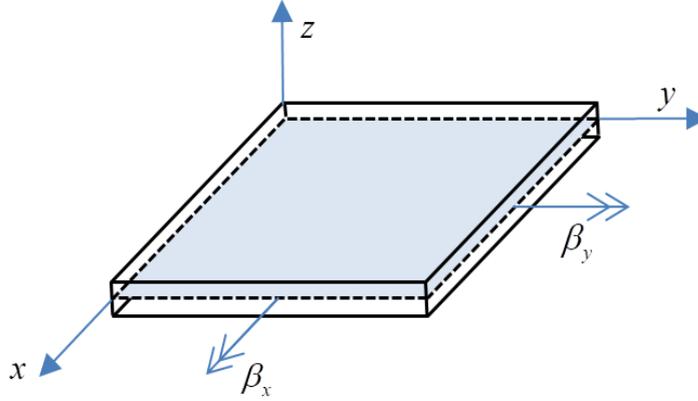


Figura 2.2: Sentido das rotações β_x e β_y .

Os termos equivalentes às deformações cisalhantes serão obtidas na seção 2.2.2.1, de forma consistente em termos de trabalhos virtuais.

2.2.1.1

Equações de equilíbrio no elemento infinitesimal de placa

Seja um elemento infinitesimal de placa sob carregamento genérico q distribuído, com as convenções de sinal para os momentos e forças definidas na Fig. 2.3.

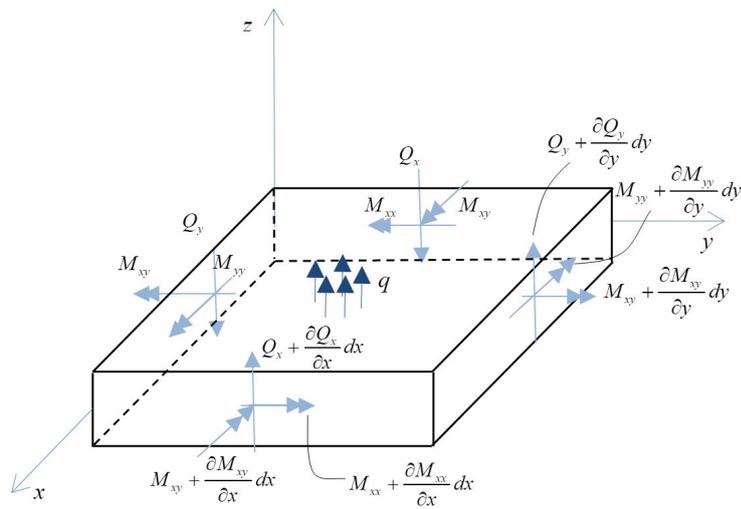
A partir do equilíbrio das forças nos elementos infinitesimais, Fig. 2.3, as relações de equilíbrio da placa no domínio (Ω) e no contorno (Γ) são obtidas por

$$\begin{aligned}M_{xx,x} + M_{yx,y} - Q_x &= 0 \\ M_{yy,y} + M_{xy,x} - Q_y &= 0 \\ Q_{y,y} + Q_{x,x} + q &= 0\end{aligned}\tag{2-12}$$

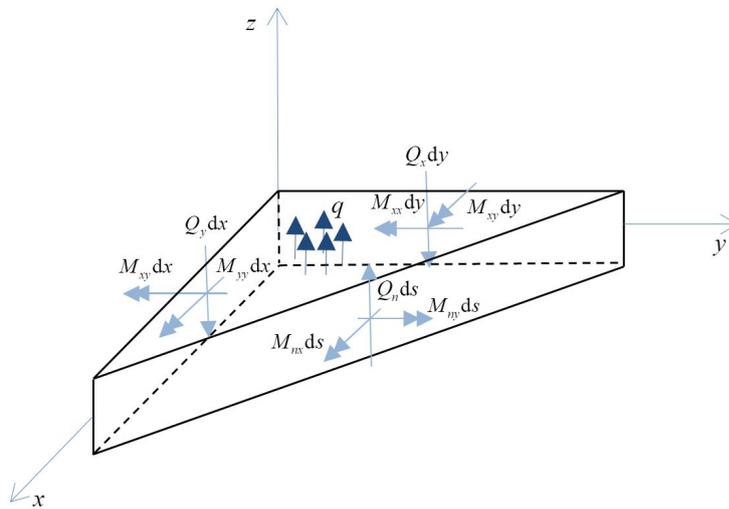
$$\begin{aligned}M_{nx} &= M_{xx}\eta_x + M_{xy}\eta_y \\ M_{ny} &= -M_{yy}\eta_y - M_{xy}\eta_x \\ Q_n &= Q_x\eta_x + Q_y\eta_y\end{aligned}\tag{2-13}$$

onde η_x e η_y são componentes do vetor normal. É interessante mencionar que estas mesmas relações de equilíbrio serão obtidas, posteriormente, a partir do potencial de Hellinger-Reissner.

A introdução das equações de elasticidade, Eqs. (2-6) e (2-11), para meio linearmente elástico, homogêneo e isotrópico, nas expressões de momentos



2.3(a): Elemento infinitesimal de placa.



2.3(b): Seção do elemento infinitesimal de placa para equilíbrio no contorno.

Figura 2.3: Esquema para obtenção das equações de equilíbrio da placa.

fornecem as seguintes relações entre momentos e curvaturas:

$$\begin{aligned}
 M_{xx} &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx} z dz = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-t/2}^{t/2} (\varepsilon_{xx} + \nu \varepsilon_{yy}) z dz = K (\beta_{y,x} - \nu \beta_{x,y}) \\
 M_{yy} &= \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yy} z dz = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-t/2}^{t/2} (\varepsilon_{yy} + \nu \varepsilon_{xx}) z dz = K (-\beta_{x,y} + \nu \beta_{y,x}) \\
 M_{xy} &= \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} z dz = G \int_{-t/2}^{t/2} \gamma_{xy} z dz = K(1-\nu)/2 (\beta_{y,y} - \beta_{x,x})
 \end{aligned}
 \tag{2-14}$$

onde $K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ é o módulo de rigidez à flexão da placa.

2.2.1.2

Avaliação consistente da deformação cisalhante

Como é necessária uma expressão consistente das forças e deformações cisalhantes, um estudo por meio da equação homogênea de equilíbrio de tensões $\sigma_{ji,j} = 0$ é realizado, com a introdução das relações constitutivas apresentadas na seção 2.1. Desta forma, as seguintes equações são obtidas:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx,x} + \tau_{xy,y} + \tau_{xz,z} &= 0 \\ \Rightarrow \tau_{xz,z} &= \frac{-Ez}{1-\nu^2} (\beta_{y,xx} - \nu\beta_{x,xy}) - Gz (\beta_{y,yy} - \beta_{x,xy}) \\ \Rightarrow \tau_{xz} &= \left[\frac{E}{1-\nu^2} (\beta_{y,xx} - \nu\beta_{x,xy}) + G (\beta_{y,yy} - \beta_{x,xy}) \right] \left(\frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right)\end{aligned}\quad (2-15)$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy,x} + \sigma_{yy,y} + \tau_{yz,z} &= 0 \\ \Rightarrow \tau_{yz,z} &= -\frac{Ez}{1-\nu^2} (-\beta_{x,yy} + \nu\beta_{y,xy}) - Gz (\beta_{y,xy} - \beta_{x,xx}) \\ \Rightarrow \tau_{yz} &= \left[\frac{E}{1-\nu^2} (-\beta_{x,yy} + \nu\beta_{y,xy}) + G (\beta_{y,xy} - \beta_{x,xx}) \right] \left(\frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right)\end{aligned}\quad (2-16)$$

$$\tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} + \sigma_{zz,z} = 0 \quad \text{efeito não considerado} \quad (2-17)$$

Nas Eqs. (2-15) e (2-16), a integração dos termos τ_{xz} e τ_{yz} com relação à direção z é realizada, com as constantes de integração determinadas de tal modo que $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ para $z = \pm t/2$. Ao introduzir as expressões de forças Q_x e Q_y , a partir das duas primeiras expressões de equilíbrio no domínio na Eq. (2-12), nas Eqs. (2-15) e (2-16), os termos τ_{xz} e τ_{yz} são reescritos como

$$\tau_{xz} = \frac{12}{t^3} \left(\frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) Q_x \quad (2-18)$$

$$\tau_{yz} = \frac{12}{t^3} \left(\frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right) Q_y \quad (2-19)$$

Os deslocamentos verticais $dh_{xz} = \gamma_{0xz} dx$ e $dh_{yz} = \gamma_{0yz} dy$ entre as faces de um elemento infinitesimal de placa devidos à deformação cisalhante são definidos em termos dos trabalhos virtuais como

$$\delta Q_x dh_{xz} dy = dx dy \int_{-t/2}^{t/2} \delta \tau_{xz} \frac{\tau_{xz}}{G} dz = \delta Q_x dx dy \frac{144 Q_x}{G t^6} \int_{-t/2}^{t/2} \left(\frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right)^2 dz = \delta Q_x dx dy \frac{6 Q_x}{5 G t} \quad (2-20)$$

$$\delta Q_y dh_{yz} dx = dx dy \int_{-t/2}^{t/2} \delta \tau_{yz} \frac{\tau_{yz}}{G} dz = \delta Q_y dx dy \frac{144 Q_y}{G t^6} \int_{-t/2}^{t/2} \left(\frac{t^2}{8} - \frac{z^2}{2} \right)^2 dz = \delta Q_y dx dy \frac{6 Q_y}{5 G t} \quad (2-21)$$

A partir de uma interpretação geométrica, é interessante perceber que $dh_{xz} dy$ e $dh_{yz} dx$ são as superfícies sombreadas na Fig. 2.4. Portanto,

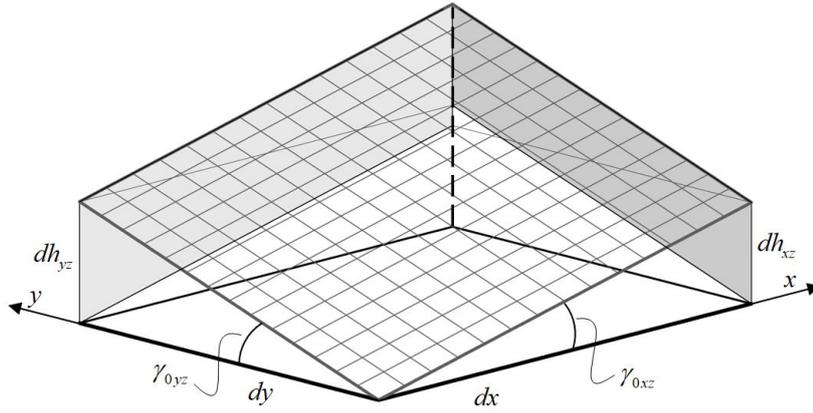


Figura 2.4: Plano de referência da placa sujeita a rotações no plano, dadas por dh_{xz} e dh_{yz} .

$$\begin{aligned}\gamma_{0xz} &= \frac{6 Q_x}{5 Gt} \equiv \frac{Q_x}{Gt_s} \\ \gamma_{0yz} &= \frac{6 Q_y}{5 Gt} \equiv \frac{Q_y}{Gt_s}\end{aligned}\quad (2-22)$$

onde t_s é a espessura efetiva da placa.

Como pode ser constatado, as únicas expressões consistentes das deformações cisalhantes transversais são γ_{0xz} e γ_{0yz} , Eq. (2-22), e foram obtidas em termos de trabalhos virtuais. Assim, por meio da Eq. (2-22), as expressões das forças cisalhantes Q_x e Q_y na placa são:

$$\begin{aligned}Q_x &= Gt_s \gamma_{0xz} \\ Q_y &= Gt_s \gamma_{0yz}\end{aligned}\quad (2-23)$$

2.2.1.3

Equações governantes do problema geral de placa

O problema de placa é regido por 8 equações e 8 variáveis: 5 forças generalizadas (M_{xx} , M_{yy} , M_{xy} , Q_x e Q_y) e 3 deslocamentos generalizados (β_x , β_y e w), segundo as Eqs. (2-12), (2-14) e (2-23). Como forma de reduzir este conjunto de equações para apenas 3 equações de deslocamentos, Marguerre [29] introduz os seguintes invariantes, dados pela combinação das derivadas das rotações:

$$\begin{aligned}\Phi &= \beta_{y,x} - \beta_{x,y} \\ \Psi &= \beta_{y,y} + \beta_{x,x}\end{aligned}\quad (2-24)$$

A primeira e a segunda expressões da Eq. (2-12) são introduzidas na terceira expressão, de forma a eliminar os termos Q_x e Q_y . Logo,

$$M_{xx,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{yy,yy} = -q \quad (2-25)$$

A substituição da Eqs. (2-14) e (2-23) na Eq. (2-25) conduz à primeira

das três equações governantes:

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{q}{K} \quad (2-26)$$

onde o termo $\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ é o laplaciano.

Para as duas últimas equações, primeiramente, são introduzidas as Eqs. (2-14) e (2-23) nas duas primeiras expressões da Eq. (2-12). Solucionando para $w_{,x}$ e $w_{,y}$, obtém-se

$$\gamma_{0xz} = \frac{K}{Gt_s} \left(\Phi_{,x} + \frac{1-\nu}{2} \Psi_{,y} \right) \quad (2-27)$$

$$\gamma_{0yz} = \frac{K}{Gt_s} \left(\Phi_{,y} - \frac{1-\nu}{2} \Psi_{,x} \right) \quad (2-28)$$

A partir de interpretações geométricas da diferença entre as rotações da placa e das derivadas dos deslocamentos,

$$\begin{aligned} \gamma_{0xz} &= \beta_y + w_{,x} \\ \gamma_{0yz} &= -\beta_x + w_{,y} \end{aligned} \quad (2-29)$$

obtém-se das Eqs. (2-27) e (2-28) as duas últimas equações governantes do problema em termos dos invariantes Φ e Ψ ,

$$\nabla^2 w = -\Phi - \frac{q}{Gt_s} \quad (2-30)$$

$$\Psi - \frac{K}{Gt_s} \frac{1-\nu}{2} \nabla^2 \Psi = 0 \quad (2-31)$$

Aplicando o laplaciano na Eq. (2-30) e introduzindo a Eq. (2-26), conduz à equação biarmônica que governa o problema de placa:

$$\nabla^4 w = \frac{q}{K} - \frac{\nabla^2 q}{Gt_s} \quad (2-32)$$

As relações constitutivas entre momentos e curvaturas, assim como entre forças e deformações, podem ser expressas matricialmente a partir das Eqs. (2-14) e (2-23),

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = K \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_{y,x} \\ -\beta_{x,y} \\ \beta_{y,y} - \beta_{x,x} \\ \Phi_{,x} + (1-\nu)/2 \Psi_{,y} \\ \Phi_{,y} - (1-\nu)/2 \Psi_{,x} \end{Bmatrix} \quad (2-33)$$

onde as rotações β_x e β_y são expressas a partir das Eqs. (2-28)–(2-29) como

$$\begin{aligned}\beta_x &= w_{,y} - \frac{K}{Gt_s} \left(\Phi_{,y} - \frac{1-\nu}{2} \Psi_{,x} \right) \\ \beta_y &= -w_{,x} + \frac{K}{Gt_s} \left(\Phi_{,x} + \frac{1-\nu}{2} \Psi_{,y} \right)\end{aligned}\quad (2-34)$$

No problema de Kirchhoff, a espessura t é pequena em presença das demais dimensões, tal que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{K}{Gt_s} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{5(1-\nu)} = 0$. Então, de acordo com as Eqs. (2-28), (2-27) e (2-31):

$$\beta_x - w_{,y} = 0 \quad (2-35)$$

$$\beta_y + w_{,x} = 0$$

$$\Psi = 0 \quad (2-36)$$

As expressões da Eq. (2-35) apresentam uma restrição geométrica na seção transversal da placa, característica da teoria de Kirchhoff, e semelhante ao observado na hipótese de Euler-Bernoulli para o caso de viga, isto é, uma reta normal à superfície média da placa antes da deformação permanece reta e normal após a deformação. Logo, a matriz constitutiva para a placa, segundo a teoria de Kirchhoff apresenta-se como:

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = K \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -w_{,xx} \\ -w_{,yy} \\ -2w_{,xy} \\ \Phi_{,x} \\ \Phi_{,y} \end{Bmatrix} \quad (2-37)$$

2.3

Método híbrido dos elementos finitos

2.3.1

Soluções fundamentais

Os campos de tensões e deslocamentos no domínio Ω^t de um corpo elástico podem ser definidos como a superposição de uma solução homogênea com uma solução particular:

$$\sigma_{ij}^s = \sigma_{ij}^* + \sigma_{ij}^b \quad (2-38)$$

$$u_i^s = u_i^* + u_i^b \quad (2-39)$$

Os superscritos (s), ($*$) e (b) referem-se a tensões totais, soluções homogêneas e solução particular, respectivamente. Na Eq. (2-38), σ_{ij}^b é uma solução particular de Eq. (2-1), tal que

$$\sigma_{ji,j}^b + b_i = 0 \quad \text{em } \Omega^t \quad (2-40)$$

A solução homogênea σ_{ij}^* é dada em termos de soluções fundamentais σ_{ijm}^* ,

$$\sigma_{ji,j}^* = \sigma_{jim,j}^* p_m^* = 0 \quad \text{em } \Omega^t \quad (2-41)$$

onde p_m^* são parâmetros nodais a determinar, os quais podem ou não ter um significado físico definido.

Como visto na Eq. (2-41) para o problema de elasticidade, as soluções fundamentais são um conjunto de funções de aproximação ou de interpolação de campo que satisfazem as equações de equilíbrio do problema no domínio, a priori, e são independentes do contorno [30].

Assim como no campo de tensões, o campo de deslocamentos u_i^* pode ser representado em termos dos parâmetros nodais de força p_m^* , a menos de constantes de corpo rígido, como

$$u_i^* = u_{im}^* p_m^* + u_{is}^r C_{sm} p_m^* \quad (2-42)$$

onde u_{im}^* é a solução fundamental em termos dos deslocamentos correspondente a σ_{ijm}^* , u_{is}^r são soluções arbitrárias correspondentes a deslocamentos de corpo rígido, e C_{sm} é uma matriz de constantes arbitrárias relacionadas aos modos de corpo rígido e aos parâmetros de força p_m^* [26].

As soluções fundamentais podem ser singulares ou não-singulares. As soluções singulares são bastante utilizadas na formulação dos métodos de elementos de contorno [30]. As soluções fundamentais não-singulares, também conhecidas como funções de Trefftz, serão utilizadas neste trabalho, como será visto a seguir.

2.3.2 Potencial de Hellinger-Reissner

A modelagem numérica de problemas de elasticidade para uma solução aproximada das Eqs. (2-1) a (2-6) pode ser obtida pelo potencial de Hellinger-Reissner, o que se baseia em dois campos: um de tensões σ_{ij} , que satisfaz homogeneamente as Eqs. (2-1) e (2-2) a priori, e um campo de deslocamentos u_i^d que satisfaz a Eq. (2-5). Consequentemente, o potencial de Hellinger-Reissner é mais geral do que o utilizado no método convencional de elementos finitos [31]:

$$-\Pi_{HR}(\sigma_{ij}^s, u_i^d) = \int_{\Omega^t} [U_0^C(\sigma_{ij}^s) + (\sigma_{ji,j}^s + b_i)u_i^d] d\Omega^t + \int_{\Gamma} (t_i - \sigma_{ji}^s \eta_j) u_i^d d\Gamma \quad (2-43)$$

O termo U_0^C diz respeito à densidade de energia de deformação complementar, que pode ser expressa em termos da densidade de energia de deformação U_0 na forma

$$\int_{\Omega^t} U_0^C(\sigma_{ij}^s) d\Omega^t = \int_{\Omega^t} \sigma_{ij}^s \epsilon_{ij}^s d\Omega^t - \int_{\Omega^t} U_0(\epsilon_{ij}^s) d\Omega^t \quad (2-44)$$

Esta relação pode ser visualizada na Fig. 2.5.

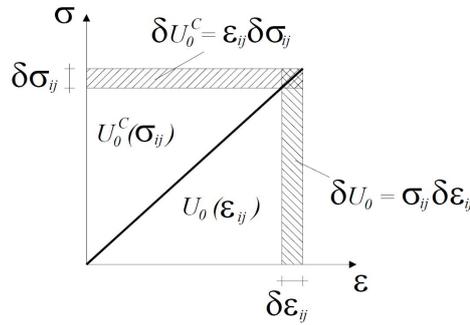


Figura 2.5: Gráfico da energia interna de um corpo elástico.

Este potencial levou ao desenvolvimento dos elementos finitos híbridos, inicialmente proposto por Pian em 1964 [32]-[33]. Posteriormente, em 1987, inspirado pelo trabalho de Pian, Dumont [34] propôs o método híbrido de elementos de contorno, no qual fez uso do potencial de Hellinger-Reissner e de soluções fundamentais singulares. Dumont e Prazeres [24] em 2004 apresentaram uma extensão para a formulação de elementos finitos híbridas nos moldes da formulação híbrida de elementos contorno, utilizando os conceitos de superposição modal avançada para a modelagem de elementos finitos híbridos de viga e treliça em problemas dinâmicos no domínio da frequência.

2.3.3

Formulação do método híbrido dos elementos finitos

Neste tópico, a partir do potencial de Hellinger-Reissner, Eq. (2-43), e da sua condição de estacionariedade, é desenvolvida a metodologia para construção de elementos híbridos com o uso de soluções não-singulares. Devido ao uso destas soluções, também conhecidas como funções de Trefftz ou soluções fundamentais, essa metodologia é, também, denominada como método de Trefftz.

