



**Rodrigo Nascimento Barros**

**Análise dinâmica de treliças e pórticos  
tridimensionais usando uma técnica avançada  
de superposição modal**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Estruturas do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do Centro Técnico Científico da PUC-Rio.

Orientador : Prof. Ney Augusto Dumont  
Co-orientador: Dr. Carlos Andrés Aguilar Marón

Rio de Janeiro  
Maio de 2017



**Rodrigo Nascimento Barros**

**Análise dinâmica de treliças e pórticos  
tridimensionais usando uma técnica avançada  
de superposição modal**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Estruturas do Departamento de Engenharia Civil e Ambiental do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Ney Augusto Dumont**

Orientador

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

**Dr. Carlos Andrés Aguilar Marón**

Co-orientador

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental – PUC-Rio

**Prof. Raul Rosas e Silva**

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-RJ

**Prof. Sebastião Arthur Lopes de Andrade**

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-RJ

**Prof. Francisco Célio de Araújo**

Universidade Federal de Ouro Preto – UFOP

**Prof. Márcio da Silveira Carvalho**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico – PUC-Rio

Rio de Janeiro, 09 de Maio de 2017

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

## **Rodrigo Nascimento Barros**

Graduou-se em Engenharia Civil na Universidade Federal do Pará em 2014. No mesmo ano iniciou o curso de Mestrado em Engenharia Civil na PUC-Rio, em estruturas, atuando na linha de pesquisa de Método Híbrido dos Elementos Finitos e Dinâmica das Estruturas.

### Ficha Catalográfica

Barros, Rodrigo Nascimento

Análise dinâmica de treliças e pórticos tridimensionais usando uma técnica avançada de superposição modal / Rodrigo Nascimento Barros; orientador: Ney Augusto Dumont; co-orientador: Carlos Andrés Aguilar Marón. – 2017.

88 f. : il. color. ; 30 cm

Dissertação (mestrado)–Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil, 2017.

Inclui bibliografia

1. Engenharia civil – Teses. 2. Estruturas de pórtico. 3. Dinâmica estrutural. 4. Análise modal avançada. 5. Autovalores não lineares. I. Dumont, Ney Augusto. II. Aguilar Marón, Carlos Andrés. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. IV.

## Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer ao meu orientador Prof. Ney Dumont e o meu co-orientador Dr. Carlos Aguilar. Eu não tenho palavras para expressar minha sincera gratidão a eles e eu me considero afortunado por ter trabalhado com eles nos últimos dois anos.

Aos meus colegas da sala 617, onde a todo momento foram extremamente solícitos e pacientes para solucionar as minhas dúvidas e proporcionarem muitos momentos de alegria.

A minha namorada Jéssica por todo apoio e força nos momentos difíceis na vida e em especial no desenvolvimento desta minha dissertação de mestrado.

Serei eternamente grato aos meus pais Rosenil e Sueli, meu irmão Paulo Victor e sua esposa Larissa, meus tios Raimundo e Márcia, meu primo Anthony e sua esposa Catarina por todo apoio, suporte e confiança desde a minha aprovação no curso de mestrado em engenharia civil pela PUC-Rio.

Agradeço a Deus por iluminar o meu caminho nesta jornada do meu curso de mestrado.

Por último, mas não menos importante, gostaria de agradecer à CAPES pelo apoio financeiro e à PUC-Rio pela bolsa de isenção de mensalidades do curso de mestrado.

## Resumo

Barros, Rodrigo Nascimento; Dumont, Ney Augusto; Aguilar, Carlos Andrés Marón. **Análise dinâmica de treliças e pórticos tridimensionais usando uma técnica avançada de superposição modal**. Rio de Janeiro, 2017. 88p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O método híbrido dos elementos finitos, proposto por Pian com base no potencial de Hellinger-Reissner, estabeleceu um novo paradigma entre as formulações de discretização numérica de um problema de elasticidade. Uma proposta feita por Przemieniecki – para a análise generalizada de vibração livre de elementos de treliça e de viga – foi incorporada por Dumont aos métodos híbridos dos elementos finitos e de contorno e generalizada ainda mais para a análise de problemas dependentes do tempo em termos de um procedimento de superposição modal avançado, que se baseia na resolução de um problema não linear de autovalores e que permite levar em conta de maneira adequada condições iniciais gerais de contorno, assim como ações de domínio. O presente trabalho apresenta as principais características do desenvolvimento feito por Dumont para aplicação específica a estruturas aporticadas e investiga diversos exemplos disponíveis na literatura de dinâmica estrutural clássica para mostrar que muitos resultados apresentados são bastante imprecisos pela falta de um cuidadoso estudo de convergência.

## Palavras-chave

Estruturas de pórtico; Dinâmica estrutural; Análise modal avançada; Autovalores não lineares.

## Abstract

Barros, Rodrigo Nascimento; Dumont, Ney Augusto (Advisor); Aguilar, Carlos Andrés Marón (Co-advisor). **Dynamic analysis of space trusses and frames using an advanced mode superposition technique.** Rio de Janeiro, 2017. 88p. Dissertação de Mestrado – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The hybrid finite element method, proposed by Pian on the basis of the Hellinger-Reissner potential, has proved itself a conceptual breakthrough among the discretization formulations. A proposition made by Przemieniecki – for the generalized free vibration analysis of truss and beam elements – was incorporated into the hybrid finite/boundary element method developed by Dumont and extended to the analysis of time-dependent problems by making use of an advanced mode superposition procedure that is based on a nonlinear eigenvalue analysis and adequately takes into account general initial conditions as well as general body actions. This work presents all the features of the formulation as applied to frame structures and assesses several examples available in the technical literature to show that remarkable improvements may be achieved – and actually should be taken into account – with the proposed formulation when compared to the classical structural dynamics.

## Keywords

Frame Structures; Structural Dynamics; Advanced Modal Analysis; Nonlinear Eigenvalues.

## Sumário

1 Introdução	<b>13</b>
1.1 Motivação do trabalho	13
1.2 Objetivo do trabalho	14
1.3 Organização do trabalho	14
2 Método híbrido dos elementos finitos	<b>15</b>
2.1 Conceitos básicos da teoria da elasticidade	15
2.2 Formulação do problema	17
2.3 Formulação no domínio da frequência	18
2.4 Formulação do método híbrido dos elementos finitos	19
3 Técnica de superposição modal avançada	<b>22</b>
3.1 Expansão das matrizes na forma de série de frequência	22
3.2 Problema de autovalor não linear	23
3.3 Processo de superposição modal	24
4 Elementos unidimensionais	<b>26</b>
4.1 Elemento de treliça	26
4.1.1 Formulação do problema	26
4.1.2 Matriz de rigidez	27
4.2 Elemento de viga	29
4.2.1 Formulação do problema	30
4.2.2 Matriz de rigidez	31
4.3 Elemento de torção	37
4.3.1 Matriz de rigidez	38
4.4 Elemento de viga tridimensional	39
4.5 Elemento de treliça tridimensional	42
5 Exemplos numéricos	<b>46</b>
5.1 Exemplo 01 - treliça plana	46
5.2 Exemplo 02 - treliça plana	51
5.3 Exemplo 03 - pórtico bidimensional	59
5.4 Exemplo 04 - pórtico espacial	63
5.5 Exemplo 05 - pórtico tridimensional	67
5.6 Exemplo 06 - treliça tridimensional	70
6 Conclusão	<b>78</b>
6.1 Sugestões para trabalhos futuros	79

7 Referências bibliográficas	<b>80</b>
A Dimensionamento de perfil metálico	<b>82</b>
A.1 Combinações	82
A.2 Resistência a tração	83
A.3 Resistência a compressão	84
A.4 Perfil tubular Circular	87

## Lista de Figuras

Figura 2.1 Corpo elástico em equilíbrio. [6].....	16
Figura 4.1 Elemento de Treliça. [8].....	26
Figura 4.2 Elemento de Treliça: a) sistema de coordenadas para a matriz de rigidez e sistema interno de coordenadas; b) domínio, contorno e cossenos diretores.[8].....	28
Figura 4.3 a) sistema de coordenadas da viga; (b) convenção de esforços da viga. [8].....	30
Figura 4.4 Sistema de coordenadas: (a) local e (b) global da viga. [8].....	30
Figura 4.5 Sistema de coordenadas locais de um elemento de treliça no plano. [8].....	36
Figura 4.6 Elemento de torção: (a) sistema de coordenadas para a matriz de rigidez e (b) convenção de torção (T) para viga.....	39
Figura 4.7 Elemento de viga tridimensional.....	39
Figura 4.8 Elemento de treliça tridimensional.....	42
Figura 5.1 (a) Treliça plana; (b) Seção transversal adotada; (c) Carregamento dinâmico.....	46
Figura 5.2 Resposta calculada pela técnica da superposição modal: por Weaver [14] e avançada com uma matriz de massa (2nós_1MM).....	47
Figura 5.3 Resposta do nó 2 da treliça de dois nós usando os perfis TQ e até seis matrizes de massa.....	49
Figura 5.4 Comparação entre a resposta da treliça de cinco nós usando perfis TC e até seis matrizes de massa e a obtida por Weaver [14].....	50
Figura 5.5 Comparação das frequências da treliça de dois nós, perfis TQ e até seis matrizes de massa com das três primeiras da estrutura de cinco nós e uma matriz de massa (5nós_1MM).....	50
Figura 5.6 Frequências da treliça de cinco nós usando perfis TQ e até seis matrizes de massa.....	51
Figura 5.7 (a) Treliça plana; (b) Impulso aplicado; (c) Seção transversal tubular retangular (TQ) e tubular circular (TC). ....	51
Figura 5.8 Comparação da resposta da treliça de oito nós e uma matriz de massa com a obtida por Weaver [14]. ....	52
Figura 5.9 Respostas da estrutura de oito nós usando perfis TC e com até seis matrizes de massa. ....	53
Figura 5.10 Respostas da estrutura de oito nós usando perfis TQ e com até seis matrizes de massa. ....	54
Figura 5.11 Respostas da estrutura de 24 nós usando perfis TC e com até seis matrizes de massa. ....	54
Figura 5.12 Respostas da estrutura de 24 nós usando perfis TQ e com até seis matrizes de massa. ....	55
Figura 5.13 Frequências da estrutura de 24 nós usando perfis TQ e com até seis matrizes de massa. ....	56
Figura 5.14 Frequências da estrutura de 24 nós usando perfis TC e com até seis matrizes de massa. ....	57

Figura 5.15 Comparação entre a resposta da treliça de 24 nós usando perfis TQ e uma matriz de massa com a obtida por Weaver [14]. .....	57
Figura 5.16 Comparação entre a resposta da treliça de 24 nós usando perfis TC e uma matriz de massa com a obtida por Weaver [14]. .....	58
Figura 5.17 Comparação das frequências da treliça de oito nós, perfis TC e até seis matrizes de massa com as 14 primeiras da estrutura de 24 nós. ....	58
Figura 5.18 Comparação das frequências da treliça de oito nós, perfis TQ e até seis matrizes de massa com as 14 primeiras da estrutura de 24 nós. ....	59
Figura 5.19 (a) Pórtico plano; (b) Impulso aplicado; (c) Seção transversal adotada que atenda as informações do exemplo. ....	59
Figura 5.20 Resposta do nó 4 pela técnica da superposição modal avançada com uma matriz de massa comparada com a calculada por Weaver [14] . ....	60
Figura 5.21 Resposta do nó 4 da estrutura de quatro nós, usando a técnica da superposição modal avançada e até seis matrizes de massa. ....	60
Figura 5.22 Comparação da resposta do nó 4 do pórtico de quatro nós, utilizando e até seis matrizes de massa com o de dez nós e uma matriz de massa. ....	62
Figura 5.23 Comparação das frequências do pórtico de quatro nós e utilizando até seis matrizes de massa com o de dez nós e uma matriz de massa. ....	62
Figura 5.24 (a) Pórtico espacial; (b) Impulso aplicado. ....	63
Figura 5.25 Resposta do nó 1 da estrutura de um nó, usando a técnica da superposição modal avançada com até seis matrizes de massa. ....	64
Figura 5.26 Resposta do nó 1 da estrutura de 13 nós usando a técnica da superposição modal avançada com até seis matrizes de massa. ....	65
Figura 5.27 Frequências do pórtico de 13 nós com até seis matrizes de massa. ....	66
Figura 5.28 Comparação das frequências do pórtico de um nó e até seis matrizes de massa com do pórtico de 13 nós. ....	66
Figura 5.29 (a) Pórtico tridimensional; (b) Seção transversal dos elemento do pórtico; (c) Impulso aplicado. ....	67
Figura 5.30 Resposta do nó 9 do pórtico de oito nós usando a técnica da superposição modal avançada com até seis matrizes de massa. ....	68
Figura 5.31 Frequências da estrutura de 24 nós usando até seis matrizes de massa. ....	69
Figura 5.32 Comparação das respostas do pórtico de oito e 24 nós e uma matriz de massa. ....	69
Figura 5.33 Comparação das frequências da estrutura de oito nós e até seis matrizes de massa com as 48 primeiras do pórtico de 24 nós. ....	70

Figura 5.34 (a) Treliça espacial; (b) Perfis utilizados; (c) Impulso aplicado. ....	70
Figura 5.35 Resposta do nó 3 da treliça de um nó usando perfil TQ com até seis matrizes de massa. ....	72
Figura 5.36 Resposta do nó 3 da treliça de um nó usando perfil TC com até seis matrizes de massa. ....	73
Figura 5.37 Resposta do nó 3 da treliça de 15 nós usando perfil TQ e com até seis matrizes de massa. ....	73
Figura 5.38 Resposta do nó 3 da treliça de 15 nós usando perfil TC e com até seis matrizes de massa. ....	74
Figura 5.39 Frequências da estrutura de 15 nós usando perfil TQ e com até seis matrizes de massa. ....	75
Figura 5.40 Frequências da estrutura de 15 nós usando perfil TC e com até seis matrizes de massa. ....	76
Figura 5.41 Comparação das frequências da treliça de um nó usando perfil TC e até seis matrizes de massa com a de 15 nós e uma matriz de massa. ....	76
Figura 5.42 Comparação das frequências da treliça de um nó usando perfil TQ e até seis matrizes de massa com a de 15 nós e uma matriz de massa. ....	77

## Lista de Tabelas

Tabela 5.1 Frequências obtidas por Weaver [14] e as calculadas com uma matriz de massa (1MM). .....	47
Tabela 5.2 Propriedades geométricas dos perfis quadrados vazados (TQ). .....	48
Tabela 5.3 Frequências da treliça de dois nós usando perfis TQ e com até seis matrizes de massa. ....	48
Tabela 5.4 Três primeiras e últimas frequências da estrutura de cinco nós usando até seis matrizes de massa. ....	49
Tabela 5.5 Frequências calculadas utilizando uma matriz de massa (1MM), juntamente com as encontradas por Weaver [14].	52
Tabela 5.6 Propriedades geométricas dos perfis dimensionados .	53
Tabela 5.7 Seis primeiras e últimas frequências da estrutura de 24 nós usando perfis TQ e com até seis matrizes de massa. ....	55
Tabela 5.8 Seis primeiras e últimas frequências da estrutura de 24 nós usando perfis TC e com até seis matrizes de massa. ....	56
Tabela 5.9 Três primeiras e últimas frequências da estrutura de quatro nós calculadas com até seis matrizes de massa. ....	61
Tabela 5.10 Três primeiras e últimas frequências da estrutura de dez nós calculadas com até seis matrizes de massa. ....	61
Tabela 5.11 Propriedades geométricas e do material. [15] .....	63
Tabela 5.12 Frequências da estrutura de um nó com até seis matrizes de massa, juntamente com as de Paz [15]. ....	64
Tabela 5.13 Frequências da estrutura de 13 nós e usadas até seis matrizes de massa. ....	65
Tabela 5.14 Propriedades das seções transversais. ....	68
Tabela 5.15 Duas primeiras e últimas frequências da estrutura de oito nós calculas utilizando até seis matrizes de massa, juntamente com as de Petyt [16]. ....	68
Tabela 5.16 Frequências da estrutura de um nó e uma matriz de massa (1MM), juntamente com as fornecidas por Paz[15]. ....	71
Tabela 5.17 Propriedades geométricas dos perfis adotados. ....	71
Tabela 5.18 Frequências da estrutura de um nó usando perfil TQ e com até seis matrizes de massa. ....	72
Tabela 5.19 Frequências da estrutura de um nó usando perfil TC e com até seis matrizes de massa. ....	72
Tabela 5.20 Frequências da estrutura de 15 nós usando o perfil TQ e com até seis matrizes de massa. ....	74
Tabela 5.21 Frequências da estrutura de 15 nós usando o perfil TC e com até seis matrizes de massa. ....	75

# 1

## Introdução

Com a evolução dos computadores nas últimas décadas alguns métodos numéricos foram desenvolvidos, dentre eles o *Método dos Elementos Finitos* (MEF). O MEF é um método numérico aproximado para soluções de problemas de meios contínuos descritos por equações diferenciais, para determinadas condições de contorno e iniciais. Ele consiste na divisão do domínio em subdomínios. Estes subdomínios têm geometrias mais simples (retangular ou triangular, por exemplo) e os problemas podem ser resolvidos por meio de cálculos aproximados. Em 1969, Pian e Tong [1] apresentaram um artigo que formulava métodos de elementos finitos baseados em princípios variacionais, dentre eles os métodos híbridos.

Em 1987, Dumont [2] propôs o método híbrido dos elementos de contorno, inspirado nos desenvolvimentos feitos por Reisser [3] e Pian [4]. Em 2005, Dumont e Prazeres apresentam uma nova abordagem das ferramentas do método híbrido dos elementos de contorno, agora no contexto do método dos elementos finitos. Assim foi desenvolvido o *Método Híbrido dos elementos Finitos* para problemas dinâmicos. Ver Aguilar [6], Prazeres [8] e Oliveira [10] para maiores detalhes e aplicações desta nova abordagem.

Dumont [5] apresenta uma ferramenta matemática denominada *técnica da superposição modal avançada*, que permite resolver diversos problemas, em termos de elementos finitos híbridos, como problemas de dinâmica para materiais homogêneos.

Este trabalho aborda problemas dinâmicos sem amortecimento envolvendo elementos unidimensionais utilizando o *Método Híbrido dos Elementos Finitos* e a técnica da superposição modal avançada.

### 1.1

#### Motivação do trabalho

A literatura técnica sobre dinâmica das estruturas apresenta resultados (frequências e respostas) usando somente uma matriz de massa (dinâmica clássica). Aqui serão reproduzidos alguns desses estudos descritos por Weaver [14], Paz [15] e Petyt [16] com o intuito de verificar se os resultados obtidos

através da formulação clássica, da dinâmica das estruturas, convergem para os calculados quando mais de uma matriz de massa é usada.

## 1.2

### Objetivo do trabalho

O presente trabalho tem como objetivo verificar a convergência: das frequências quando mais de uma matriz de massa é utilizada; das respostas ao empregar a técnica da superposição modal avançada, em problemas bi e tridimensionais.

## 1.3

### Organização do trabalho

Este trabalho está organizado em sete capítulos. Este primeiro faz uma breve apresentação do *Método Híbrido dos Elementos Finitos* e da técnica da superposição modal avançada, além de apresentar a motivação e os objetivos.

No Capítulo 2 está o desenvolvimento do Método Híbrido dos Elementos Finitos para elasticidade, inicialmente no domínio do tempo e em seguida transformado para o domínio da frequência. Além disso, o Capítulo 2 apresenta a construção das matrizes de flexibilidade, transformação cinemática e de rigidez.

A técnica da superposição modal avançada é apresentada no Capítulo 3, que começa pela expansão em série das matrizes de flexibilidade, transformação cinemática e rigidez efetiva. Em seguida, o problema de autovalor não-linear e as equações diferenciais acopladas de alta ordem são mostrados. Estas equações são transformadas em um sistema de equações diferenciais desacopladas de segunda ordem.

O desenvolvimento e a construção das matrizes de rigidez efetivas dos elementos de treliça, viga e torção estão presentes no Capítulo 4. Essas matrizes são montadas para os sistemas de coordenadas bi e tridimensionais.

O Capítulo 5 apresenta os exemplos numéricos, que começa por treliças bidimensionais, seguidos por pórticos bi e tridimensionais e termina com treliça tridimensional. Todos os exemplos expostos foram extraídos da literatura e/ou de trabalhos acadêmicos anteriores.

As conclusões estão no Capítulo 6, e são a respeito do método da superposição modal avançada e em relação aos exemplos expostos no Capítulo 5. O capítulo finaliza com sugestões para futuros trabalhos.

As Referências Bibliográficas utilizadas no desenvolvimento deste trabalho são apresentadas logo após as conclusões e o Apêndice A apresenta o dimensionamento dos perfis metálicos empregados nos exemplos do Capítulo

5. Todo o processo foi desenvolvido seguindo as normas técnicas brasileiras vigentes.

## 2

### Método híbrido dos elementos finitos

Neste capítulo serão mostradas as equações do método híbrido dos elementos finitos. Os conceitos provenientes da teoria da elasticidade em casos dinâmicos serão introduzidos para que haja uma base consistente na formulação. Depois, a formulação generalizada do potencial de Hellinger – Reissner será mostrada. A formulação para o desenvolvimento de problemas dinâmicos no domínio do tempo baseada no método híbrido dos elementos finitos será mostrada. Por último, a formulação do método para problemas aplicados no domínio da frequência é apresentada.

#### 2.1

##### Conceitos básicos da teoria da elasticidade

Os conceitos da teoria da elasticidade são utilizados para a determinação dos deslocamentos e das tensões em um corpo com ação externa conhecida. Para isso, é necessário que haja uma solução das equações básicas da elasticidade que satisfaçam as condições de contorno do problema (deslocamentos ou forças aplicadas). Estas serão as equações de equilíbrio de forças, compatibilidade entre deslocamento e deformação, e equações constitutivas.

Os deslocamentos de um elemento infinitesimal são descritos segundo dois sistemas de coordenadas: global e local. O sistema global tem os deslocamentos absolutos  $u_i$  e as forças de massa  $b_i$  atuando no domínio  $\Omega$  do elemento, e as forças de superfície  $t_i$  atuando no contorno  $\Gamma$ . O sistema local tem deslocamentos relativos (deformações)  $\varepsilon_{ij}$  e tensões  $\sigma_{ij}$  produzidas pelas forças de superfície, ambos atuando num elemento infinitesimal  $d\Omega$ .

O contorno,  $\Gamma = \Gamma_\sigma \cup \Gamma_u$ , do corpo é composto por duas partes:  $\Gamma_\sigma$  onde atuam forças conhecidas e  $\Gamma_u$  onde os deslocamentos são prescritos .

As expressões de equilíbrio de força que relacionam as forças descritas no sistema global e as tensões no sistema local são escritas como:

$$\sigma_{ij,j} - \rho \ddot{u}_i + b_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2-1)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{em } \Omega \quad (2-2)$$

$$\bar{t}_i = \sigma_{ij} \eta_j \quad \text{em } \Gamma_\sigma \quad (2-3)$$

onde  $\rho$  é definido como densidade de massa,  $\eta_i$  são os cossenos diretores de um elemento de superfície  $d\Gamma$  e  $\ddot{u}_i$  é a segunda derivada em relação ao tempo (aceleração),  $\ddot{u}_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$ .

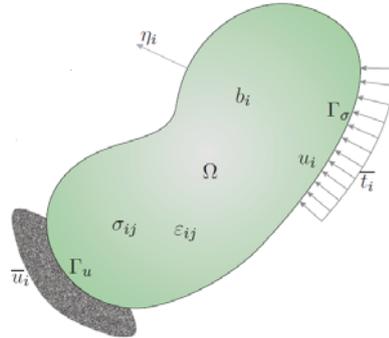


Figura 2.1: Corpo elástico em equilíbrio. [6]

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{em } \Omega \quad (2-4)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2-5)$$

A Eq. (2-4) mostra a transformação cinemática entre deslocamentos no sistema local e deslocamentos prescritos no sistema global. A relação de compatibilidade do deslocamento  $u_i$  (contorno  $\Gamma_u$ ) e deslocamento prescrito  $\bar{u}_i$  é apresentada pela Eq. (2-5).

A equação a seguir demonstra a expressão constitutiva que representa a relação entre as tensões e deformações no corpo elástico, como mostra a Figura 2.1

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (2-6)$$

onde  $C_{ijkl}$  é a matriz constitutiva do material. Para um material linearmente elástico, isotrópico e homogêneo, a matriz constitutiva do material apresenta a seguinte característica:

$$C_{ijkl} = \frac{2G\nu}{1-2\nu}\delta_{ij}\delta_{kl} + G(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \quad (2-7)$$

onde o coeficiente de Poisson é definido por  $\nu$ ,  $G$  é o módulo de elasticidade

transversal (cisalhamento) e  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker, definido por:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (2-8)$$

A equação de Navier pode ser obtida ao substituir a Eq. (2-7) na Eq. (2-6), o resultado é inserido na Eq. (2-1), e considerando a condição de simetria da matriz constitutiva do material e a Eq. (2-4)

$$G\ddot{u}_{i,kk} + \frac{G}{1-2\nu}u_{k,ki} - \rho\ddot{u}_i + b_i = 0 \quad (2-9)$$

Se a expressão anterior for dividida pela densidade da massa, ela passa a ter a seguinte forma

$$c_2^2 u_{i,kk} + (c_1^2 + c_2^2) u_{k,ki} - \ddot{u}_i + \frac{b_i}{\rho} = 0 \quad (2-10)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são as velocidades de propagação das ondas irrotacionais e de cisalhamento no meio elástico, dados por

$$c_1^2 = \frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)} \quad (2-11)$$

$$c_2^2 = \frac{G}{\rho} \quad (2-12)$$

## 2.2

### Formulação do problema

Para que seja obtido um campo de deslocamentos  $u_i$ , referente as tensões  $\sigma_{ij}$ , é necessário que a equação de equilíbrio dinâmico seja satisfeita:

$$\sigma(x, y, z, t)_{ij,j} + b(x, y, z, t)_i - \rho\ddot{u}(x, y, z, t)_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2-13)$$

Os índices  $i$  e  $j$  podem assumir valores 1, 2 e 3 referentes às coordenadas  $x$ ,  $y$  e  $z$ , quando se trabalha com problemas tridimensionais. A vírgula após o índice indica a derivada em relação à direção em questão. Índices repetidos representam somatório de termos. O ponto indica derivada em relação ao tempo.