2.3.3.1

Formulação do potencial de Hellinger-Reissner para o caso de soluções não-singulares

Seja o potencial de Hellinger-Reissner dado na Eq. (2-43). Com a introdução da expressão da densidade da energia de deformação complementar

$$U_0^C = \frac{1}{2} \int_{\Omega^t} \sigma_{ij}^s \epsilon_{ij}^s d\Omega^t, \text{ obtém-se}$$

$$-\Pi_{HR}(\sigma_{ij}^s, u_i^d) = \int_{\Omega^t} \left[\frac{1}{2}(\sigma_{ij}^s \epsilon_{ij}^s) + (\sigma_{ji,j}^s + b_i)u_i^d \right] d\Omega^t + \int_{\Gamma} (t_i - \sigma_{ji}^s \eta_j) u_i^d d\Gamma \quad (2-45)$$

A substituição das equações do campo de tensões e deslocamentos no Ω^t , Eqs. (2-38) e (2-39), respectivamente, na Eq. (2-45), com a posterior aplicação das equações de equilíbrio de tensões, Eqs. (2-40) e (2-41), leva a

$$-\Pi_{HR} = \frac{1}{2} \int_{\Omega^t} (\sigma_{ij}^* u_{i,j}^* + \sigma_{ij}^b u_{i,j}^b) d\Omega^t + \int_{\Omega^t} \sigma_{ij}^* u_{i,j}^b d\Omega^t + \int_{\Gamma} (t_i - \sigma_{ji}^* \eta_j - \sigma_{ji}^b \eta_j) u_i^d d\Gamma \quad (2-46)$$

Antes de iniciar a discretização numérica de Eq. (2-46), como modo de construir uma formulação em termos de integrais ao longo do contorno, é realizada a integração por partes e aplicação do teorema de Green aos primeiro e terceiro termos da Eq. (2-46), resultando

$$\begin{aligned} -\Pi_{HR} = & \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^* \eta_j u_i^* d\Gamma + \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^* \eta_j u_i^b d\Gamma + \int_{\Gamma} (t_i - \sigma_{ji}^* \eta_j - \sigma_{ji}^b \eta_j) u_i^d d\Gamma \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega^t} \sigma_{ij}^b u_{i,j}^b d\Omega^t \end{aligned} \quad (2-47)$$

A discretização numérica é feita pelas funções de interpolação das tensões σ_{ij}^* e dos deslocamentos u_i^* em termos dos parâmetros nodais de força p_m^* no domínio Ω^t , e pelos deslocamentos u_i^d ao longo do contorno do elemento, ou seja,

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ijm}^* p_m^* \quad (2-48)$$

$$u_i^* = u_{im}^* p_m^* \quad (2-49)$$

$$u_i^d = u_{in} d_n \quad (2-50)$$

onde u_{in} são funções de interpolação de deslocamentos, de modo análogo ao utilizado no método de elementos finitos, e d_m são parâmetros nodais de deslocamentos.

A substituição das Eqs. (2-48), (2-49) e (2-50) no potencial de Hellinger-Reissner, Eq. (2-47), conduz a

$$\begin{aligned} -\Pi_{HR} = & p_m^* \left[\int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* \eta_j \left(\frac{1}{2} u_{in}^* p_n^* + u_i^b - u_{in} d_n \right) d\Gamma \right] \\ & + \left[\int_{\Gamma} (t_i - \sigma_{ji}^b \eta_j) u_{in} d\Gamma \right] d_n + \frac{1}{2} \int_{\Omega^t} \sigma_{ij}^b u_{i,j}^b d\Omega^t \end{aligned} \quad (2-51)$$

Expressando a equação acima em notação matricial, e desconsiderando o termo $\int_{\Omega^t} \sigma_{ij}^b u_{i,j}^b d\Omega^t$, já que não apresenta variação e depende unicamente da solução particular, tem-se

$$\mathbf{\Pi}_{HR} = \mathbf{p}^{*\text{T}} \left(\frac{1}{2} \mathbf{F} \mathbf{p}^* - \mathbf{H} \mathbf{d} + \mathbf{b} \right) + \mathbf{d}^{\text{T}} (\mathbf{p} - \mathbf{p}^b) \quad (2-52)$$

em que \mathbf{F} é a matriz simétrica de flexibilidade que transforma os parâmetros

nodais de forças \mathbf{p}^* em deslocamentos nodais \mathbf{d}^* no sistema interno de coordenadas; \mathbf{H} é a matriz cinemática que transforma deslocamentos nodais \mathbf{d} do sistema externo de coordenadas em deslocamentos nodais equivalentes \mathbf{d}^* do sistema interno de coordenadas; \mathbf{b} é um vetor de deslocamentos nodais equivalentes às forças de corpo; \mathbf{p} são forças nodais equivalentes às forças atuantes na superfície do elemento; e \mathbf{p}^b são forças nodais equivalentes às forças de corpo. As expressões indiciais das matrizes e vetores descritos acima são:

$$[\mathbf{F}] = [F_{mn}] = \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* \eta_j u_{in}^* d\Gamma \quad (2-53)$$

$$[\mathbf{H}] = [H_{mn}] = \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* \eta_j u_{in} d\Gamma \quad (2-54)$$

$$[\mathbf{b}] = [b_m] = \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* \eta_j u_i^b d\Gamma \quad (2-55)$$

$$[\mathbf{p}] = [p_n] = \int_{\Gamma} t_i u_{in} d\Gamma \quad (2-56)$$

$$[\mathbf{p}^b] = [p_n^b] = \int_{\Gamma} \sigma_{ji}^b \eta_j u_{in} d\Gamma \quad (2-57)$$

A partir do princípio da estacionariedade do potencial de Hellinger-Reissner, obtém-se

$$-\delta \Pi_{\mathbf{HR}} = \delta \mathbf{p}^{*\text{T}} (\mathbf{F} \mathbf{p}^* - \mathbf{H} \mathbf{d} + \mathbf{b}) - \delta \mathbf{d}^{\text{T}} (\mathbf{H}^{\text{T}} \mathbf{p}^* + \mathbf{p}^b - \mathbf{p}) = 0 \quad (2-58)$$

Assim, para valores arbitrários de $\delta \mathbf{p}^*$ e $\delta \mathbf{d}$,

$$\mathbf{F} \mathbf{p}^* = \mathbf{H} \mathbf{d} - \mathbf{b} \quad (2-59)$$

$$\mathbf{H}^{\text{T}} \mathbf{p}^* = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \quad (2-60)$$

Solucionando \mathbf{p}^* na Eq. (2-59),

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{F}^{-1} (\mathbf{H} \mathbf{d} - \mathbf{b}) \quad (2-61)$$

Obtém-se juntamente com a Eq. (2-60),

$$\mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{p} - (\mathbf{p}^b - \mathbf{H}^{\text{T}} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{b}) \quad (2-62)$$

onde \mathbf{K} é a matriz simétrica de rigidez positiva semi-definida que transforma deslocamentos nodais em forças nodais equivalentes, dada por

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^{\text{T}} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H} \quad (2-63)$$

O uso das soluções não-singulares leva a uma matriz \mathbf{H} retangular com dimensões $n^s \times n^d$, onde n^s é o número de soluções fundamentais que completa um conjunto, em geral polinomial, para uma dada ordem, e n^d é o número de graus de liberdade do elemento [35]. A matriz \mathbf{F} tem dimensões $n^s \times n^s$, e

deve ser inversível. A integração das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{F} é obtida por quadratura de Gauss-Legendre, por exemplo, por conta dos componentes polinomiais das interpolações, conforme será visto adiante.

Para que a matriz de rigidez \mathbf{K} tenha o devido posto e não apresente modos espúrios, o número de soluções fundamentais deve ser definido tal que

$$n^s \geq n^d - n^r \quad (2-64)$$

onde n^r é o número de modos de corpo rígido do elemento.

2.3.3.2

Particularização do potencial de Hellinger-Reissner para o problema de placas

A expressão do potencial de Hellinger-Reissner descrito na Eq. (2-46) é repetida aqui por conveniência:

$$-\Pi_{HR} = \frac{1}{2} \int_{\Omega^t} (\sigma_{ij}^* u_{i,j}^* + \sigma_{ij}^b u_{i,j}^b) d\Omega^t + \int_{\Omega^t} \sigma_{ij}^* u_{i,j}^b d\Omega^t + \int_{\Gamma} (t_i - \sigma_{ji}^* \eta_j - \sigma_{ji}^b \eta_j) u_i^d d\Gamma \quad (2-46)$$

Com o desenvolvimento dos termos do potencial, conforme as relações entre momentos e forças com curvaturas e deformações, respectivamente, as seguintes expressões são obtidas:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega^t} \sigma_{ij}^* u_{i,j}^* d\Omega^t &\equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} [M_{xx}^* \beta_{y,x}^* - M_{yy}^* \beta_{x,y}^* + M_{xy}^* (\beta_{y,y}^* - \beta_{x,x}^*)] d\Omega \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} [Q_x^* (\beta_y^* + w_{,x}^*) + Q_y^* (-\beta_x^* + w_{,y}^*)] d\Omega \end{aligned} \quad (2-65)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega^t} \sigma_{ij}^b u_{i,j}^b d\Omega^t &\equiv \frac{1}{2} \int_{\Omega} [M_{xx}^b \beta_{y,x}^b - M_{yy}^b \beta_{x,y}^b + M_{xy}^b (\beta_{y,y}^b - \beta_{x,x}^b)] d\Omega \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} [Q_x^b (\beta_y^b + w_{,x}^b) + Q_y^b (-\beta_x^b + w_{,y}^b)] d\Omega \end{aligned} \quad (2-66)$$

$$\int_{\Gamma} t_i u_i^d d\Gamma \equiv \int_{\Gamma} [M_{nx} \beta_y^d + M_{ny} \beta_x^d + Q_n^* w^d] d\Gamma \quad (2-67)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \sigma_{ji}^* \eta_j u_i^d d\Gamma &\equiv \int_{\Gamma} [(M_{xx}^* \eta_x + M_{yx}^* \eta_y) \beta_y^d + (-M_{xy}^* \eta_x - M_{yy}^* \eta_y) \beta_x^d] d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma} [(Q_x^* \eta_x + Q_y^* \eta_y) w^d] d\Gamma \end{aligned} \quad (2-68)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \sigma_{ji}^b \eta_j u_i^d d\Gamma &\equiv \int_{\Gamma} [(M_{xx}^b \eta_x + M_{yx}^b \eta_y) \beta_y^d + (-M_{xy}^b \eta_x - M_{yy}^b \eta_y) \beta_x^d] d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma} [(Q_x^b \eta_x + Q_y^b \eta_y) w^d] d\Gamma \end{aligned} \quad (2-69)$$

A Eq. (2-29) foi usada na expressão dos termos sobre os quais os esforços cortantes Q_x e Q_y realizam trabalho nas Eqs. (2-66) e (2-67). A partir da integração por partes seguida da aplicação do teorema de Green, a Eq. (2-65) pode ser reformulada como

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega^t} \sigma_{ij}^* u_{i,j}^* d\Omega^t \equiv \\ & \int_{\Gamma} [(M_{xx}^* \eta_x + M_{yx}^* \eta_y) \beta_y^* + (-M_{xy}^* \eta_x - M_{yy}^* \eta_y) \beta_x^* + (Q_x^* \eta_x + Q_y^* \eta_y) w^*] d\Gamma \\ & + \int_{\Omega} [-(M_{xx,x}^* M_{xy,y}^* - Q_x^*) \beta_y^* + (M_{yy,y}^* + M_{xy,x}^* - Q_y^*) \beta_x^* + (-Q_{x,x}^* - Q_{y,y}^*) w^*] d\Omega \end{aligned} \quad (2-70)$$

Nota-se que o termo com integração no domínio Ω na Eq. (2-70) corresponde ao conjunto de equações de equilíbrio homogêneo para o problema de placa, equivalente à Eq. (2-12) para o problema geral de elasticidade. Portanto,

$$\begin{aligned} M_{xx,x}^* + M_{xy,y}^* - Q_x^* &= 0 \\ M_{yy,y}^* + M_{xy,x}^* - Q_y^* &= 0 \\ Q_{x,x}^* + Q_{y,y}^* &= 0 \end{aligned} \quad (2-71)$$

Assim, a Eq. (2-70) resulta em

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_{\Omega^t} \sigma_{ij}^* u_{i,j}^* d\Omega^t \equiv \\ & \int_{\Gamma} [(M_{xx}^* \eta_x + M_{yx}^* \eta_y) \beta_y^* + (-M_{xy}^* \eta_x - M_{yy}^* \eta_y) \beta_x^* + (Q_x^* \eta_x + Q_y^* \eta_y) w^*] d\Gamma \end{aligned} \quad (2-72)$$

Para uma formulação baseada apenas em integrais no contorno, de modo análogo ao feito na Eq. (2-65), é aplicada a integração por partes seguida do teorema de Green à Eq. (2-66). Desta forma, o potencial de Hellinger-Reissner é reescrito como

$$\begin{aligned} -\Pi_{HR} = & \int_{\Gamma} \left[(M_{xx}^* \eta_x + M_{yx}^* \eta_y) \left(\frac{1}{2} \beta_y^* + \beta_y^b - \beta_y^d \right) - (M_{xy}^* \eta_x + M_{yy}^* \eta_y) \left(\frac{1}{2} \beta_x^* + \beta_x^b - \beta_x^d \right) \right] d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma} \left[(Q_x^* \eta_x + Q_y^* \eta_y) \left(\frac{1}{2} w^* + w^b - w^d \right) \right] d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma} (M_{nx} - M_{xx}^b \eta_x - M_{yx}^b \eta_y) \beta_y^d + (M_{ny} + M_{xy}^b \eta_x + M_{yy}^b \eta_y) \beta_x^d d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma} (Q_n - Q_x^b \eta_x - Q_y^b \eta_y) w^d d\Gamma \end{aligned} \quad (2-73)$$

A discretização numérica do potencial de Hellinger-Reissner é realizada na forma:

$$\begin{aligned} M_{ij}^* &= M_{ijm}^* p_m^* \\ u_i^* &= u_{im}^* p_m^* \\ u_i^d &= u_{im}^d d_n \end{aligned} \quad (2-74)$$

Logo, pode-se expressar o potencial de Hellinger-Reissner na forma matricial

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_{\text{HR}} = & \mathbf{p}^{*\text{T}} \left(\underbrace{\frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathbf{N}^{*\text{T}} \mathbf{T}^{\text{T}} \mathbf{U}^* d\Gamma}_{\mathbf{F}} \mathbf{p}^* + \underbrace{\int_{\Gamma} \mathbf{N}^{*\text{T}} \mathbf{T}^{\text{T}} \mathbf{u}^b d\Gamma}_{\mathbf{b}} - \underbrace{\int_{\Gamma} \mathbf{N}^{*\text{T}} \mathbf{T}^{\text{T}} \mathbf{N} d\Gamma}_{\mathbf{H}} \mathbf{d} \right) \\ & + \mathbf{d}^{\text{T}} \left(\underbrace{\int_{\Gamma} \mathbf{N}^{\text{T}} \mathbf{m}_n d\Gamma}_{\mathbf{p}} - \underbrace{\int_{\Gamma} \mathbf{N}^{\text{T}} \mathbf{T} \mathbf{m}_b d\Gamma}_{\mathbf{p}^b} \right) \end{aligned} \quad (2-75)$$

onde

$$\mathbf{N}^* \equiv \left[M_{mxx}^* \quad M_{myy}^* \quad M_{mxy}^* \quad Q_{mx}^* \quad Q_{my}^* \right]^{\text{T}} \quad (2-76)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \eta_x & 0 & \eta_y & 0 & 0 \\ 0 & -\eta_y & -\eta_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \quad (2-77)$$

$$\mathbf{U}^* \equiv \left[\beta_y^* \quad \beta_x^* \quad w^* \right]^{\text{T}} \quad (2-78)$$

$$\mathbf{u}^b = \left[\beta_y^b \quad \beta_x^b \quad w^b \right]^{\text{T}} \quad (2-79)$$

$$\mathbf{N} \equiv \left[\beta_{ny}^d \quad \beta_{nx}^d \quad w_n^d \right]^{\text{T}} \quad (2-80)$$

$$\mathbf{m}_n = \left[M_{nx} \quad M_{ny} \quad Q_n \right]^{\text{T}} \quad (2-81)$$

$$\mathbf{m}_b = \left[M_{xx}^b \quad M_{yy}^b \quad M_{xy}^b \quad Q_x^b \quad Q_y^b \right]^{\text{T}} \quad (2-82)$$

Assim,

$$\mathbf{F} = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^{*\text{T}} \mathbf{T}^{\text{T}} \mathbf{U}^* d\Gamma \quad (2-83)$$

$$\mathbf{H} = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^{*\text{T}} \mathbf{T}^{\text{T}} \mathbf{N} d\Gamma \quad (2-84)$$

$$\mathbf{b} = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^{*\text{T}} \mathbf{T}^{\text{T}} \mathbf{u}^b d\Gamma \quad (2-85)$$

$$\mathbf{p} = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^{\text{T}} \mathbf{m}_n d\Gamma \quad (2-86)$$

$$\mathbf{p}^b = \int_{\Gamma} \mathbf{N}^{\text{T}} \mathbf{T} \mathbf{m}_b d\Gamma \quad (2-87)$$

A matriz de rigidez do elemento de placa é obtida pelo mesmo procedimento apresentado na seção anterior, conforme a expressão $\mathbf{K} = \mathbf{H}^{\text{T}} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H}$.

2.3.3.3

Propriedades espectrais das matrizes \mathbf{H} e \mathbf{F}

Seja a matriz \mathbf{W} , cujas colunas formam uma base ortogonal de deslocamentos nodais d relacionados com os deslocamentos de corpo rígido do elemento. Para um elemento em equilíbrio,

$$\mathbf{W}^T(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b) = \mathbf{0} \quad (2-88)$$

O produto $\mathbf{W}^T\mathbf{W}$ corresponde à matriz de identidade de ordem n^r . Já o produto $\mathbf{W}\mathbf{W}^T$ é uma matriz idempotente única, invariante de ordem n^d e posto n^r [36]. Além disso, em um domínio finito, a matriz \mathbf{W} é a base do espaço nulo da matriz cinemática \mathbf{H} , de forma que os deslocamentos de corpo rígido não sejam transformados em deslocamentos nodais no sistema interno de coordenadas. Portanto,

$$\mathbf{H}\mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (2-89)$$

Assim, também deve haver uma matriz \mathbf{V} cuja colunas são a base do espaço nulo de \mathbf{H}^T , e também formam uma base ortogonal do espaço de coordenadas \mathbf{p}^* que não podem ser transformados:

$$\mathbf{H}^T\mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (2-90)$$

$$\mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I} \quad (2-91)$$

A partir da Eq. (2-89), como esperado para deslocamentos de corpo rígido, a matriz de rigidez não transforma deslocamentos de corpo rígido em forças nodais equivalente \mathbf{p} :

$$\mathbf{K}\mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (2-92)$$

3

Soluções fundamentais não-singulares

Este capítulo é dedicado à obtenção do conjunto de soluções fundamentais, ou soluções de Trefftz, para aproximação do campo de tensões e deslocamentos em termos dos parâmetros nodais de força, os quais serão utilizados na formulação dos elementos híbridos de membrana e de placa. As soluções fundamentais obtidas se baseiam nos desenvolvimentos feitos por Dumont [30] em suas notas de aulas sobre soluções fundamentais e no trabalho de Prazeres [26].

Na primeira seção são obtidas as soluções fundamentais que satisfazem a equação homogênea de Navier para deslocamentos. Em seguida, as soluções fundamentais que satisfazem as equações biarmônica e de Helmholtz, com algumas considerações, são desenvolvidas. Posteriormente, as soluções particulares são obtidas para um carregamento uniformemente distribuído atuando sobre a placa.

3.1 Elastostática

Seja a equação de Navier, Eq. (2-9), apresentada no Capítulo 2 e reescrita em termos dos deslocamentos u_{im}^* , referente ao campo de deslocamentos σ_{ijm}^* , em sua expressão homogênea,

$$u_{im,jj}^* + \frac{1}{1-2\nu} u_{jm,ji}^* = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3-1)$$

O campo de deslocamentos u_{im}^* pode ser expresso em termo de uma função potencial Φ_{im} ,

$$u_{im}^* = \Phi_{im,kk} - \frac{1}{2(1-\nu)} \Phi_{km,ik} \quad (3-2)$$

Então, o desenvolvimento das derivadas de u_{im}^* da Eq. (3-1), segundo a Eq. (3-2),

$$u_{im,jj}^* = \Phi_{im,kkjj} - \frac{1}{2(1-\nu)} \Phi_{km,ikjj} \quad (3-3)$$

$$u_{jm,ji}^* = \Phi_{jm,kkji} - \frac{1}{2(1-\nu)} \Phi_{km,jkji} = \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \Phi_{jm,kkji} \quad (3-4)$$

e a posterior introdução das Eqs. (3-3) e (3-4) na Eq. (3-1) leva à equação biharmônica

$$\Phi_{jm, kkji} \equiv \nabla^2(\nabla^2\Phi_{im}) = 0 \quad (3-5)$$

Seja

$$\Psi_0 = \nabla^2\Phi_{im} = \nabla^2\Phi_0 \quad (3-6)$$

onde $\Phi_{im} = \Phi_0\delta_{im}$, e δ_{im} é o delta de Kronecker. A Eq. (3-5) pode ser reformulada como

$$\begin{aligned} \nabla^2\Psi_0 &= 0 \\ \nabla^2\Phi_0 &= \Psi_0 \end{aligned} \quad (3-7)$$

A primeira expressão da Eq. (3-7) pode ser resolvida expressando Φ_0 como o produto de duas funções em coordenadas polares (r, θ) ,

$$\Psi_0 = f(r)g(\theta) \equiv fg \quad (3-8)$$

Substituindo a Eq. (3-8) na primeira expressão da Eq. (3-7), tem-se:

$$\nabla^2\Psi_0 = f_{,rr}g + \frac{1}{r}f_{,r}g + \frac{1}{r^2}fg_{,\theta\theta} = 0 \quad (3-9)$$

A aplicação do procedimento de separação de variáveis a partir de uma constante m divide a equação diferencial parcial, Eq. (3-9), em duas equações diferenciais ordinárias. Logo,

$$f_{,rr} + \frac{1}{r}f_{,r} - \frac{m^2}{r^2}f = 0 \quad (3-10)$$

$$g_{,\theta\theta} = -m^2g \quad (3-11)$$

A solução geral da Eq. (3-10) é dada por:

$$f(r) = B_{1m}r^m + B_{2m}r^{-m} \quad (3-12)$$

onde B_{1m} e B_{2m} são constantes.

Como somente interessam soluções que resultem em soluções não-singulares, apenas o termo com r^m é válido na solução na Eq. (3-12). A solução da Eq. (3-11) conduz à seguinte solução geral

$$g(\theta) = C_{1m} \sin(m\theta) + C_{2m} \cos(m\theta) \quad (3-13)$$

Como se requer que a Eq. (3-13) obedeça às condições de contorno periódicas, ou seja,

$$\begin{aligned} g(-\pi) &= g(\pi) \\ g_{,\theta}(-\pi) &= g_{,\theta}(\pi) \end{aligned} \quad (3-14)$$

somente se admitem valores inteiros para m . Logo, a solução geral de Ψ_0 é expressa como

$$\Psi_0 = r^m[C_{1m} \sin(m\theta) + C_{2m} \cos(m\theta)] \quad (3-15)$$

Para a solução da segunda expressão da Eq. (3-7), o mesmo procedimento

de separação de variáveis em duas equações de coordenadas polares é adotado, ou seja, $\Phi_0 = f(r)g(\theta) \equiv fg$. Desta forma, $\nabla^2\Phi_0 = \Psi_0$ apresenta-se como

$$f_{,rr}g + \frac{1}{r}f_{,r}g + \frac{1}{r^2}fg_{,\theta\theta} = r^m[C_{1m} \sin(m\theta) + C_{2m} \cos(m\theta)] \quad (3-16)$$

A solução de Φ_0 é composta pela superposição de uma solução homogênea Φ_h e uma solução particular Φ_p . A solução geral da parte homogênea é a mesma obtida na Eq. (3-15):

$$\Phi_h = r^n[C_{1n} \sin(n\theta) + C_{2n} \cos(n\theta)] \quad (3-17)$$

Para a solução particular Φ_p , supondo que g_p tenha a mesma expressão da Eq. (3-13), a Eq. (3-16) para a solução particular resulta em

$$f_{,rr}^p + \frac{1}{r}f_{,r}^p - \frac{m^2}{r^2}f^p = r^m \quad (3-18)$$

cuja solução de f^p é

$$f^p = \frac{r^{m+2}}{4(m+1)} \quad (3-19)$$

Assim, a solução particular $\Phi_p = f^p g^p$ é determinada como

$$\Phi_p = \frac{r^{m+2}}{4(m+1)}[C_{1n} \sin(m\theta) + C_{2n} \cos(m\theta)] \quad (3-20)$$

e a solução geral de Φ_0 é expressa na forma

$$\Phi_0 = r^n[C_{1n} \sin(n\theta) + C_{2n} \cos(n\theta)] + \frac{r^{m+2}}{4(m+1)}[C_{1m} \sin(m\theta) + C_{2m} \cos(m\theta)] \quad (3-21)$$

onde n e m são inteiros positivos.

A solução geral de Φ_0 pode ainda ser expressa como

$$\Phi_0 = r^n[C_{1n} \sin(n\theta) + C_{2n} \cos(n\theta) + C_{3n} \sin((n-2)\theta) + C_{4n} \cos((n-2)\theta)] \quad (3-22)$$

As soluções fundamentais de deslocamento u_{im}^* são obtidas através da Eq. (3-2), transformando as coordenadas polares em cartesianas. O número de soluções para um polinômio completo de ordem n é definido por $2(2n+1)$ termos para problemas de elasticidade bidimensional. Assim, as soluções fundamentais são

$$u_{im}^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3(x+y) & 3(x-y) & x-y(7-8\nu) & y-x(5-8\nu) & \cdots \\ 1 & -1 & 3(x-y) & -3(x+y) & x-y(7-5\nu) & y-x(7-8\nu) & \cdots \end{bmatrix} \quad (3-23)$$

Como se pode observar em Prazeres [26], as soluções fundamentais de deslocamento podem ser expressas alternativamente em termos da solução da equação de Laplace por $\Phi_0 = r^2 u_0^*$, onde

$$u_0^* = r^n[C_{1n} \sin(n\theta) + C_{2n} \cos(n\theta)] \quad (3-24)$$

Desta forma, a solução geral de Φ_0 admite a seguinte forma:

$$\Phi_0 = r^{2+n}[C_{1n} \sin(n\theta) + C_{2n} \cos(n\theta)] \quad (3-25)$$

e as soluções fundamentais de deslocamentos são

$$u_{im}^* = \begin{bmatrix} 3 - 4\nu & 0 & \vdots & (5 - 8\nu)x & -y & (7 - 8\nu)y & -x & \vdots & \cdots \\ 0 & 3 - 4\nu & \vdots & -y & (7 - 8\nu)x & -x & (5 - 8\nu)y & \vdots & \cdots \end{bmatrix} \quad (3-26)$$

que consistem de uma combinação linear das expressões da Eq. (3-23).

3.2

Problema geral de placas

Como as soluções fundamentais de Trefftz consistem em soluções homogêneas do problema, as equações governantes para problemas de placa, as Eqs. (2-31) e (2-32) admitem a seguinte configuração:

$$\nabla^4 w = 0 \quad (3-27)$$

$$\Psi - \frac{K}{Gt_s} \frac{(1 - \nu)}{2} \nabla^2 \Psi = 0 \quad (3-28)$$

A solução da equação biarmônica já foi determinada em termos de coordenadas polares na seção anterior. Portanto,

$$w_m^* = r^m [C_{1m} \sin(m\theta) + C_{2m} \cos(m\theta) + C_{3m} \sin((m - 2)\theta) + C_{4m} \cos((m - 2)\theta)] \quad (3-29)$$

onde m é inteiro positivo.

A Eq. (3-29) admite para $m = 0$ e $m = 1$, uma e duas soluções fundamentais, respectivamente, e para cada novo grau de n mais quatro soluções são adicionadas, correspondendo a um polinômio completo de ordem m , com exceção de $m = 2$ onde há apenas três soluções. Assim, com a transformação das coordenadas polares para cartesianas,

$$w_m^* = \begin{bmatrix} 1 & y & x & \vdots & 2xy & x^2 - y^2 & x^2 + y^2 & \vdots & 3x^2y - y^3 & x^3 - 3xy^2 & x^2y + y^3 & x^3 + xy^2 & \vdots & \cdots \end{bmatrix} \quad (3-30)$$

Dado que $\frac{K}{Gt_s} = \frac{t^2}{5(1 - \nu)}$, a equação de Helmholtz, Eq. (3-28), pode ser reescrita como

$$\Psi - \frac{t^2}{10} \nabla^2 \Psi = 0 \quad (3-31)$$

Pelo mesmo procedimento adotado anteriormente, isto é, supondo que Ψ seja formado pelo produto de duas funções em coordenadas polares,

$$\Psi = f(r)g(\theta) \equiv fg \quad (3-32)$$

expressa-se a Eq. (3-31) como

$$f_{,rr}g + \frac{1}{r}f_{,r}g + \frac{1}{r^2}fg_{,\theta\theta} - \frac{10}{t^2}fg = 0 \quad (3-33)$$

Por separação de variáveis, obtém-se

$$\begin{aligned} f_{,rr} + \frac{1}{r}f_{,r} - \frac{m^2}{r^2}f - \frac{10}{t^2}f &= 0 \\ g_{,\theta\theta} &= -m^2g \end{aligned} \quad (3-34)$$

Como determinado na seção anterior, a solução geral da segunda expressão da Eq. (3-34) é dada por:

$$g = C_{1m} \sin(m\theta) + C_{2m} \cos(m\theta) \quad (3-35)$$

Já a solução geral de f é

$$f(r) = C_1 I_m \left(\frac{\sqrt{10}}{t} r \right) + C_2 K_m \left(\frac{\sqrt{10}}{t} r \right) \quad (3-36)$$

onde I_m e K_m são funções modificadas de Bessel de primeira e segunda espécie, respectivamente, de ordem m e argumento $\left(\frac{\sqrt{10}}{t} r \right)$. Como são de interesse apenas soluções que resultem em polinômios e que evitem singularidade, o segundo termo da equação acima é desconsiderado. Então,

$$f(r) = C I_m \left(\frac{\sqrt{10}}{t} r \right) \quad (3-37)$$

Assim, a solução geral Ψ para $t > 0$ é

$$\Psi = r^m [C_{1m} \sin(m\theta) + C_{2m} \cos(m\theta)] \frac{1}{r^m} \text{Bessell} \left(m, \frac{\sqrt{10}}{t} r \right) \quad (3-38)$$

onde a primeira parte pode ser transformada em polinômios. As primeiras soluções de Ψ são

$$C_{10} I_0 \left(\frac{\sqrt{10}}{t} r \right) \quad (3-39)$$

$$(C_{11}y + C_{21}x) \frac{1}{r} I_1 \left(\frac{\sqrt{10}}{t} r \right) \quad (3-40)$$

$$[C_{12}xy + C_{22}(x^2 - y^2)] \frac{1}{r^2} I_2 \left(\frac{\sqrt{10}}{t} r \right) \quad (3-41)$$

$$[C_{13}(3yx^2 - y^3) + C_{23}(3xy^2 - x^3)] \frac{1}{r^3} I_3 \left(\frac{\sqrt{10}}{t} r \right) \quad (3-42)$$

$$[C_{14}(yx^3 - xy^3) + C_{24}(x^4 + y^4 - 6x^2y^2)] \frac{1}{r^4} I_4 \left(\frac{\sqrt{10}}{t} r \right) \quad (3-43)$$

Ao se verificar $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^m} I_m \left(\frac{\sqrt{10}}{t} r \right) = \left(\frac{\sqrt{10}}{t} \right)^m \frac{1}{2^m m!}$, nota-se que a Eq. (3-38) não parece adequada para representar a transição de placa espessa para delgada, ou seja, para $t \rightarrow 0$, não se obtém $\Psi \rightarrow 0$. Isto justifica os resultados

divergentes obtidos por Jirousek et al [16] em seus elementos quadriláteros ao fazer o uso de soluções de Bessel para aproximação do campo de tensões. Por conseguinte, como Ψ e Φ independem entre si, como observado nas Eqs. (3-27) e (3-28), para uma representação viável do problema dever-se-ia adotar

$$\Psi = 0 \quad (3-44)$$

Uma interpretação geométrica desta afirmativa é dada a seguir. A partir da introdução da Eq. (2-29) na segunda expressão da Eq. (2-24), obtém-se:

$$\Psi = \gamma_{0xz,y} - w_{,xy} - \gamma_{0yz,x} + w_{,xy} = \gamma_{0xz,y} - \gamma_{0yz,x} \quad (3-45)$$

Verifica-se pela compatibilidade cinemática do deslocamento dh no elemento infinitesimal de placa sujeito a distorções devidas a Q_x e a Q_y , na Fig. 3.1, que

$$dh = \gamma_{0xz,y} dy dx = \gamma_{0yz,x} dx dy \quad (3-46)$$

Portanto,

$$\gamma_{0xz,y} = \gamma_{0yz,x} \quad (3-47)$$

o que equivale à Eq. (3-44).

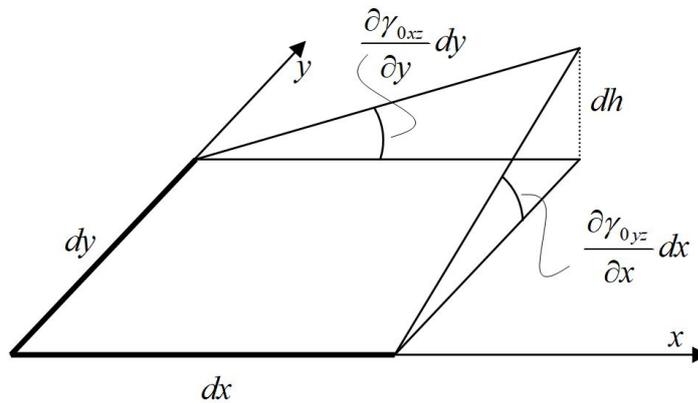


Figura 3.1: Compatibilidade das deformações cisalhantes no elemento infinitesimal de placa.

Por outro lado, dadas as expressões de forças e deformações cisalhantes nas Eqs. (2-23), (2-27) e (2-28), obtém-se para $\Psi = 0$,

$$Q_{x,y} - Q_{y,x} = 0 \quad (3-48)$$

que é uma condição de equilíbrio que não apresenta qualquer perspectiva de interpretação física.

3.3

Solução particular associada a carregamento uniformemente distribuído em problemas de placa

Sejam as equações que governam o problema de placa para um carregamento uniformemente distribuído $q = c$ expressas como

$$\begin{aligned}\nabla^2\Phi &= -\frac{c}{K} \\ \nabla^2w &= -\Phi - \frac{c}{Gt_s}\end{aligned}\quad (3-49)$$

A solução da primeira expressão da Eq. (3-49) pelo procedimento de separação de variáveis conduz a

$$\Phi = -\frac{c}{4K}r^2 \quad (3-50)$$

A introdução Φ na segunda expressão da Eq. (3-49) resulta em

$$\nabla^2w = \frac{c}{4K}r^2 - \frac{c}{Gt_s} \quad (3-51)$$

Resolvendo w na equação acima por meio novamente da separação de variáveis seguido do método dos coeficiente a determinar, a solução obtida para w em termos de coordenadas cartesianas é

$$w = \frac{c}{64K}(x^2 + y^2) \left(x^2 + y^2 - 16\frac{K}{Gt_s} \right) \quad (3-52)$$

No problema de placa fina, teoria de Kirchhoff, o termo $\frac{K}{Gt_s}$ é desprezado, de forma que a Eq. (3-52) se apresenta como

$$w = \frac{c}{64K}(x^2 + y^2)^2 \quad (3-53)$$

Os momentos e forças com respeito a solução particular são obtidos substituindo as Eqs. (3-52) e (3-53) nas relações constitutivas das Eqs. (2-33) e (2-37), respectivamente.

4

Formulação dos elementos híbridos

Neste capítulo, os conceitos e as soluções fundamentais desenvolvidas nos Capítulos 2 e 3, respectivamente, serão aplicados para a formulação dos elementos finitos híbridos em problemas de elasticidade plana e problemas de placa de Kirchhoff e Mindlin-Reissner. Os elementos híbridos unidimensionais (treliça e vigas de Euler-Bernoulli e Timoshenko), tanto para o problema estático como dinâmico, podem ser encontrados no trabalho de Prazeres [26].

Os seguintes elementos são apresentados ao longo do capítulo:

1. **HELMT3** - elemento híbrido triangular para problema no estado plano de deformações com 3 nós e 2 graus de liberdade de deslocamento (direções x e y) por nó;
2. **HELMQ4** - elemento híbrido quadrilateral para problema no estado plano de deformações com 4 nós e 2 graus de liberdade de deslocamento (direções x e y) por nó;
3. **HKPT6** - elemento híbrido triangular de placa de Kirchhoff de 3 nós com 6 graus de liberdade, sendo 3 deslocamentos na direção z em cada nó, e 3 rotações ao longo do contorno do elemento na direção perpendicular à normal;
4. **HKPQ8** - elemento híbrido quadrilateral de placa de Kirchhoff de 4 nós com 8 graus de liberdade, sendo 4 deslocamentos na direção z em cada nó, e 4 rotações ao longo do contorno do elemento na direção perpendicular à normal;
5. **HMPT6** - elemento híbrido triangular de placa de Mindlin-Reissner de 3 nós com 6 graus de liberdade, sendo 3 deslocamentos na direção z em cada nó, e 3 rotações ao longo do contorno do elemento na direção perpendicular à normal;
6. **HMPQ8** - elemento híbrido quadrilateral de placa de Mindlin-Reissner de 4 nós com 8 graus de liberdade, sendo 4 deslocamentos na direção z em cada nó, e 4 rotações ao longo do contorno do elemento na direção perpendicular à normal.

O

4.1

Elemento híbrido triangular de deformação constante - HELMT3

Nesta seção é formulado o elemento de membrana híbrido triangular de deformação constante. Como a formulação deste elemento é exata, este elemento equivale ao elemento triangular CST no estado plano de deformações.

4.1.1

Formulação do problema

A base para a formulação dos elementos de membrana é a equação de Navier para o problema de elasticidade bidimensional no estado plano de deformações em termos das soluções fundamentais, ou seja,

$$u_{im,jj}^* + \frac{1}{1-2\nu} u_{jm,ji}^* = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (3-1)$$

A geometria do elemento triangular HELMT3 em termos das suas projeções (a_i, b_i) e a indicação dos graus de liberdade de deslocamento em cada nó estão na Fig. 4.1.

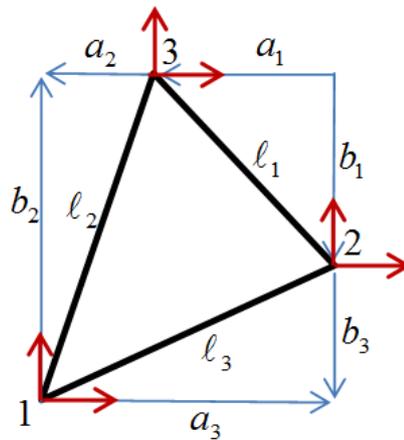


Figura 4.1: Geometria do elemento HELMT3 em termos das projeções e graus de liberdade nodais.

Na Fig. 4.1, os termos l_i indicam o comprimento de cada lado. As projeções podem ser escritas em termos das coordenadas globais x e y como

$$\begin{aligned} a_i &= x_k - x_j \\ b_i &= y_j - y_k \end{aligned} \quad (4-1)$$

onde os índices i, j e k podem assumir valores 1, 2 ou 3 em permutação cíclica.

4.1.2

Matriz de rigidez do elemento

A solução geral da equação de Navier foi determinada em termos das soluções fundamentais de deslocamentos na seção 3.1. Assim, o campo de deslocamentos no plano u_m^* pode ser expresso como

$$u_i^* = u_{im}^* p_m^* \quad (4-2)$$

onde u_{im}^* são as soluções fundamentais do problema e que serão repetidos aqui:

$$u_{im}^* = \begin{bmatrix} 3 - 4\nu & 0 & (5 - 8\nu)x & -y & (7 - 8\nu)y & -x & \cdots \\ 0 & 3 - 4\nu & -y & (7 - 8\nu)x & -x & (5 - 8\nu)y & \cdots \end{bmatrix} \quad (3-26)$$

Como o elemento HELMT3 tem $n^d = 6$ graus de liberdade e está sujeito aos três modos de deslocamento de corpo rígido (sendo dois de translação e um de rotação), o número de soluções fundamentais, conforme a Eq. (2-64), necessárias para a formulação do elemento HELMT3 é $n^s = 3$, excluindo as soluções correspondentes aos modos de corpo rígido. Deste modo, a partir da equação acima, as soluções fundamentais u_{im}^* necessárias e suficientes para o elemento HELMT3 são

$$u_{im}^* = \begin{bmatrix} (5 - 8\nu)x & y & x \\ -y & x & (5 - 8\nu)y \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} u_{1m}^* \\ u_{2m}^* \end{bmatrix} \quad (4-3)$$

A introdução da Eq. (4-3) na expressão Eq. (4-2) conduz ao campo de deslocamentos u_i^* em termos dos parâmetros de força p_m^* :

$$u_i^* = \begin{bmatrix} (5 - 8\nu)x & y & x \\ -y & x & (5 - 8\nu)y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{U}_m^* \mathbf{p}^* \quad (4-4)$$

Sejam as expressões das soluções fundamentais do campo de tensões σ_{ijm}^* , em termos dos deslocamentos u_{im}^* , e das forças nodais de superfície p_{im}^* no contorno:

$$\sigma_{ijm}^* = G(u_{im,j}^* + u_{jm,i}^*) + \frac{2G\nu}{1 - 2\nu} \delta_{ij} u_{km,k}^* \quad \text{em } \Omega \quad (4-5)$$

$$p_{im}^* = \sigma_{ijm}^* \eta_j \quad (4-6)$$

A introdução da Eq. (4-5) na Eq. (4-6), e o posterior desenvolvimento dos termos indiciais conduzem à expressão para as forças de superfície p_{im}^* no problema de elasticidade plana:

$$p_{im}^* \equiv \frac{G}{1 - 2\nu} \begin{bmatrix} (1 - 2\nu) [2u_{1m,x}^* \eta_x + (u_{1m,y}^* + u_{2m,x}^*) \eta_y] + 2\nu(u_{1m,x}^* + u_{2m,y}^*) \eta_x \\ (1 - 2\nu) [2u_{2m,y}^* \eta_y + (u_{2m,x}^* + u_{1m,y}^*) \eta_x] + 2\nu(u_{1m,x}^* + u_{2m,y}^*) \eta_y \end{bmatrix} \quad (4-7)$$

onde η_x e η_y são as componentes das normais da superfície do elemento, como indicado na Fig. 4.2. Desenvolvendo as derivadas das soluções fundamentais da Eq. (4-4) na expressão acima, obtém-se

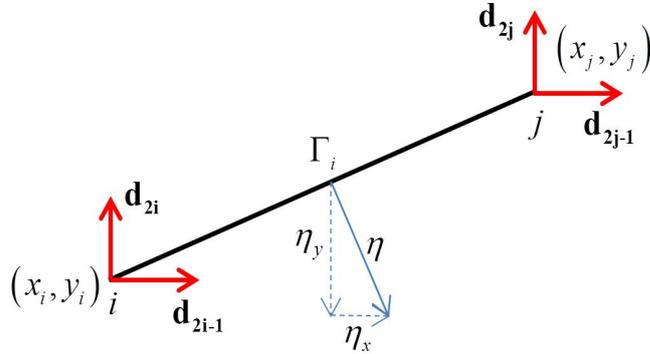


Figura 4.2: Contorno de um trecho Γ_i do elemento triangular, com indicação da direção dos graus de liberdade e da normal.

$$p_{im}^* \equiv \mathbf{P}_m^* = 2G \begin{bmatrix} (5 - 4\nu)\eta_x & \eta_y & -(1 - 4\nu)\eta_x \\ -(1 - 4\nu)\eta_y & \eta_x & (5 - 4\nu)\eta_y \end{bmatrix} \quad (4-8)$$

As funções de interpolação linear com relação aos graus de liberdade para cada trecho do contorno do elemento triangular são

$$u_{in}^1 \equiv \mathbf{N}_1 = \begin{bmatrix} 1 - \xi & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \xi & 0 & \xi & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (4-9)$$

$$u_{in}^2 \equiv \mathbf{N}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 - \xi & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \xi & 0 & \xi \end{bmatrix} \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (4-10)$$

$$u_{in}^3 \equiv \mathbf{N}_3 = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 & 1 - \xi & 0 \\ 0 & \xi & 0 & 0 & 0 & 1 - \xi \end{bmatrix} \quad \text{em } \Gamma_3 \quad (4-11)$$

onde $\xi \in [0, 1]$ é a coordenada paramétrica.