O domínio  $\Omega$  pode ser a estrutura como um todo ou apenas parte dela (subestrutura ou elemento finito). O campo de deslocamentos necessário para

atender às condições de contorno é

$$u_i(x, y, z, t) = \bar{u}_i(x, y, z, t) \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2-14)$$

onde  $\bar{u}_i(x, y, z, t)$  são os deslocamentos prescritos no contorno  $\Gamma_u$ . O campo de tensões  $\sigma_{ij}(x, y, z, t)$  também precisa estar em equilíbrio com as forças  $\bar{t}_i(x, y, z, t)$  prescritas no contorno  $\Gamma_\sigma$ . Desta forma,

$$\sigma_{ij}(x, y, z, t)\eta_i = \bar{t}_i(x, y, z, t) \quad \text{em } \Gamma_\sigma \quad (2-15)$$

onde  $\eta_i$  são os cossenos diretores de  $\Gamma$  em  $\Omega$ . Os deslocamentos e velocidades iniciais precisam ser conhecidos no instante inicial em  $t = 0$ :

$$u_i(x, y, z, t = 0) = \bar{u}_i(x, y, z, t = 0) \quad \text{em } \Omega \quad (2-16)$$

$$\dot{u}_i(x, y, z, t = 0) = \bar{v}_i(x, y, z, t = 0) \quad \text{em } \Omega \quad (2-17)$$

É possível que haja, em alguns casos particulares, uma solução que satisfaça exatamente as Eqs. (2-16) - (2-17) em  $\Omega$ .

### 2.3

#### Formulação no domínio da frequência

Há diversas maneiras de solucionar o problema apresentado na Seção 2.2. Uma delas é investigar a resposta harmônica para ações dinâmicas por transformação do problema do domínio do tempo para o domínio da frequência.

A expressão dos deslocamentos (Eq. (2-14)) pode ser reescrita da seguinte maneira

$$u_j(x, y, z, t) = u_j(x, y, z, \omega)e^{-i\omega t} \quad \text{em } \Omega \quad (2-18)$$

onde  $i$  é número complexo. Simplesmente denotando a Eq. (2-18)

$$u_j(x, y, z, t) = u_j e^{-i\omega t} \quad \text{em } \Omega \quad (2-19)$$

onde a dependência  $(x, y, z, \omega)$  está implícita.

Ao substituir a expressão do deslocamento em função da frequência (Eq. (2-19)) nas equações de equilíbrio dinâmico, campo de deslocamentos e campo

de tensões, definidas na seção anterior, tem-se:

$$\sigma_{ij,j} + b_i + \rho\omega^2 u_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2-20)$$

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{ao longo } \Gamma_u \quad (2-21)$$

$$\sigma_{ij}\eta_j = \bar{t}_i \quad \text{ao longo } \Gamma_\sigma \quad (2-22)$$

Mais adiante serão aplicadas as condições iniciais apresentadas pelas Eqs. (2-16) e (2-17), depois de ser feita a transformação da solução do problema para o domínio do tempo através da superposição modal.

## 2.4

### Formulação do método híbrido dos elementos finitos

A base do método híbrido dos elementos finitos é o potencial de Hellinger – Reissner [3]. Este método é válido para vários procedimentos, dentre eles a técnica de superposição modal avançada.

O campo dos deslocamentos no contorno  $\Gamma$ , segundo Dumont e Oliveira [7], é apresentado pela equação

$$u_i = u_{im}d_m \quad (2-23)$$

onde em termos de deslocamentos nodais,  $d_m \equiv d(\omega)_m$  no contorno do elemento;  $u_{im}$  é a função de interpolação, que depende da variável espacial  $u_{im} = u_{im}(x, y, z)$ , desde que  $d_m = \bar{d}_m$  nos pontos nodais  $m$  correspondentes para os deslocamentos prescritos  $\bar{u}_i$  no  $\Gamma_u$ .

Supondo um campo de deslocamento no domínio  $\Omega$

$$u_i = u_i^* + u_i^b \quad (2-24)$$

em que as condições de equilíbrio da expressão das tensões são atendidas e, desta forma, a Eq. (2-24) é uma solução da Eq. (2-20).  $u_i^b$  é uma solução particular da Eq. (2-20) e o campo de tensões correspondente atende a equação

$$\sigma_{ij,j}^b + b_i + \rho k^2 u_i^b = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2-25)$$

onde  $u_i^*$  é a solução homogênea da Eq. (2-24). O campo de tensões é

$$\sigma_{ij,j}^* + \rho k^2 u_i^* = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2-26)$$

o que caracteriza uma solução fundamental:

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ijm}^* p_m^* \quad (2-27)$$

$$u_i^* = u_{im}^* p_m^* \quad (2-28)$$

$$\tilde{u}_i = u_{im} d_m \quad (2-29)$$

onde, em termos de parâmetro nodal de força  $p_m^*$  dependente da frequência, o índice  $m$  indica cada grau de liberdade do modelo discreto.

A expressão estacionária do potencial de Hellinger – Reissner é apresentada na forma matricial por Prazeres [8]

$$-\delta\Pi_R = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \delta\mathbf{p}^{*\text{T}}(\mathbf{F}\mathbf{p}^* - \mathbf{H}\mathbf{d} + \mathbf{b}) - \delta\mathbf{d}^{\text{T}}(\mathbf{H}^{\text{T}}\mathbf{p}^* + \mathbf{p}^b - \mathbf{p}) \right] dt \quad (2-30)$$

onde os vetores  $\mathbf{p}^*$  e  $\mathbf{d}$  contém os parâmetros  $p_m^*$  e  $d_m$ , que são as incógnitas primárias do problema. A matriz de flexibilidade é definida por  $\mathbf{F}$ , que é simétrica por construção;  $\mathbf{H}$  é a matriz de transformação cinemática;  $\mathbf{b} = \mathbf{H}\mathbf{d}^b$  é o vetor de deslocamentos nodais equivalentes as forças de corpo:

$$\mathbf{F} = F_{mn} = \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* \eta_j u_{in}^* d\Gamma \quad (2-31)$$

$$\mathbf{H}^{\text{T}} = H_{mn} = \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* \eta_j u_{in} d\Gamma \quad (2-32)$$

$$\mathbf{b}^{\text{T}} = b_m = \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^* \eta_j u_i^b d\Gamma \quad (2-33)$$

As parcelas  $\mathbf{p}^b$  e  $\mathbf{p}$  da Eq. (2-30) são vetores de forças nodais equivalentes relativos as forças de corpo e de superfície, respectivamente

$$\mathbf{p}^b = p_m^b = \int_{\Gamma} \sigma_{ij}^b \eta_j u_{im} d\Gamma \quad (2-34)$$

$$\mathbf{p} = p_m = \int_{\Gamma} \bar{t}_i u_{im} d\Gamma \quad (2-35)$$

Para um determinado instante de tempo e valores arbitrários de  $\delta\mathbf{p}^*$  e  $\delta\mathbf{d}$ , a expressão estacionária do potencial de Hellinger – Reissner é dividida em duas

$$\mathbf{F}\mathbf{p}^* = \mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \quad (2-36)$$

$$\mathbf{H}^{\text{T}}\mathbf{p}^* = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \quad (2-37)$$

Ao isolar  $\mathbf{p}^*$  da Eq. (2-36) e substituir na Eq. (2-37) tem-se a matriz de

rigidez  $\mathbf{K}$

$$\mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \quad (2-38)$$

em que

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H} \quad (2-39)$$

onde  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez simétrica e semi-definida que transforma deslocamentos nodais em forças de superfície. Então, substituindo Eq. (2-39) na Eq. (2-38), tem-se

$$\mathbf{K} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \quad (2-40)$$

### 3

## Técnica de superposição modal avançada

Este capítulo mostra a expansão em série de frequências das matrizes de flexibilidade, transformação cinemática e rigidez efetiva. Ao usar o método híbrido dos elementos finitos, o problema de autovalor não-linear é apresentado. Por fim, a construção do sistema de equações diferenciais desacopladas de baixa ordem é apresentado como a solução do problema de autovalor não-linear.

### 3.1

#### Expansão das matrizes na forma de série de frequência

As matrizes de flexibilidade, transformação cinemática e rigidez efetiva podem ser representadas por uma série de potências de frequências e número arbitrário de termos, conforme desenvolvimento:

$$\mathbf{F} = \sum_{j=0}^n (-i\omega^{2j}\mathbf{F}_j) \quad (3-1)$$

$$\mathbf{H} = \sum_{j=0}^n (-i\omega^{2j}\mathbf{H}_j) \quad (3-2)$$

$$\mathbf{K} = \sum_{j=0}^n (-i\omega^{2j}\mathbf{K}_j) \equiv \mathbf{K}_0 - \sum_{j=1}^n (\omega^{2j}\mathbf{M}_j) \quad (3-3)$$

$\mathbf{K}_0$  da Eq. (3-3) é a matriz de rigidez estática;  $\mathbf{M}$  a matriz de massa efetiva, que aparece na expansão da matriz  $\mathbf{K}$  em série de potências em função da frequência. Ao montar a expansão em série de frequência,  $\mathbf{M}_1$  é mesma a matriz de massa presente na formulação clássica.

Para construir a matriz  $\mathbf{K}$  é necessário fazer a inversa da matriz de flexibilidade (Eq. (3-1)) e realizar o produto matricial com a matriz de transformação cinemática (Eq. (3-2)), descrito pela Eq. (2-39).

Dumont [11] mostra que para um vetor de forças  $\mathbf{p}(t)$  dependente do tempo atuando num corpo elástico, a Eq. (2-40) pode ser apresentada da seguinte forma

$$\left[ \mathbf{K}_0 - \sum_{j=1}^n (\omega^{2j}\mathbf{M}_j) \right] (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \quad (3-4)$$

onde as incógnitas do problema estão no vetor de deslocamentos  $\mathbf{d}$ , a serem determinadas para força, velocidade e deslocamentos iniciais. Para um valor arbitrário de  $n = 3$ , a série da Eq. (3-4) será

$$\sum_{j=1}^m (\mathbf{K}_0 - \omega^2 \mathbf{M}_1 - \omega^4 \mathbf{M}_2 - \omega^6 \mathbf{M}_3 + O\omega^8)(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \quad (3-5)$$

### 3.2

#### Problema de autovalor não linear

O problema de autovalor não-linear relacionado à Eq. (3-4) apresenta é dado por:

$$\mathbf{K}_0 \Phi - \sum_{i=1}^n \mathbf{M}_i \Phi \Omega^{2i} = 0 \quad (3-6)$$

onde  $\Omega$  é uma matriz diagonal dos autovalores (frequências) e  $\Phi$  é matriz dos autovetores correspondentes, e suas colunas representam os modos de vibração da estrutura.

O tratamento da Eq. (3-6) é muito complicado, pois a convergência numérica é de difícil alcance e os erros inevitavelmente ocorrem. Dumont [12] propôs uma solução do problema de autovalores não-lineares, que representa uma generalização da solução linear.

Neste trabalho não se considera a parcela do amortecimento, porém pode ser perfeitamente inserida. Como não há a consideração do amortecimento, todos os autovalores e autovetores serão números reais, os mesmos serão complexos quando se adiciona a parcela do amortecimento. Deste modo, no que diz a respeito a álgebra linear, o tratamento é igual tanto para sistemas amortecidos quanto para sistemas não amortecidos.

Uma solução adequada  $\Phi$  deve satisfazer as condições de ortogonalidade descritas pelas Eqs. (3-7) e (3-8), Dumont [11]:

$$\sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=2}^{2i} \Omega^{j-1} \Phi^T \mathbf{M}_i \Phi \Omega^{2i-j} \right) = \mathbf{I} \quad (3-7)$$

$$\Phi^T \mathbf{K}_0 \Phi + \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^{2i-1} \Omega^j \Phi^T \mathbf{M}_i \Phi \Omega^{2i-j} \right) = \Omega \quad (3-8)$$

### 3.3

#### Processo de superposição modal

Uma maneira alternativa de escrever a Eq. (3-4), corresponde a um sistema acoplado de equações diferenciais de alta ordem, no tempo, por meio das matrizes obtidas na formulação dependente da frequência, segundo Dumont [7]

$$\left[ \mathbf{K}_0 - \sum_{i=1}^n (-1)^i \mathbf{M}_i \frac{\partial^{2i}}{\partial t^{2i}} \right] (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}^b(t) \quad (3-9)$$

onde um vetor auxiliar de deslocamentos  $\mathbf{d}_j$  é inserido, tal que

$$\mathbf{d}_j = (i)^j \frac{\partial^j \mathbf{d}(t)}{\partial t^j} \quad \text{para } j = 1 \cdots 2n \quad (3-10)$$

Ao substituir o vetor  $\mathbf{d}_j$  na Eq. (3-9), esta é reescrita como um sistema de matrizes aumentado

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \cdots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d} - \mathbf{d}^b \\ \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{n-1} \end{Bmatrix} \\ -\omega^2 & \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \cdots & \mathbf{M}_n \\ \mathbf{M}_2 & \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 & \cdots & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 & \mathbf{M}_5 & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\mathbf{d}} - \ddot{\mathbf{d}}^b \\ \ddot{\mathbf{d}}_1 \\ \ddot{\mathbf{d}}_2 \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{d}}_{n-1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-11) \end{aligned}$$

Ao Aplicar conceitos de superposição modal, consegue-se aproximar os deslocamentos que dependem do tempo através da soma finita das porções dadas pelo produto entre os autovetores normalizados  $\Phi$  com os vetores de amplitude  $\eta(t)$ , os quais serão as novas incógnitas do problema

$$\mathbf{d} = \Phi \eta \quad (3-12)$$

Ao inserir a Eq. (3-12) na matriz aumentada da Eq. (3-11), chega-se a uma expressão mais acessível:

$$\Omega(\eta - \eta^b) + (\ddot{\eta} - \ddot{\eta}^b) = \Phi^T(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b) \quad (3-13)$$

que equivale a um sistema desacoplado de equações diferenciais de primeira

ordem, com a mesma quantidade de equações e autovetores que interessam e podem ser resolvidos pelos métodos tradicionais de integração. Os deslocamentos serão

$$\mathbf{d} = \mathbf{\Phi}\eta \quad (3-14)$$

onde  $\mathbf{d}$  é o vetor dos deslocamentos nodais,  $\mathbf{\Phi}$  é a matriz com os autovetores e  $\eta$  é a solução da equação diferencial da Eq. (3-12) e representa o vetor temporal de amplitudes.

Para um sistema sem amortecimento de equações diferenciais de segunda ordem (elasticidade), tem-se:

$$\mathbf{\Omega}^2(\eta - \eta^b) + (\ddot{\eta} - \ddot{\eta}^b) = \mathbf{\Phi}^T(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b) \quad (3-15)$$

## 4

### Elementos unidimensionais

Este capítulo apresenta a construção das matrizes de rigidez efetiva dos elementos unidimensionais (treliça, viga e torção), utilizando a formulação do método híbrido dos elementos finitos. Essas matrizes são construídas com base na formulação presente no Capítulo 2. Os desenvolvimentos feitos neste capítulo são fortemente influenciados pelas apostilas e notas de aulas do curso de método híbrido dos elementos de contorno, ministrado na PUC-Rio, pelo professor Ney Dumont, e pelas dissertações de mestrado de Prazeres [8], Oliveira [10] e Aguilar [6].

#### 4.1

##### Elemento de treliça

O elemento de treliça trabalha apenas com carregamento axial, de tração ou de compressão, como mostra a Figura 4.1.

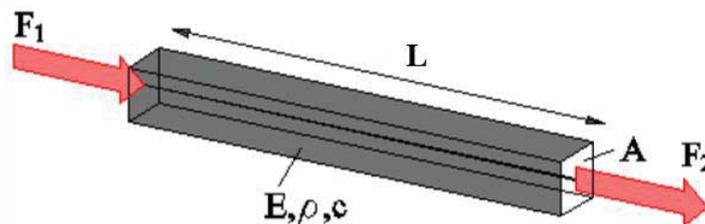


Figura 4.1: Elemento de Treliça. [8]

##### 4.1.1

##### Formulação do problema

A equação diferencial de um elemento de treliça com seção transversal  $A$  e comprimento  $L$  submetida a uma vibração harmônica será

$$E \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \rho \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4-1)$$

onde

- $w(x, t) \rightarrow$  Deslocamento no tempo na direção longitudinal  $x$  da barra;

- $E \rightarrow$  Módulo de elasticidade do material;
- $\rho \rightarrow$  Massa específica do material;

Uma maneira de resolver a Eq. (4-1) é usar o método da separação de variáveis (espaço e tempo), cuja solução é definida por:

$$w(x, t) = w^*(x)e^{-i\omega t} \quad (4-2)$$

Substituindo a Eq. (4-2) na Eq. (4-1) e simplificando, obtém-se

$$\frac{\partial^2 w^*(x)}{\partial x^2} - \frac{\omega^2 \rho}{E} w^*(x) = 0 \quad (4-3)$$

Trocando os parâmetros físicos do segundo termo a esquerda da equação da treliça, tem-se

$$k^2 = \frac{\omega^2 \rho}{E} \quad (4-4)$$

e a nova expressão simplificada é

$$\frac{\partial^2 w^*(x)}{\partial x^2} + k^2 w^*(x) = 0 \quad (4-5)$$

#### 4.1.2

##### Matriz de rigidez

A solução da Eq. (4-5) é dada por

$$w^*(x) = C_1 \frac{\sin(kx)}{k} + C_2 \cos(kx) \quad (4-6)$$

E a solução estática, para a solução apresentada pela Eq. (4-6), encontrada como caso limite é

$$\lim_{k \rightarrow 0} w^*(x) = C_1 x + C_2 \quad (4-7)$$

Como se está analisando um problema no domínio da frequência, em termos de uma superposição modal de harmônicos, pode-se usar  $C_2=0$ , uma vez que a solução oscila em torno de  $w^*(0) = 0$ .

Já o campo de deslocamentos, segundo Dumont [5], referente à solução da Eq. (4-5) pode ser expresso na forma

$$w^* = \frac{1}{EA} \left[ \frac{\sin(kx)}{k} \quad \frac{\sin(k(L-x))}{k} \right] \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \end{Bmatrix} = \mathbf{w}^* \mathbf{p}^* \quad (4-8)$$

Os parâmetros de força  $p_1^*$  e  $p_2^*$  podem ser interpretados como as bases do sistema interno ou auxiliar de coordenadas (\*), de acordo com a Figura 4.2.

Conseqüentemente, a partir da Eq. (4-8), obtém-se o campo de tensões normais

$$\begin{aligned} \sigma^* &= E \frac{dw^*}{dx} \\ &= \frac{1}{EA} [\cos(kx) - \cos(k(L-x))] \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \end{Bmatrix} \\ &= \sigma^* \mathbf{p}^* \end{aligned} \quad (4-9)$$

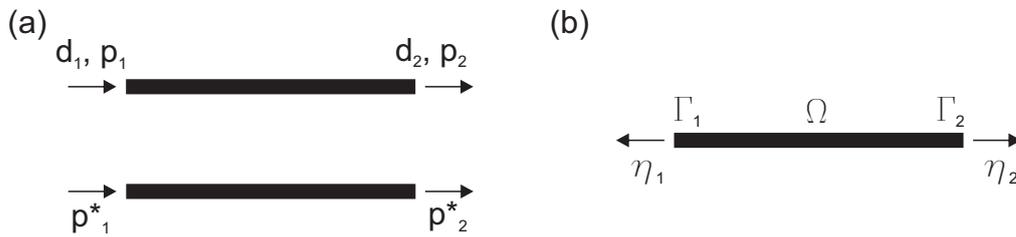


Figura 4.2: Elemento de Treliça: (a) sistema de coordenadas para a matriz de rigidez e sistema interno de coordenadas; (b) domínio, contorno e cossenos diretores.[8]

Os deslocamentos nas extremidades são definidos através dos contornos  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ ,  $\eta$  é a normal ao contorno do elemento e tem valores -1 e 1, para  $\Gamma_1$  e  $\Gamma_2$ :

$$w^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \mathbf{d} \quad \begin{array}{l} \eta_1 = -1 \text{ em } \Gamma_1 \\ \eta_2 = 1 \text{ em } \Gamma_2 \end{array} \quad (4-10)$$

onde  $N_1$  e  $N_2$  são as expressões  $u_{im}$ , definidas pela Eq. (2-29).  $u_{im}$  é constante e será 1 ou 0, de acordo com a Eq. (4-10). A matriz de transformação cinemática  $\mathbf{H}$  entre os sistemas  $\mathbf{p}^*$  e  $\mathbf{d}$  é calculada, com base na Eq. (2-32), por

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \int_{\Gamma} \sigma^* \eta \mathbf{N} d\Gamma \\ &= \begin{Bmatrix} 1 \\ -\cos(kL) \end{Bmatrix} (-1) [1 \ 0] + \begin{Bmatrix} \cos(kL) \\ -1 \end{Bmatrix} [0 \ 1] \\ &= \begin{bmatrix} -1 & \cos(kL) \\ \cos(kL) & -1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4-11)$$

A concepção da matriz de flexibilidade do sistema local será montada

através da Eq. (2-31)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \int_{\Gamma} \sigma^{*T} \eta w^* d\Gamma \\
 &= \frac{1}{EA} \left[ \begin{array}{c} 1 \\ -\cos(kL) \end{array} \right] (-1) \left[ 0 \quad \frac{\sin(kL)}{k} \right] + \left[ \begin{array}{c} \cos(kL) \\ -1 \end{array} \right] \left[ \frac{\sin(kL)}{k} \quad 0 \right] \\
 &= \frac{\sin(kL)}{kEA} \begin{bmatrix} \cos(kL) & -1 \\ -1 & \cos(kL) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4-12}$$

Para obter a matriz de rigidez, se faz o produto matricial entre as Eqs. (4-11) e (4-12).  $\mathbf{K}$  é, então, dada por

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} &= \mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H} \\
 &= \frac{kEA}{\sin(kL)} \begin{bmatrix} \cos(kL) & -1 \\ -1 & \cos(kL) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{4-13}$$

Fazendo a verificação, percebe-se que a matriz construída é a mesma da solução estática ao fazer o limite de  $k$  para  $k \rightarrow 0$

$$\lim_{k \rightarrow 0} \mathbf{K} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{4-14}$$

A expansão em série de potencia de frequência da treliça, para  $n=3$ , realizado por Prazeres [7], mostra que  $\mathbf{K}_0$  e  $\mathbf{M}_1$  são exatamente as matrizes de rigidez e massa da dinâmica clássica

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} &= \mathbf{K}_0 - (\omega^2 \mathbf{M}_1 + \omega^4 \mathbf{M}_2 + \omega^6 \mathbf{M}_3 + O(\omega^8)) = \\
 &= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{\omega^2 \rho L}{6E} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \frac{\omega^4 \rho^2 L^4}{45E^2} \begin{bmatrix} 1 & \frac{7}{8} \\ \frac{7}{8} & 1 \end{bmatrix} \\
 &\quad - \frac{\omega^6 \rho^3 L^6}{45E^3} \begin{bmatrix} \frac{2}{21} & \frac{31}{336} \\ \frac{31}{336} & \frac{2}{21} \end{bmatrix} - O(\omega^8)
 \end{aligned} \tag{4-15}$$

A construção da matriz de rigidez do elemento de treliça no sistema bidimensional será mostrada mais adiante.

## 4.2 Elemento de viga

A teoria de viga de Euler – Bernoulli (ou viga esbelta), que despreza a deformação causada por cisalhamento, é usada neste trabalho.

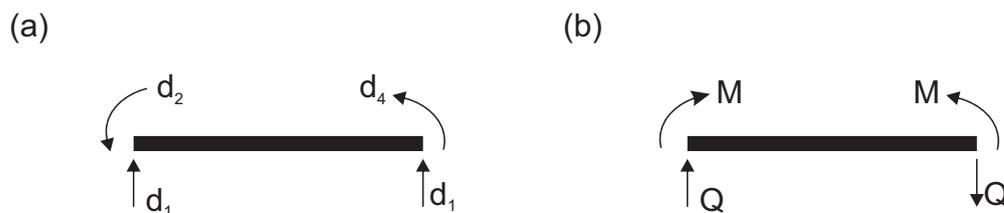


Figura 4.3: a) sistema de coordenadas da viga; (b) convenção de esforços da viga. [8]

### 4.2.1 Formulação do problema

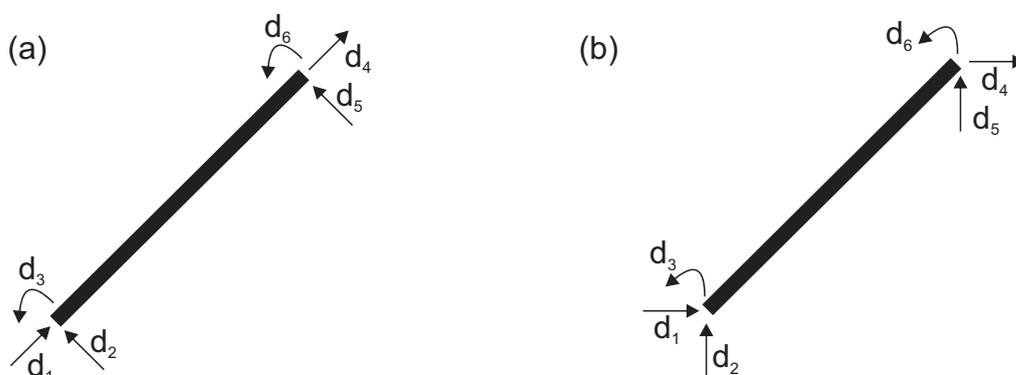


Figura 4.4: Sistema de coordenadas: (a) local e (b) lobal da viga. [8]

A equação diferencial para solução de vigas esbeltas é:

$$EI \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (4-16)$$

onde

- $u(x, t)$  → Deslocamento transversal;
- $m = \rho A$  → Massa específica do material;
- $E$  → Módulo de elasticidade do material;
- $I$  → Momento de inércia da seção.