A matriz de transformação cinemática \mathbf{H} para o elemento HELMT3 é expressa, de acordo com as Eqs. (2-54) e (4-6), como

$$H_{mn} = \int_0^1 p_{im}^* u_{in} t |J| d\xi \quad (4-12)$$

onde $|J|$ é o jacobiano ao longo do trecho, definido como $|J| = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2}$, que corresponde numericamente ao comprimento ℓ_i do trecho, e t é a espessura do elemento ao longo do contorno.

Desenvolvendo a matriz \mathbf{H} ao longo de todo o contorno do elemento, para espessura constante, obtém-se

$$\mathbf{H} = \int_0^1 \mathbf{P}_m^* \mathbf{T} \mathbf{N}_1 t l_1 d\xi + \int_0^1 \mathbf{P}_m^* \mathbf{T} \mathbf{N}_2 t l_2 d\xi + \int_0^1 \mathbf{P}_m^* \mathbf{T} \mathbf{N}_3 t l_3 d\xi \quad (4-13)$$

A integração da equação acima fornece a seguinte expressão analítica da matriz \mathbf{H} em termos das projeções do elemento triangular:

$$\mathbf{H} = Gt \begin{bmatrix} Y_1 b_1 & -Y_2 a_1 & Y_1 b_2 & -Y_2 a_2 & Y_1 b_3 & -Y_2 a_3 \\ a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & a_3 & b_3 \\ -Y_2 b_1 & Y_1 a_1 & -Y_2 b_2 & Y_1 a_2 & -Y_2 b_3 & Y_1 a_3 \end{bmatrix} \quad (4-14)$$

onde $Y_1 = 5 - 4\nu$ e $Y_2 = 1 - 4\nu$.

Similarmente, a matriz de flexibilidade pode ser expressa, de acordo com as Eqs. (2-53) e (4-6), como

$$F_{mn} = \int_0^1 p_{im}^* u_{in}^* t |J| d\xi \quad (4-15)$$

ou, em notação matricial,

$$\mathbf{F} = \int_0^1 \mathbf{P}_m^* \mathbf{T} \mathbf{U}_m^* t l_1 d\xi + \int_0^1 \mathbf{P}_m^* \mathbf{T} \mathbf{U}_m^* t l_2 d\xi + \int_0^1 \mathbf{P}_m^* \mathbf{T} \mathbf{U}_m^* t l_3 d\xi \quad (4-16)$$

Esta matriz pode ser expressa analiticamente como

$$\mathbf{F} = 4GA t \begin{bmatrix} 16\nu^2 - 32\nu + 13 & 0 & -16\nu^2 + 16\nu - 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 16\nu^2 + 16\nu - 5 & 0 & 16\nu^2 - 32\nu + 13 \end{bmatrix} \quad (4-17)$$

onde A é a área do triângulo:

$$A = \frac{1}{2} \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \quad (4-18)$$

A inversa de \mathbf{F} é

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{1}{4\beta A t} \begin{bmatrix} \Omega_1 & 0 & \Omega_2 \\ 0 & \beta & 0 \\ \Omega_2 & 0 & \Omega_1 \end{bmatrix} \quad (4-19)$$

onde β , Ω_1 e Ω_2 são constantes definidas como

$$\begin{aligned} \beta &= 16(1 - 2\nu)(3 - 4\nu)^2 \\ \Omega_1 &= 16\nu^2 - 32\nu + 13 \\ \Omega_2 &= 16\nu^2 - 16\nu + 5 \end{aligned} \quad (4-20)$$

A partir da Eq. (2-63), isto é, $\mathbf{K} = \mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H}$, a matriz de rigidez do elemento HELMT3 fica expressa analiticamente como

$$\mathbf{K} = \frac{Gt}{4\beta A} \begin{bmatrix} Y_1 b_1 & a_1 & -Y_2 b_1 \\ -Y_2 a_1 & b_1 & Y_1 a_1 \\ Y_1 b_2 & a_2 & -Y_2 b_2 \\ -Y_2 a_2 & b_2 & Y_1 a_2 \\ Y_1 b_3 & a_3 & -Y_2 b_3 \\ -Y_2 a_3 & b_3 & Y_1 a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 & 0 & \Omega_2 \\ 0 & \beta & 0 \\ \Omega_2 & 0 & \Omega_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 b_1 & a_1 & -Y_2 b_1 \\ -Y_2 a_1 & b_1 & Y_1 a_1 \\ Y_1 b_2 & a_2 & -Y_2 b_2 \\ -Y_2 a_2 & b_2 & Y_1 a_2 \\ Y_1 b_3 & a_3 & -Y_2 b_3 \\ -Y_2 a_3 & b_3 & Y_1 a_3 \end{bmatrix}^T \quad (4-21)$$

A matriz de rigidez analítica acima equivale à matriz do elemento triangular de deformação constante no estado plano de deformações, pela formulação convencional de elementos finitos. Convém observar, pela expressão de β na Eq. (4-20), que esta formulação não se aplica diretamente a problemas incompressíveis ($\nu = 0.50$).

4.2

Elemento híbrido quadrilateral - HELMQ4

4.2.1

Formulação do problema

Como o elemento híbrido HELMQ4 também consiste em um elemento para o estado plano de deformações, a mesma equação governante para formulação do problema do elemento HELMT3 será utilizada. Aliás, é importante comentar que com essa abordagem no contorno, uma família de elementos híbridos poligonais para elasticidade plana pode ser construída [25]. Contudo, com o aumento do número de GDL e da complexidade da geometria dos elementos, problemas de mau condicionamento começam a surgir. Este trabalho vai se limitar apenas aos elementos quadrilaterais nas análises numéricas, incluindo, apenas, a formulação do elemento pentagonal para fins de demonstração como será visto posteriormente. A geometria e a indicação dos graus de liberdade do elemento HELMQ4 podem ser vistos na Fig. 4.3.

4.2.2

Matriz de rigidez do elemento

O elemento HELMQ4, como visto na Fig. 4.3, tem um total de 8 GDL. Para a construção da matriz de rigidez com o devido posto e sem a presença de modo espúrios, a partir da Eq. 2-64, o número de soluções de fundamentais necessário é $n^s \geq n^d - n^r = 8 - 3 = 5 \therefore n^s \geq 5$. Contudo, como se requer um número de soluções que resulte em um polinômio completo, são utilizadas $n^s = 7$ funções de Trefftz. As soluções fundamentais de deslocamentos u_{im}^* são:

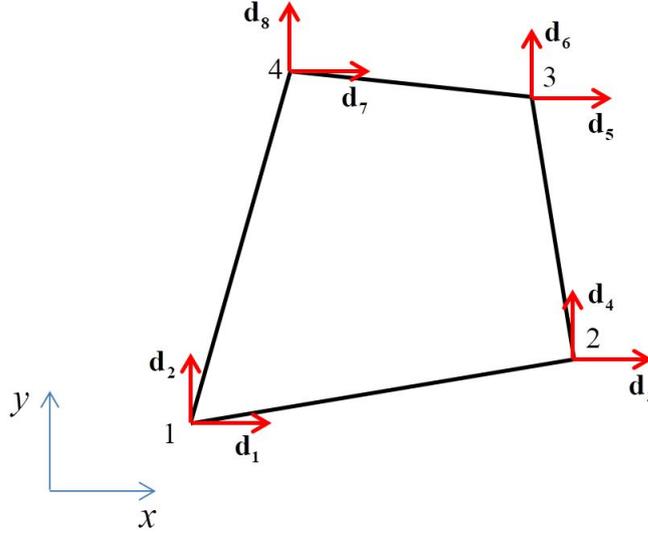


Figura 4.3: Elemento HELMQ4 para elasticidade plana com 4 nós e 8 GDL.

$$u_{im}^* = \begin{bmatrix} (5 - 8\nu)x & y & -x & \vdots & u_{14}^* & 0 & 6xy(3 - 4\nu) & -3(x^2 + y^2) \\ -y & x & (5 - 8\nu)y & \vdots & 0 & u_{25}^* & -3(x^2 + y^2) & 6xy(3 - 4\nu) \end{bmatrix}$$

$$u_{14}^* = -6 [x^2(2\nu - 1) + 2y^2(1 - \nu)]$$

$$u_{25}^* = -6 [y^2(1 - 2\nu) - 2x^2(1 - \nu)]$$
(4-22)

A expressão geral de u_{in} para um dado contorno Γ_i é

$$u_{in} \equiv \mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} 1 - \xi & 0 & \xi & 0 \\ 0 & 1 - \xi & 0 & \xi \end{bmatrix}$$
(4-23)

onde cada coluna corresponde aos GDL de deslocamento \mathbf{d}_{2i-1} , \mathbf{d}_{2i} , \mathbf{d}_{2j-1} e \mathbf{d}_{2j} , respectivamente, conforme a Fig. 4.2.

Com a introdução das soluções fundamentais da Eq. (4-22) na expressão de p_{im}^* , Eq. (4-7), as matrizes de flexibilidade \mathbf{F} e cinemática \mathbf{H} são obtidas:

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^4 \int_0^1 \mathbf{P}_m^* \mathbf{T} \mathbf{N}_i t d\Gamma_i$$
(4-24)

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^4 \int_0^1 \mathbf{P}_m^* \mathbf{T} \mathbf{U}_m^* t d\Gamma_i$$
(4-25)

A integração das matrizes é obtida exatamente por quadratura Gauss-Legendre utilizando 3 pontos de integração. A matriz de rigidez do elemento HELMQ4 é obtida pela Eq. (2-63).

4.3

Elementos de placa de Kirchhoff

Os elementos híbridos para problemas de placa fina, segundo a teoria de placas de Kirchhoff, são desenvolvidos nesta seção: o elemento triangular híbrido de placa (HKPT6) e o elemento híbrido quadrilateral de placa (HKPQ8).

4.3.1

Elemento híbrido triangular de placa de Kirchhoff - HKPT6

4.3.1.1

Formulação do problema

A equação que governa o problema de placa de Kirchhoff, para $\Psi = 0$, apresenta-se em sua forma homogênea e em termos das soluções fundamentais, conforme a Eq. (2-32), como

$$\nabla^4 w_m^* = 0 \quad (4-26)$$

onde w_m^* representa as soluções fundamentais de deslocamento na direção z .

O elemento HKPT6, proposto nesta seção, tem 6 GDL, sendo 3 GDL correspondentes aos deslocamentos na direção z e 3 GDL de rotação ao longo do contorno do elemento. A construção do elemento triangular de placa, assim como no elemento HELMT3, se baseia nas projeções do elemento triangular (vide Fig. 4.1).

A convenção de sinal dos momentos e forças no elemento está apresentada na Fig. 2.3, e os graus de liberdade no sistema local do elemento são representadas na Fig. 4.4.

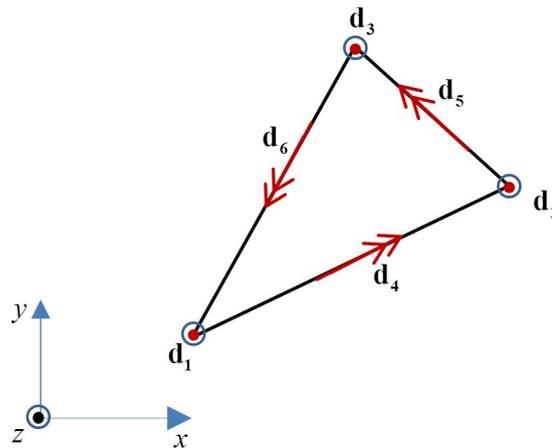


Figura 4.4: Sentido dos deslocamentos e rotações no sistema local de coordenadas do elemento.

4.3.1.2

Matriz de rigidez do elemento

As soluções w_m^* para equação biarmônica, em coordenadas cartesianas, como visto no Capítulo 3, são repetidas aqui por conveniência:

$$w_m^* = \left[1 \mid y \mid x \mid 2xy \mid x^2 - y^2 \mid x^2 + y^2 \mid 3x^2y - y^3 \mid x^3 - 3xy^2 \mid x^2y + y^3 \mid x^3 + xy^2 \mid \dots \right] \quad (3-30)$$

Para que o elemento HKPT6 tenha o posto correto e não apresente modos espúrios, o número de soluções necessárias é determinado por $n^s \geq n^d - n^r = 6 - 3 \therefore n^s \geq 3$. Visto que as três soluções correspondem a um polinômio completo, as soluções fundamentais de deslocamento w^* em termo dos parâmetros de força p_m^* , a menos das soluções correspondentes aos modos de corpo rígido, são

$$w^* = w_m^* p_m^* = \frac{1}{K} \left[2xy \mid x^2 - y^2 \mid x^2 + y^2 \right] \left\{ \begin{matrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \end{matrix} \right\} \equiv \mathbf{w}^* \mathbf{p}^* \quad (4-27)$$

Vale mencionar que estas três soluções fundamentais correspondem aos três estados de curvatura constante em uma placa. A constante $1/K$ é multiplicada nas soluções, de modo que os parâmetros no vetor \mathbf{p}^* tenham o significado físico de força.

Os momentos e as forças em termos das soluções fundamentais para o problema de Kirchhoff estão dados na Eq. (2-37). Substituindo a Eq. (4-27) na Eq.(2-37), os momentos e as forças são expressos em termos dos parâmetros de forças p_m^* como

$$\left\{ \begin{matrix} M_{xx}^* \\ M_{yy}^* \\ M_{xy}^* \\ Q_x^* \\ Q_y^* \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} 0 & -2 + 2\nu & -2 + 2\nu \\ 0 & 2 - 2\nu & -2 - 2\nu \\ -2 + 2\nu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \end{matrix} \right\} \equiv \mathbf{N}^* \mathbf{p}^* \quad (4-28)$$

As rotações e os deslocamentos em termos dos parâmetros de força podem ser organizados da seguinte maneira:

$$\left\{ \begin{matrix} \beta_y^* \\ \beta_x^* \\ w^* \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial w_1^*}{\partial x} & -\frac{\partial w_2^*}{\partial x} & -\frac{\partial w_3^*}{\partial x} \\ \frac{\partial w_1^*}{\partial y} & \frac{\partial w_2^*}{\partial y} & \frac{\partial w_3^*}{\partial y} \\ w_1^* & w_2^* & w_3^* \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \end{matrix} \right\} \equiv \mathbf{U}^* \mathbf{p}^* \quad (4-29)$$

ou, com a introdução dos termos das soluções fundamentais,

$$\begin{Bmatrix} \beta_y^* \\ \beta_x^* \\ w^* \end{Bmatrix} = \frac{1}{K} \begin{bmatrix} -2y & -2x & -2x \\ 2x & -2y & 2y \\ 2xy & x^2 - y^2 & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{U}^* \mathbf{p}^* \quad (4-30)$$

Para interpolação dos graus de liberdade ao longo do contorno, os deslocamentos w são interpolados linearmente, segundo uma coordenada paramétrica $\xi \in [0, 1]$, como mostrado na Fig. 4.5. A rotação ao longo do contorno é considerada constante. Assim, a interpolação em termos dos parâmetros de deslocamentos nodais genéricos d_n é dada para um lado i por:

$$\begin{Bmatrix} \beta_y^d \\ \beta_x^d \\ w^d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\eta_y/\ell_i & \eta_y/\ell_i & \eta_x \\ -\eta_x/\ell_i & \eta_x/\ell_i & -\eta_y \\ 1 - \xi & \xi & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_i \\ d_j \\ d_k \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N}_i \mathbf{d} \quad (4-31)$$

onde ℓ_i é o comprimento de um trecho Γ_i , ou seja,

$$\begin{Bmatrix} \beta_y^d \\ \beta_x^d \\ w^d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_3/\ell_3^2 & -a_3/\ell_3^2 & 0 & -b_3/\ell_3 & 0 & 0 \\ b_3/\ell_3^2 & -b_3/\ell_3^2 & 0 & a_3/\ell_3 & 0 & 0 \\ 1 - \xi & \xi & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N}_1 \mathbf{d} \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (4-32)$$

$$\begin{Bmatrix} \beta_y^d \\ \beta_x^d \\ w^d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_1/\ell_1^2 & -a_1/\ell_1^2 & 0 & -b_1/\ell_1 & 0 \\ 0 & b_1/\ell_1^2 & -b_1/\ell_1^2 & 0 & a_1/\ell_1 & 0 \\ 0 & 1 - \xi & \xi & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N}_2 \mathbf{d} \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (4-33)$$

$$\begin{Bmatrix} \beta_y^d \\ \beta_x^d \\ w^d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2/\ell_2^2 & 0 & a_2/\ell_2^2 & 0 & 0 & -b_2/\ell_2 \\ -b_2/\ell_2^2 & 0 & b_2/\ell_2^2 & 0 & 0 & a_2/\ell_2 \\ \xi & 0 & 1 - \xi & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N}_3 \mathbf{d} \quad \text{em } \Gamma_3 \quad (4-34)$$

A expressão da matriz cinemática \mathbf{H} para o elemento HKPT6 é obtida por integração ao longo do contorno do elemento e é expressa, a partir do potencial de Hellinger-Reissner para placas, Eq (2-75), como:

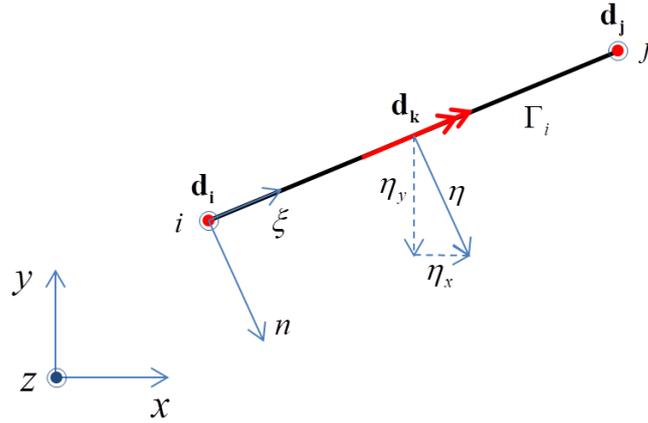


Figura 4.5: Contorno do elemento de placa com indicação dos graus de liberdade e direção da normal no contorno

$$\mathbf{H} = \sum_{i=1}^{n_\ell} \int_{\Gamma_i} \mathbf{N}^{*T} \mathbf{T}^T \mathbf{N}_i d\Gamma_i \quad (4-35)$$

onde n_ℓ é o número de lados do elemento, que para caso do elemento HKPT6 é $n_\ell = 3$, e \mathbf{T} indica a matriz que transforma momentos e forças (M_{xx} , M_{yy} , M_{xy} , Q_x e Q_y) no domínio (Ω) para momento e forças (M_{nx} , M_{ny} e Q_n) atuantes no contorno (Γ),

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \eta_x & 0 & \eta_y & 0 & 0 \\ 0 & -\eta_y & -\eta_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta_x & \eta_y \end{bmatrix} \quad (4-36)$$

A introdução das Eqs. (4-28), (4-32), (4-33) e (4-34) na Eq. (4-35), junto com integração dos componentes em termos das projeções do elemento triangular, resulta na expressão analítica para a matriz cinemática \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = 4(1-\nu) \begin{bmatrix} \frac{2A(a_2b_3 + a_3b_2)}{\ell_3^2\ell_2^2} & \frac{2A(b_3b_2 - a_2a_3)}{\ell_3^2\ell_2^2} & 0 \\ \frac{2A(a_1b_3 + a_3b_1)}{\ell_3^2\ell_1^2} & \frac{2A(b_3b_1 - a_1a_3)}{\ell_3^2\ell_1^2} & 0 \\ \frac{2A(a_1b_2 + a_2b_1)}{\ell_2^2\ell_1^2} & \frac{2A(b_1b_2 - a_1a_2)}{\ell_2^2\ell_1^2} & 0 \\ -\frac{\ell_2^2\ell_1^2}{a_3b_3} & \frac{\ell_2^2\ell_1^2}{a_3^2 - b_3^2} & \frac{\ell_3}{2} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} \right) \\ -\frac{\ell_3}{a_1b_1} & \frac{2\ell_3}{a_1^2 - b_1^2} & \frac{\ell_1}{2} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} \right) \\ -\frac{\ell_1}{a_2b_2} & \frac{2\ell_1}{a_2^2 - b_2^2} & \frac{\ell_2}{2} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} \right) \\ -\frac{\ell_2}{a_2b_2} & \frac{2\ell_2}{a_2^2 - b_2^2} & \frac{\ell_2}{2} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu} \right) \end{bmatrix}^T \quad (4-37)$$

onde A é a área do elemento triangular dada pela Eq. (4-18).

A matriz de flexibilidade \mathbf{F} , de modo análogo ao realizado para a matriz \mathbf{H} , é expressa matricialmente, a partir da Eq. (2-75), como

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{n_\ell} \int_{\Gamma_i} \mathbf{N}^* \mathbf{T} \mathbf{T}^T \mathbf{U}^* d\Gamma_i \quad (4-38)$$

onde \mathbf{U}^* corresponde à matriz apresentada na Eq. (4-30). Desenvolvendo ao longo do contorno do elemento triangular de placa, a expressão analítica da matriz de flexibilidade é determinada:

$$\mathbf{F} = \frac{16A}{K} \begin{bmatrix} 1 - \nu & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \nu \end{bmatrix} \quad (4-39)$$

Então,

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{K}{16A} \begin{bmatrix} \frac{1}{1 - \nu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1 - \nu} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{1 + \nu} \end{bmatrix} \quad (4-40)$$

Assim, a matriz de rigidez do elemento triangular de placa de Kirchhoff, HKPT6, pode ser determinada a partir da Eq. (2-63). Esse elemento, como foi verificado após sua construção, equivale ao elemento de placa de momento constante proposto por Morley [4].

Para manter uma coerência entre os graus de liberdade de rotações na interface entre elementos, o sentido de rotação do sistema global segue um critério pré-definido para a transformação de coordenadas a partir do sistema local (vide Fig. 4.4). Seja θ_n o ângulo definido entre a normal $\vec{\eta}$ e a direção

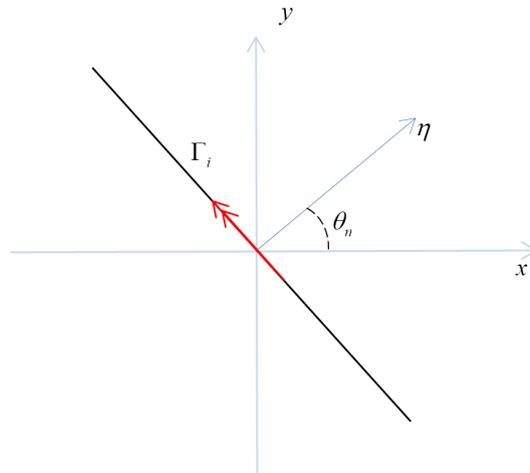


Figura 4.6: Contorno do elemento de placa com indicação dos graus de liberdade e direção da normal no contorno

x , conforme a Fig. 4.6. A partir de θ_n , a orientação de sinal para rotação no sistema global foi convencionada segundo o critério resumido apresentado na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Convenção dos sinais para o grau de liberdade de rotação do sistema local para sistema global.

Direção da normal $\vec{\eta}$	Intervalo de θ_n	Sinal da rotação ao longo do contorno
	$0 \leq \theta_n < \frac{\pi}{2}$	+
	$\frac{\pi}{2} \leq \theta_n < \pi$	-
	$\pi \leq \theta_n < \frac{3\pi}{2}$	-
	$\frac{3\pi}{2} \leq \theta_n < 2\pi$	+

4.3.2

Elemento híbrido quadrangular de placa de Kirchhoff - HKPQ8

4.3.2.1

Formulação do problema

A construção do elemento HKPQ8 com 8 GDL para o problema de placa fina segue o mesmo procedimento utilizado para a formulação do elemento HKPT6. Assim, como no problema no estado plano de deformações (elementos HELMT3 e HELMQ4), este procedimento geral permite a construção de uma família de elementos poligonais de placa. É proposto o elemento quadrilateral HKPQ8 é proposto, que pode ser visto na Fig. 4.7, onde são expressas a orientação dos deslocamentos e rotações no sistema local de coordenadas do elemento. As equações que governam o problema são as mesmas utilizadas no elemento HKPT6.

4.3.2.2

Matriz de rigidez do elemento

Como o elemento HKPQ8 tem 8 GDL, é necessário o uso de $n^s \geq n^d - n^r = 8 - 3 \geq 5$ soluções fundamentais para uma matriz de rigidez com o devido posto e ausência de modos espúrios de energia. Contudo, para representar um polinômio completo, $n^s = 7$ soluções são necessárias. Deste modo, \mathbf{w}^* para o elemento HKPQ8 é:

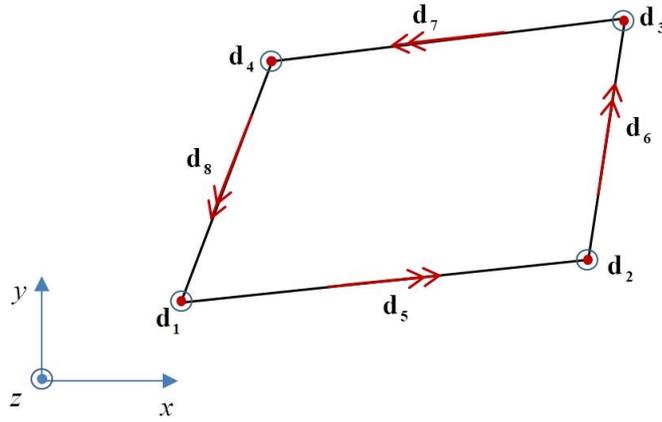


Figura 4.7: Elemento híbrido de placa HKPQ8.

$$\mathbf{w}^* \equiv \frac{1}{K} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2xy & x^2 - y^2 & x^2 + y^2 & 3x^2y - y^3 & x^3 - 3xy^2 & x^2y + y^3 & x^3 + xy^2 & \end{array} \right] \quad (4-41)$$

Assim, a matriz \mathbf{N}^* com os momentos e as forças em termos das sete soluções fundamentais e parâmetros nodais de força são

$$\mathbf{N}^* \equiv 2 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 + \nu & -1 - \nu & -3y(1 - \nu) & -3x(1 - \nu) & -y(1 + 3\nu) & -x(3 + \nu) \\ 0 & 1 - \nu & -1 - \nu & 3y(1 - \nu) & 3x(1 - \nu) & -y(3 + \nu) & -x(1 + 3\nu) \\ -1 + \nu & 0 & 0 & -3x(1 - \nu) & 3y(1 - \nu) & -x(1 - \nu) & -y(1 - \nu) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \end{array} \right] \quad (4-42)$$

Analogamente ao realizado nas Eqs. (4-29) e (4-30), as rotações e os deslocamentos, representados na matriz \mathbf{U}^* , em termos dos parâmetros nodais de forças são obtidos, conforme as soluções fundamentais na Eq. (4-41), como:

$$\mathbf{U}^* \equiv \frac{1}{K} \left[\begin{array}{ccc|cccc} -2y & -2x & -2x & -6xy & 3(y^2 - x^2) & -2xy & -(3x^2 + y^2) \\ 2x & -2y & 2y & 3(x^2 - y^2) & -6xy & (x^2 + 3y^2) & 2xy \\ 2xy & x^2 - y^2 & x^2 + y^2 & 3x^2y - y^3 & x^3 - 3xy^2 & x^2y + y^3 & x^3 + xy^2 \end{array} \right] \quad (4-43)$$

Quanto à interpolação dos deslocamentos e das rotações ao longo do contorno em termos dos parâmetros nodais de deslocamentos d_n , o mesmo desenvolvimento utilizado para o elemento HKPT6 é válido aqui:

$$\left\{ \begin{array}{c} \beta_y^d \\ \beta_x^d \\ w^d \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} -\eta_y/\ell_i & \eta_y/\ell_i & \eta_x \\ -\eta_x/\ell_i & \eta_x/\ell_i & -\eta_y \\ 1 - \xi & \xi & 0 \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} d_i \\ d_j \\ d_k \end{array} \right] \equiv \mathbf{N}_i \mathbf{d} \quad (4-31)$$

As matrizes cinemática \mathbf{H} e de flexibilidade \mathbf{F} são determinadas a partir das Eqs. (4-35) e (4-38) com $n_\ell = 4$. A integração dos componentes é obtida numericamente por Gauss-Legendre. Deste modo, com a inversão de \mathbf{F} , a matriz de rigidez

do elemento HKPQ8 é obtida pelo produto $\mathbf{K} = \mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H}$. A compatibilidade dos graus de liberdade de rotações ao longo da interface do elemento é feita segundo a orientação apresentada na Tabela 4.1.

4.4

Elementos de placa de Mindlin-Reissner

A construção dos elementos híbridos de placa para problemas de Mindlin-Reissner é desenvolvida nesta seção. Apresenta-se o desenvolvimento dos elementos híbrido triangular e quadrilateral de placa HMPT6 e HMPQ8, respectivamente.

4.4.1

Elemento híbrido triangular de placa de Mindlin-Reissner - HMPT6

4.4.1.1

Formulação do problema

A partir das considerações nas soluções de Bessel e da interpretação geométrica para $\Psi = 0$, a equação governante, para o campo de deslocamentos do problema de placa, é dada pela equação biharmônica. A única diferença para a construção dos elementos híbridos de Mindlin-Reissner está na expressão das rotações, como visto na Eq. (2-34).

O elemento híbrido triangular de Mindlin-Reissner HKPT6 tem a mesma disposição dos GDL do elemento HKPT6 (vide Fig. 4.4), e assim, é válida a mesma orientação de forças e momentos no sistema local do elemento.

4.4.1.2

Matriz de rigidez do elemento

Como já mencionado, o elemento HMPT6 apresenta a mesma disposição e o mesmo número de graus de liberdade do elemento HKPT6. Logo, apenas três soluções fundamentais são necessárias para o devido posto da matriz de rigidez do elemento. Sabendo que estas três soluções correspondem a campos de curvaturas constantes, a mesma matriz de rigidez é obtida para ambos problemas de Kirchhoff e Mindlin-Reissner. Deste modo, o elemento triangular híbrido de placa, como mostrado na Fig. 4.4, só se aplica à análise de placa fina.

4.4.2

Elemento híbrido quadrilateral de placa de Mindlin-Reissner - HMPQ8

4.4.2.1

Formulação do problema

A formulação do problema é a mesma apresentada na seção do elemento HMPT6, equação biharmônica, com as rotações apresentadas na Eq. (2-34). A

disposição e o sentido das forças e momentos no elemento quadrilateral de placa de Mindlin-Reissner proposto, HMPQ8, são os mesmos adotados no elemento HKPQ8, como se pode observar na Fig. 4.7.

4.4.2.2

Matriz de rigidez do elemento

Como este elemento tem o mesmo número de GDL do elemento HKPQ8, é necessário, também, o uso de 7 soluções fundamentais, correspondente a um conjunto polinomial completo de soluções, para a formulação da matriz de rigidez do elemento. As soluções fundamentais são dadas na Eq. (4-41) em termos dos parâmetros nodais de força.

Os momentos e as forças em termos dos parâmetros, uma vez que se baseiam em condições de equilíbrio, são os mesmos apresentados na Eq. (4-42) para o elemento HKPQ8. As rotações e os deslocamentos, matriz \mathbf{U}^* , em termos dos parâmetros de força para o problema de Mindlin-Reissner são obtidos a partir da substituição das soluções fundamentais na Eq. (2-34). Logo,

$$\mathbf{U}^* \equiv \frac{1}{K} \begin{bmatrix} -2y & -2x & -2x & \vdots & -6xy & 3(y^2 - x^2) & -2xy & -(3x^2 + y^2) + \frac{8K}{Gt_s} \\ 2x & -2y & 2y & \vdots & 3(x^2 - y^2) & -6xy & x^2 + 3y^2 - \frac{8K}{Gt_s} & 2xy \\ 2xy & x^2 - y^2 & x^2 + y^2 & \vdots & 3x^2y - y^3 & x^3 - 3xy^2 & x^2y + y^3 & x^3 + xy^2 \end{bmatrix} \quad (4-44)$$

A interpolação das rotações e dos deslocamentos ao longo do contorno, em termos dos parâmetros nodais de deslocamentos, é a mesma utilizada para a construção dos demais elementos de placa na Eq. (4-31).

Desta forma, a partir da integração numérica ao longo do contorno do elemento quadrilateral, as matrizes \mathbf{F} e \mathbf{H} são obtidas e, conseqüentemente, a matriz de rigidez do elemento de placa de Mindlin-Reissner HMPQ8 é obtida pelo produto $\mathbf{K} = \mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H}$. A compatibilidade entre as graus de liberdade de rotação na interface entre os elementos é apresentada na Tabela 4.1.

5 Avaliação numérica

Este capítulo se dedica à avaliação numérica dos elementos híbridos para estado plano de deformações e de placa formulados no capítulo anterior. São verificados o posto e a presença de modos espúrios nas matrizes de rigidez dos elementos. Além disso, os espaços nulos \mathbf{W} , referentes aos modos de corpo rígido da matriz cinemática \mathbf{H} , são determinados e testados segundo a propriedade espectral apresentada na Eq. (2-89).

A verificação da convergência dos elementos é feita usando *patch tests* sugeridos na literatura. Após isto, alguns testes numéricos são realizados e comparados com soluções de referências obtidas na literatura.

5.1 Elementos de membrana

5.1.1 Avaliação dos autovalores e suficiência de posto

Como forma de verificar a suficiência de posto e a eventualidade de modos espúrios nos elementos de membrana, é realizada a análise de autovalores para configurações irregulares dos elementos HELMT3 e HELMQ3, conforme a Fig. 5.1.

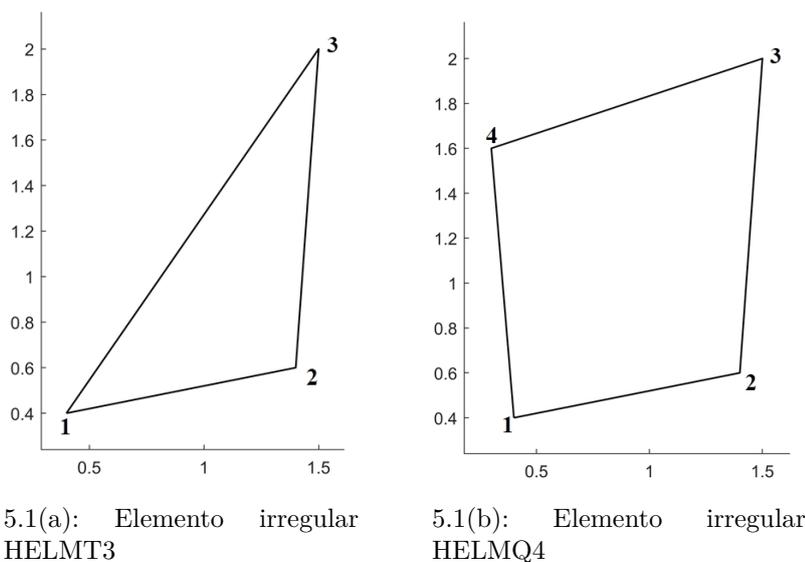


Figura 5.1: Geometria dos elementos irregulares HELMT3 e HELMQ4 para análise dos autovalores.

O material considerado nos elementos é linearmente elástico, homogêneo e isotrópico, com módulo de elasticidade $E = 1$, e tem espessura de $t = 1.0$. Os autovalores são verificados para três diferentes tipos de coeficiente de Poisson ($\nu = 0.00000$, $\nu = 0.33333$ e $\nu = 0.49995$) com o propósito de observar o comportamento da matriz de rigidez do elemento quando o material tende a ser incompressível. Os resultados da análise dos autovalores para os elementos HELMT3 e HELMQ4 utilizando diferentes valores de ν são mostrados nas Fig. 5.2 e Fig. 5.3, respectivamente.

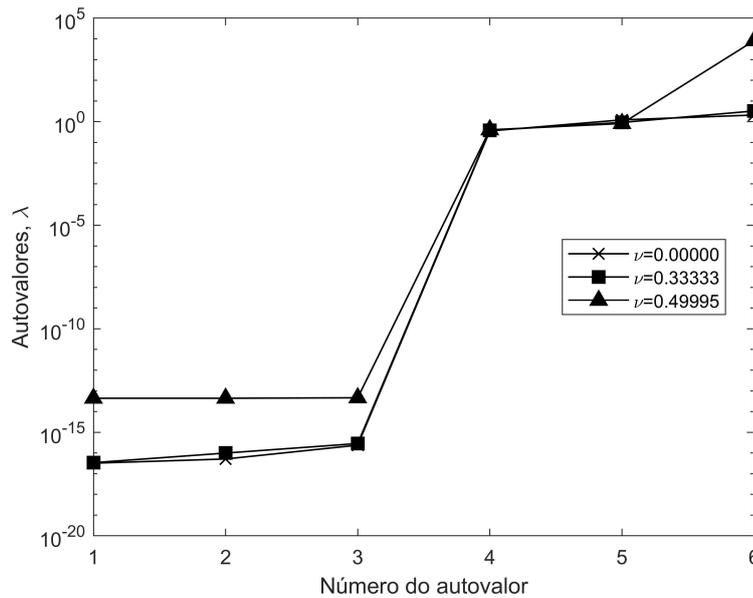


Figura 5.2: Autovalores do elemento irregular HELMT3 para diferentes valores de ν .

Como se pode observar nas Figs. 5.2 e 5.3, os elementos irregulares de membrana apresentam os devidos postos nas suas matrizes de rigidez e não há presença de modos espúrios, já que há somente três autovalores nulos correspondentes aos modos de corpo rígido. Contudo, para o coeficiente de Poisson $\nu \rightarrow 0.5$, ou seja, para o material tendendo a incompressível, os elementos tendem a apresentar problemas de travamento e autovalores distintos para o elemento. Isto pode ser observado analiticamente na constante β da expressão da matriz de rigidez do elemento HELMT3, Eq. (4-21), que admite valor nulo quando o material se torna incompressível. Desta forma, os elementos híbridos HELMT3 e HELMQ4 não são adequados e não foram feitos para a solução de problemas em materiais incompressíveis.

5.1.2

Patch test para problemas de elasticidade plana

Inicialmente introduzido por Irons, o *patch test* surgiu como uma condição suficiente para indicar a convergência em elementos finitos [37]. A ideia consiste

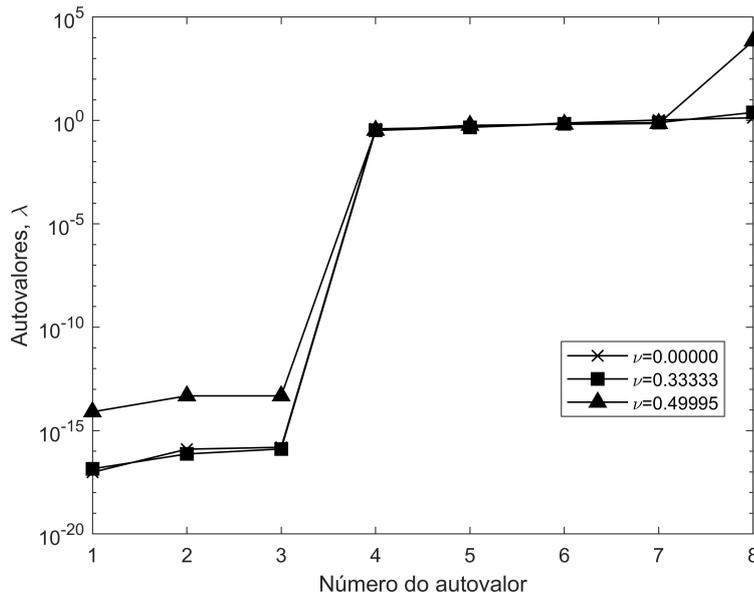


Figura 5.3: Autovalores do elemento irregular HELMQ4 para diferentes valores de ν .

em que, se um dado elemento consegue solucionar exatamente os problemas mais simples possíveis, isso garantirá a convergência dos resultados para problemas mais complexos. O *patch test* é tradicionalmente utilizado como procedimento para verificar o requerimento de consistência, junto com a condição de estabilidade sendo checada, independentemente, através da investigação do correto posto da matriz de rigidez – suficiência de posto.

Em meados da década de 80, MacNeal e Harder [38] e Taylor et al [39] apresentaram um conjunto de *patch tests* para avaliação da convergência em problemas de elasticidade bidimensional plana e elasticidade tridimensional, e, também, em problemas de placas e cascas. Por conveniência, apenas os *patch tests* aplicados aos elementos híbridos formulados neste trabalho serão analisados a seguir.