O método da separação de variáveis também é utilizado para resolver a Eq. (4-16), então

$$\frac{\partial^4 u^*(x)}{\partial x^4} + \frac{\omega^2 m}{EI} u^*(x) = 0 \quad (4-17)$$

ou simplesmente

$$\frac{\partial^4 u^*(x)}{\partial x^4} + k^4 u^*(x) = 0 \quad (4-18)$$

onde

$$k^4 = \frac{\omega^2 m}{EI} \quad (4-19)$$

### 4.2.2

#### Matriz de rigidez

A solução geral da Eq. (4-18) se expressa, de maneira conveniente,

$$\begin{aligned} u^*(x) = & C_1 \frac{\sin(kx) + \sinh(kx)}{k} + C_2 \frac{\sin(kx) - \sinh(kx)}{k^3} + \\ & + C_3(\cos(kx) + \cosh(kx)) + C_4 \frac{\cos(kx) - \cosh(kx)}{k^2} \end{aligned} \quad (4-20)$$

e para o caso limite de  $u^*$  quando  $k$  tende a zero:

$$\lim_{k \rightarrow 0} u^*(x) = C_3 + C_1 x - C_4 x^2 - C_2 x^3 \quad (4-21)$$

O campo dos deslocamentos transversais pode ser construído como

$$\begin{aligned} u^*(x) &= [u_1^*(x) \quad u_2^*(x) \quad u_3^*(x) \quad u_4^*(x)] \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{Bmatrix} \\ &\equiv \mathbf{u}^* \mathbf{p}^* \end{aligned} \quad (4-22)$$

onde

$$\begin{aligned} u_1^*(x) &= \frac{\sin(kx) \sinh(kx)}{k}; & u_2^*(x) &= \frac{\sin(kx) - \sinh(kx)}{k^3} \\ u_3^*(x) &= \cos(kx) + \cosh(kx); & u_4^*(x) &= \frac{\cos(kx) - \cosh(kx)}{k^2} \end{aligned} \quad (4-23)$$

As grandezas no sistema externo de coordenadas são definidas com base na Figura 4.3(a). A Figura 4.3(b) mostra a convenção dos esforços transversais

em uma viga. As equações que governam o problema de vigas são descritas por

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u^* \\ \frac{du^*}{dx} \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} u_1^* & u_2^* & u_3^* & u_4^* \\ \frac{du_1^*}{dx} & \frac{du_2^*}{dx} & \frac{du_3^*}{dx} & \frac{du_4^*}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{Bmatrix} \\ &\equiv \mathbf{u}^* \mathbf{p}^* \end{aligned} \quad (4-24)$$

os esforços cortantes e os momentos fletores são determinados por

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} Q \\ M \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{d^3 u_1^*}{dx^3} & \frac{d^3 u_2^*}{dx^3} & \frac{d^3 u_3^*}{dx^3} & \frac{d^3 u_4^*}{dx^3} \\ \frac{d^2 u_1^*}{dx^2} & \frac{d^2 u_2^*}{dx^2} & \frac{d^2 u_3^*}{dx^2} & \frac{d^2 u_4^*}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \\ p_3^* \\ p_4^* \end{Bmatrix} \\ &\equiv \mathbf{N}^* \mathbf{p}^* \end{aligned} \quad (4-25)$$

Para calcular a matriz de transformação cinemática  $\mathbf{H}$ , as matrizes  $\mathbf{N}$  e  $\eta$ , dos cossenos diretores, são determinadas, baseadas na Figura 4.4(b)

$$\begin{Bmatrix} u^* \\ \frac{du^*}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N}_1 \mathbf{d} \quad \eta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (4-26)$$

$$\begin{Bmatrix} u^* \\ \frac{du^*}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N}_2 \mathbf{d} \quad \eta_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (4-27)$$

Da mesma forma que foi montada para o elemento de treliça, e baseada na formulação do método híbrido dos elementos finitos,  $\mathbf{H}$  é calculada como

$$\mathbf{H} = \mathbf{N}^{*\text{T}} \Big|_{x=0} \eta_1 \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}^{*\text{T}} \Big|_{x=L} \eta_2 \mathbf{N}_2 \quad (4-28)$$

ou

$$\mathbf{H} = EI \begin{bmatrix} 0 & 0 & k^2(c - C) & -k(s - S) \\ -2 & 0 & (c + C) & -\frac{(s - S)}{k} \\ 0 & 0 & -k^3(s + S) & -k^2(c - C) \\ 0 & 0 & -k(s - S) & -(c - C) \end{bmatrix} \quad (4-29)$$

onde

$c = \cos(kL)$ ,  $C = \cosh(kL)$ ,  $s = \sin(kL)$  e  $S = \sinh(kL)$ .

A matriz de flexibilidade ( $\mathbf{F}$ ) no sistema interno  $p^*$  também é montada seguindo a Eq. (2-31)

$$\mathbf{F} = \mathbf{N}^{*T} \bigg|_{x=0} \eta_1 \mathbf{u}^* \bigg|_{x=0} + \mathbf{N}^{*T} \bigg|_{x=L} \eta_2 \mathbf{u}^* \bigg|_{x=L} \quad (4-30)$$

ou

$$\mathbf{F} = -2EI \begin{bmatrix} k(cS - sC) & 0 & k^2 sS & Cc - 1 \\ 0 & \frac{(Sc - Cs)}{k^3} & Cc - 1 & -\frac{Sc}{k^2} \\ k^2 sS & Cc - 1 & k^3(Sc + Cs) & 0 \\ Cc - 1 & -\frac{Sc}{k^2} & 0 & -\frac{(Sc + Cs)}{k} \end{bmatrix} \quad (4-31)$$

Por fim, a matriz de rigidez é calculada pela Eq. (2-39), e tem como resultado

$$\mathbf{K} = \frac{EI k}{Cc - 1} \begin{bmatrix} k^2(Sc - Cs) & ksS & -k^2(S + s) & k(C - c) \\ ksS & (Cs - Sc) & k(C - c) & S - s \\ -k^2(S + s) & k(C - c) & k^2(Sc - Cs) & -ksS \\ k(C - c) & S - s & -ksS & (Cs - Sc) \end{bmatrix} \quad (4-32)$$

Ao montar a expansão em série de potência de frequências da matriz de rigidez da viga, chega-se às mesmas apresentadas Prazeres [7], para  $n=3$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} = \mathbf{K}_0 - (\omega^2 \mathbf{M}_1 + \omega^4 \mathbf{M}_2 + \omega^6 \mathbf{M}_3 + O(\omega^8)) = \\
 \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} - \frac{\omega^2 mL}{35} \begin{bmatrix} 13 & \frac{11L}{6} & \frac{9}{2} & \frac{-13L}{12} \\ \frac{11L}{6} & \frac{L^2}{3} & \frac{13L}{12} & \frac{-L^2}{4} \\ \frac{9}{2} & \frac{13L}{12} & 13 & \frac{-11L}{6} \\ \frac{-13L}{12} & \frac{-L^2}{4} & \frac{-11L}{6} & \frac{L^2}{3} \end{bmatrix} - \\
 - \frac{\omega^4 m^2 L^5}{161700EI} \begin{bmatrix} 59 & \frac{223L}{18} & \frac{1279}{24} & \frac{-1681L}{144} \\ \frac{223L}{18} & \frac{71L^2}{27} & \frac{1681L}{144} & \frac{-1097L^2}{432} \\ \frac{1279}{24} & \frac{1681L}{144} & 59 & \frac{-223L}{18} \\ \frac{-1681L}{144} & \frac{-1097L^2}{432} & \frac{-223L}{18} & \frac{71L^2}{27} \end{bmatrix} - \\
 - \frac{\omega^6 m^3 L^9}{E^2 I^2} \begin{bmatrix} 551 & 3547L & 5801 & -112631L \\ \frac{794593800}{3547L} & \frac{23837814000}{127L^2} & \frac{8475667200}{112631L} & \frac{76810048000}{-899L^2} \\ \frac{23837814000}{5801} & \frac{3972969000}{112631L} & \frac{76810048000}{551} & \frac{28252224000}{-3547L} \\ \frac{8475667200}{-112631L} & \frac{76810048000}{-899L^2} & \frac{794593800}{-3547L} & \frac{23837814000}{127L^2} \\ \frac{-112631L}{76810048000} & \frac{-899L^2}{28252224000} & \frac{-3547L}{23837814000} & \frac{127L^2}{3972969000} \end{bmatrix} - O(\omega^8)
 \end{aligned} \tag{4-33}$$

Para construir a matriz de rigidez com seis graus de liberdade por elemento, os termos da matriz de rigidez do elemento de treliça são acrescentados na matriz da Eq. (4-32). A nova matriz do elemento de viga com seis graus de liberdade é

$$\mathbf{K} = \frac{EI k}{Cc - 1} \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 & K_{14} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} & 0 & K_{25} & K_{26} \\ 0 & K_{32} & K_{33} & 0 & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & 0 & 0 & K_{41} & 0 & 0 \\ 0 & K_{52} & K_{53} & 0 & K_{55} & K_{56} \\ 0 & K_{62} & K_{63} & 0 & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix} \tag{4-34}$$

onde

$$\begin{aligned}
 - K_{11} &= K_{44} = \frac{k_N E A c_N}{s_N} \\
 - K_{14} &= K_{41} = -\frac{k_N E A}{s_N} \\
 - K_{22} &= K_{55} = k^2 (S c - C s) \\
 - K_{23} &= K_{32} = -K_{56} = -K_{65} = k s S \\
 - K_{25} &= K_{52} = -k^2 (S + s) \\
 - K_{26} &= K_{62} = K_{35} = K_{53} = k (C - c) \\
 - K_{33} &= K_{66} = (C s - S c) \\
 - K_{36} &= K_{63} = S - s
 \end{aligned}$$

$c_N$ ,  $s_N$  e  $k_N$  são cosseno, seno e constante da separação de variáveis da treliça, respectivamente. Todos definidos na Seção 4.1.

Para transformar a matriz de rigidez do elemento de viga do sistema local de coordenadas para o sistema global, utiliza-se a matriz de transformação

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -s & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-35)$$

em que

$$c = \cos(\theta); \quad s = \sin(\theta); \quad L = \sqrt{c^2 + s^2} \quad (4-36)$$

A transformação da matriz de rigidez efetiva do sistema local para o sistema global é feita pelo produto matricial entre as Eqs. (4-34) e (4-35):

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{T}^T \mathbf{K} \mathbf{T} \quad (4-37)$$

A matriz de rigidez efetiva do elemento de viga (Eq. (4-34)) pode ser utilizada para a construção da matriz de rigidez do elemento de treliça com quatro graus de liberdade, baseado na Figura 4.5.

Para montar a matriz efetiva é necessário eliminar os graus de liberdade referentes as rotações ( $d_3$  e  $d_6$ ), apresentados na Figura 4.4. Desta forma, a matriz de rigidez efetiva da treliça bidimensional é apresentada na Eq. (4-38).

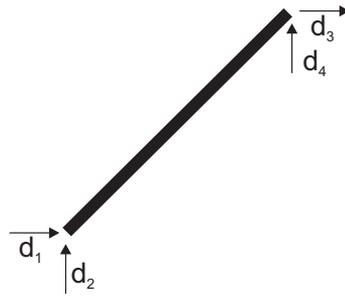


Figura 4.5: Sistema de coordenadas locais de um elemento de treliça no plano. [8]

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_N EA c_N & 0 & -k_N EA & 0 \\ s_N & \frac{1}{2} \frac{EI k_N^3 (Sc - Cs)}{Ss} & s_N & -\frac{1}{2} \frac{EI k_N^3 (S - s)}{Ss} \\ 0 & \frac{1}{2} \frac{EI k_N^3 (Sc - Cs)}{Ss} & 0 & -\frac{1}{2} \frac{EI k_N^3 (S - s)}{Ss} \\ -k_N EA & 0 & k_N EA c_N & 0 \\ s_N & 0 & s_N & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \frac{EI k_N^3 (S - s)}{Ss} & 0 & \frac{1}{2} \frac{EI k_N^3 (Sc - Cs)}{Ss} \end{bmatrix} \quad (4-38)$$

A expansão em série de potência de frequência da matriz de rigidez efetiva da treliça bidimensional, para  $n=3$ , chega-se as mesmas matrizes apresentadas por Prazeres [8]

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} = \mathbf{K}_0 - (\omega^2 \mathbf{M}_1 + \omega^4 \mathbf{M}_2 + \omega^6 \mathbf{M}_3 + O(\omega^8)) = \\
 \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\omega^2 mL}{6} \begin{bmatrix} -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} - \\
 - \frac{\omega^4 mL^2}{45E} \begin{bmatrix} -\rho L & 0 & -\frac{7\rho L}{8} & 0 \\ 0 & -\frac{2mL^3}{21I} & 0 & -\frac{31mL^3}{336I} \\ -\frac{7\rho L}{8} & 0 & -\rho L & 0 \\ 0 & -\frac{31mL^3}{336I} & 0 & -\frac{2mL^3}{21I} \end{bmatrix} - \\
 - \frac{\omega^6 mL^5}{945E^2} \begin{bmatrix} -2\rho^2 & 0 & -\frac{31\rho^2}{16} & 0 \\ 0 & -\frac{2m^2L^4}{99I^2} & 0 & -\frac{511m^2L^4}{25344I^2} \\ -\frac{31\rho^2}{16} & 0 & -2\rho^2 & 0 \\ 0 & -\frac{511m^2L^4}{25344I^2} & 0 & -\frac{2m^2L^4}{99I^2} \end{bmatrix} - O(\omega^8)
 \end{aligned} \tag{4-39}$$

A transformação do sistema local para o global de coordenadas do elemento de treliça também é feita pelo produto matricial mostrado na Eq. (4-37). A matriz  $\mathbf{T}$  para o elemento de treliça é:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \tag{4-40}$$

onde  $c$  e  $s$  são definidos na Eq.(4-36).

### 4.3

#### Elemento de torção

A equação diferencial do elemento de torção é:

$$GJ \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} - I_m \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial t^2} = 0 \tag{4-41}$$

onde

- $\theta(x, t) \rightarrow$  Rotação em torno do eixo longitudinal  $x$ ;
- $G \rightarrow$  Módulo de elasticidade transversal;
- $J \rightarrow$  Momento polar de inércia;
- $I_m = m \frac{I_x}{A} \rightarrow$  Momento de massa da inércia por unidade de comprimento.

A solução desta equação diferencial segue o mesmo processo de cálculo apresentado para o elemento de treliça. Desta forma a solução é

$$\theta(x, t) = \theta^*(x)e^{-i\omega t} \quad (4-42)$$

Ao inserir a Eq. (4-42) na equação diferencial do elemento de torção e fazer as mesmas simplificações realizadas para o elemento de treliça, tem-se

$$\frac{\partial^2 \theta^*(x)}{\partial x^2} - k^2 \theta^*(x) = 0 \quad (4-43)$$

onde a constante  $k$  é definida como:

$$k^2 = \frac{\omega^2 I_m}{GJ} \quad (4-44)$$

Para elementos de seção circular  $J = I_x$ , a Eq. (4-44) é simplificada para

$$k^2 = \frac{\omega^2 m}{GA} \quad (4-45)$$

### 4.3.1 Matriz de rigidez

A solução da Eq. (4-43) será semelhante a da Eq. (4-5). Da mesma forma que foram definidas na Seção 4.1, as forças  $p_1^*$  e  $p_2^*$  são interpretadas como a base do sistema interno de coordenadas, como mostra a Figura 4.6.

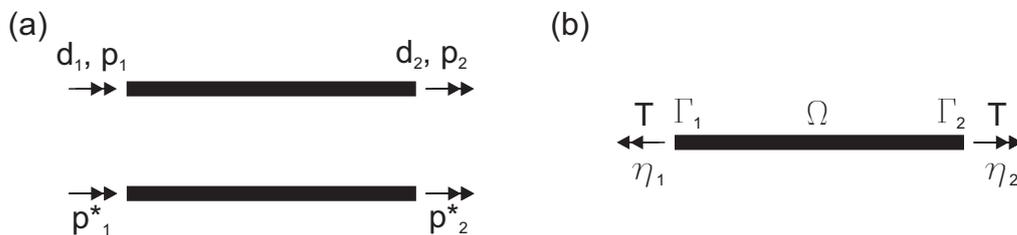


Figura 4.6: Elemento de torção: (a) sistema de coordenadas para a matriz de rigidez e (b) convenção de torção ( $\mathbf{T}$ ) para viga.

$$\left\{ \frac{d\theta^*}{dx} \right\} = \begin{bmatrix} \frac{d\theta_1^*}{dx} & \frac{d\theta_2^*}{dx} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{T}^* \mathbf{p}^* \quad (4-46)$$

Então, encontra-se o momento torsor por

$$\{T\} = GJ \begin{bmatrix} \frac{d^2\theta_1^*}{dx^2} & \frac{d^2\theta_2^*}{dx^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_1^* \\ p_2^* \end{Bmatrix} \equiv \mathbf{N}^* \mathbf{p}^* \quad (4-47)$$

Para que sejam calculadas, as matrizes de transformação cinemática  $\mathbf{H}$  e flexibilidade  $\mathbf{F}$ , os procedimentos apresentados na Seção 4.1 são aplicados e tem como base a Figura 4.6. A matriz de rigidez para o elemento de torção será igual a matriz de rigidez para o elemento de treliça, com a ressalva de que o significado físico da matriz é diferente. Portanto, deve-se substituir o módulo de elasticidade ( $E$ ) pelo módulo de elasticidade transversal ( $G$ ) e a área ( $A$ ) pelo momento polar de inércia ( $J$ ).

Calculando o produto matricial  $\mathbf{K} = \mathbf{H}^T \mathbf{F}^{-1} \mathbf{H}$ , obtém-se a matriz de rigidez efetiva

$$\mathbf{K} = \frac{kGJ}{\sin(kL)} \begin{bmatrix} \cos(kL) & -1 \\ -1 & \cos(kL) \end{bmatrix} \quad (4-48)$$

verificando esta matriz, para o caso limite quando  $k \rightarrow 0$ , que é exatamente a mesma configuração da matriz de rigidez estática, temos

$$\lim_{k \rightarrow 0} \mathbf{K} = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-49)$$

#### 4.4 Elemento de viga tridimensional

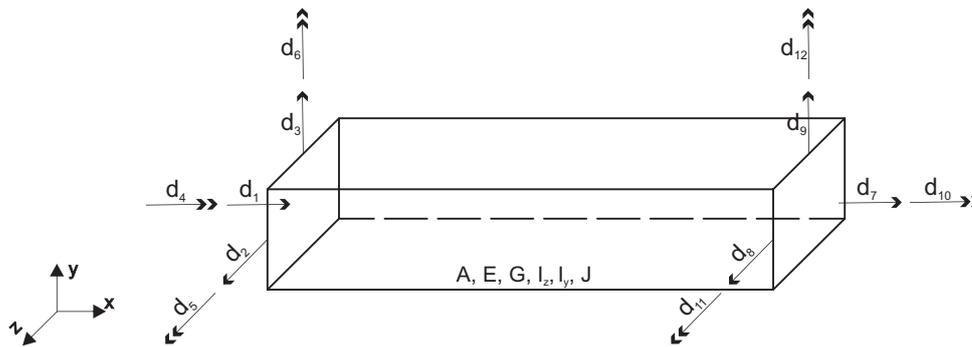


Figura 4.7: Elemento de viga tridimensional

Para construir a matriz de rigidez de viga tridimensional são necessárias as equações diferenciais de treliça, viga e torção, apresentados nas Seções 4.1 - 4.3. A construção da matriz de rigidez é feita alocando os graus de liberdade dos elementos, de acordo com respectivos graus de liberdade da matriz. O momento

de inércia dependerá do plano de referência. Para o plano  $x-y$  o momento de inércia será  $I_z$ , por outro lado, para o plano  $x-z$ , será  $I_y$  (ver Figura 4.7).

Juntando as matrizes de rigidez já calculadas nas seções anteriores, a matriz de rigidez local tem dimensão  $12 \times 12$ . Como a matriz de rigidez é simétrica por definição ( $\mathbf{K}_{ij} = \mathbf{K}_{ji}$ ), obtém-se

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ii} & \mathbf{K}_{ij} \\ \mathbf{K}_{ij}^T & \mathbf{K}_{jj} \end{bmatrix} \quad (4-50)$$

Ao fazer a verificação, tem-se

$$\mathbf{K}_{ii} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (4-51)$$

$$\mathbf{K}_{jj} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (4-52)$$

$$\mathbf{K}_{ij} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \end{bmatrix} \quad (4-53)$$

A Eq. (4-37) transforma a matriz de rigidez da Eq. (4-50) do sistema local para o sistema global. A matriz de transformação ( $\mathbf{T}$ ) será:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [\mathbf{R}] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\mathbf{R}] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [\mathbf{R}] \end{bmatrix} \quad (4-54)$$

onde  $[\mathbf{R}]$  é a matriz de rotação de tamanho  $3 \times 3$ , apresentada por Weaver [13]

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \\ -\frac{C_x C_y}{L'} & L' & -\frac{C_y C_z}{L'} \\ -\frac{C_z}{L'} & 0 & \frac{C_x}{L'} \end{bmatrix} \quad (4-55)$$

em que

$$C_x = \frac{x_j - x_i}{L}; \quad C_y = \frac{y_j - y_i}{L}; \quad C_z = \frac{z_j - z_i}{L} \quad (4-56)$$

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2 + (z_j - z_i)^2}; \quad L' = \sqrt{C_x^2 + C_z^2} \quad (4-57)$$

onde os índices  $i$  e  $j$  representam as coordenadas iniciais e finais, respectivamente.

Se a barra estiver na vertical, a matriz de rotação será simplificada, conforme a Eq. (4-58). O valor de  $C_y$  pode ser multiplicado por 1 ou -1, dependendo da posição do eixo  $y$  (Figura 4.7). Se estiver a  $90^\circ$  do eixo  $x$  será 1, já se estiver a  $270^\circ$  do eixo  $x$  será -1. Deste modo, a matriz de rotação para elementos verticais será:

$$\mathbf{R}_v = \begin{bmatrix} 0 & C_y & 0 \\ -C_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4-58)$$

## 4.5

### Elemento de treliça tridimensional

O desenvolvimento para a obtenção da matriz de rigidez de um elemento de treliça tridimensional é muito parecido com a construção da matriz de rigidez bidimensional, apresentada na Seção 4.2. A diferença está na quantidade

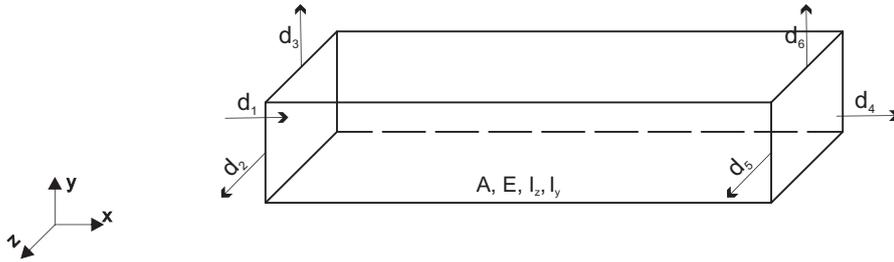


Figura 4.8: Elemento de treliça tridimensional.

de graus de liberdade em cada nó. Enquanto que no sistema bidimensional o elemento de treliça tem dois graus de liberdade, no sistema tridimensional são três, como mostra a Figura 4.8.