Para elementos bidimensionais em problemas de elasticidade plana, a avaliação da convergência é feita, primeiramente, a partir dos modos de corpo rígido do elemento, conforme a Eq. (2-92). Os modos de corpo rígido nos elementos de membrana podem ser representados pela matriz \mathbf{W} , a qual, como já mencionado, corresponde ao espaço nulo da matriz cinemática \mathbf{H} . Uma forma não normalizada de \mathbf{W} é

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ -y_1 & x_1 & \cdots & -y_i & x_i \end{bmatrix}^T \quad (5-1)$$

onde x_i e y_i correspondem às coordenadas cartesianas dos nós para elementos de membrana.

Pelas propriedades espectrais descritas, $\mathbf{KW} = \mathbf{0}$. Assim, para verificar isto para os elementos de membrana HELMT3 e HELMQ4, as matrizes de rigidez dos

elementos da Fig. 5.1 e suas matrizes \mathbf{W} correspondentes são obtidas. Ambos os elementos passam neste critério, para norma euclidiana de erro dentro da precisão da máquina.

Para o segundo *patch test* para elementos em elasticidade plana se baseia na aplicação do campo de deslocamentos,

$$\begin{aligned} u &= 0.002x \\ v &= -0.0006y \end{aligned} \quad (5-2)$$

nas malhas mostradas na Fig. 5.4. O material do modelo é considerado linearmente elástico, homogêneo e isotrópico, com módulo de elasticidade $E = 1000$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.30$.

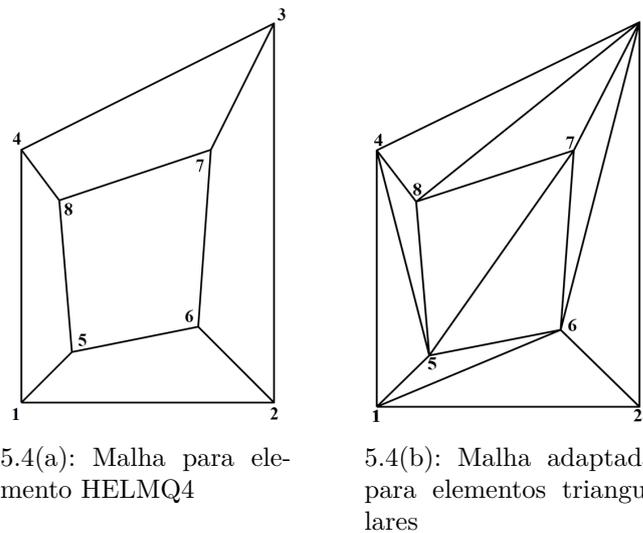


Figura 5.4: Malha para aplicação do segundo *patch test* nos elementos de membrana.

A solução deste campo no estado plano de deformações resulta em forças nos nós internos nulas e tensões $\sigma_{xx} = 2.346153846$ e $\sigma_{yy} = 0.346153846$. A montagem das matrizes de rigidez \mathbf{K} das malhas na Fig. 5.4 e o produto \mathbf{Kd} , onde \mathbf{d} é o vetor de deslocamentos nodais correspondentes ao campo de deslocamentos da Eq. (5-2), conduzem à mesma solução para ambos os elementos, conforme resumido na Tabela 5.1.

Ambos elementos HELMT3 e HELMQ4 levam a forças nulas nos nós internos e a tensões exatamente iguais às encontradas na solução analítica do problema. Desta forma, estes elementos passam no segundo *patch test*.

Dois pontos importantes cabem ser discutidos nesta seção. O primeiro corresponde à formulação geral para a construção de elementos poligonais desenvolvida neste trabalho, e o segundo diz respeito ao aumento do número de graus de liberdade internos, ou seja, número de parâmetros e soluções nos modelos.

Sobre o primeiro ponto, como a formulação é geral para a construção de uma família de elementos poligonais, será apresentado aqui, como exemplo, um elemento

Tabela 5.1: Solução do *patch test* para as malha da Fig. 5.4 nos elementos HELMT3 e HELMQ4.

Nó		Coordenadas dos nós		Forças nodais	
n	x	y	f_x	f_y	
1	0	0	-2.346153846153849	-0.346153846153844	
2	2	0	3.519230769230762	-0.346153846153846	
3	2	3	2.346153846153854	0.346153846153845	
4	0	2	-3.519230769230760	0.346153846153847	
5	0.4	0.4	0.000000000000000	0.000000000000000	
6	1.4	0.6	0.000000000000000	0.000000000000000	
7	1.5	2.0	0.000000000000000	0.000000000000000	
8	0.3	1.6	0.000000000000000	0.000000000000000	

híbrido plano pentagonal, denominado HELMP5. Para o devido posto da matriz de rigidez, o elemento HELMP5 foi construído utilizando sete soluções fundamentais. A análise de autovalores para um elemento pentagonal irregular é resumida na Tabela 5.2. As propriedades do material adotadas para o elementos são $E = 1$ e $\nu = 0.30$, e a espessura foi considerada $t = 1.0$.

Tabela 5.2: Avaliação dos autovalores e dos modos espúrios de um elemento híbrido regular HELMP5

Elemento HELMP5				Nó	Coordenadas dos nós		Autovalores
				n	x	y	λ_i
				1	0.00	0.00	2.141540400454051
				2	2.00	0.00	0.893091134238096
				3	1.60	0.90	0.756083721655520
				4	0.95	1.25	0.577593688685775
				5	0.25	0.85	0.424314747375101
							0.124542923449195
							0.322454335354098
							0.000000000000000
							0.000000000000000
							0.000000000000000

Como se pode observar na Tabela 5.2, a matriz de rigidez do elemento tem o devido posto e não apresenta nenhum modo espúrio de energia. Consequentemente, a propriedade espectral $\mathbf{KW} = \mathbf{0}$ é atendida. A convergência do elemento HELMP5 é verificada em um *patch test* utilizando o campo de deslocamentos da Eq. (5-2), e adaptando a malha para os elementos pentagonais, conforme a Fig. 5.5.

Aplicando o campo de deslocamentos, o produto \mathbf{Kd} referente ao *patch test* resulta nas mesmas forças nodais externas encontradas para os elementos

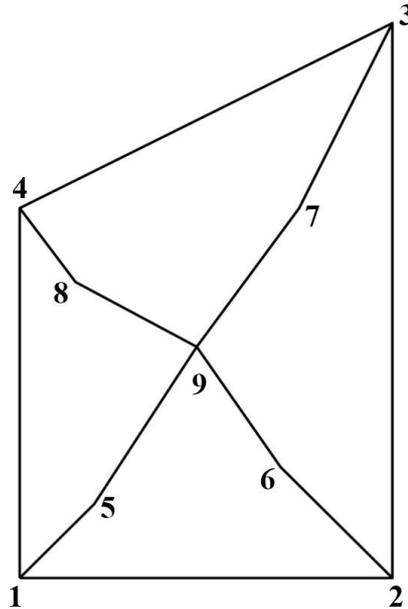


Figura 5.5: Malha para *patch test* com o elemento HELMP5.

anteriores, e em forças nodais em nós internos nulas no modelo. Portanto, o elemento HELMP5 passa no *patch test*.

Sobre o segundo ponto, é intuitivo pensar que, aumentando o número de soluções fundamentais para aproximação do campo de tensões, isso irá resultar em melhores resultados. Contudo, desde que um certo número de soluções n^s é ideal para formulação de um dado elemento, o acréscimo de parâmetros nodais de força p_m^* não resulta em mudanças significativas na solução e convergência dos resultados, ou pode apenas contribuir para o enrijecimento excessivo do elemento. Isso é válido para a formulação híbrida em geral. Como forma de exemplificar, seja o elemento HELMT3, o qual tem representação exata, com compatibilidade das funções de aproximação dos campos interno e externo. Devido a esta compatibilidade, o aumento do número de soluções fundamentais em nada contribuirá para o melhor desempenho do elemento. Assim, seja o elemento HELMT3 irregular da Fig. 5.1 formulado a partir de 7 soluções fundamentais. Seja um deslocamento unitário aplicado na direção x no nó 1,

$$\mathbf{d} = \left[1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \right]^T \quad (5-3)$$

Obtêm-se, conforme a Eq. (2-61), os parâmetros nodais de força \mathbf{p}^* . Então,

$$\mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} -0.532599869727149 \\ 0.0362318840579997 \\ -0.228254478403313 \\ 0.000000000000002 \\ -0.000000000000003 \\ 0.000000000000004 \\ 0.000000000000002 \end{bmatrix} \quad (5-4)$$

As 4 soluções fundamentais adicionais no elemento HELMT3 não geram nenhuma contribuição na construção da matriz de rigidez do elemento e, conseqüentemente, o acréscimo de graus de liberdades internos no campo de tensões não resulta em uma melhor eficiência do elemento.

5.1.3

Exemplos numéricos para os elementos de membrana

O desempenho dos elementos HELMT3 e HELMQ4 é avaliado nesta seção por meio de testes numéricos apresentados no trabalho de Felippa e Alexander [40]: 1) Viga engastada sob carregamento axial uniformemente distribuído na extremidade livre; 2) Viga engastada com momento aplicado na extremidade livre, e 3) Membrana de Cook.

5.1.3.1

Viga engastada sob carregamento axial uniformemente distribuído na extremidade livre

O primeiro exemplo para verificação do desempenho dos elementos de membrana consiste em uma viga engastada com carregamento axial uniformemente distribuído na extremidade livre. O carregamento equivale a uma tensão aplicada de $\sigma_{xx} = 100$. Para normalizar a solução exata do deslocamento horizontal na seção média em $x = 32$ para $\delta = 100$, adota-se módulo de elasticidade $E = 32$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0$ para o material. A geometria da viga é mostrada na Fig. 5.6.

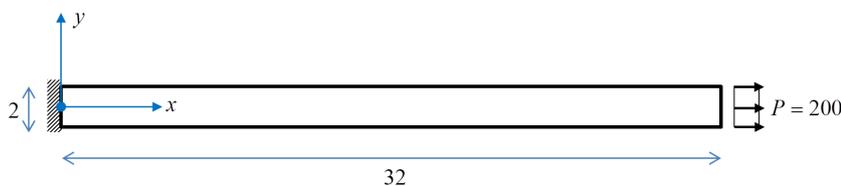
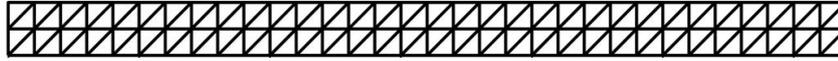
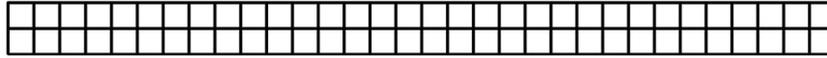


Figura 5.6: Geometria da viga engastada livre sob carregamento axial uniformemente distribuído na extremidade livre.

As análises numéricas são realizadas para o refinamento 32×2 na malha para os elementos HELMT3 e HELMQ4, os quais podem ser visualizados na Fig. 5.7. Para o engastamento em uma das extremidades, foram restringidos os graus de liberdade de deslocamentos em x e y , ou seja, $u = 0$ e $v = 0$.



5.7(a): Malha 32×2 de elementos HELMT3



5.7(b): Malha 32×2 de elementos HELMQ4

Figura 5.7: Exemplo da discretização da viga em elementos HELMT3 e HELMQ4.

Por consistir em um problema de deformação constante, a solução exata para o deslocamento na seção média em $x = 32$ deve ser exata em qualquer refinamento da malha. De fato, como observado nos resultados do deslocamento u_c e tensão constante σ_{xx} no modelo na Tabela 5.3, ambos os elementos apresentaram resultados exatos, dentro da precisão adotada para a máquina.

Tabela 5.3: Resultado dos deslocamentos obtidos para a viga engastada com carregamento axial.

Elemento	Deslocamento u_c	σ_{xx}	Norma de erro $ \epsilon_{\sigma_x} $
HELMT3	99.999999999976	99.999999999920	7.95808×10^{-15}
HELMQ4	100.000000000150	100.000000001520	1.51999×10^{-12}

5.1.3.2

Viga engastada com momento aplicado na extremidade livre

O segundo exemplo consiste em uma viga engastada, com a mesma geometria do exemplo anterior, sujeita a um momento pontual de $M = 100$ aplicado na extremidade livre, como pode ser observado na Fig. 5.8. A normalização da solução para o deslocamento vertical $\delta = 100$ na seção média em $x = 32$ é realizada adotando-se as seguintes propriedades para o material: $E = 768$ e coeficiente de Poisson nulo.

A análise do problema é feita utilizando os seguintes refinamentos para as malhas com os elementos HELMT3 e HELMQ4: 2×2 , 4×2 , 8×2 , 16×2 , 32×2 e 64×2 . A malha com refinamento 8×2 é exemplificada na Fig.

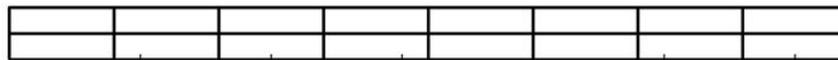


Figura 5.8: Malha para *patch test* em elemento HELMP5.

5.9. As condições de contorno adotadas para o engastamento da extremidade foi o mesmo utilizado no exemplo anterior. Já na aplicação do momento na extremidade livre, considerou-se uma distribuição linear de forças compatível com um momento $M = 100$, onde as forças nodais equivalentes foram aplicadas nos nós da extremidade.



5.9(a): Malha 8×2 de elementos HELMT3



5.9(b): Malha 8×2 de elementos HELMQ4

Figura 5.9: Discretização da malha 8×2 em elementos HELMT3 e HELMQ4.

Os resultados dos deslocamentos v_c para os modelos com os elementos HELMT3 e HELMQ4 são resumidos na Tabela 5.4, a qual a solução analítica para o deslocamento da extremidade livre é $\delta = \frac{ML^2}{2EI}$, onde I é o momento de inércia da viga. Além disso, o desempenho dos elementos híbridos é comparados com outros elementos: FF, elemento de membrana com 3 nós e 9 GDL; All-3i, elemento triangular com deslocamentos quadráticos e que inclui GDL adicionais de rotação; e CST, elemento triangular de deformação constante. O resultado dos elementos foram retirados de Felippa e Alexander [40], como se pode observar na Fig. 5.10.

Tabela 5.4: Resultado dos deslocamentos obtidos para a viga engastada com momento aplicado na extremidade livre.

Elemento	Malha					
	2×2	4×2	8×2	16×2	32×2	64×2
HELMT3	1.0259	3.9225	13.3359	33.3373	53.3357	62.7458
HELMQ4	3.0360	11.1882	34.0206	69.2308	92.3077	98.9691
Solução exata:	$\delta=100$					

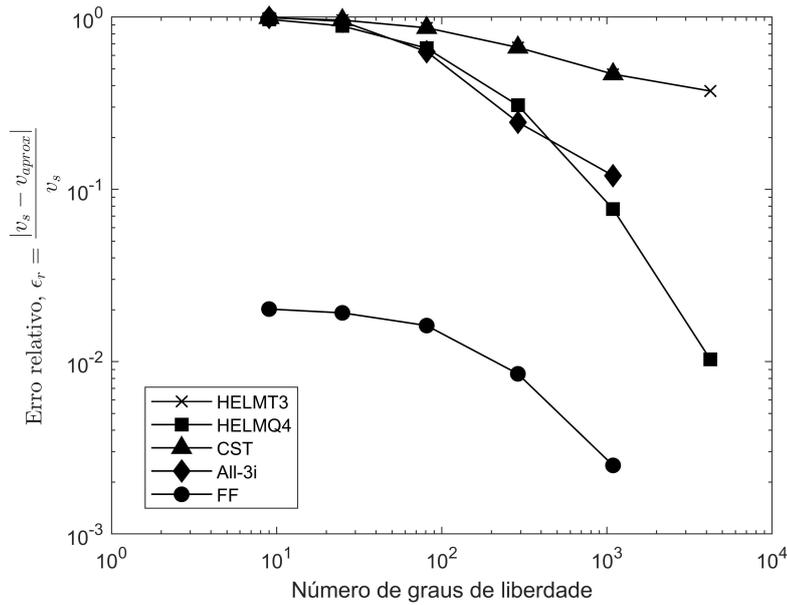


Figura 5.10: Comparação do desempenho dos elementos HELMT3 e HELMQ4 com outros elementos encontrados na literatura, no segundo exemplo numérico.

Como o elemento HELMT3 equivale ao elemento triangular de deformação constante, CST, os resultados obtidos para os dois são idênticos, e não convergem para um valor tão próximo da solução exata quando comparados com o elemento HELMQ4 e elemento triangular FF.

5.1.3.3

Problema da membrana de Cook

O último exemplo que será utilizado para avaliar o desempenho dos elementos híbridos de membrana é o conhecido problema de Cook. Este problema consiste em uma viga engastada com seção variando linearmente, sujeita a uma carga cisalhante $P = 1$ aplicada ao longo da seção da extremidade livre, Fig. 5.11.

As propriedades do material adotadas para esta análise são $E = 1$ e $\nu = 1/3$. Como forma de verificar a convergência do problema para materiais quase incompressíveis adotou-se também $\nu = 0.49995$. Em análise no estado plano de tensões e no estado plano de deformações, as soluções de referência do deslocamento na extremidade livre no ponto médio A são $v_A = 23.95$ [40] e $v_A = 21.18$ [41], respectivamente, com $\nu = 1/3$. As malhas foram refinadas com 2×2 , 4×2 , 8×2 , 16×2 , 32×2 e 64×2 quadriláteros. O exemplo do refinamento da malha para 16×2 é mostrado na Fig. 5.12. Com relação às condições de contorno, os GDL de deslocamentos nas direções x e y foram restringidos para o engastamento da extremidade esquerda. O carregamento

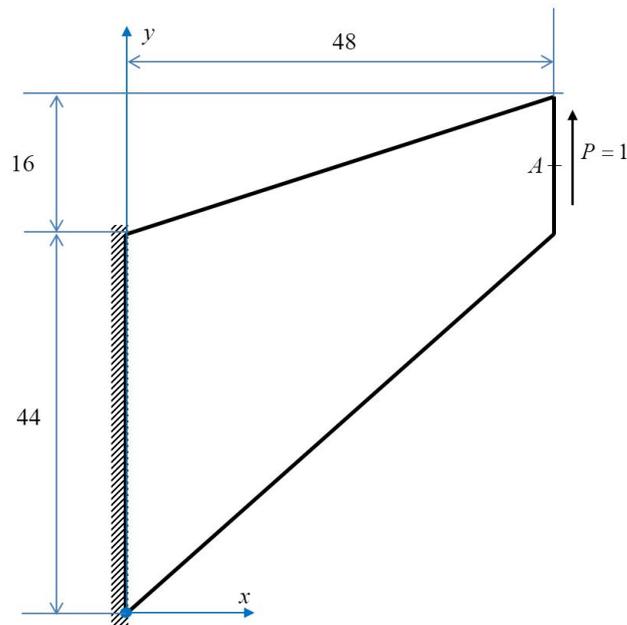


Figura 5.11: Membrana de Cook.

foi aplicado em termos de forças nodais equivalentes.

Os resultados de deslocamento no ponto médio A na extremidade livre da membrana de Cook, para diferentes refinamentos de malha e variação do coeficiente de Poisson, estão resumidos na Fig. 5.13 .

Observa-se que para o material quase incompressível utilizando o elemento HELMT3, a solução não converge e há presença de um travamento no resultado obtido. Já com uso do elemento HELMQ4 com $\nu = 0.49999$, este efeito aparece também, só que o travamento é menor. Esta é uma aplicação apenas acadêmica, já que não se espera resultado satisfatório. Apesar disso, para os demais casos, os elementos HELMT3 e HELMQ4 apresentaram boa convergência para a solução de referência do problema de Cook.

5.2

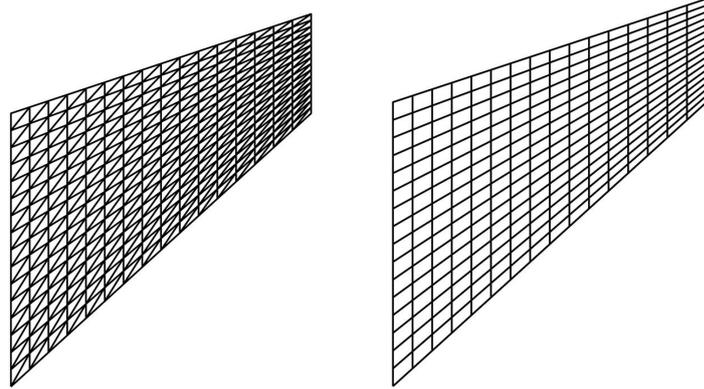
Elementos híbridos de placa

Nesta seção os elementos híbridos de placa HKPT6, HKPQ8 e HMPQ8 são avaliados quanto a sua convergência e a sua precisão por meio de *patch tests* e exemplos numéricos.

5.2.1

Avaliação dos autovalores e suficiência de posto

Para verificar a suficiência de posto e a presença de modos espúrios nos elementos de placa, os autovalores são avaliados para um elemento irregular



5.12(a): Malha 16×16 de elementos HELMT3

5.12(b): Malha 16×16 de elementos HELMQ4

Figura 5.12: Discretização do problema de Cook.

triangular de placa, HKPT6, e elementos irregulares quadrilaterais, HKPQ8 e HKMQ8, cujas geometrias são especificadas na Fig. 5.14.

Adotou-se para os elementos espessura de $t = 0.01$ e para as propriedades do material, $E = 360$ e $\nu = 0.0$. A análise dos autovalores dos elementos estão resumidas na Fig. 5.15.

A partir da Fig. 5.15 é possível notar que os três elementos de placa apresentam somente os três autovalores nulos correspondentes aos modos de corpo rígido da placa, e, conseqüentemente, ausência de modos espúrios de energia.

5.2.2

Patch test para problemas de placas

Nos elementos de placa, assim como nos elementos de membrana, são verificados os *patch tests* para os três modos de corpos rígido de um elemento de placa.

Os vetores referentes aos deslocamentos e às rotações para os três modos de corpo rígido podem ser representados pela matriz \mathbf{W} . Assim, a matriz \mathbf{W} para o elemento triangular HKPT6, por exemplo, é obtida em sua forma não normalizada como

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & -\Delta_1 \eta_x^{12} & -\Delta_2 \eta_x^{23} & -\Delta_3 \eta_x^{31} \\ y_1 & y_2 & y_3 & -\Delta_1 \eta_y^{12} & -\Delta_2 \eta_y^{23} & -\Delta_3 \eta_y^{31} \end{bmatrix}^T \quad (5-5)$$

onde x_i e y_i são as coordenadas globais dos nós do elemento; Δ_i é o fator de conversão do sentido da rotação do sistema local para global, segundo a Tabela 4.1; e η_x e η_y são as componentes das normais ao longo do contorno do

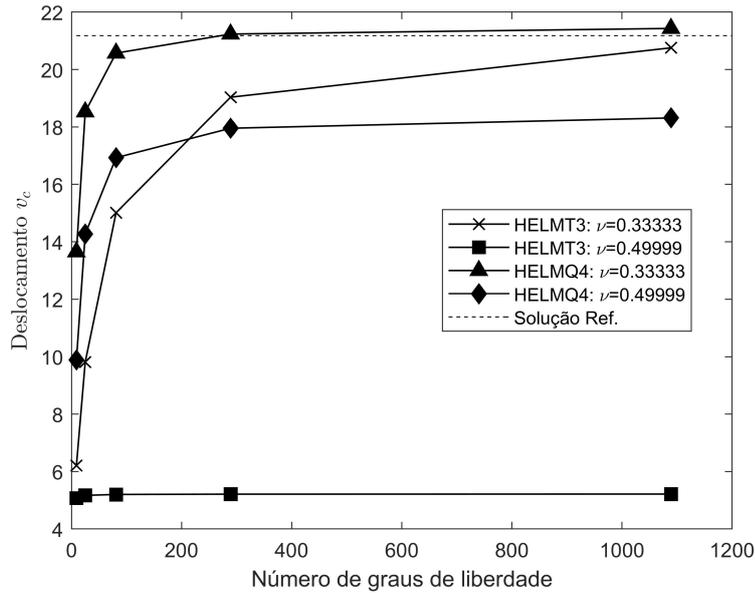


Figura 5.13: Resultados dos deslocamentos da membrana de Cook.

elemento. Para os elementos quadrilaterais de placa, a matriz de \mathbf{W} é obtida de modo análogo.

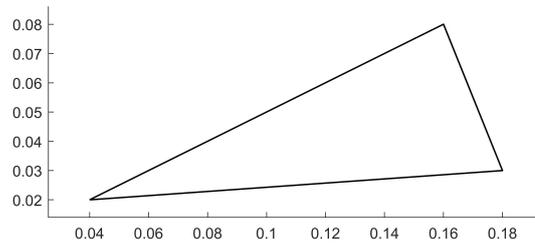
Para que o elemento atenda aos *patch tests* para os modos de deslocamento de corpo rígido, a propriedade espectral $\mathbf{KW} = \mathbf{0}$ deve ser obtida. Utilizando a geometria dos elementos irregulares apresentados na Fig. 5.14, é verificado que, para os três elementos (HKPT6, HKPQ8 e HMPQ8), o produto \mathbf{KW} não produz trabalho. Logo, os elementos passam no *patch test*.

O segundo *patch test* consiste em avaliar o elemento quanto aos três estados de curvatura constante do elemento de placa – κ_{xx} , κ_{yy} e κ_{xy} . Para este teste, um conjunto de funções para *patch tests* de elementos de casca e placa é proposto por Chen [42] e Chen et al [43]. Os autores apresentam uma função de campo de deslocamento que corresponde a um estado misto dos três estados de curvatura constante e que satisfaz as equações de equilíbrio da placa:

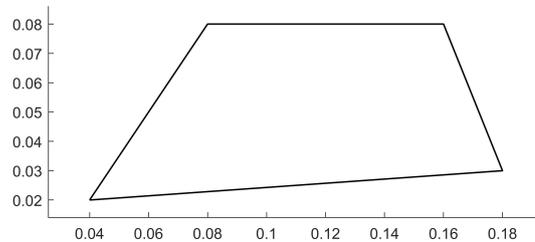
$$\begin{aligned}
 w &= (1 + x + 2y + x^2 + xy + y^2)/2 \\
 \beta_x &= (1 + 2x + y)/2 \\
 \beta_y &= (2 + x + 2y)/2
 \end{aligned}
 \tag{5-6}$$

Para avaliar os elementos de placa triangular e quadrilateral quanto a este *patch test*, malhas são propostas segundo a Fig. 5.16. Os elementos são constituídos de material linear, homogêneo e isotrópico, com $E = 10^5$ e $\nu = 0.30$. Adota-se uma espessura de $t = 0.01$.

Este campo, Eq. (5-6), condiz com momentos constantes $M_{xx} = -0.011111$, $M_{yy} = -0.011111$ e $M_{xy} = -0.033333$ atuando no contorno ex-



5.14(a): HKPT6.



5.14(b): HKPQ8 e HMPQ8.

Figura 5.14: Geometria dos elementos irregulares HELMT3 e HELMQ4 para análise de autovalores.

terno das malhas na Fig. 5.16, que resultam em forças nodais nulas nos nós internos. Assim, montando a malha para os elementos HKPT6, HKPQ8 e HMPQ8, e verificando somente as forças nodais internas através do produto $\mathbf{f} = \mathbf{K}\mathbf{d}$, onde \mathbf{d} é o vetor de deslocamentos e rotações correspondentes ao campo da Eq. (5-6), chega-se aos resultados da Tabela 5.5.

Logo, apenas o elemento triangular de placa HKPT6 passou no *patch test* correspondente aos estados de curvatura constante. Contudo, ao se construir uma malha de elementos quadrilaterais de placa com faces paralelas, notou-se que os elementos passavam no *patch test* de curvatura constante. Desta forma, apenas os elementos quadrilaterais de placa com faces paralelas serão explorados neste trabalho.

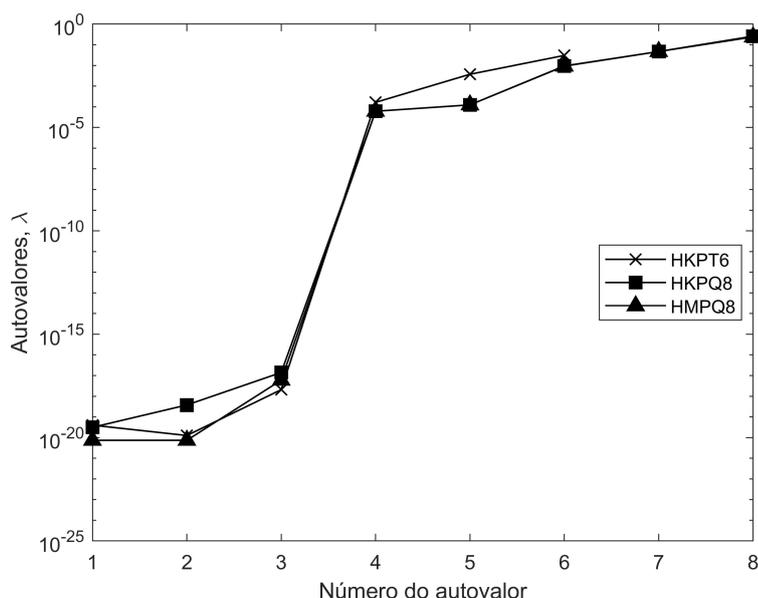


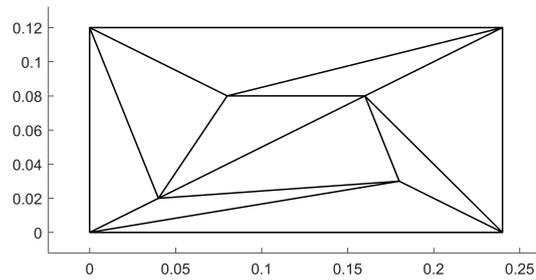
Figura 5.15: Análise dos autovalores dos elementos HKPT6, HKPQ8 e HMPQ8.

Tabela 5.5: Resultado das forças nos nós internos para *patch test* de curvatura constante

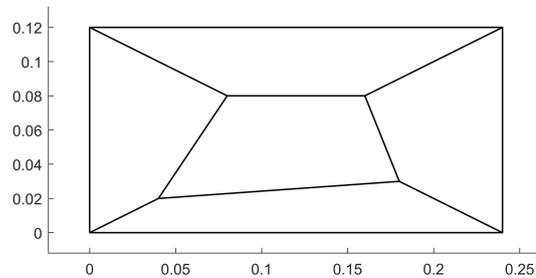
Nó	Coordenadas		Forças nodais para cada elemento		
	x	y	HKPT6	HKPQ8	HMPQ8
1	0.04	0.02	0.00000000	-2.66601779	-1.78460633
2	0.18	0.03	0.00000000	-2.90025117	-1.94304868
3	0.16	0.08	0.00000000	-1.00083529	-0.82624356
4	0.08	0.08	0.00000000	-1.01957175	-0.84285324

5.2.3 Exemplos numéricos para os elementos de placa

Para avaliar o desempenho dos elementos híbridos de placa propostos neste trabalho, os elementos serão sujeitos aos seguintes testes numéricos: (i) placa quadrada simplesmente apoiada sob carregamento uniformemente distribuído; (ii) placa quadrada simplesmente apoiada sob carga pontual centrada, e (iii) placa esbessa simplesmente apoiada sob carregamento uniformemente distribuído. O desempenho dos elementos é, também, comparado ao de outros elementos de placa encontrados na literatura.



5.16(a): Malha com elementos triangulares.



5.16(b): Malha com elementos quadriláteros.

Figura 5.16: Malha para avaliação dos elementos de placa quanto aos estados de curvatura constante.

5.2.3.1

Placa quadrada simplesmente apoiada sob carregamento uniformemente distribuído

O primeiro exemplo numérico consiste em uma placa quadrada simplesmente apoiada de lado $L = 10$ sob carregamento uniformemente distribuído $q = -1$. As propriedades do material adotadas são $E = 10.92$, $\nu = 0.30$, e as placas são avaliadas quanto às seguintes relações entre espessura e comprimento, $t/L = 0.10$ e $t/L = 0.0010$. A geometria da placa é apresentada na Fig. 5.17. A malha é discretizada com as configurações 2×2 , 4×4 , 8×8 e 16×16 , segundo a Fig. 5.18.

O desempenho dos elementos HKPT6, HKPQ8 e HMPQ8 é comparado com o desempenho dos seguintes elementos de placa encontrados na literatura:

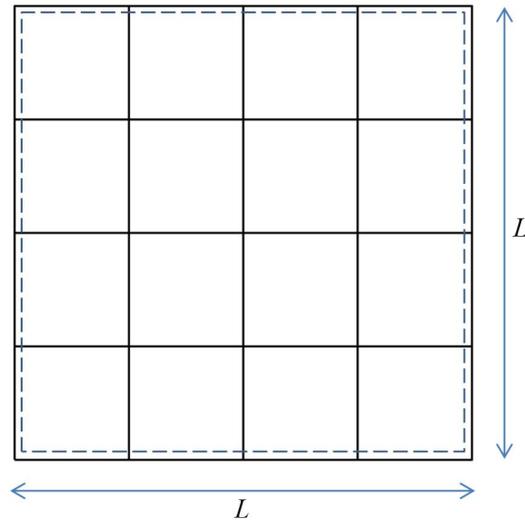
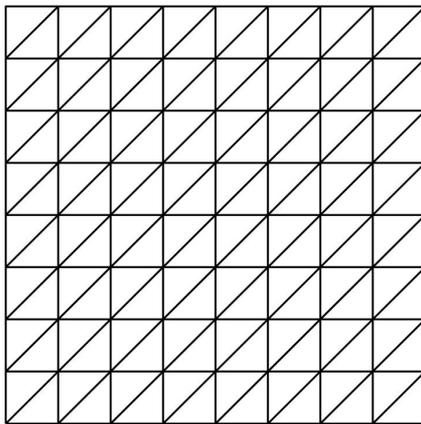
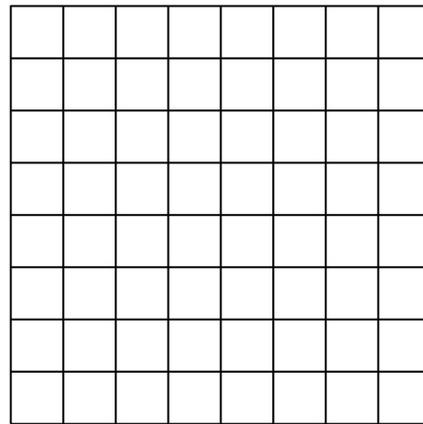


Figura 5.17: Placa quadrada simplesmente apoiada.



5.18(a): HKPT6.



5.18(b): HKPQ8 e HMPQ8.

Figura 5.18: Exemplos de discretização da malha para placa quadrada 8×8 .

- (i) Elemento triangular de placa de Trefftz com 9 GDL, THT [22];
- (ii) Elemento quadrilateral de placa de Trefftz com 12 GDL, QHT [22];
- (iii) Elemento híbrido triangular de Mindlin-Reissner com 18 GDL, TH6- 27β [23];
- (iv) Elemento triangular de placa com 9 GDL, T3BL [44].

Os resultados para os deslocamentos e os momentos no centro da placa para as diferentes espessuras da placa e refinamento da malha são apresentados na Tabela 5.6. O desempenho dos elementos híbrido com relação aos elementos descritos acima é resumido nas Figs. 5.19 e 5.20, comparando o erro relativo percentual para deslocamento e momento no centro da placa.

Tabela 5.6: Deslocamento e momentos no centro da placa simplesmente apoiada sob carregamento uniformemente distribuído com $t = 1$ e $t = 0.01$

Elem.	Malha	$t/L = 0.10$		$t/L = 0.001$	
		$w_c / (\frac{qL^4}{100K})$	$M_c / (\frac{qL^4}{100})$	$w_c / (\frac{qL^4}{100K})$	$M_c / (\frac{qL^4}{100})$
HKPT6	2×2	0.40756992	4.19734589	0.40756992	4.19734589
	4×4	0.40686030	4.73333957	0.40686030	4.73333957
	8×8	0.40649908	4.78370124	0.40649908	4.78370124
	16×16	0.40631130	4.78816058	0.40631130	4.78816058
HKPQ8	2×2	0.57943651	2.36195279	0.57943651	2.36195279
	4×4	0.44469915	4.26684399	0.44469915	4.26684399
	8×8	0.41540569	4.66035249	0.41540569	4.66035249
	16×16	0.40850163	4.75663696	0.40850163	4.75663696
HMPQ8	2×2	0.58869213	1.79695156	0.57943747	2.36195007
	4×4	0.45168090	4.21740265	0.44469994	4.26683841
	8×8	0.42080403	4.62075722	0.41540649	4.66034661
	16×16	0.41128096	4.73620110	0.40850243	4.75663108
THT	2×2	0.4218	4.923	0.4019	4.569
	4×4	0.4257	4.872	0.4055	4.716
	8×8	0.4268	4.814	0.4061	4.770
	16×16	0.4271	4.795	0.4062	4.784
QHT	2×2	0.4265	4.729	0.4052	4.786
	4×4	0.4266	4.766	0.4062	4.788
	8×8	0.4270	4.783	0.4062	4.789
	16×16	0.4272	4.787	0.4062	4.789
TH6-27 β	2×2	0.426390	4.942483	0.406570	5.046513
	4×4	0.426986	4.810216	0.406292	4.863296
	8×8	0.427204	4.792487	0.406243	4.808162
	16×16	0.427264	4.789459	0.406238	4.793554
Solução referência [44]		0.4273	4.7890	0.4062	4.7890

Como se pode observar nas Figs. 5.19 e 5.20, os elementos de placa desenvolvidos apresentam convergência para a solução exata, com exceção para o caso de placa espessa com relação $t/L = 0.10$. Assim, para o problema de placa fina ($t/L = 0.001$), os resultados são satisfatórios quando comparados com elementos envolvendo uma aproximação com polinômios de alta ordem e muitos graus de liberdade, como os elementos QHT e TH6-27 β .

5.2.3.2

Placa quadrada simplesmente apoiada com carregamento pontual centrado

O segundo exemplo consiste em uma placa quadrada simplesmente apoiada sujeita a uma carga pontual $Q = 1$ aplicada no centro da placa. A mesma geometria do exemplo anterior é adotada para esta análise, assim como as propriedades do material e a discretização da malha. O elemento é avaliado para a relação $t/L = 0.10$. Os resultados para o deslocamento máximo da placa são apresentados na Tabela 5.7. Os erros relativo para o deslocamento máximo e as reações com relação à solução analítica [27] do problema são apresentados

Tabela 5.7: Deslocamento máximo e reação no canto da placa quadrada simplesmente apoiada sob carregamento pontual centrado para $t/L = 0.10$.

Elementos	Malha	$w_c/(QL^2)$	R_c/Q
HKPT6	2×2	0.028742661	0.07191781
	4×4	0.018386090	0.10882747
	8×8	0.013876773	0.11925344
	16×16	0.012310018	0.12146668
HKPQ8	2×2	0.019446454	0.03219971
	4×4	0.013735672	0.09183369
	8×8	0.012225376	0.11746936
	16×16	0.011781938	0.12088724
HMPQ8	2×2	0.019881030	0.027332462
	4×4	0.014384150	0.095570500
	8×8	0.012846618	0.117300622
	16×16	0.012160256	0.120712005
Solução exata [27]		0.0116	0.1219

nas Figs. 5.21 e 5.22. É possível notar que, mesmo não passando em todos os *patch tests*, os elementos HKPQ8 e HMPQ8 convergiram para soluções melhores do que as obtidas para o elemento triangular de placa, HKPT6.

5.2.3.3

Placa esconsa simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído

O último exemplo consiste em uma placa esconsa simplesmente apoiada, inclinada em 30° com relação ao eixo x e sujeita a um carregamento uniformemente distribuído $q = -1$. A geometria é especificada na Fig. 5.23, onde foi adotado $L = 10$ e a relação espessura/comprimento foi especificada como $t/L = 0.010$. O material do elemento tem as propriedades $E = 10.92$ e $\nu = 0.30$. A malha foi discretizada de modo análogo ao feito nos exemplos anteriores (Fig. 5.24).

Os resultados para o deslocamento máximo na placa esconsa sob carregamento uniformemente distribuído são mostrados na Tabela 5.8. Além disso, o desempenho dos elemento híbridos de placa é comparado, novamente, com o de outros elementos apresentados na literatura, veja Fig. 5.25.

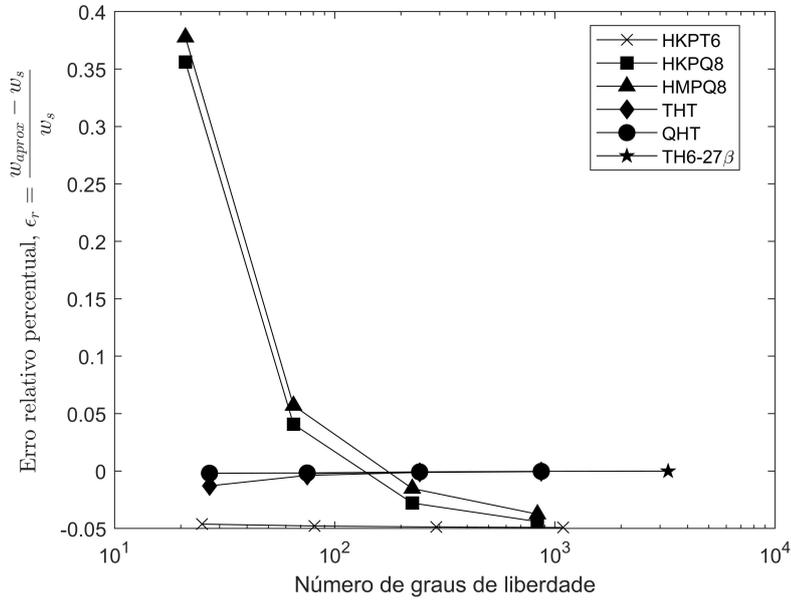
Observa-se dos resultados na Fig.5.25, que os elementos HKPQ8 e HMPQ8 tiveram melhores resultados e convergência do que o elemento HKPT6. Além disso, também, apresentaram boa performance se comparados com elementos que têm mais graus de liberdade, como THT e QHT.