Uma maneira de construir a matriz de rigidez para o elemento de treliça tridimensional é eliminar os graus de liberdade referentes às rotações ( $d_4, d_5, d_6, d_{10}, d_{11}, d_{12}$ ) da Eq. (4-50). Desta forma, a matriz de rigidez efetiva é

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} K_{11} & 0 & 0 & K_{14} & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & 0 & 0 & K_{25} & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} & 0 & 0 & K_{36} \\ K_{41} & 0 & 0 & K_{44} & 0 & 0 \\ 0 & K_{52} & 0 & 0 & K_{55} & 0 \\ 0 & 0 & K_{63} & 0 & 0 & K_{66} \end{bmatrix} \quad (4-59)$$

onde

$$\begin{aligned} - K_{11} = K_{44} &= \frac{EAk_N c_N}{s_N} \\ - K_{22} = K_{55} &= -\frac{EI_z k_{xy}^3 (C_{xy}^2 - 2c_{xy} S_{xy}^2 C_{xy} s_{xy} - c_{xy}^2)}{2(S_{xy} c_{xy} + C_{xy} s_{xy}) s_{xy} S_{xy}} \\ - K_{33} = K_{66} &= -\frac{EI_y k_{xz}^3 (C_{xz}^2 - 2c_{xz} S_{xz}^2 C_{xz} s_{xz} - c_{xz}^2)}{2(S_{xz} c_{xz} + C_{xz} s_{xz}) s_{xz} S_{xz}} \\ - K_{14} = K_{41} &= \frac{EAk_N}{s_N} \\ - K_{25} = K_{52} &= \frac{EI_z k_{xy}^3 (c_{xy} C_{xy}^2 - C_{xy} c_{xy}^2 - s_{xy} c_{xy} S_{xy} + c_{xy} C_{xy} - s_{xy} C_{xy} S_{xy} - C_{xy}^2)}{2(s_{xy} C_{xy} - S_{xy} c_{xy}) s_{xy} S_{xy}} \\ - K_{36} = K_{63} &= \frac{EI_y k_{xz}^3 (c_{xz} C_{xz}^2 - C_{xz} c_{xz}^2 - s_{xz} c_{xz} S_{xz} + c_{xz} C_{xz} - s_{xz} C_{xz} S_{xz} - C_{xz}^2)}{2(s_{xz} C_{xz} - S_{xz} c_{xz}) s_{xz} S_{xz}} \end{aligned}$$

A série expandida de frequências da matriz de rigidez efetiva, da Eq. (4-59), para  $n=3$ , é dada por

$$\lim_{k \rightarrow 0} \mathbf{K} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-60)$$

A série expandida em função da frequência, da matriz de rigidez efetiva, para  $n=3$ , é descrita por

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K} = \mathbf{K}_0 - (\omega^2 \mathbf{M}_1 + \omega^4 \mathbf{M}_2 + \omega^6 \mathbf{M}_3 + O(\omega^8)) = \\
 \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{\omega^2 mL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \\
 - \frac{\omega^4 m^2 L^3}{45E} \begin{bmatrix} \frac{\rho}{L} & 0 & 0 & \frac{7\rho}{8L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2L^2}{21I_z} & 0 & 0 & \frac{31L^2}{336I_z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2L^2}{21I_y} & 0 & 0 & \frac{31L^2}{336I_y} \\ \frac{7\rho}{8L} & 0 & 0 & \frac{\rho}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{31L^2}{336I_z} & 0 & 0 & \frac{2L^2}{21I_z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{31L^2}{336I_y} & 0 & 0 & \frac{2L^2}{21I_y} \end{bmatrix} - \\
 - \frac{\omega^6 m^3 L^5}{945E^2} \begin{bmatrix} \frac{2\rho^2}{m^2} & 0 & 0 & \frac{31\rho^2}{16m^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2L^4}{99I_z^2} & 0 & 0 & \frac{511L^4}{25344I_z^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2L^4}{99I_y^2} & 0 & 0 & \frac{511L^4}{25344I_y^2} \\ \frac{31\rho^2}{16m^2} & 0 & 0 & \frac{2\rho^2}{m^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{511L^4}{25344I_z^2} & 0 & 0 & \frac{2L^4}{99I_z^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{511L^4}{25344I_y^2} & 0 & 0 & \frac{2L^4}{99I_y^2} \end{bmatrix} - O(\omega^8)
 \end{aligned}
 \tag{4-61}$$

A Eq. (4-37) transforma a matriz de rigidez da Eq. (4-59) do sistema local para o sistema global. A matriz de transformação ( $\mathbf{T}$ ) para treliça espacial será:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} [\mathbf{R}] & 0 \\ 0 & [\mathbf{R}] \end{bmatrix} \tag{4-62}$$

As frequências da treliça de um e 15 nós foram comparadas (Figuras 5.41 e 5.42). A treliça original requer muitas matrizes de massa para se aproximar

das frequências mais exatas. A discretização das barras foi importante para proporcionar a convergência com poucas matrizes de massa. Isso foi observado tanto para o perfil TQ quanto para o TC, onde  $[\mathbf{R}]$  é a mesma matriz de rotação apresentada na Eq. (4-55).

## 5 Exemplos numéricos

Este capítulo apresenta uma série de exemplos de estruturas bi e tridimensionais, a fim de verificar a convergência das frequências e das respostas de cada uma, ao usar o método híbrido dos elementos finitos através da técnica da superposição modal avançada, baseado no Capítulo 3. Todos os exemplos foram extraídos de referências que serão apresentadas ao longo deste capítulo e foram montados no software MAPLE CLASSIC.

### 5.1 Exemplo 01 - treliça plana

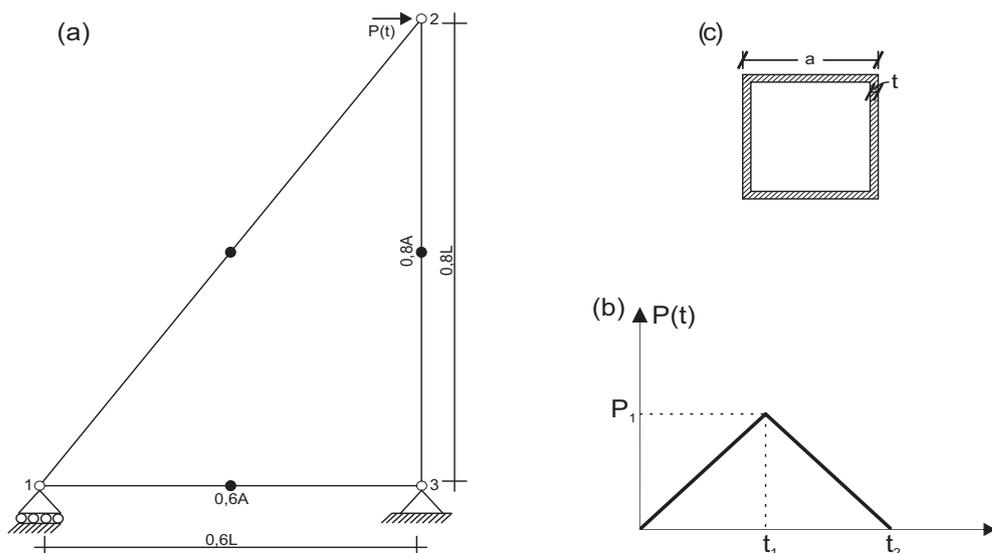


Figura 5.1: (a) Treliça plana; (b) Seção transversal adotada; (c) Carregamento dinâmico.

Weaver [14] propôs a treliça (Figura 5.1(a)) com três nós (nó um com restrição vertical e o nó três com restrição total). Foram fornecidos os seguintes parâmetros:  $E = 207\text{GPa}$ ,  $\rho = 7,85 \times 10^3\text{kg/m}^3$ ,  $A = 6,451 \times 10^{-3}\text{m}^2$ ,  $L = 6,35\text{m}$ . Um carregamento dependente do tempo foi aplicado no nó 2, cuja expressão analítica é

$$P(t) = \frac{(P_1 t)H(t)H(t_1 - t) + (2P_1 t_1 - P_1 t)H(t - t_1)H(2t_1 - t)}{t_1} \quad (5-1)$$

onde  $H(t)$  é a função Heaviside,  $P_1 = 90kN$  é a intensidade do carregamento e  $t_2 = 2t_1 = 3,75 \times 10^{-3}s$  são os tempos de aplicação do impulso. A partir deste momento, para este e todos os exemplos que seguem, os nós a serem representados serão apenas os livres e os parcialmente restringidos. Somente estes são utilizados para o cálculo das frequências da estrutura. Para o presente caso estes serão os nós um e dois, treliça de dois nós. Será feita a comparação das frequências e deslocamentos obtidos com mais de uma matriz de massa com os resultados obtidos por Weaver [14]. As três frequências calculadas por Weaver [14] são apresentadas na Tabela 5.1.

Tabela 5.1: Frequências obtidas por Weaver [14] e as calculadas com uma matriz de massa (1MM).

Freq. (Rad/s)	Weaver [14]	1MM
<b>1</b>	419,95	420,51
<b>2</b>	1167,70	1168,20
<b>3</b>	1861,80	1864,34

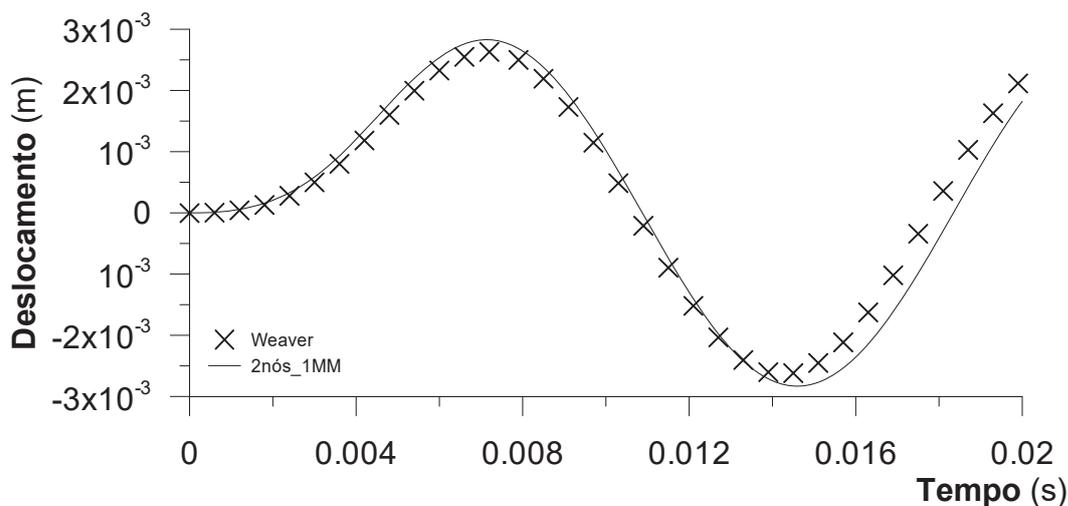


Figura 5.2: Resposta calculada pela técnica da superposição modal: por Weaver [14] e avançada com uma matriz de massa (2nós\_1MM).

Ao utilizar os mesmos parâmetros de Weaver [14], foram calculadas frequências muito parecidas com as fornecidas no livro. A diferença ocorreu por algum arredondamento dos dados fornecidos, ver Tabela 5.1.

A Figura 5.2 apresenta a comparação da resposta do nó 2 encontrada pela referência e a calculada com uma matriz de massa. A diferença dos resultados pode ter ocorrido pela variação das frequências (Tabela 5.1) somada com a imprecisão da extração da resposta na página digitalizada do livro de

Weaver [14]. Para elementos de treliça, ao utilizar mais de uma matriz de massa há a necessidade de conhecer o momento de inércia da seção, conforme exposto na Eq. (4-39). Weaver [14] não fornece a rigidez da seção, então foram utilizados perfis quadrados vazados (Tabela 5.2), mantendo os mesmos parâmetros originais da treliça.

Tabela 5.2: Propriedades geométricas dos perfis quadrados vazados (TQ).

Perfil	Barra 01	Barra 02	Barra 03
	TQ 40×40×4,1	TQ 40×40×2,46	TQ 40×40×3,25
$a(cm)$	40,00	40,00	40,00
$t(mm)$	4,10	2,46	3,25
$A(cm^2)$	64,93	39,12	51,58
$I_x(cm^4)$	16 960,00	10 303,00	13 530,00

Tabela 5.3: Frequências da treliça de dois nós usando perfis TQ e com até seis matrizes de massa.

Freq. (Rad/s)	1MM	2MM	3MM	4MM	5MM	6MM
1	420,51	297,28	253,72	233,10	221,49	214,23
2	1168,20	950,53	666,71	544,95	482,21	444,73
3	1864,34	1078,20	985,98	934,69	899,44	874,57

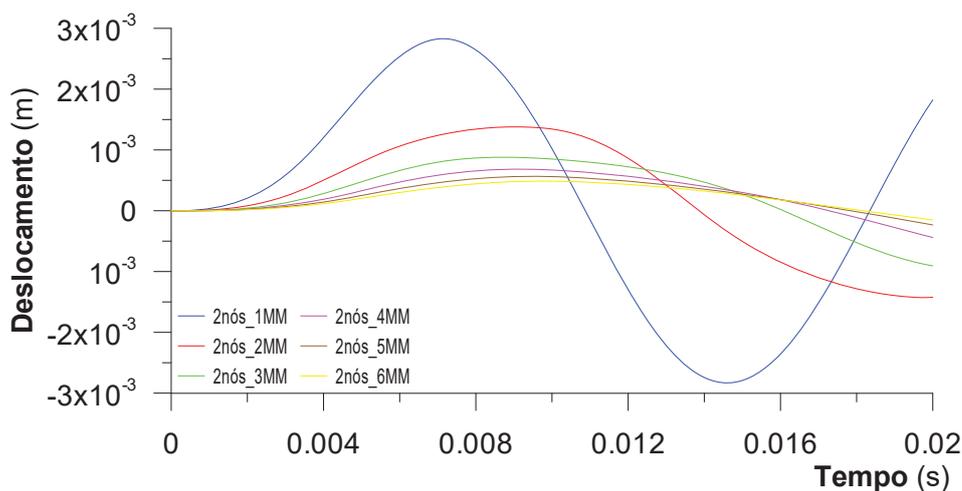


Figura 5.3: Resposta do nó 2 da treliça de dois nós usando os perfis TQ e até seis matrizes de massa.

A Figura 5.3 mostra que para a quantidade de nós originais e com até seis matrizes de massa não há a convergência da resposta da estrutura.

Como a estrutura de dois nós não convergiu, a treliça foi discretizada com mais nós para proporcionar a convergência da resposta ao aplicar a técnica da superposição modal avançada, variando a quantidade de matrizes de massa. Cada barra discretizada passa a ter comportamento de viga nas barras internas e comportamento de treliça nas extremidades, deste modo há uma representação mais fiel do real comportamento da estrutura. A partir deste momento, para este e todos os exemplos de treliça, todos os nós da estrutura discretizada serão compostos por elementos de viga e condições de rótula onde for comportamento de treliça. Neste caso então, a estrutura discretizada tem 13 graus de liberdade, então 13 frequências são calculadas.

Tabela 5.4: Três primeiras e últimas frequências da estrutura de cinco nós usando até seis matrizes de massa.

Freq.(Rad/s)	1MM	2MM	3MM	4MM	5MM	6MM
1	315,82	313,27	313,20	313,20	313,20	313,20
2	587,47	579,91	579,48	579,45	579,45	579,45
3	806,24	797,63	797,09	797,04	797,03	797,03
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
11	4705,48	4087,10	3951,16	3903,01	3881,40	3870,45
12	5491,09	4805,55	4641,53	4578,37	4548,32	4532,14
13	5846,21	5153,70	4937,76	4836,86	4779,40	4742,61

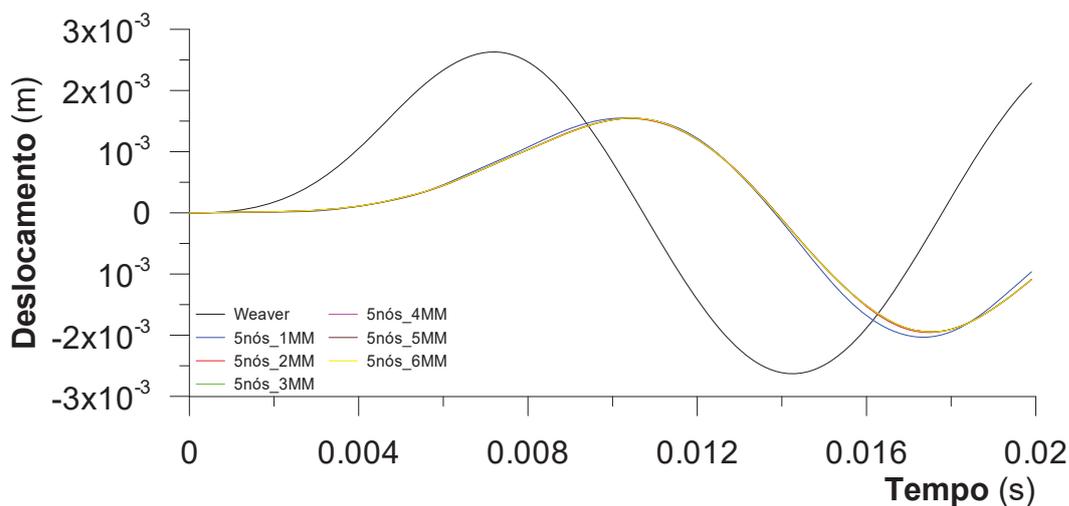


Figura 5.4: Comparação entre a resposta da treliça de cinco nós usando perfis TC e até seis matrizes de massa e a obtida por Weaver [14].

A estrutura de cinco nós (Figura 5.1(a)) rapidamente converge as primeiras frequências (Tabela 5.4) e a resposta do nó 2 (Figura 5.4).

A Tabela 5.4 mostra que as frequências mais altas não convergem com a mesma rapidez das primeiras porque a discretização da estrutura pode não ser suficiente para proporcionar a convergência total. Mesmo as frequências mais altas não convergirem facilmente, a aproximação da resposta não é prejudicada.

Os valores da treliça de cinco nós e uma matriz de massa serão as referências (frequência e deslocamento) por serem mais exatos do que aquelas calculados pela dinâmica clássica e estrutura original. Ao comparar as frequências da estrutura de dois nós em relação a treliça de cinco nós (Figura 5.5), percebe-se seriam necessárias muitas matrizes de massa para convergir as três frequências da treliça. O resultado do livro de Weaver [14] apresenta uma diferença da resposta em relação a estrutura discretizada (Figura 5.4), isto mostra a importância da rigidez para o cálculo da resposta, quando usadas mais de uma matriz de massa.

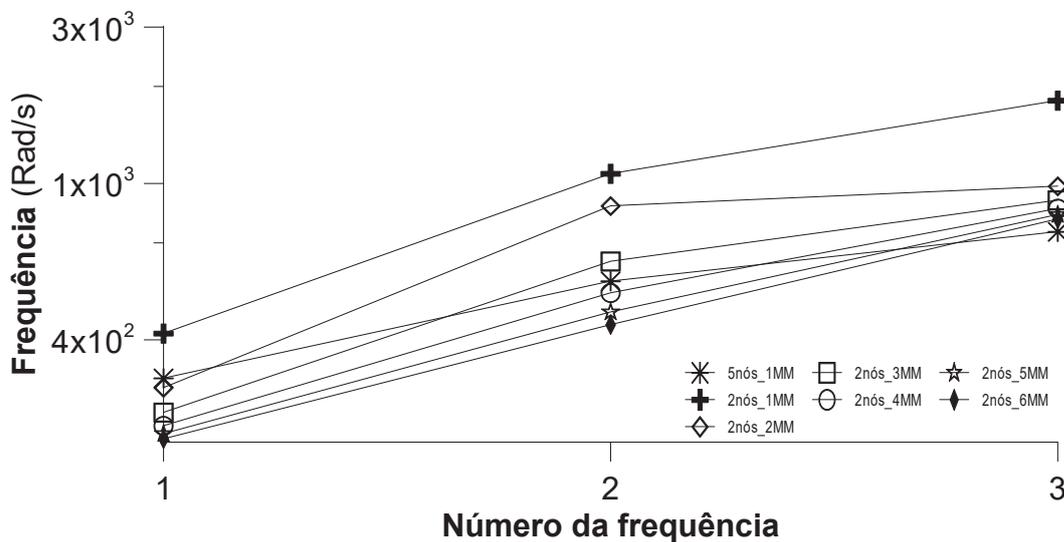


Figura 5.5: Comparação das frequências da treliça de dois nós, perfis TQ e até seis matrizes de massa com das três primeiras da estrutura de cinco nós e uma matriz de massa (*5nós\_1MM*).

As Figuras 5.4 e 5.6 mostram que a discretização geométrica da estrutura proporcionou uma excelente convergência tanto da resposta quanto das frequências. Deste modo, não há a necessidade em utilizar mais nós do que os descritos na Figura 5.1(a) e nem muitas matrizes de massa.

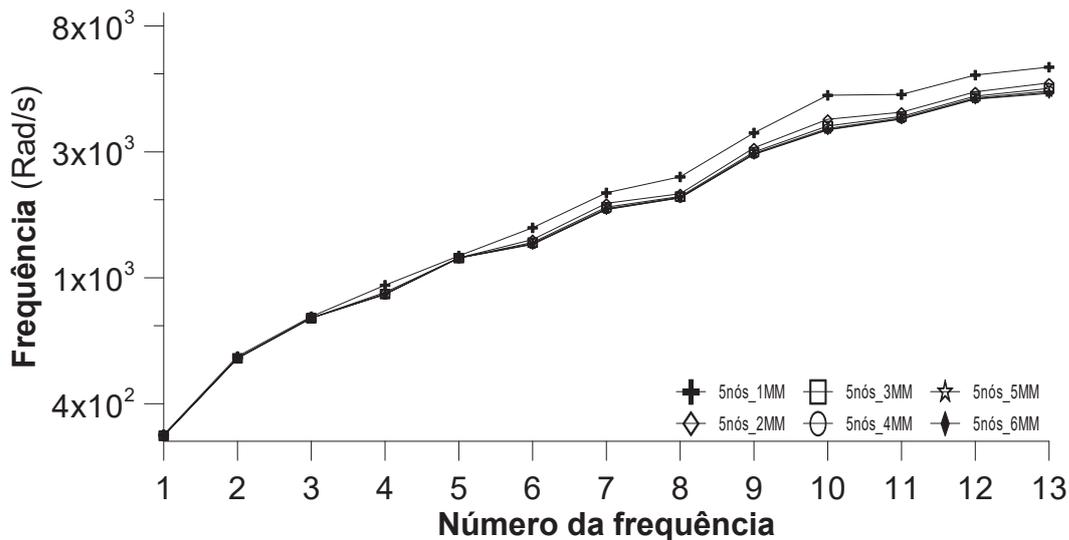


Figura 5.6: Frequências da treliça de cinco nós usando perfis TQ e até seis matrizes de massa.

## 5.2

### Exemplo 02 - treliça plana

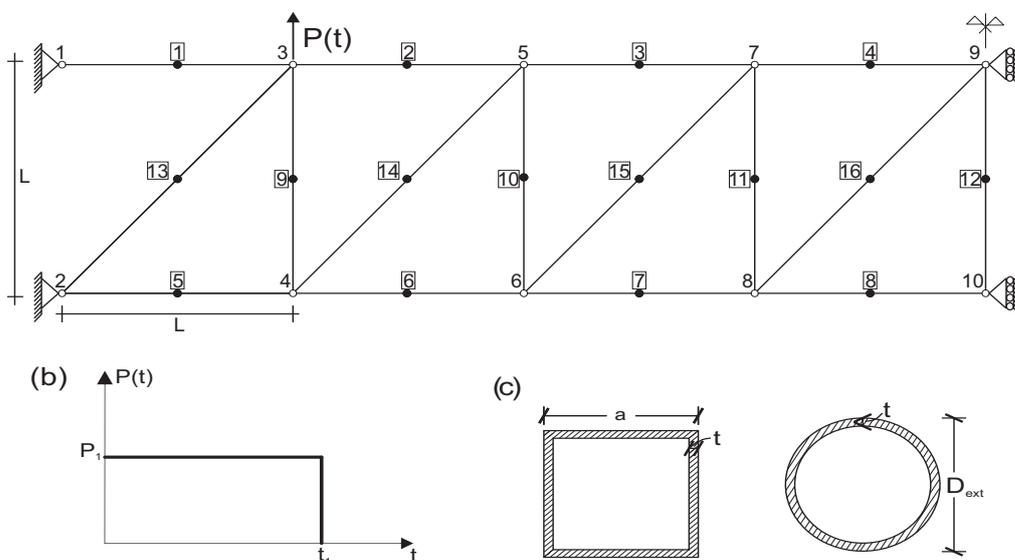


Figura 5.7: (a) Treliça plana; (b) Impulso aplicado; (c) Seção transversal tubular retangular (TQ) e tubular circular (TC).

A treliça simétrica proposta por Weaver [14] (Figura 5.7(a)) tem área da seção transversal  $A$  para os elementos verticais e horizontais,  $1,5A$  para os elementos na diagonal,  $0,5A$  para a barra 12 e todas as barras são de alumínio. Um carregamento dependente do tempo (Figura 5.7(b)) é aplicado no nó 3, cuja expressão analítica é

$$P(t) = P_1 H(t) H(t_1 - t) \tag{5-2}$$

onde  $H(t)$  é a função Heaviside,  $P_1 = 50kN$  é a intensidade do carregamento e  $t_1 = 0,2s$  é o tempo de aplicação do impulso. Por ser simétrica, só será analisada a metade da estrutura e os resultados obtidos são referentes somente aos modos de vibração simétricos, devido as condições de apoio empregadas. A metade da treliça tem um total de dez nós, porém dois estão totalmente restringidos e dois estão com deslocamento horizontais restrito (estrutura de oito nós). Propriedades fornecidas são:  $A = 6 \times 10^{-3}m^2$ ,  $\rho_{al} = 2620kg/m^3$ ,  $E = 69GPa$  e  $L = 5m$ .

Tabela 5.5: Frequências calculadas utilizando uma matriz de massa (1MM), juntamente com as encontradas por Weaver [13].

Freq. (Hz)	Weaver [13]	1MM
1	79,55	79,55
2	168,90	168,88

As duas primeiras frequências da estrutura encontradas por Weaver [14], são mostradas na Tabela 5.5, juntamente com as obtidas com uma matriz de massa. A primeira frequência foi calculada ao restringir os deslocamentos horizontais dos nós 9 e 10, Figura 5.7; já segunda foi obtida ao substituir as restrições horizontais, dos nós 9 e 10, por restrições verticais.

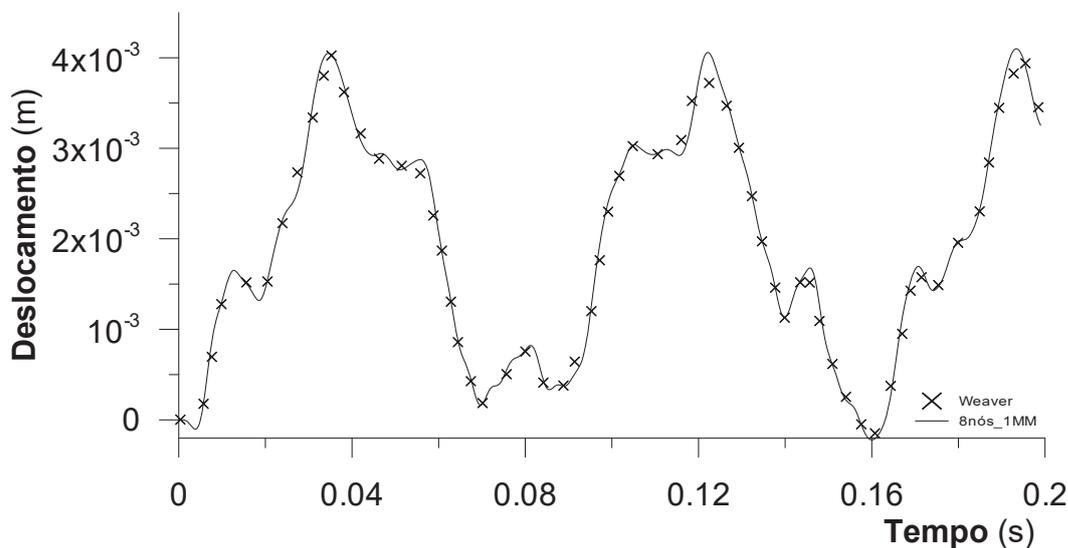


Figura 5.8: Comparação da resposta da treliça de oito nós e uma matriz de massa com a obtida por Weaver [14].

A Figura 5.8 mostra a resposta do nó 6 calculada por Weaver [14] comparada com a encontrada pela técnica da superposição modal avançada

com uma matriz de massa. Foram utilizados os mesmos dados do livro de Weaver [14]. Assim como ocorreu no Exemplo 01, a resposta obtida por Weaver [14] foi extraída da página digitalizada do livro.

A seção transversal não foi fornecida, então os perfis tubular circular (TC) e o tubular quadrado (TQ) foram utilizados, Tabela 5.6. Ambos foram dimensionados mantendo as propriedades fornecidas por Weaver [14] e o processo de dimensionamento está descrito no Apêndice A.

Tabela 5.6: Propriedades geométricas dos perfis dimensionados

Perfil	Barras			
	1..12		13...16	
	TC 40×4,9	TQ 30 ×30×5,1	TC 28×11,2	TQ 40 × 40 ×5,8
$D_{ext}(cm)$	40	-	28	-
t (mm)	4,90	5,10	11,2	5,8
a (cm)	-	30	-	40
$A(cm^2)$	60,10	60,20	90,6	91,50
$I(cm^4)$	11870	8722	8557	20730
$\lambda$	36	42	73	44

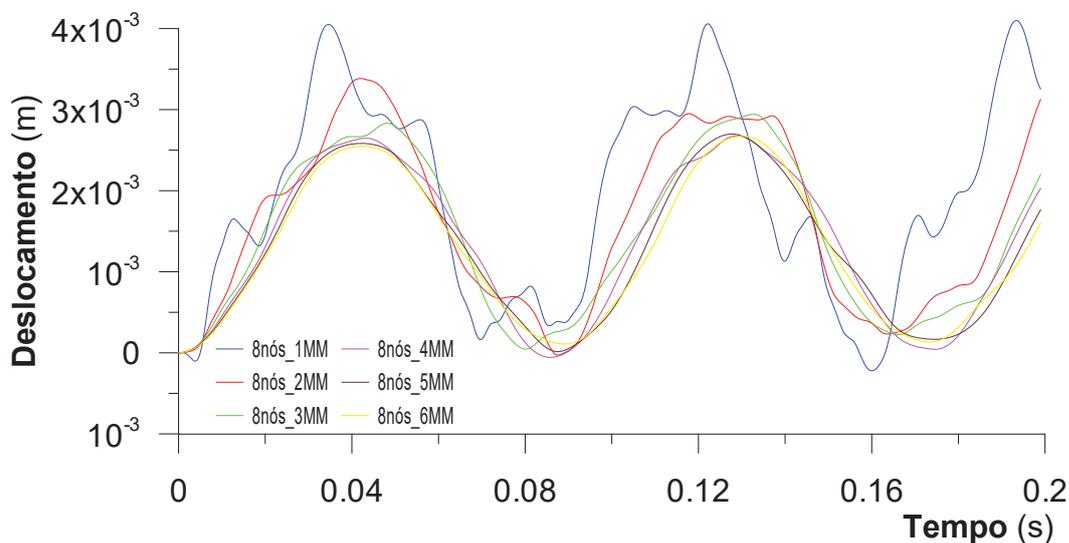


Figura 5.9: Respostas da estrutura de oito nós usando perfis TC e com até seis matrizes de massa.

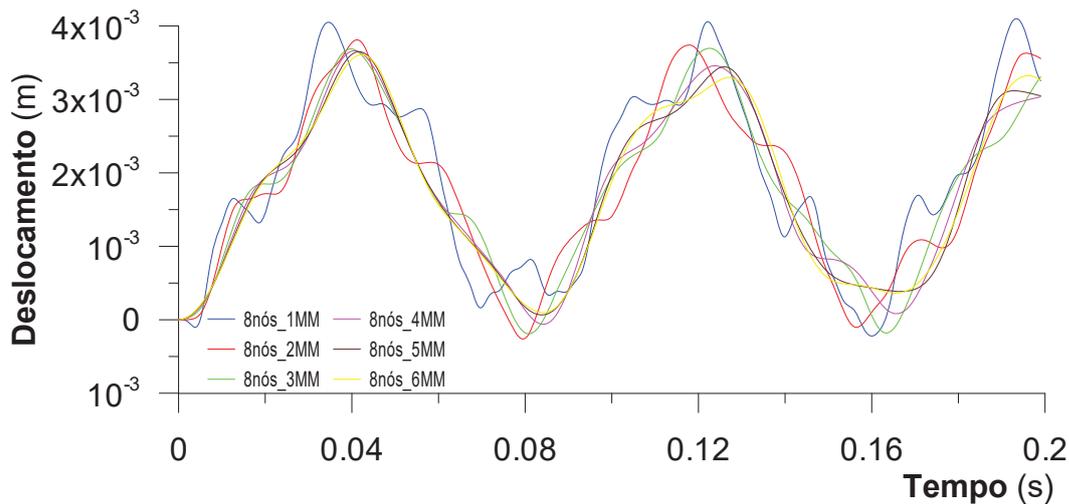


Figura 5.10: Respostas da estrutura de oito nós usando perfis TQ e com até seis matrizes de massa.

As Figuras 5.9 e 5.10 mostram que a convergência das respostas, da estrutura de oito nós, demoram a acontecer, tanto para o perfil TC quanto para o TQ.

Um nó foi adicionado no meio de cada barra para analisar a convergência das frequências. A estrutura passa a ser de 24 nós. Considerando as condições de apoio, são 68 graus de liberdade, logo, a mesma quantidade de frequências. As respostas foram verificadas usando a técnica da superposição modal avançada com mais de uma matriz de massa. As frequências da estrutura (Tabelas 5.7 e 5.8) convergiram rapidamente para os dois perfis, e as respostas também convergiram rapidamente com os perfis TC (Figura 5.11) e com os perfis TQ (Figura 5.12).

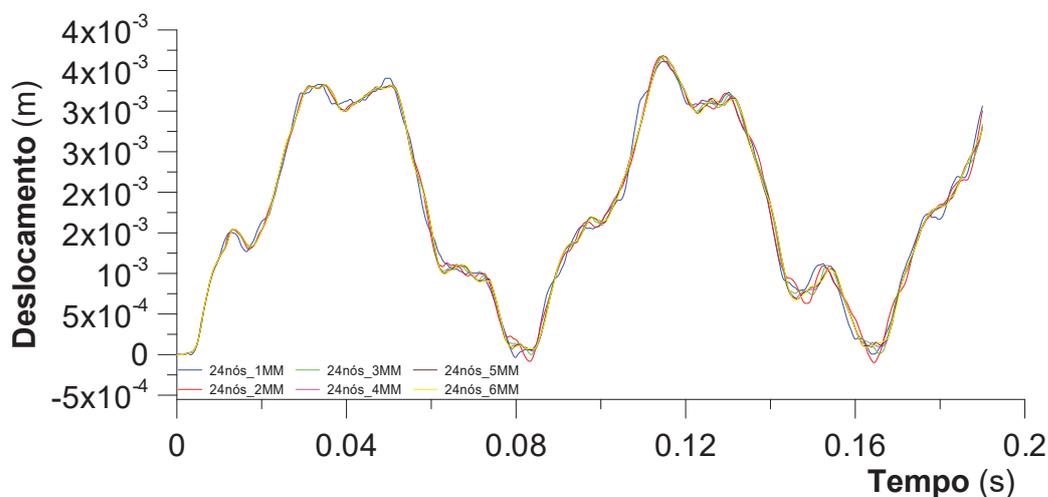


Figura 5.11: Respostas da estrutura de 24 nós usando perfis TC e com até seis matrizes de massa.

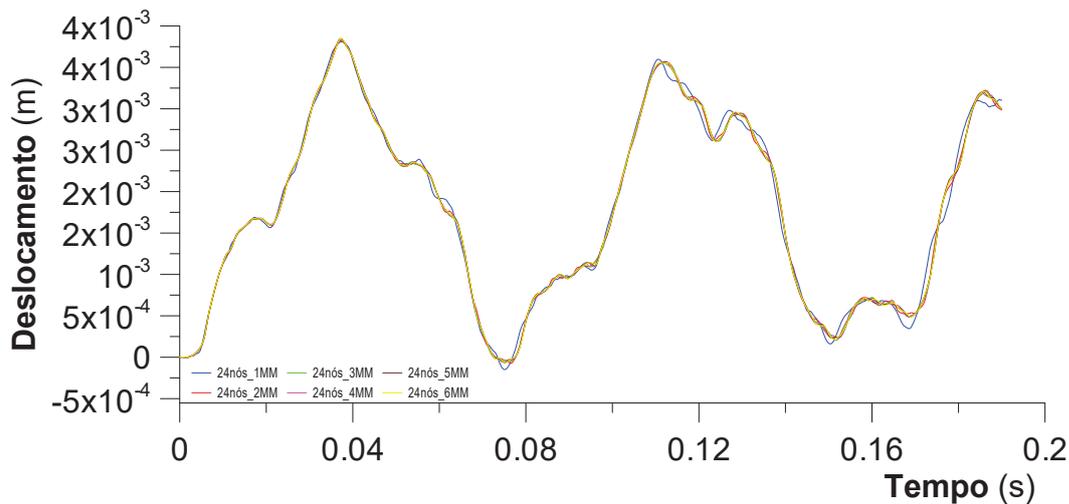


Figura 5.12: Respostas da estrutura de 24 nós usando perfis TQ e com até seis matrizes de massa.

Tabela 5.7: Seis primeiras e últimas frequências da estrutura de 24 nós usando perfis TQ e com até seis matrizes de massa.

Freq. (Hz)	1MM	2MM	3MM	4MM	5MM	6MM
1	79,94	79,92	79,92	79,92	79,92	79,92
2	257,66	257,01	257,00	257,00	257,00	257,00
3	385,24	382,92	382,87	382,86	382,86	382,86
4	418,80	415,55	415,45	415,45	415,45	415,45
5	471,73	466,58	466,38	466,37	466,37	466,37
6	492,71	486,71	486,45	486,44	486,44	486,44
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
63	5532,11	4801,38	4605,54	4516,34	4469,55	4442,63
64	6188,98	5181,97	4834,84	4696,12	4629,62	4592,88
65	6810,32	5383,60	5001,26	4849,79	4775,02	4732,61
66	6897,35	5507,48	5221,78	5101,92	5037,84	4999,73
67	7783,55	5931,88	5458,10	5267,51	5172,50	5119,27
68	8385,84	6443,28	5877,00	5621,63	5483,55	5401,50

O perfil TC apresenta algumas variações nos picos dos deslocamentos, porém converge muito bem. Neste caso, como somente a rigidez é diferente de um perfil para o outro, nota-se que para este estudo de caso, a medida que aumenta o momento de inércia, a convergência é mais rápida obtida.

Tabela 5.8: Seis primeiras e últimas frequências da estrutura de 24 nós usando perfis TC e com até seis matrizes de massa.

Freq. (Hz)	1MM	2MM	3MM	4MM	5MM	6MM
1	78,45	78,38	78,38	78,38	78,38	78,38
2	182,52	180,62	180,55	180,54	180,54	180,54
3	191,30	189,12	189,03	189,03	189,03	189,03
4	206,80	204,08	203,95	203,95	203,95	203,95
5	221,19	218,69	218,56	218,55	218,55	218,55
6	306,02	304,55	304,49	304,48	304,48	304,48
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
63	4771,42	4255,41	4113,21	4059,90	4036,73	3783,54
64	4796,96	4273,49	4128,16	4073,94	4050,69	3794,99
65	5041,79	4493,06	4335,22	4266,40	4228,16	3871,02
66	5104,57	4551,58	4401,01	4341,25	4311,78	3989,52
67	5622,98	4951,68	4734,19	4624,79	4557,02	4023,80
68	5774,21	5179,41	5008,99	4931,37	4884,72	4039,41

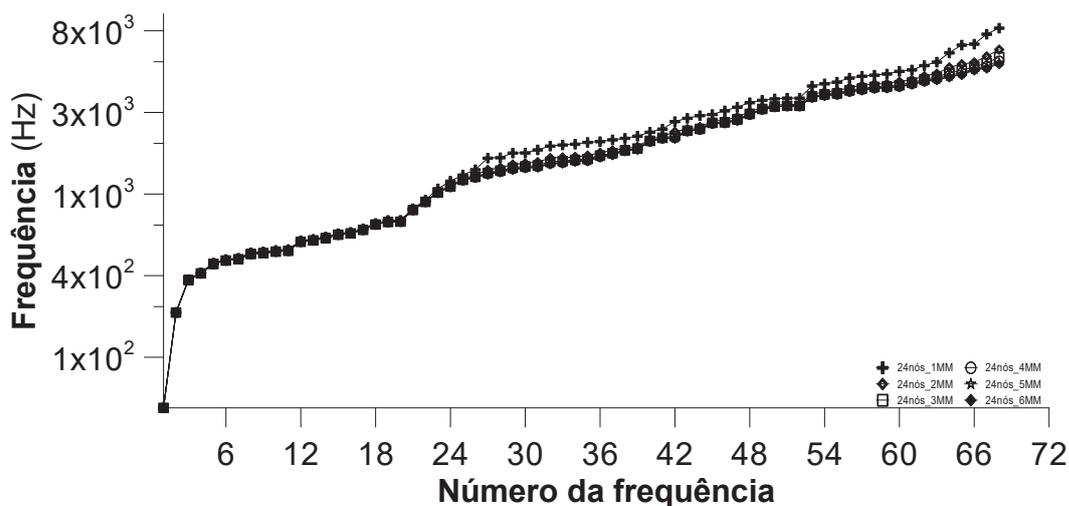


Figura 5.13: Frequências da estrutura de 24 nós usando perfis TQ e com até seis matrizes de massa.

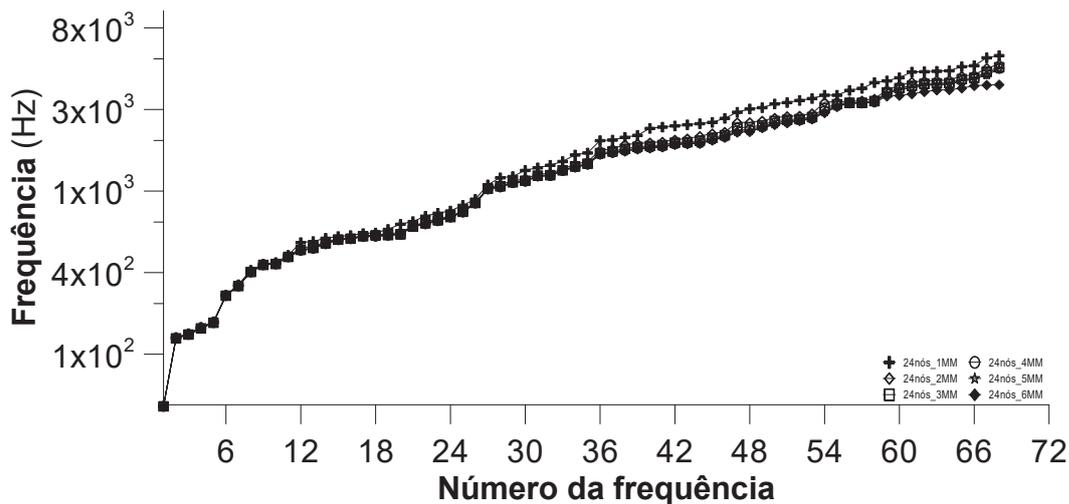


Figura 5.14: Frequências da estrutura de 24 nós usando perfis TC e com até seis matrizes de massa.

Assim como no Exemplo 01, os resultados da estrutura de 24 nós são as referências para comparar as frequências e a resposta, por serem mais exatos. As Figuras 5.15 - 5.16 mostram que a estrutura de oito nós, usando os perfis dimensionados e com uma matriz de massa apresenta deslocamentos maiores.

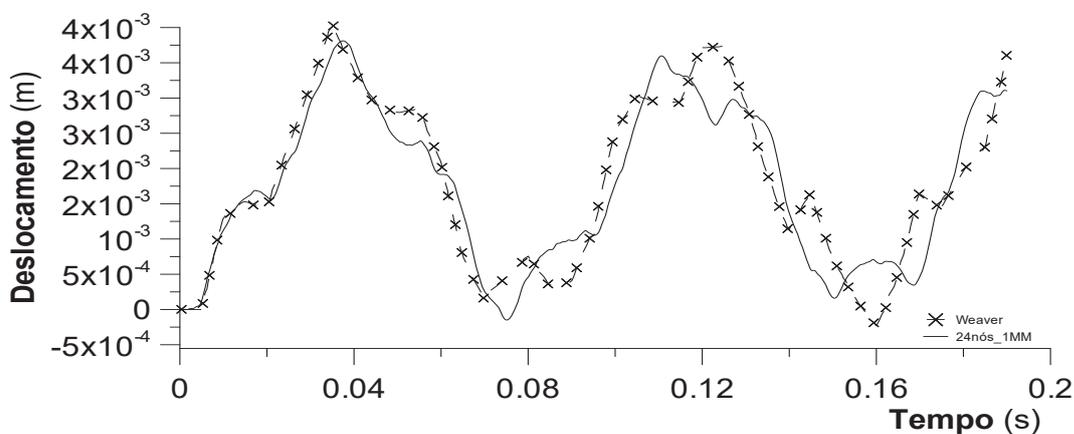


Figura 5.15: Comparação entre a resposta da treliça de 24 nós usando perfis TQ e uma matriz de massa com a obtida por Weaver [14].

As Figuras 5.17 e 5.18 mostram as frequências da estrutura original comparadas com as 14 primeiras da treliça de 24 nós. A estrutura mais discretizada proporcionou rápida convergência das frequências. Isto é válido para ambos os perfis.

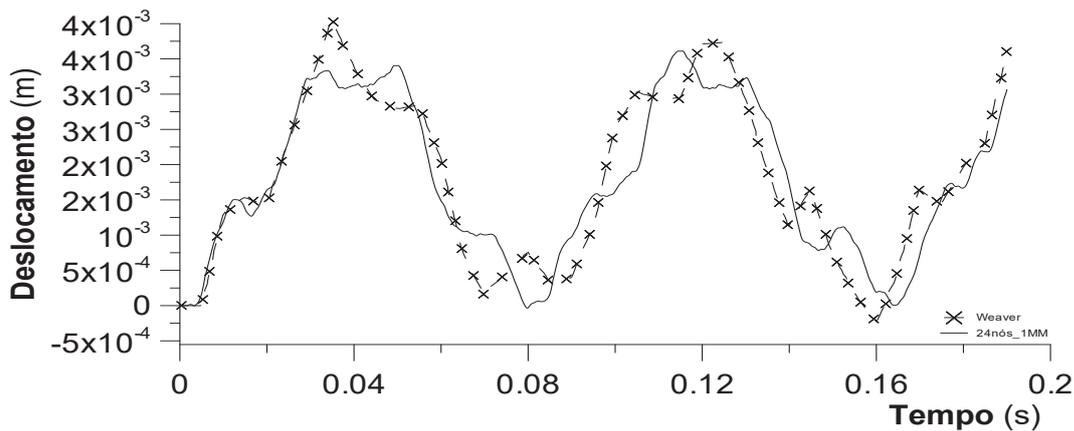


Figura 5.16: Comparação entre a resposta da treliça de 24 nós usando perfis TC e uma matriz de massa com a obtida por Weaver [14].

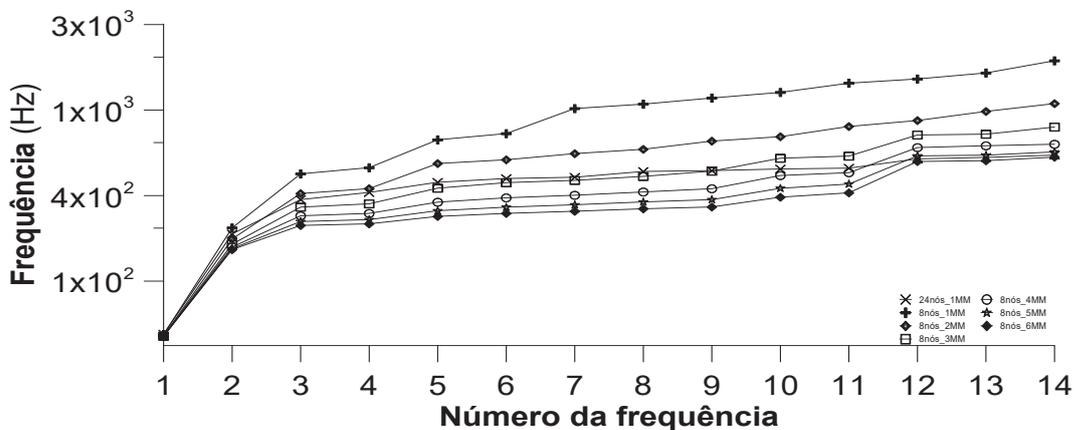


Figura 5.17: Comparação das frequências da treliça de oito nós, perfis TQ e até seis matrizes de massa com as 14 primeiras da estrutura de 24 nós.

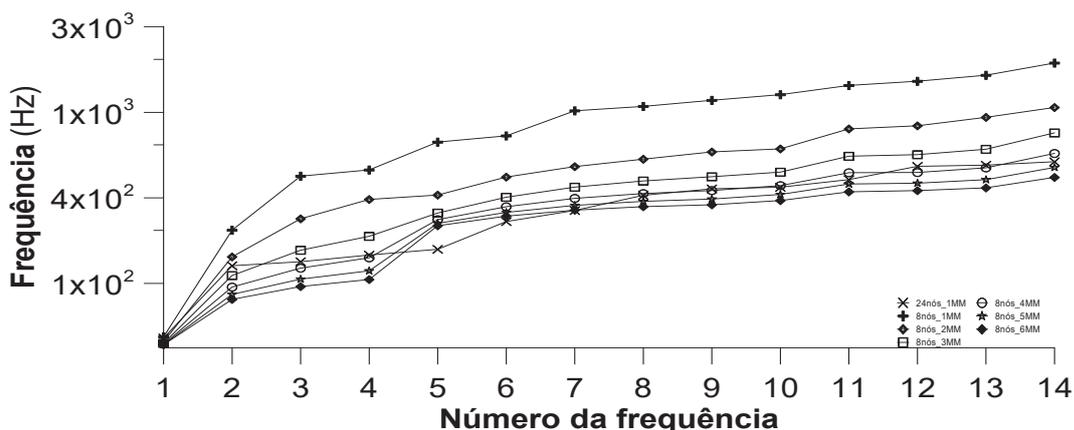


Figura 5.18: Comparação das frequências da treliça de oito nós, perfis TC e até seis matrizes de massa com as 14 primeiras da estrutura de 24 nós.

5.3

Exemplo 03 - pórtico bidimensional

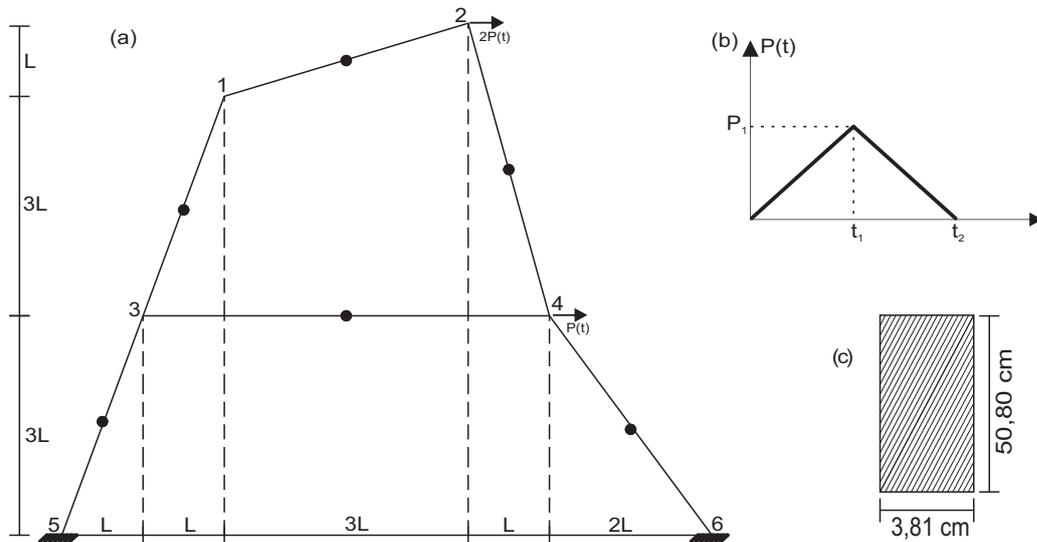


Figura 5.19: (a) Pórtico plano; (b) Impulso aplicado; (c) Seção transversal adotada que atenda as informações do exemplo.