A partir dos resultados avaliados nesta seção, pode-se aferir, que apesar da formulação simples e com o menor número de graus de liberdade possível, os

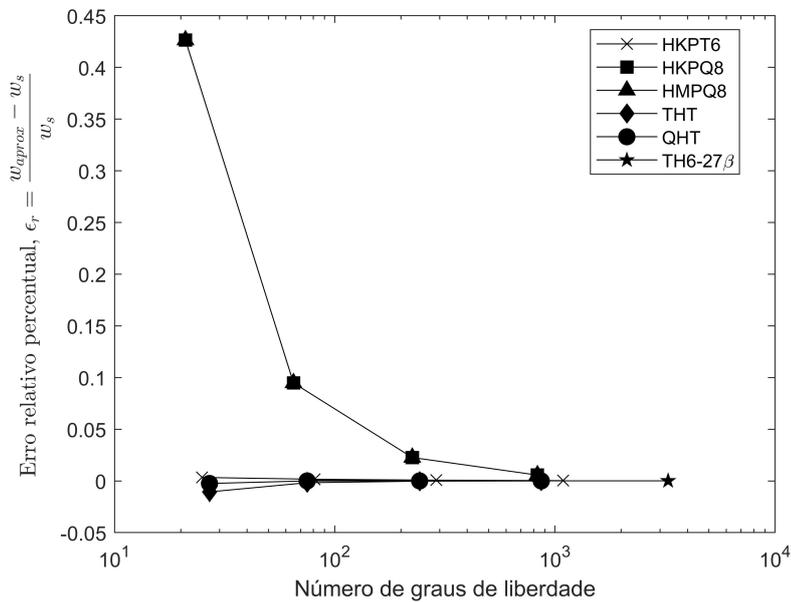
Tabela 5.8: Deslocamento máximo da placa esconsa simplesmente apoiada sob carregamento uniformemente distribuído para $t/L = 0.010$.

Malha	Elementos					
	HKPT6	HKPQ8	HMPQ8	THT	QHT	T3BL
2×2	2.84525280	0.61410912	0.61494379	0.424	0.425	0.422
4×4	1.30229097	0.51915261	0.51978739	0.408	0.413	0.417
8×8	0.67184781	0.45309135	0.45357872	0.410	0.414	0.418
16×16	0.48828124	0.42512052	0.45357872	0.413	0.416	0.420
Solução referência [45]	0.423					

elementos híbridos de placa apresentaram boa convergência, principalmente, para os problemas envolvendo placas finas ou moderadamente espessas.

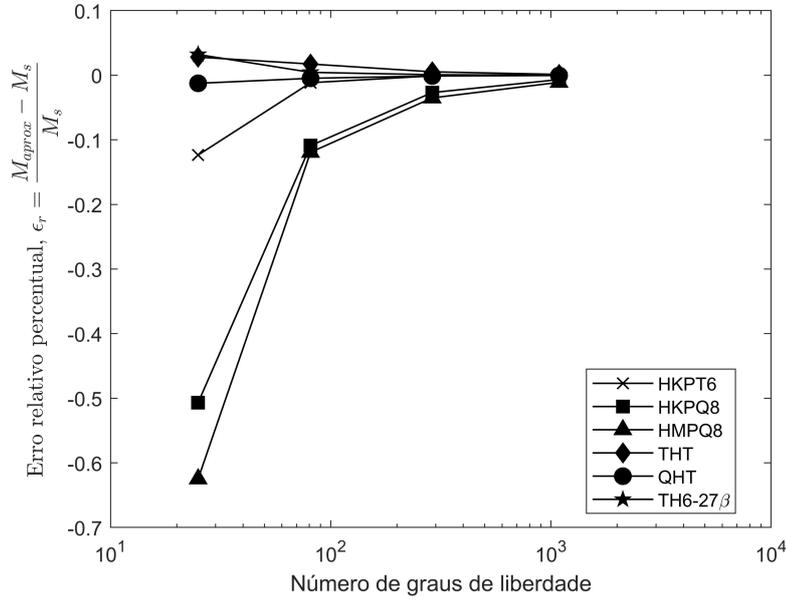


5.19(a): Relação $t/L = 0.10$

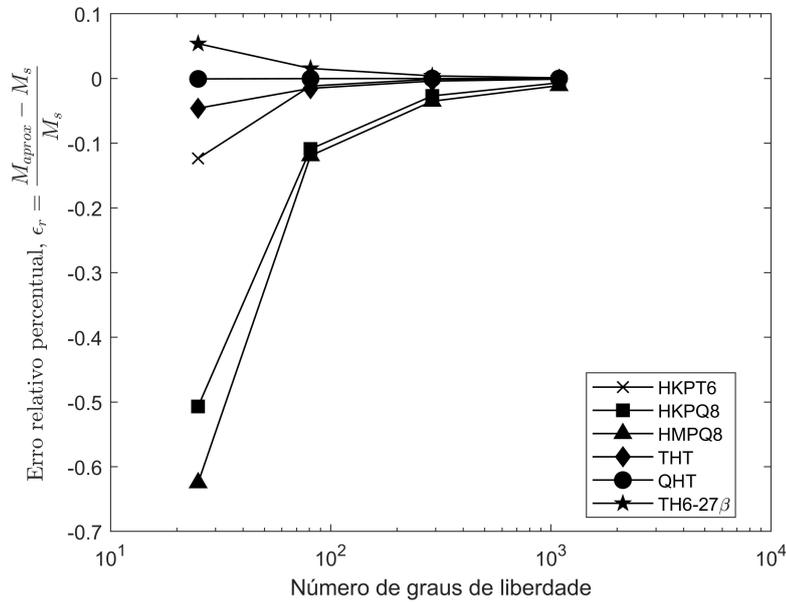


5.19(b): Relação $t/L = 0.001$

Figura 5.19: Comparação do desempenho dos elementos para deslocamento central na placa simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído.



5.20(a): Relação $t/L = 0.10$



5.20(b): Relação $t/L = 0.001$

Figura 5.20: Comparação do desempenho dos elementos para momento central na placa simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído.

Figura 5.21: Resultados para o deslocamento máximo na placa

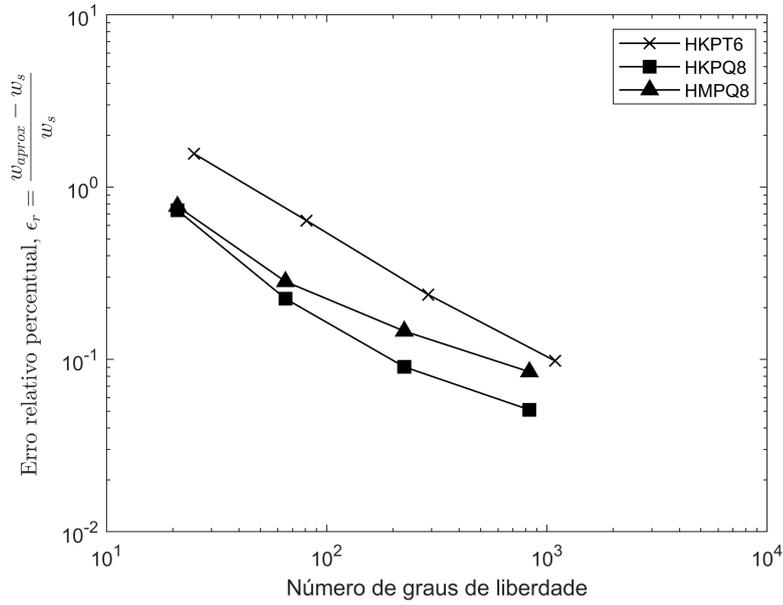


Figura 5.22: Resultados para reação no canto da placa.

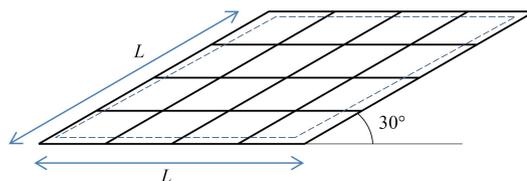
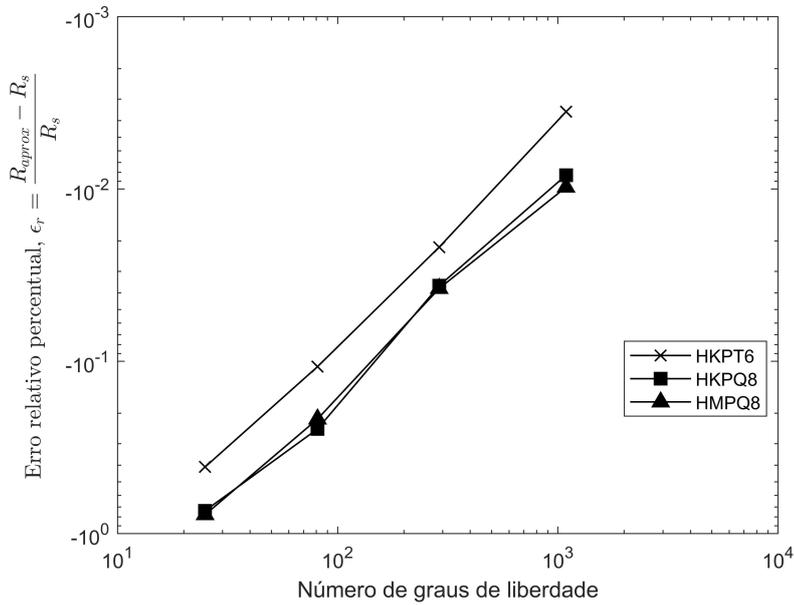


Figura 5.23: Geometria da placa esconsa simplesmente apoiada.

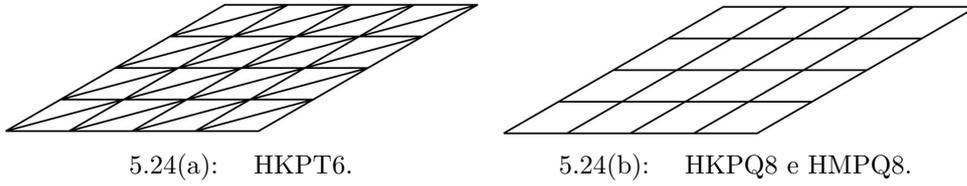


Figura 5.24: Exemplo do refinamento 4×4 para a placa esconsa.

PUC-Rio - Certificação Digital N° 1613084/CA

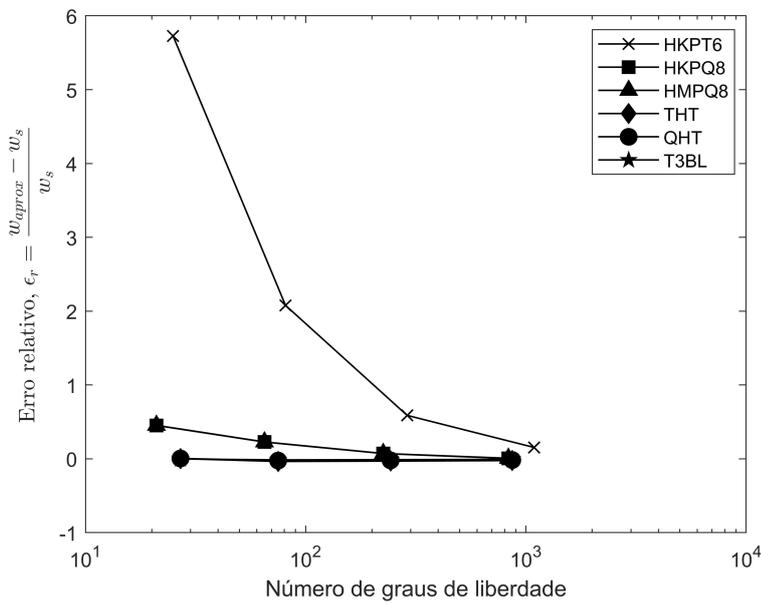


Figura 5.25: Comparação do desempenho dos elementos para deslocamento máximo em placa esconsa simplesmente apoiada com carregamento uniformemente distribuído. ($t/L = 0.010$).

6

Conclusão

A formulação híbrida de elementos finitos permitiu a construção de um conjunto de elementos híbridos poligonais para problemas de estado plano de deformações que atendem à compatibilidade e ao equilíbrio do problema, e que se mostraram uma alternativa eficiente e simples ao método convencional de elementos finitos, desde que são fundamentadas em soluções não-singulares polinomiais, para análise numérica em elasticidade plana. Foi observado nos elementos de membrana que o aumento dos parâmetros de forças nodais internas no elemento não resultava em melhores soluções e apenas acrescentava complexidade ao problema.

A aplicação do método híbrido e a investigação teórica dos problemas de placa permitiram o desenvolvimento de elementos híbridos de placa com uma formulação consistente e que sejam os mais simples quanto possíveis. Os elementos de placa propiciaram boa convergência para a análise numérica de problemas de placa fina e moderadamente espessa. Além disso, a partir de interpretações geométricas da compatibilidade entre as deformações cisalhantes, com base em condições de equilíbrio, foram estabelecidas justificativas consistentes para a composição do campo interno de rotações na formulação dos elementos híbridos de placa.

Deste modo, é possível a construção de elementos de casca tão simples quanto possível pela superposição dos elementos híbridos planos e os elementos de placa desenvolvidos neste trabalho.

6.1

Sugestões para trabalhos futuros

Como sugestões para trabalhos futuros:

- Expandir a formulação híbrida dos elementos finitos de membrana e placa para a análise de problemas dependentes do tempo no domínio da frequência utilizando a técnica de superposição modal avançada [25];
- Investigar a estabilidade de estruturas formadas por segmentos planos de cascas;;
- A partir do desenvolvimento dos elementos de cascas para problemas dependentes do tempo, integrar na matriz de rigidez os aspectos geomé-

tricos e conceituais para a análise numérica de problemas que envolvam grandes deslocamentos, mas pequenas deformações.

Referências bibliográficas

- [1] BAZELEY, G. P.; CHEUNG, Y. K.; IRONS, B. M.; ZIENKIEWICZ, O. C. **Triangular elements in plate bending - conforming and non-conforming solutions.** In: PROCEEDINGS OF THE FIRST CONFERENCE ON MATRIX METHODS IN STRUCTURAL MECHANICS, Ohio (US), 1965.
- [2] VEUBEKE, B. F. **A conforming finite element for plate bending.** International Journal of Solids and Structures, 4:95–108, 1968.
- [3] BATOZ, J. L.; BATHE, K. J.; HO, L. W. **A study of three-node triangular plate bending elements.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, 15:1771–1812, 1980.
- [4] MORLEY, L. S. D. **The constant-moment plate bending element.** The Journal of Strain Analysis for Engineering Design, 6:20–24, 1971.
- [5] LEE, S. W.; PIAN, T. H. H. **Improvement of plate and shell finite elements by mixed formulations.** AIAA Journal, 16:29–34, 1978.
- [6] JIROUSEK, J.; LEON, I. V. **A powerful finite element for plate bending.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 12:77–96, 1977.
- [7] SPILKER, R. L.; MUNIR, N. I. **A hybrid-stress quadratic serendipity displacement Mindlin plate bending element.** Computer and Structures, 12:11–21, 1980.
- [8] SPILKER, R. L.; MUNIR, N. I. **The hybrid-stress model for thin plates.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, 15:1239–1260, 1980.
- [9] TONG, P. **A family of hybrid plate elements.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, 18:1455–1468, 1982.
- [10] LEE, S. W.; ZHANG, J. C. **A six-node finite element for plate bending.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, 21:131–141, 1985.

- [11] JIROUSEK, J.; GUEx, L. **The hybrid-Trefftz finite element model and its application to plate bending.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, 23:651–693, 1986.
- [12] SALEEB, A. F.; CHANG, T. Y. **An efficient quadrilateral element for plate bending analysis.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, 24:1123–1155, 1987.
- [13] MALKUS, D. S.; HUGHES, T. J. R. **Mixed finite element methods – reduced and selective integrations techniques: a unification of concepts.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 15:63–81, 1978.
- [14] BATOZ, J. L.; LARDEUR, P. **A discrete shear triangular nine d.o.f. element for the analysis of thick to very thin plates.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28:533–560, 1989.
- [15] PETROLITO, J. **Hybrid-Trefftz quadrilateral elements for thick plate analysis.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 78:331–351, 1990.
- [16] JIROUSEK, J.; WRÓBLEWSKI, A.; QIN, Q. H.; HE, X. Q. **A family of quadrilateral hybrid-Trefftz p-elements for thick plate analysis.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 127:315–344, 1995.
- [17] PILTER, R. **A quadrilateral hybrid-Trefftz plate bending element for the inclusion of warping based on a three-dimensional plate formulation.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, 33:387–408, 1992.
- [18] AURICCHIO, F.; TAYLOR, R. L. **A triangular thick plate finite element with an exact thin limit.** Finite Element in Analysis and Design, 19:57–68, 1995.
- [19] PEREIRA, E. M. B. R.; FREITAS, J. A. T. **A hybrid-mixed finite element model based on Legendre polynomials for Reissner-Mindlin plates.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 136:111–126, 1996.
- [20] AYAD, R.; RIGOLOT, A.; TALBI, N. **An improved three-node hybrid-mixed element for Mindlin-Reissner plates.** International Journal for Numerical Methods in Engineering, 51:919–942, 2001.

- [21] MIRANDA, S.; UBERTINI, F. **A simple hybrid stress element for shear deformable plates**. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 65:808–833, 2006.
- [22] PAJAND, M. R.; KARKON, M. **Two efficient hybrid-Trefftz elements for plate bending analysis**. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 9:43–67, 2012.
- [23] LI, T.; MA, X.; XILI, J.; CHEN, W. **Higher-order hybrid stress triangular Mindlin plate element**. *Computational Mechanics*, 58:911–928, 2016.
- [24] DUMONT, N. A.; PRAZERES, P. G. C. **A family of advanced hybrid finite elements for the general analysis of time-dependent problems and non-homogeneous materials**. In: XXV CILAMCE – XXV IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, p. 15 em CD, Recife, 10-12 Nov 2004.
- [25] DUMONT, N. A.; PRAZERES, P. G. C. **Hybrid dynamic finite element families for the general analysis of time-dependent problems**. In: ICSSD 2005 - THIRD INTERNATIONAL CONFERENCE ON STRUCTURAL STABILITY AND DYNAMICS, p. 10 em CD, Flórida (EUA), 19-22 Jun 2005.
- [26] PRAZERES, P. G. C. **Desenvolvimento de elementos finitos híbridos para a análise de problemas dinâmicos usando superposição modal avançada**. Dissertação de mestrado em Engenharia Civil - Estruturas, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro-RJ, 2005.
- [27] TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of plates and shells**. McGraw-Hill Book Company, New York (NY, USA), 1st edition, 1959.
- [28] REDDY, J. N. **Theory and analysis of elastic plates and shells**. CRC Press, New York (NY, USA), 2nd edition, 2007.
- [29] MARGUERRE, K.; WOERNLE, H. T. **Elastic plates**. Blaisdell Publishing Company, Massachusetts (MA, USA), 1st edition, 1969.
- [30] DUMONT, N. A. **Notas de Aula: Método Híbrido dos Elementos de Contorno**. Departamento de Engenharia Civil, PUC-Rio, Rio de Janeiro, 1996.
- [31] PIAN, T. H. H.; WU, C. **Hybrid and incompatible finite element methods**. Chapman and Hall/CRC, USA, 2005.

- [32] PIAN, T. H. H. **Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distributions**. American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal, 2:1333–1336, 1964.
- [33] PIAN, T. H. H. **State-of-the-art development of hybrid/mixed finite element method**. Finite Elements in Analysis and Design, 21:5–20, 1995.
- [34] DUMONT, N. A. **The hybrid boundary element method**. In: Brebbia C.A., Wendland W.L., K. G., editor, MATHEMATICAL AND COMPUTATIONAL ASPECTS, volumen 9/1 de **Boundary Elements IX**. Springer, Berlin, Heidelberg, 1987.
- [35] DUMONT, N. A.; AGUILAR, C. A. **Linear algebra issues in a family of advanced hybrid finite elements**. In: J. Murín, V. Kutis, R. D., editor, COMPUTATIONAL MODELLING AND ADVANCED SIMULATIONS, Computational Methods in Applied Science, chapter 14, p. 255–275. Springer, Verlag, 2011.
- [36] CHAVES, R. A. P. **O método híbrido simplificado dos elementos de contorno aplicado a problemas dependentes do tempo**. Tese de doutorado, Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.
- [37] ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; ZHU, J. Z. **The finite element method: its basis and fundamentals**. Elsevier, Oxford (UK), 6th edition, 2005.
- [38] MACNEAL, R. H.; HARDER, R. L. **A proposed standard set of problems to test finite element accuracy**. Finite Elements in Analysis and Design, 1:3–20, 1985.
- [39] TAYLOR, R. L.; SIMO, J. C.; ZIENKIEWICZ, O. C.; CHAN, A. C. H. **The patch test – a condition for assessing FEM convergence**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 22:39–62, 1986.
- [40] FELIPPA, C. A.; ALEXANDER, S. **Membrane triangle with corner drilling freedoms–III. implementation and performance evaluation**. Finite Elements in Analysis and Design, 12:203–239, 1992.
- [41] RUPP, C. J.; HOWARD, M.; WEICKUM, G. **Incompressible mixed (u/p) elements for the CAS FEM code**. Center for Aerospace Structures. Department of Aerospace Engineering Sciences. University of Colorado., 2006.

- [42] CHEN, W. **Enhanced patch test of finite element methods**. Science in China: Series G Physics, Mechanics and Astronomy, 49:213–227, 2006.
- [43] CHEN, W.; WANG, J.; ZHAO, J. **Functions for patch test in finite element analysis of the Mindlin plate and the thin cylindrical shell**. Science in China: Series G Physics, Mechanics and Astronomy, 50:762–767, 2009.
- [44] AURICCHIO, F.; TAYLOR, R. L. **Linked interpolation for Reissner-Mindlin plate elements: Part II - a simple triangle**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 36:3057–3066, 1993.
- [45] BABUSKA, I.; SCAPOLLA, T. **Benchmark computation and performance evaluation for a rhombic plate bending problem**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 28:155–179, 1989.