O pórtico tem seis barras prismáticas de mesmas propriedades do material ( $E = 200GPa$  e  $\rho = 7850kg/m^3$ ), seção transversal ( $A = 1,935 \times 10^{-2}m^2$  e  $I = 4,1623 \times 10^{-4}m^4$ ) e comprimento  $L = 0,762m$ , estas características são fornecidas por Weaver [14]. Dois carregamentos dependente do tempo (Figura 5.19b) são aplicados nos nós dois e quatro, em que  $P_1 = 44,50kN$  é a intensidade do carregamento,  $t_2 = 2t_1 = 17,5 \times 10^{-3}s$  é o tempo de aplicação do impulso.

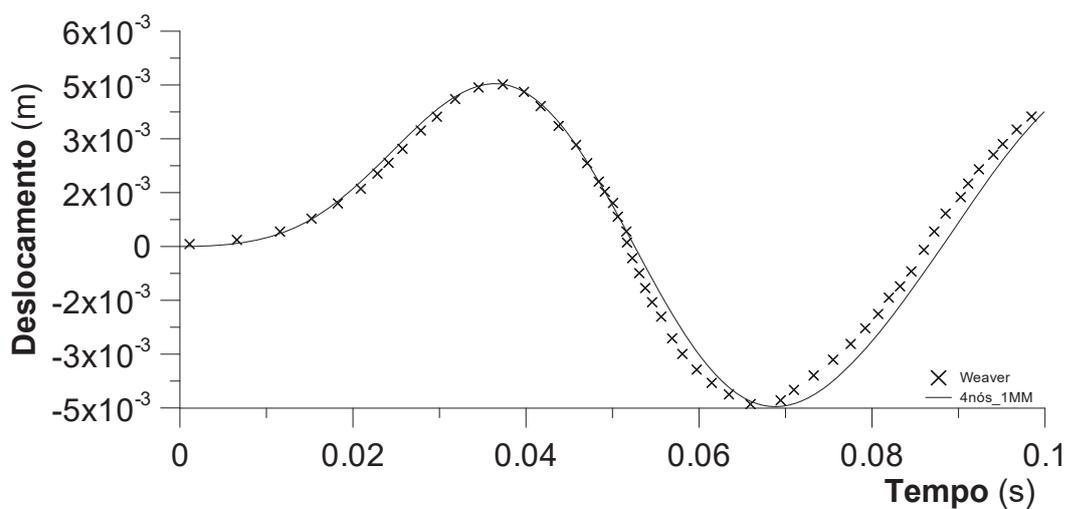


Figura 5.20: Resposta do nó 4 pela técnica da superposição modal avançada com uma matriz de massa comparada com a calculada por Weaver [14].

Aplicando a técnica da superposição modal avançada com até seis matrizes de massa, a resposta do nó 4 é apresentada pela Figura 5.21. Há excelente convergência dos deslocamentos.

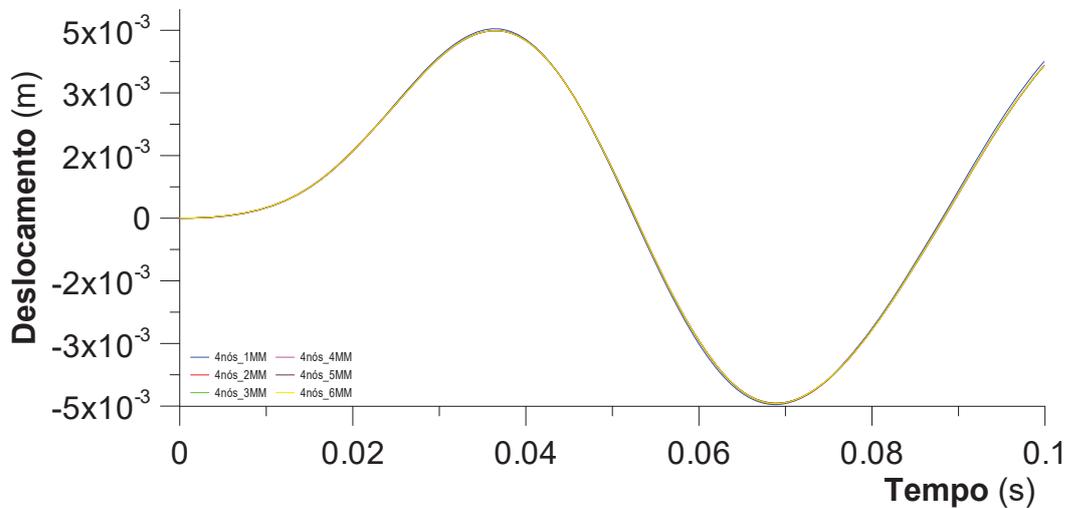


Figura 5.21: Resposta do nó 4 da estrutura de quatro nós, usando a técnica da superposição modal avançada e até seis matrizes de massa.

A estrutura mais discretizada (de 10 nós, ver Figura 5.19(a)) tem frequências e respostas mais exatas do que o pórtico original com uma matriz de massa. Para a estrutura de 10 nós, as frequências (Tabela 5.10) e a resposta (Figura 5.22) convergem para os melhores resultados.

Tabela 5.9: Três primeiras e últimas frequências da estrutura de quatro nós calculadas com até seis matrizes de massa.

Freq. (Rad/s)	1MM	2MM	3MM	4MM	5MM	6MM
1	89,39	89,12	89,11	89,11	89,11	88,86
2	182,46	181,45	181,39	181,38	181,38	180,87
3	374,18	318,79	304,74	299,57	297,37	295,55
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	1975,83	1556,70	1435,54	1388,17	1365,05	1349,70
11	2186,00	1832,89	1671,86	1588,54	1542,74	1512,86
12	3372,62	2905,18	2692,05	2576,16	2509,28	1603,44

As primeiras frequências são as mais significativas para esta estrutura, uma vez que as mais altas (Tabela 5.9) necessitam de mais matrizes de massa ou de maior discretização da estrutura para convergir, porém as respostas convergem rapidamente (Figura 5.22).

Tabela 5.10: Três primeiras e últimas frequências da estrutura de dez nós calculadas com até seis matrizes de massa.

Freq.(Rad/s)	1MM	2MM	3MM	4MM	5MM	6MM
1	87,39	87,39	87,39	87,39	87,39	87,39
2	173,33	173,27	173,27	173,27	173,27	173,27
3	285,32	284,87	284,87	284,87	284,87	284,87
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
28	7029,04	6076,50	5812,81	5703,28	5646,93	5150,36
29	7418,33	6586,66	6374,59	6285,02	6238,52	5614,45
30	9088,72	7956,09	7709,20	7609,49	7554,72	6211,80

A Figuras 5.23 mostra que as altas frequências da estrutura de quatro nós não convergem rapidamente para a melhor solução encontrada do problema, porém, para o carregamento aplicado, elas não são significativas, pois não há problema de convergência da resposta (Figura 5.22).

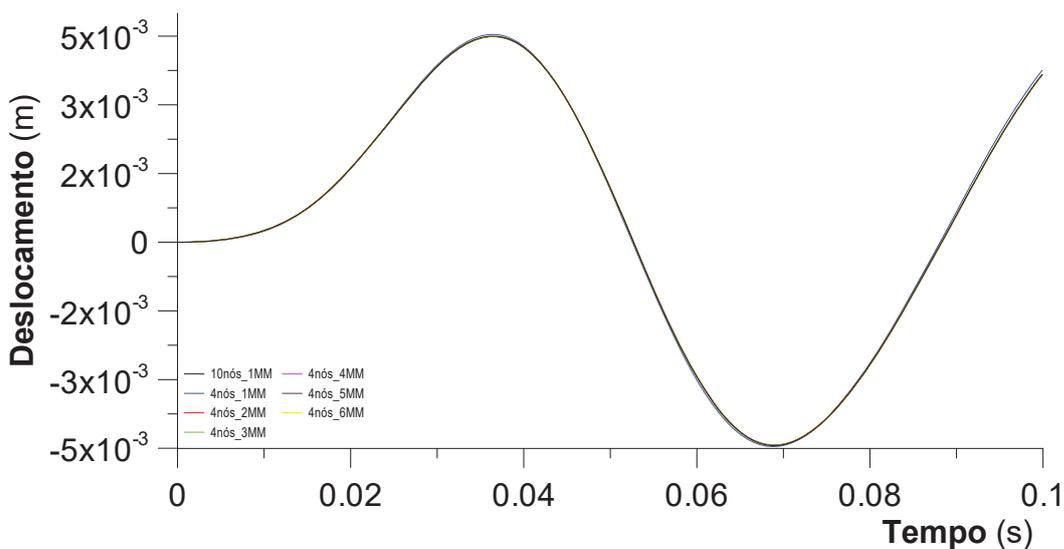


Figura 5.22: Comparação da resposta do nó 4 do pórtico de quatro nós, utilizando e até seis matrizes de massa com o de dez nós e uma matriz de massa.

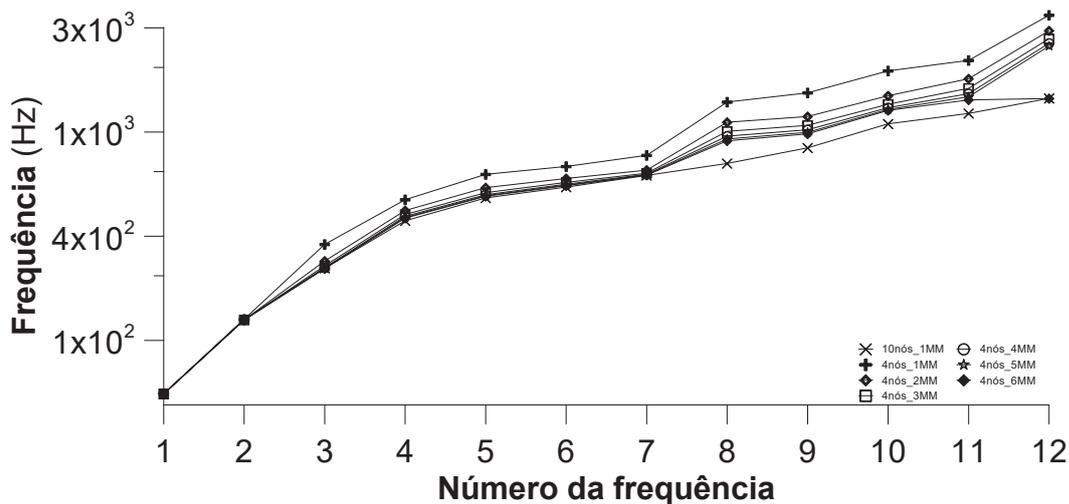


Figura 5.23: Comparação das frequências do pórtico de quatro nós e utilizando até seis matrizes de massa com o de dez nós e uma matriz de massa.

Pode-se concluir que o perfil prismático com as propriedades geométricas e do material fornecidas por Weaver [14] proporcionam rápida convergência das frequências e da resposta do pórtico. Não há a necessidade de muitas matrizes de massa e nem discretizar a estrutura em mais nós.

## 5.4

### Exemplo 04 - pórtico espacial

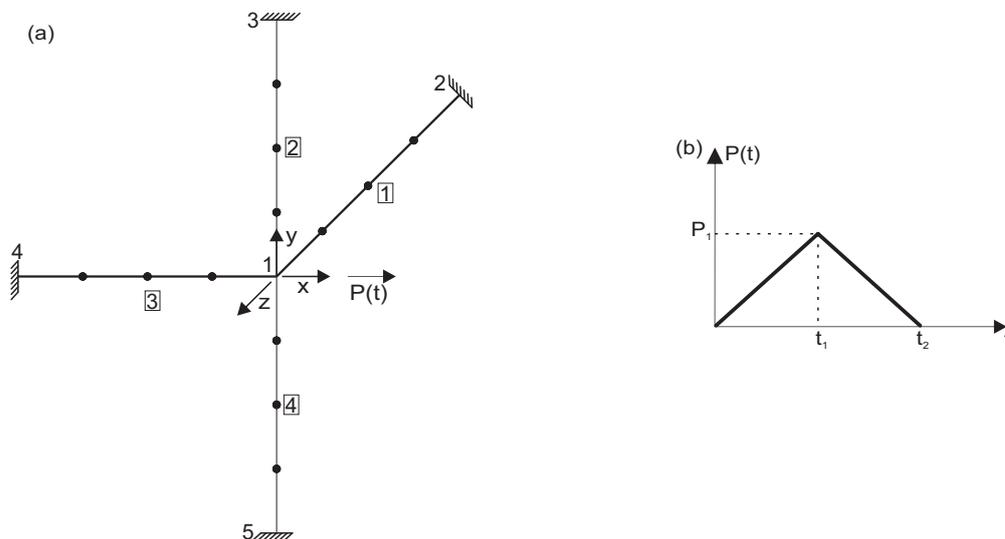


Figura 5.24: (a) Pórtico espacial; (b) Impulso aplicado.

Paz [15] propôs o pórtico tridimensional (Figura 5.24(a)) com cinco nós, dos quais quatro estão completamente restringidos (estrutura de um nó). Cada

barra mede  $5,08m$  e as propriedades do material e da seção transversal são apresentadas na Tabela 5.11.

Tabela 5.11: Propriedades geométricas e do material. [15]

<b>Propriedades</b>	<b>Barras 1 e 3</b>	<b>Barras 2 e 4</b>
E(GPa)	207	207
G(GPa)	83	83
$m(kg \times s^2/m^2)$	140,62	70,31
$I_z(m^4)$	$8,32 \times 10^{-5}$	$2,66 \times 10^{-5}$
$I_y(m^4)$	$8,32 \times 10^{-5}$	$2,66 \times 10^{-5}$
$J(m^4)$	$1,66 \times 10^{-5}$	$5,33 \times 10^{-6}$
$A(m^2)$	$3,23 \times 10^{-2}$	$1,81 \times 10^{-2}$

A Tabela 5.12 apresenta as frequências obtidas por Paz [15], juntamente com as calculadas utilizando uma matriz de massa. Como era esperado, os valores são quase iguais porque foram utilizados os mesmos dados da Tabela 5.11 para reproduzir o pórtico. A diferença pode ter ocorrido por arredondamento das propriedades fornecidas por Paz [15].

Tabela 5.12: Frequências da estrutura de um nó com até seis matrizes de massa, juntamente com as de Paz [14].

<b>Freq. (Rad/s)</b>	<b>Paz [14]</b>	<b>1MM</b>	<b>2MM</b>	<b>3MM</b>	<b>4MM</b>	<b>5MM</b>	<b>6MM</b>
1	80,50	80,54	65,80	62,06	60,65	60,01	59,70
2	80,70	80,70	65,87	62,10	60,68	60,05	59,73
3	88,60	88,64	72,87	69,07	67,74	67,21	66,97
4	417,81	417,81	226,89	162,43	134,95	120,21	111,10
5	489,36	489,47	257,83	174,46	140,80	123,47	113,09
6	517,15	517,23	279,60	192,88	157,79	139,86	129,27

Foi aplicado o mesmo impulso triangular (Figura 5.24(b)) do Exemplo 03, no nó um e grau de liberdade referente ao deslocamento na direção  $x$ , pois não havia indicação de carregamento no problema original e há o interesse em verificar a resposta da estrutura. Não há convergência da resposta, mesmo ao usar a técnica da superposição modal avançada com até seis matrizes de massa, Figura 5.25.

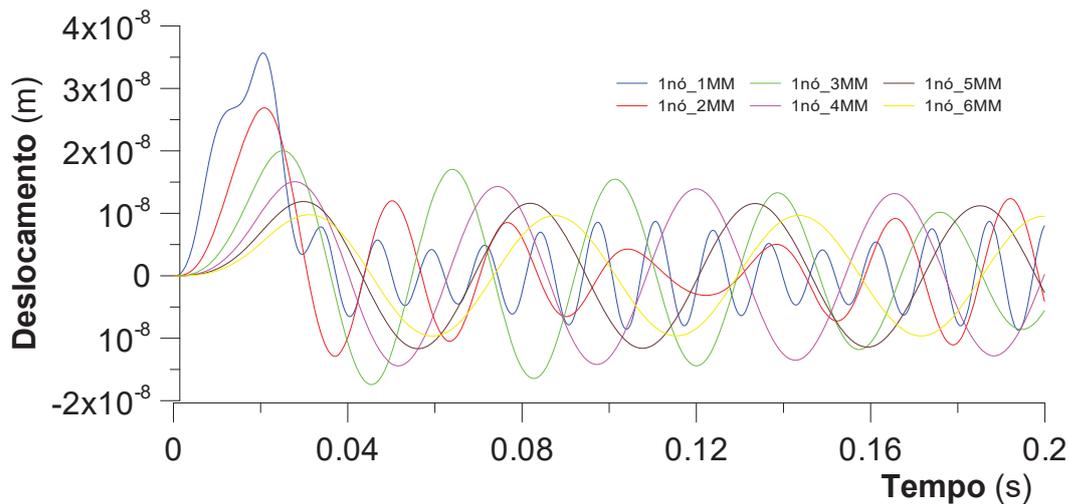


Figura 5.25: Resposta do nó 1 da estrutura de um nó, usando a técnica da superposição modal avançada com até seis matrizes de massa.

O pórtico foi discretizado em 17 nós totais, ver Figura 5.24(a). A estrutura é de 13 nós, ao considerar as condições de apoio. Para o pórtico de 13 nós, as primeiras frequências convergem rapidamente (Tabela 5.13), porém as mais altas demoram um pouco mais (Figura 5.28); a resposta convergiu muito bem (Figura 5.26), mesmo com as frequências mais altas necessitando de mais matrizes de massa para aproximarem-se dos valores mais exatos.

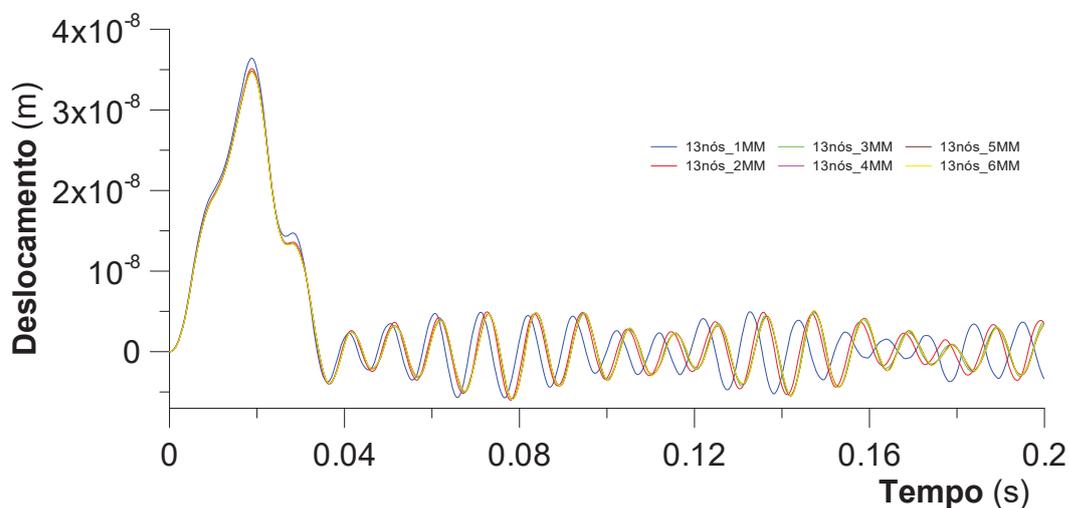


Figura 5.26: Resposta do nó 1 da estrutura de 13 nós usando a técnica da superposição modal avançada com até seis matrizes de massa.

Tabela 5.13: Frequências da estrutura de 13 nós e usadas até seis matrizes de massa.

Freq. (Rad/s)	1MM	2MM	3MM	4MM	5MM	6MM
1	56,46	56,43	56,43	56,43	56,43	56,43
2	58,88	58,85	58,85	58,85	58,85	58,85
3	64,77	64,72	64,72	64,72	64,72	64,72
4	83,96	83,86	83,86	83,86	83,86	83,86
5	87,61	87,50	87,50	87,50	87,50	87,50
6	88,39	88,27	88,27	88,27	88,27	88,27
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
73	3814,36	3348,63	3237,19	3195,85	3176,68	3166,29
74	4031,11	3597,70	3485,76	3441,88	3420,18	3407,46
75	4996,89	4464,33	4304,52	4234,38	4198,57	4178,62
76	5098,51	4539,96	4362,18	4280,74	4238,14	4213,73
77	5178,11	4623,58	4436,18	4339,93	4282,73	4246,62
78	5507,84	4938,41	4724,37	4594,75	4508,44	4450,20

As frequências do pórtico de um e de 13 nós são comparadas. A estrutura original precisa de muitas matrizes para convergir para as frequências mais exatas do problema, Figura 5.28. A estrutura de um nó não representa bem o real comportamento da estrutura, pois tem valores muito distantes da estrutura discretizada.

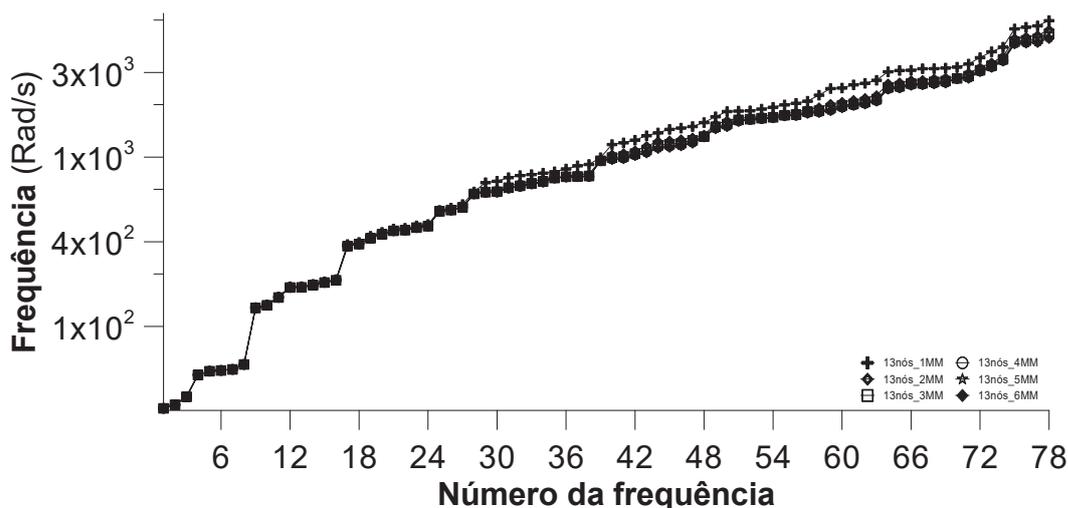


Figura 5.27: Frequências do pórtico de 13 nós com até seis matrizes de massa.

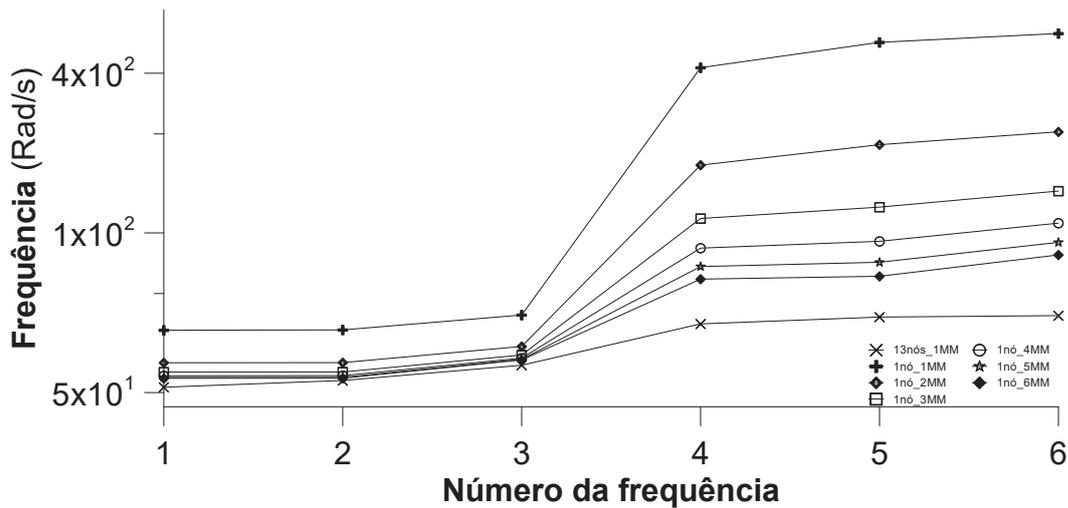


Figura 5.28: Comparação das frequências do pórtico de um nó e até seis matrizes de massa com do pórtico de 13 nós.

Mesmo que as primeiras frequências estejam com valores muito próximos, os modos de vibração mostram que os comportamentos são diferentes para cada frequência (ver matriz da Eq. (5-3)). Somente os modos de vibração com uma matriz de massa foram utilizados porque as configurações da estrutura deformada são as mesmas, só a amplitude dos deslocamentos são diferentes, quando usadas mais de uma matriz de massa.

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0,000 & 0,000 & -1,890 & 107,773 & 125,880 & 0,000 \\ 1,796 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 177,984 \\ 0,000 & 0,000 & 1,890 & 107,773 & -125,880 & -2,480 \\ 4,019 & 4,043 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & -2,480 \\ 0,000 & 0,000 & 5,670 & 0,000 & 3,541 & 0,000 \\ -4,019 & 4,043 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 2,480 \end{bmatrix} \times 10^{-3} \quad (5-3)$$

## 5.5

### Exemplo 05 - pórtico tridimensional

O pórtico tridimensional sugerido por Petyt [16] com elementos de aço, composto por 12 nós, onde oito nós estão livres. Foram fornecidas as seguintes informações:  $E = 219,9GN/m^2$ ,  $\rho = 7850kg/m^3$ , comprimento de cada barra é  $L = 1m$  e as duas primeiras frequências.

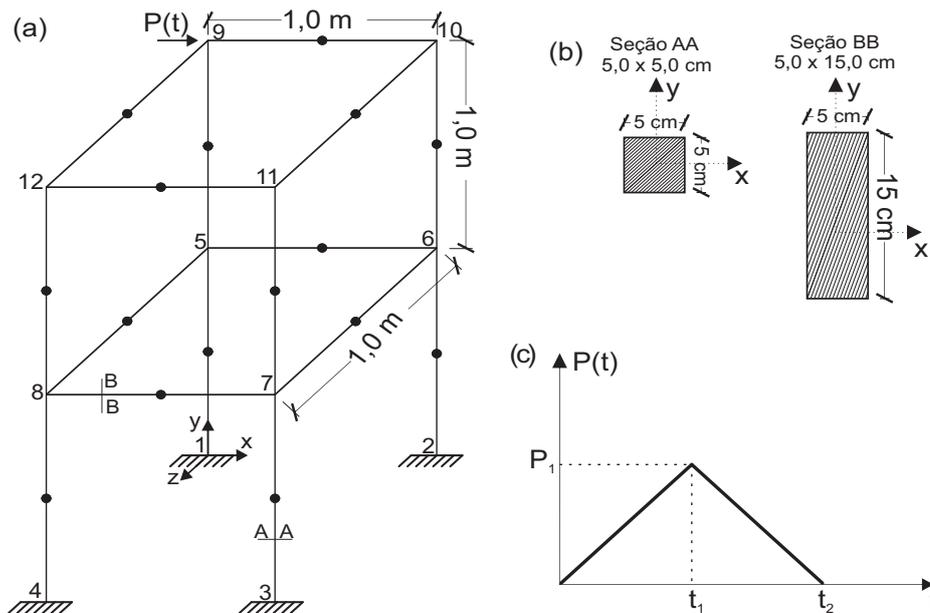


Figura 5.29: (a) Pórtico tridimensional; (b) Seção transversal dos elemento do pórtico; (c) Impulso aplicado.

Os momentos de inércia foram calculados utilizando um sistema local de coordenadas, porém são devidamente posicionados de acordo com o eixo global de coordenadas apresentado na Figura 5.29(b).

Tabela 5.14: Propriedades das seções transversais

	AA	BB
$A(m^2)$	$2,50 \cdot 10^{-3}$	$7,50 \cdot 10^{-3}$
$I_z(m^4)$	$5,21 \cdot 10^{-7}$	$1,56 \cdot 10^{-6}$
$I_y(m^4)$	$5,21 \cdot 10^{-7}$	$1,41 \cdot 10^{-5}$
$J(m^4)$	$1,04 \cdot 10^{-6}$	$1,57 \cdot 10^{-5}$

Tabela 5.15: Duas primeiras e últimas frequências da estrutura de oito nós calculas utilizando até seis matrizes de massa, juntamente com as de Petyt [16].

Freq.(Hz)	Petyt [16]	1MM	2MM	3MM	4MM	5MM	6MM
1	11,80	11,81	11,81	11,81	11,81	11,81	11,81
2	34,10	34,14	34,11	34,11	34,11	34,11	34,11
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
47	⋮	1978,25	1560,07	1470,53	1443,75	1434,40	988,16
48		2060,68	1619,88	1515,74	1466,73	1445,62	989,44

A Tabela 5.15 mostra as duas primeiras frequências com uma matriz de massa, juntamente com as obtidas por Petyt [16].

O problema original não indica atuação de carregamento, então o mesmo impulso do Exemplo 01 foi aplicado no nó 9, (Figura 5.29(c)). A Figura 5.30 exibe a resposta do nó 9, de acordo com a quantidade de matrizes de massa utilizadas.

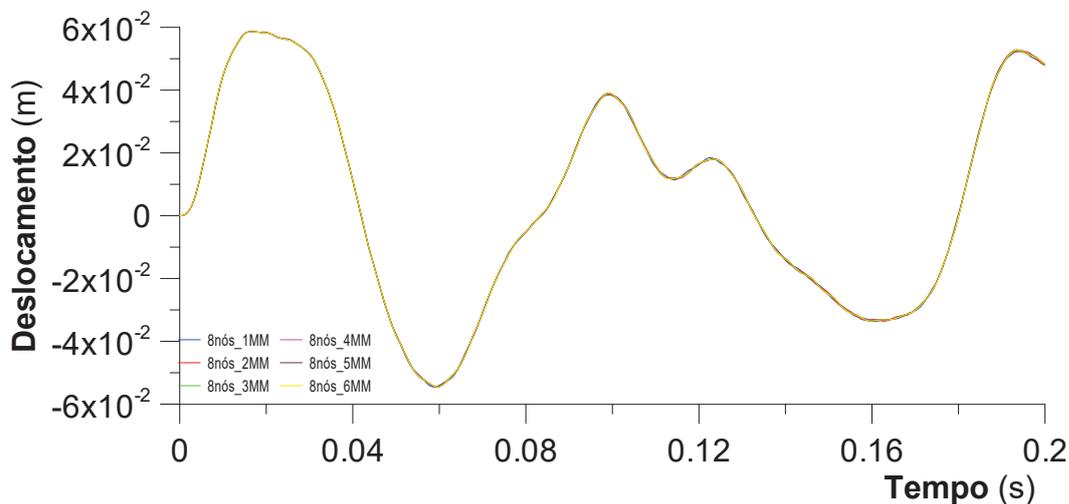


Figura 5.30: Resposta do nó 9 do pórtico de oito nós usando a técnica da superposição modal avançada com até seis matrizes de massa.

Um nó foi adicionado no meio de cada barra. O pórtico é de 24 nos, já considerando as condições de apoio da estrutura. Isso foi feito para verificar se há necessidade da estrutura original ter mais nós para convergir para a melhor resposta calculada.

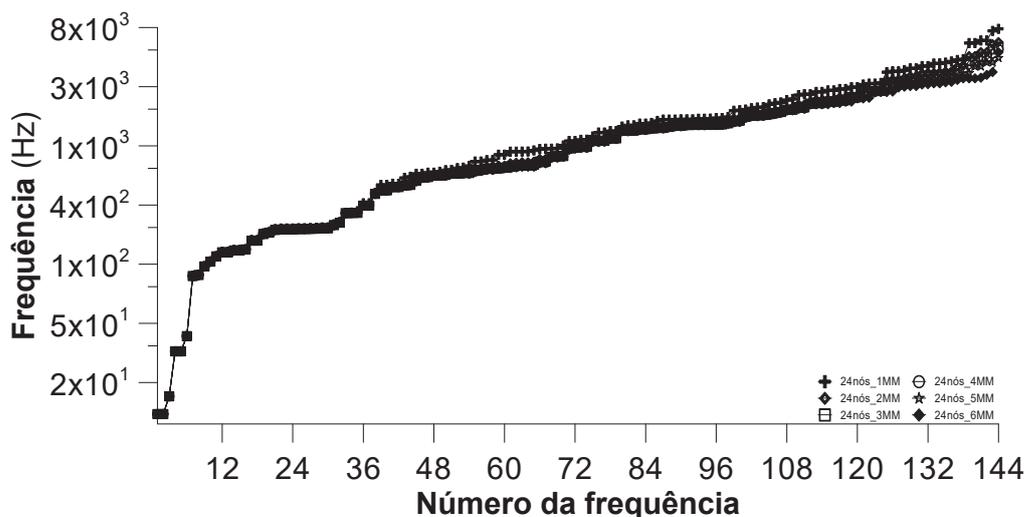


Figura 5.31: Frequências da estrutura de 24 nós usando até seis matrizes de massa.

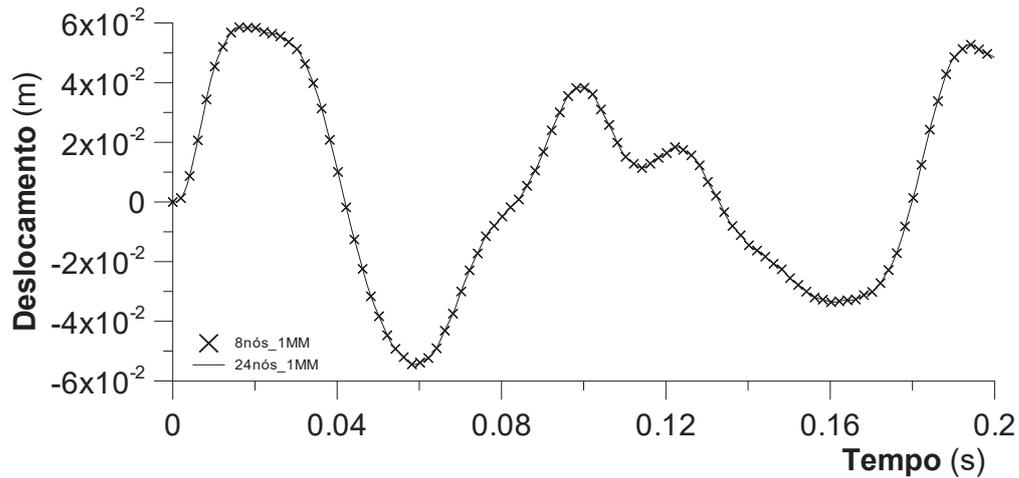


Figura 5.32: Comparação das respostas do pórtico de oito e 24 nós e uma matriz de massa.

A Figura 5.33 mostra as 48 primeiras frequências da estrutura de 24 nós comparadas com as frequências o pórtico original usando até seis matrizes de massa. As primeiras frequências convergem muito bem para os valores mais exatos, utilizando poucas matrizes de massa.

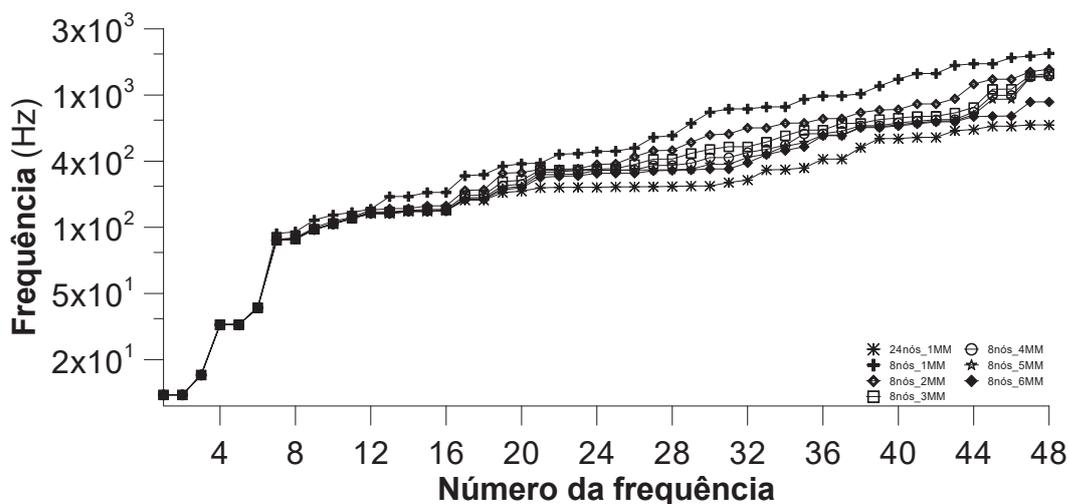


Figura 5.33: Comparação das frequências da estrutura de oito nós e até seis matrizes de massa com as 48 primeiras do pórtico de 24 nós.

O pórtico espacial de oito nós com as características geométricas e do material apresentadas por Petyt [16] obteve excelente convergência das frequências. A resposta da estrutura, para o carregamento aplicado, também convergiu muito bem. Essa estrutura, para as informações fornecida e o impulso aplicado, não precisa ser discretizada e nem de muitas matrizes de massa para ter excelente resultados.

5.6

Exemplo 06 - treliça tridimensional

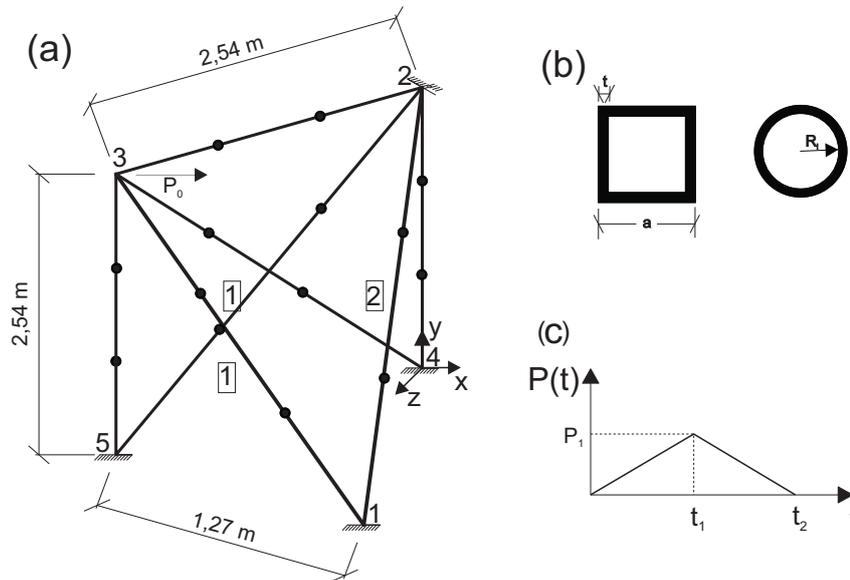


Figura 5.34: (a) Treliça espacial; (b) Perfis utilizados; (c) Impulso aplicado.

A treliça tridimensional proposta por Paz [15] tem cinco nós e somente um nó livre (Figura 5.34(a)). Foram dadas as três frequências da estrutura. Os parâmetros geométricos e do material fornecidos são:  $E = 207GPa$ ,  $A = 6,452 \times 10^{-3}m^2$  e  $m = 670kg/m$ .

Tabela 5.16: Frequências da estrutura de um nó e uma matriz de massa (1MM), juntamente com as fornecidas por Paz[15].

Freq.(Hz)	Paz[15]	1MM
1	32,84	32,84
2	69,15	69,15
3	98,95	98,95

A Tabela 5.16 mostra que as frequências apresentadas por Paz [15] foram encontradas com uma matriz de massam (1MM) porque foram utilizados as mesmas informações fornecidas por Paz [15].

Não foram fornecidas as seções transversais das barras, o Apêndice A mostra como foram dimensionados os perfis TC 40×4,9 (TC) e TQ 40×40×3,8 (TQ), respeitando a área da seção transversal apresentada por Paz [15]. Como a área é igual para todas as barras, cada perfil dimensionado será empregados em todos os elementos. Não foi possível montar o problema com perfis comerciais, Tabela 5.17.

Tabela 5.17: Propriedades geométricas dos perfis adotados.

Perfil	TQ 40×40×3,8	TC 40×4,9
$D_{ext}(cm)$	-	40
t(mm)	3,8	4,9
$a(cm)$	40	-
$A(cm^2)$	60,20	60,10
$I(cm^4)$	15753	11870
$\lambda$	24	27

As Tabelas 5.20 e 5.21 mostram que a treliça de um nó necessita de muitas matrizes de massa para proporcionar a convergência das frequências, isto ocorre tanto para o perfil tubular quadrado vazado quanto para o perfil tubular circular vazado.

Tabela 5.18: Frequências da estrutura de um nó usando perfil TQ e com até seis matrizes de massa.

Freq. (Hz)	1MM	2MM	3MM	4MM	5MM	6MM
1	32,84	28,58	26,99	26,22	25,79	25,54
2	69,15	48,94	40,86	36,93	34,68	33,26
3	98,95	77,07	62,23	53,15	47,66	44,15

Tabela 5.19: Frequências da estrutura de um nó usando perfil TC e com até seis matrizes de massa.

Freq. (Hz)	1MM	2MM	3MM	4MM	5MM	6MM
1	32,84	26,42	23,77	22,39	21,58	21,06
2	69,15	43,29	33,91	29,60	27,22	25,72
3	98,95	69,94	51,86	42,37	37,06	33,79

Não há indicação de carregamento aplicado na estrutura apresentada por Paz [15], então o mesmo do Exemplo 03 foi usado para verificar as respostas do nó 3, quando utilizadas até seis matrizes de massa e os dois perfis dimensionados.

As Figuras 5.35 e 5.36 mostram que as respostas do nó três não convergiram, utilizando os perfis TQ e TC, mesmo usando muitas matrizes de massa. Isto mostra que a treliça com a quantidade original de nós não é suficiente para proporcionar a convergência da resposta.

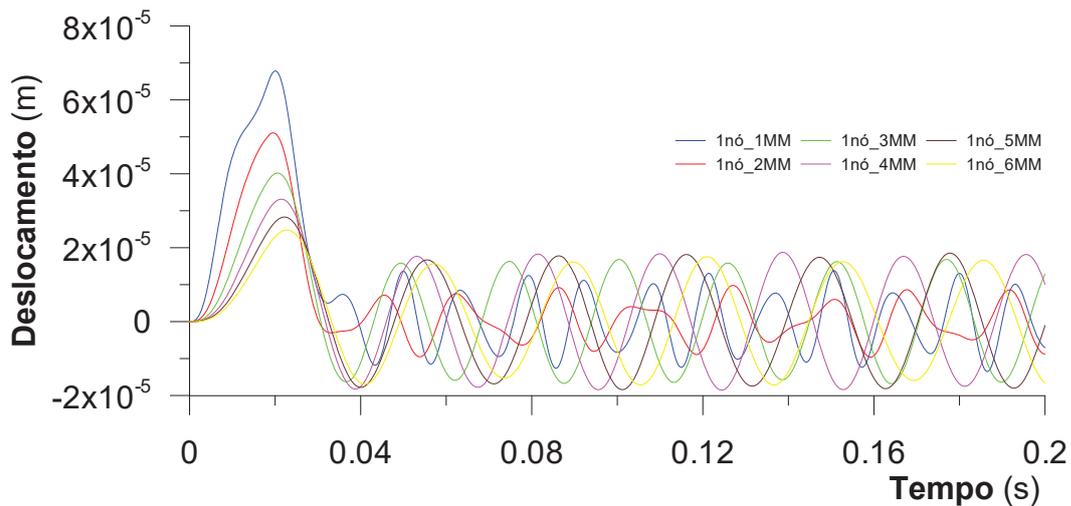


Figura 5.35: Resposta do nó 3 da treliça de um nó usando perfil TQ com até seis matrizes de massa

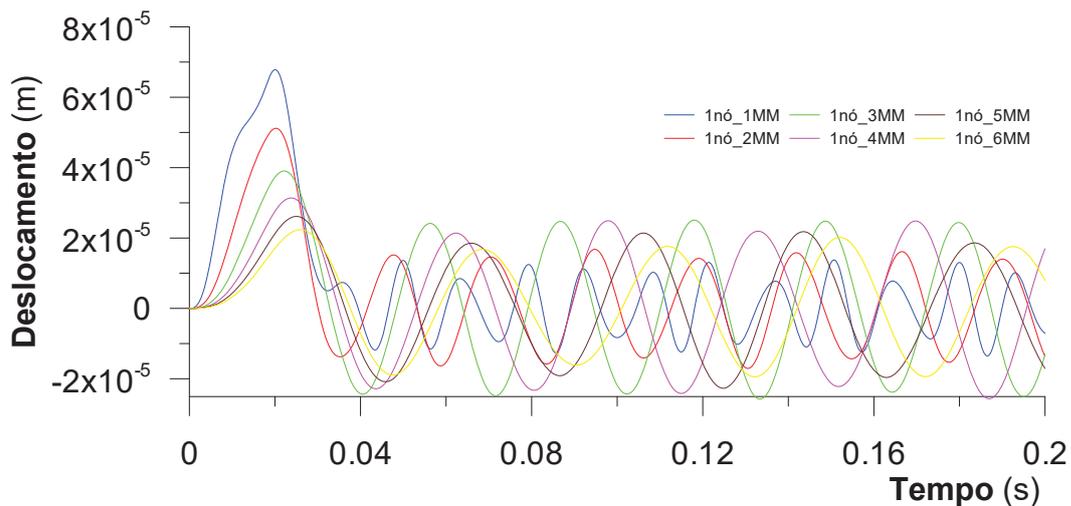


Figura 5.36: Resposta do nó 3 da treliça de um nó usando perfil TC com até seis matrizes de massa.

Cada barra da treliça foi discretizada com quatro nós (Figura 5.34(a)), pois com menos nós as respostas do nó três não convergem, tanto para o perfil TQ quanto para o TC. A estrutura passa a ser de 15 nós livres e total de 90 frequências calculadas.

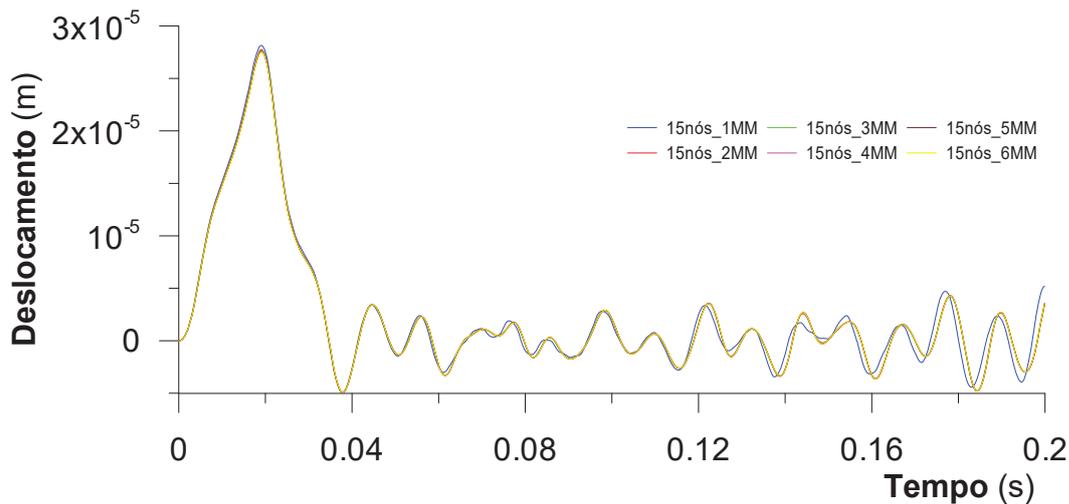


Figura 5.37: Resposta do nó 3 da treliça de 15 nós usando perfil TQ e com até seis matrizes de massa.

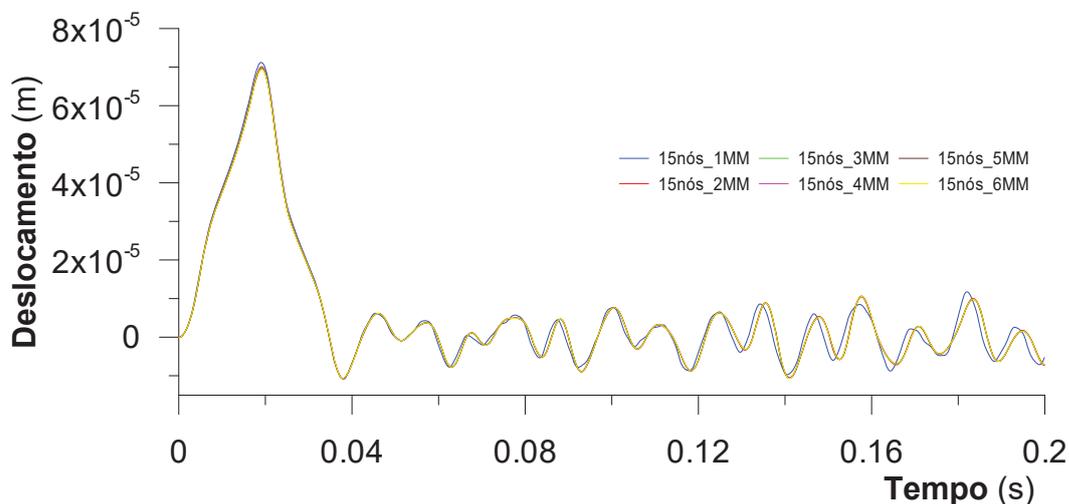


Figura 5.38: Resposta do nó 3 da treliça de 15 nós usando perfil TC e com até seis matrizes de massa.

PUC-Rio - Certificação Digital N° 1412828/CA

A Figura 5.37 mostra que a rigidez da seção transversal contribui significativamente para a determinação dos deslocamentos da estrutura, pois todos os demais parâmetros foram mantidos e somente o momento de inércia variou. Com valores maiores da rigidez (perfil TQ) foram obtidos deslocamentos menores da treliça discretizada do que a original.

A Tabela 5.20 mostra as frequências da estrutura de 15 nós, perfil TQ e utilizando até seis matrizes de massa. A Tabela 5.21 apresenta as frequências para a mesma treliça discretizada e o perfil TC. Através da discretização é possível perceber que a primeira frequência da estrutura com o perfil TQ é, na verdade, um pouco maior do que a calculada para a estrutura de um nó.

Tabela 5.20: Frequências da estrutura de 15 nós usando o perfil TQ e com até seis matrizes de massa..

<b>Freq. (Hz)</b>	<b>1MM</b>	<b>2MM</b>	<b>3MM</b>	<b>4MM</b>	<b>5MM</b>	<b>6MM</b>
1	33,39	33,35	33,35	33,35	33,35	33,35
2	39,79	39,69	39,69	39,69	39,69	39,69
3	48,28	48,12	48,12	48,12	48,12	48,12
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
88	1462,51	1191,16	1114,74	1077,69	1056,24	1042,61
89	1481,07	1211,74	1128,16	1087,53	1062,70	1045,55
90	1571,30	1223,22	1133,91	1093,69	1069,22	1053,62

Tabela 5.21: Frequências da estrutura de 15 nós usando o perfil TC e com até seis matrizes de massa.

<b>Freq. (Hz)</b>	<b>1MM</b>	<b>2MM</b>	<b>3MM</b>	<b>4MM</b>	<b>5MM</b>	<b>6MM</b>
1	32,33	32,28	32,28	32,28	32,28	32,28
2	37,91	37,81	37,81	37,81	37,81	37,81
3	45,96	45,80	45,80	45,80	45,80	45,80
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
88	1384,61	1128,55	1056,43	1021,16	1000,48	987,29
89	1402,22	1147,64	1069,41	1030,92	1007,99	991,40
90	1487,83	1159,86	1074,57	1037,15	1013,96	999,35

A treliça de 15 nós proporciona uma excelente convergência das respostas e das frequências, tanto para o perfil tubular quadrado vazado (Figuras 5.37 e 5.39) quanto para o perfil tubular circular vazado (Figuras 5.38 e 5.40). Deste modo, não há a necessidade de muitas matrizes de massa para obter uma boa aproximação dos resultados.

As frequências da treliça de um e 15 nós foram comparadas (Figuras 5.41 e 5.42). A treliça original requer muitas matrizes de massa para se aproximar das frequências mais exatas. A discretização das barras foi importante para proporcionar a convergência com poucas matrizes de massa. Isso foi observado tanto para o perfil TQ quanto para o TC.

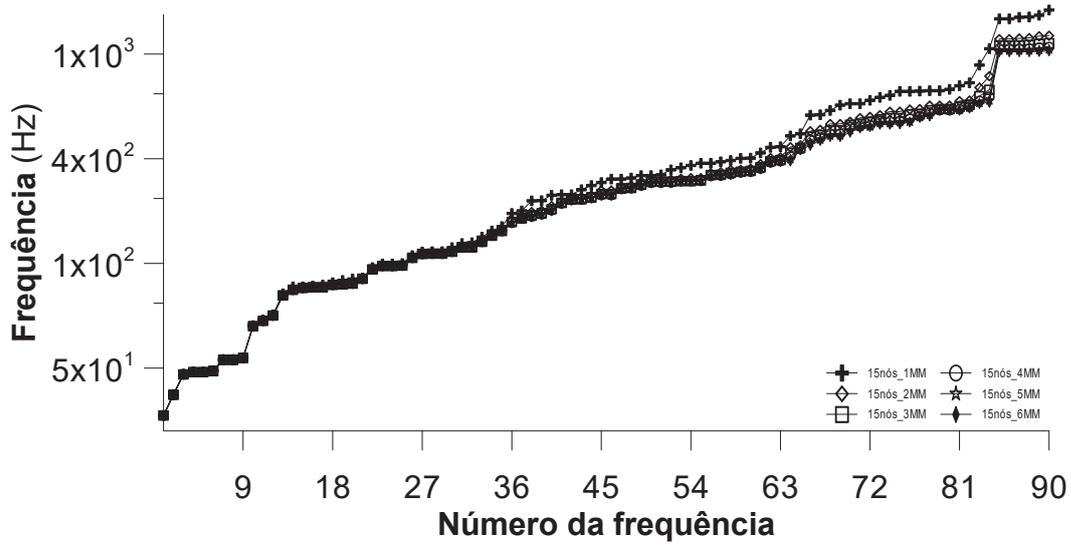


Figura 5.39: Frequências da estrutura de 15 nós usando perfil TQ e com até seis matrizes de massa.

PUC-Rio - Certificação Digital N° 1412828/CA

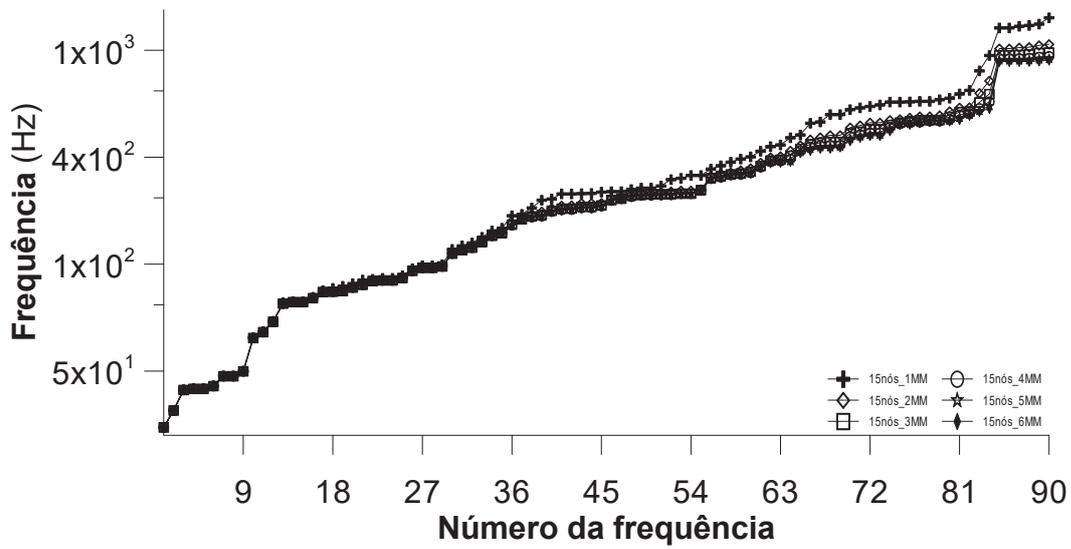


Figura 5.40: Frequências da estrutura de 15 nós usando perfil TC e com até seis matrizes de massa.

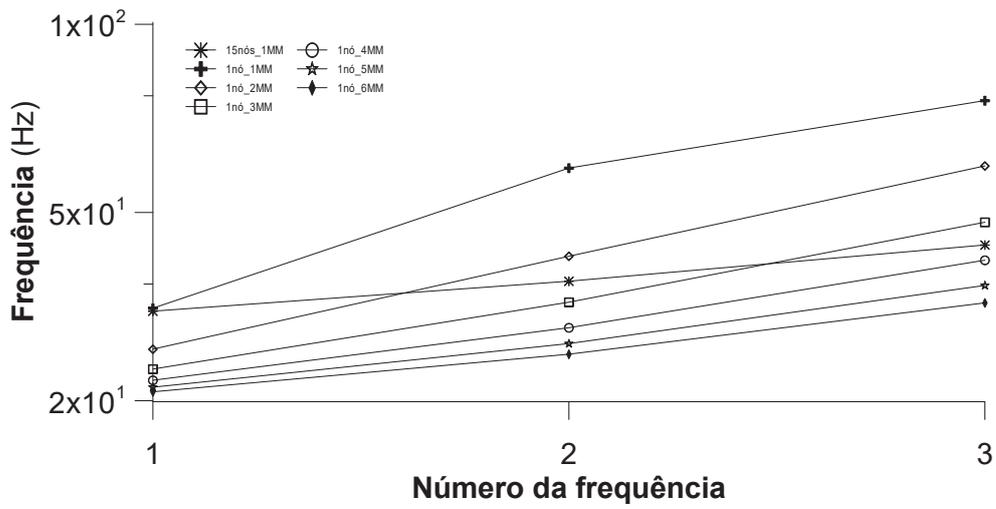


Figura 5.41: Comparação das frequências da treliça de um nó usando perfil TC e até seis matrizes de massa com a de 15 nós e uma matriz de massa.

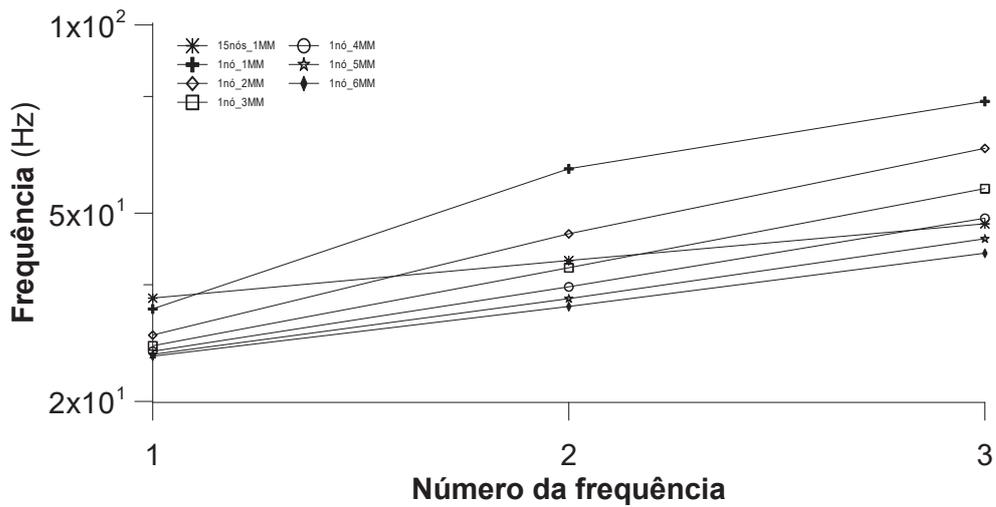


Figura 5.42: Comparação das frequências da treliça de um nó usando perfil TQ e até seis matrizes de massa com a de 15 nós e uma matriz de massa.

## 6

### Conclusão

O uso da expansão em série de frequências da matriz de rigidez efetiva mostrou ser uma excelente maneira de calcular frequências mais exatas, comparadas com as obtidas pela dinâmica clássica (uso de uma matriz de massa). Isto foi importante tanto para treliças quanto pórticos, bi ou tridimensionais.

A técnica da superposição modal avançada mostra ser uma poderosa ferramenta para a análise das respostas das estruturas compostas por elementos unidimensionais, sejam pórticos ou treliças (bi ou tridimensionais).

O estudo de convergência da estrutura mostrou ser importante para mostrar que quando há a necessidade de muitas matrizes de massa a estrutura pode estar em pelo menos um destes casos: não ser bem construída, a seção transversal adotada não tem rigidez suficiente ou a discretização das barras não é capaz de proporcionar a convergência das respostas.

O ponto negativo é que para estruturas com muitos graus de liberdade, ou uso de muitas matrizes de massa, o cálculo das frequências e dos modos de vibração da estrutura ficam lentos. Isso ocorre porque o esforço computacional é alto.

Como ponto positivo, maior a precisão dos resultados quando usadas mais matrizes de massa.

Baseado nos exemplos do Capítulo 5, as treliças dos Exemplos 01 e 02 apresentaram uma dificuldade na convergência dos resultados obtidos, as discretizações foram essenciais para aproximar os resultados e obter frequências e resposta mais precisas. O pórtico bidimensional do Exemplo 03 tem uma convergência dos resultados mais rápida e a discretização das barras é desnecessária. No primeiro pórtico tridimensional (Exemplo 04) houve a necessidade em discretizar as barras para convergir as frequências e as respostas da estrutura; no Exemplo 05 observou-se que a convergência das frequências e das respostas ocorreram rapidamente, sem a necessidade de discretizar o pórtico e aplicar muitas matrizes de massa. O Exemplo 06 também necessitou de uma maior quantidade de nós da treliça para convergir as frequências e as respostas com poucas matrizes de massa.

Em todos os estudos presentes no Capítulo 05 sobre treliça, o efeito da inércia faz diferença para a construção dos resultados, quando mais de uma

matriz de massa é utilizada. Em todos estes casos somente o momento de inércia da seção foi modificado e os demais parâmetros foram mantidos os mesmos dos problemas originais. Ao usar mais de uma matriz de massa, as frequências e as respostas obtidas por Weaver [13] e Paz [14] ficaram mais distantes dos valores obtidos das estruturas mais discretizadas. Quanto mais rígida a estrutura mais rápida é a convergência das frequências e das respostas.

O ideal é que o uso de mais matrizes de massa esteja balanceado com a discretização da estrutura, quando houver a necessidade. Baseados nos exemplos do Capítulo 05, as treliças tiveram mais dificuldade em convergir tanto as frequências quanto as respostas ao usar poucas matrizes de massa, comparadas aos pórticos.

## 6.1

### Sugestões para trabalhos futuros

1. Todas as análises foram feitas, até o presente momento, somente com modelos numéricos. Uma opção para verificar os resultados e a própria técnica é montar sistemas experimentais e comparar com os resultados numéricos.
2. Desenvolver a técnica para sistemas amortecidos para casos bi e tridimensionais.
3. Um estudo numérico considerando o efeito da não linearidade geométrica, a fim de verificar o quanto pode afetar os resultados a não linearidade geométrica do elemento.

**Referências bibliográficas**

- [1] PIAN, T. H. H.; TONG, P.. **Basis of finite element methods for solid continua**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 01: p. 3–28, 1969.
- [2] DUMONT, N.A.. **The variational formulation of the boundary element method**. Computational Mechanics Publications, p. 225–239, 1987.
- [3] REISSNER, E. **On a variational theorem in elasticity**. Journal of Mathematics and Physics, v. 29: p. 90–95, 1950.
- [4] PIAN, T.H.H.. **Reflections and Remarks on Hybrid and Mixed Finite Element Methods**. Hybrid and Mixed Finite Element Methods, 1983.
- [5] DUMONT, N. A. . **An advanced mode superposition technique for general analysis of time dependents problems**. Advances in Boundary Element Techniques IV, p. 333–344, 2005.
- [6] AGUILAR, C. M.. **Comparação do desempenho computacional da técnica de superposição modal avançada com técnicas de transformações de laplace**. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.
- [7] DUMONT , N. A.; OLIVEIRA, R. DE. **From frequency-dependent mass and stiffness matrices to the dynamic response of elastic systems**. International Journal of Solids and Structures, v. 38: p. 1813–1830, 2001.
- [8] PRAZERES, P. G. C. DOS . **Desenvolvimento de elementos finitos híbridos para a análise de problemas dinâmicos usando superposição modal avançada**. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.
- [10] OLIVEIRA, A. C. DE. **Um modelo de interação dinâmica entre os elementos estruturais de uma via férrea**. Dissertação de mestrado, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006.

- [11] DUMONT, N. A. . **Variationally – based hybrid boundary element methods**. *Computer Assisted Mechanics and Engineering*, v. 10: p. 407–430, 2003.
- [12] DUMONT, N. A. . **On the solution of generalized non-linear complex-symmetric eigenvalue problems**. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, v. 71: p. 1534–1568, 2007.
- [13] WEAVER, W. JR.; GERE, J. M. **Matrix Analysis of Framed Structures**. Van Nostra, 1980.
- [14] WEAVER, W. JR.; JOHNSTON, P. R. **Structural Dynamics by Finite Elements**. New Jersey, 1987.
- [15] PAZ, M.; LEIGH, W. **Structural Dynamics: Theory and Computation**. Springer S, 2004.
- [16] PETYT, M. **Introduction to Finite Element Vibration Analysis**. Cambridge, 2010.
- [17] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8800: Projeto de Estruturas de Aço e de Estruturas Mistas de Aço e Concreto de Edificações**. 2008.
- [18] ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 14762: Dimensionamento de Estruturas de Aço Constituídas por Perfis Formados a Frio**. 2010.
- [19] ANDRADE, S.; VELLASCO, P. **Comportamento e Projeto de Estruturas de Aço**. Elsevier, 2016.
- [20] BELLEI, I. H.; PINHO, F. O.; PINHO, M O. **Edifícios de Múltiplos Andares em Aço**. Elsevier, 2008.

## A

### Dimensionamento de perfil metálico

O apêndice é utilizado para apresentar os desenvolvimentos básicos do dimensionamento de perfis metálicos apropriados para os exemplos do Capítulo 5. Todos os processos que serão mostrados seguiram a NBR 8800 [17], NBR 14762:2010 [17], Andrade e Vellasco [19] e Pinho et. al [20].

Os desenvolvimentos presentes nesta seção foram feitos com o intuito de obter parâmetros para a escolha de um perfil que melhor atenda as condições dos problemas propostos no Capítulo 5. Todo o processo avaliou a esbeltez da peça através do estado limite de serviço (ELS) e a resistência do perfil pelo estado limite último (ELU). Por simplificação, será considerado que todas as ligações são soldadas e atendem as condições de carregamento. Todos os desenvolvimentos serão feitos através do *Método da Largura Efetiva* (MLE), por ser mais preciso.

#### A.1

##### Combinações

As ações que podem atuar na estrutura são classificadas como permanente (CP), variáveis (SC) e excepcionais (CE). A primeira refere-se ao peso próprio da estrutura; a segunda é referente a sobrecarga na estrutura; e a terceira são as ações de baixa probabilidade, porém de grande intensidade. Este trabalho levará em conta as ações permanentes e excepcionais. A NBR 8800 [17] apresenta no item 4.7.6.2.2 uma tabela com os coeficientes de ponderação das ações atuantes. As combinações para o ELU são as últimas normais, especiais e excepcionais, respectivamente:

$$F_d = \sum_{i=1}^m (\gamma_{gi} F_{Gi,k}) + \gamma_{q1} F_{Q1,k} + \sum_{j=2}^n (\gamma_{qj} \psi_{0j} F_{Qj,k}) \quad (\text{A-1})$$

$$F_d = \sum_{i=1}^m (\gamma_{gi} F_{Gi,k}) + \gamma_{q1} F_{Q1,k} + \sum_{j=2}^n (\gamma_{qj} \psi_{0j,ef} F_{Qj,k}) \quad (\text{A-2})$$

$$F_d = \sum_{i=1}^m (\gamma_{gi} F_{Gi,k}) + F_{Q,exc} + \sum_{j=1}^n (\gamma_{qj} \psi_{0j,ef} F_{Qj,k}) \quad (\text{A-3})$$

Para o ELS e as combinações são a permanente de serviço, frequente de

serviço e rara de serviço, respectivamente:

$$F_{ser} = \sum_{i=1}^m F_{Gi,k} + \sum_{j=1}^n (\psi_{2j} F_{Qj,k}) \quad (A-4)$$

$$F_{ser} = \sum_{i=1}^m F_{Gi,k} + \psi_1 F_{Q1,k} + \sum_{j=2}^n (\psi_{2j} F_{Qj,k}) \quad (A-5)$$

$$F_{ser} = \sum_{i=1}^m F_{Gi,k} + F_{Q1,k} + \sum_{j=2}^n (\psi_{1j} F_{Qj,k}) \quad (A-6)$$

onde

- $F_{Gi,k}$  representa os valores característicos da ações permanentes;
- $F_{Q1,k}$  representa o valor característico da ação variável principal;
- $F_{Qj,k}$  representa os valores característicos da ações variáveis que podem atuar ao mesmo tempo com a ação variável principal;
- $F_{Q,exc}$  representa o valor da ação transitória excepcional;
- $\gamma_g$  é o coeficiente de ponderação das ações permanentes, definido na tabela 03, item 6.6.2.2 da NBR 14762:2010 [18];
- $\gamma_q$  é o coeficiente de ponderação das ações variáveis, definido na tabela 2, item 6.6.2.2 da NBR 14762:2010 [18];
- $\psi$  representa os fatores das reduções das ações, é determinado na tabela 3, item 6.6.2.2 da NBR 14762:2010 [18].
- $\psi_{0,ef}$  é o mesmo fator  $\psi_0$  adotados nas combinações normais, com exceção quando  $F_{Q1,k}$  tiver um tempo de aplicação muito curto, então neste caso será o mesmo valor do  $\psi_2$ .

O maior resultado entre as Eqs. (A-2) - (A-6) será utilizado para a estruturado. A partir dela se verifica um perfil que melhor atende as solicitações.

## A.2

### Resistência a tração

A NBR 14762:2010 [17], item 9.6.2 apresenta as formulações para o cálculo da força de tração resistente do perfil, onde o valor usado será o menor entre as dos estados limites últimos de escoamento, ruptura da seção líquida fora da região de ligação e ruptura da seção líquida na região de ligação, dadas por:

$$N_{t,Rd} = \frac{Af_y}{\gamma} = \frac{Af_y}{1,1} \quad (\text{A-7})$$

$$N_{t,Rd} = \frac{A_{n0}f_u}{\gamma} = \frac{A_{n0}f_u}{1,35} \quad (\text{A-8})$$

$$N_{t,Rd} = \frac{C_t A_n f_u}{\gamma} = \frac{C_t A_n f_u}{1,65} \quad (\text{A-9})$$

onde

- $A$  é a área bruta do perfil;
- $f_y$  é a resistência ao escoamento do aço;
- $\gamma$  é o coeficiente de ponderação definido pela NBR 14762:2010 [18]. 1,1 para escoamento da seção bruta, 1,35 para ruptura da seção líquida fora da região de ligação e 1,65 para ruptura da seção líquida na região de ligação;
- $A_{n0}$  é a área da seção transversal da barra fora da região de ligação;
- $f_u$  é a resistência à ruptura do aço na tração;
- $A_{n0} = A$  para ligação soldada;
- $C_t = 1$  é o coeficiente de redução da área líquida para ligação soldada.

Deve-se verificar a esbeltes do perfil ( $\lambda$ ) e a mesma é comparada com a esbeltez limite. Para elemento a tração é definida em 300 pela NBR 14762:2010 [18]

$$\lambda = \frac{L}{r} \leq 300 \quad (\text{A-10})$$

onde  $L$  é comprimento da barra e  $r$  o raio de giração do perfil.

### A.3

#### Resistência a compressão

Assim como no dimensionamento à tração, a força resistente de cálculo ( $N_{c,Rd}$ ) do perfil deve ser igual ou maior que a força de solicitação ( $N_{c,Sd}$ ); e o limite de esbeltez, o qual a mesma norma define que para barras comprimidas não pode ser superior a 200.

O  $N_e$  da Eq. (A-14) é o menor valor entres o modos de flambagem elástica por flexão em torno dos eixos  $x$  ( $N_{ex}$ ) e  $y$  ( $N_{ey}$ ), e o modo do flambagem elástica por torção ( $N_{ez}$ ).

$$N_{ex,Rd} = \frac{\pi^2 EI_x}{(k_x L_x)^2} \quad (\text{A-11})$$

$$N_{ey,Rd} = \frac{\pi^2 EI_y}{(k_y L_y)^2} \quad (\text{A-12})$$

$$N_{ez,Rd} = \frac{1}{r_0^2} \left[ \frac{\pi^2 EI_w}{(k_z L_z)^2} + GJ \right] \quad (\text{A-13})$$

onde

- E é o módulo de elasticidade do material;
- $I_x$  é o momento de inércia em torno do eixo  $x$ ;
- $I_y$  é o momento de inércia em torno do eixo  $y$ ;
- J é a constante de torção;
- $kL$  é o comprimento efetivo de flambagem global para cada eixo de coordenada  $(x, y, z)$ ;
- G é o módulo de elasticidade transversal do material;
- $r_0 = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + x_0^2 + y_0^2}$  é o raio de giração polar da seção bruta em relação ao centro de torção;
- $r_x^2$  e  $r_y^2$  são os raios de giração da seção bruta em relação aos eixos principais de inércia  $x$  e  $y$ , respectivamente;
- $x_0^2$  e  $y_0^2$  são as distâncias do centro de torção ao centroide, na direção dos eixos principais  $x$  e  $y$ , respectivamente.

O índice de esbeltez reduzido global é definido pela equação

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{Af_y}{Ne}} \quad (\text{A-14})$$

Agora é possível calcular o fator de redução da força axial de compressão ( $\chi$ ), referente a flambagem global. Se utiliza a Eq. (A-15), do contrário, a Eq. (A-16).

$$\chi = 0,658\lambda_0^2 \quad (\text{A-15})$$

$$\chi = \frac{0,877}{\lambda_0^2} \quad (\text{A-16})$$

A largura efetiva ( $b_{ef}$ ) para o elemento apoiado - apoiado (AA) pode ser calculada pela Eq. (A-17) e para o elemento apoiado - livre (AL) pela Eq.

(A-18), se  $\lambda_0 > 0,673$ . O  $b_{ef}$  é a própria largura do elemento, para ambos os tipos, caso  $\lambda_0 \leq 0,673$

$$b_{ef} = \frac{b((1 - 0,22)/\lambda_p)}{\lambda_p} \quad (\text{A-17})$$

$$b_{ef} = \frac{b_w((1 - 0,22)/\lambda_p)}{\lambda_p} \quad (\text{A-18})$$

onde

- $b$  é a largura do elemento;
- $b_w$  é a largura da região comprimida;
- $\lambda_p = \frac{b/t}{0,95\sqrt{(kE/\sigma)}}$  é o índice de esbeltez reduzido do elemento;
- $t$  é a espessura do elemento;
- $k$  é o coeficiente de flambagem local do elemento, de acordo com a tabela 5 da NBR 14762:2010 [18].  $k = 4$  para elemento AA e  $k = 0,43$  para elemento AL;
- $E$  é o módulo de elasticidade do material;
- $\sigma = \chi f_y$  é a tensão normal de compressão.

Se a largura efetiva, tanto da mesa quanto da alma do perfil, não for igual a área bruta,  $b_{ef}$  será calculado pela Eq. (A-17). A força resistente de compressão de cálculo é

$$N_{c,Rd} = \frac{\chi A_{ef} f_y}{\gamma} \quad (\text{A-19})$$

onde

- $A_{ef} = A - (b_f - b_{f,ef})t - (b_w - b_{w,ef})t$  é a área efetiva do perfil;
- $b_f$  é o comprimento da mesa;
- $b_{f,ef}$  é o comprimento efetivo da mesa;
- $t$  é a espessura do elemento;
- $b_w$  comprimento da alma;
- $b_{w,ef}$  comprimento efetivo da alma;
- $f_y$  é a tensão ao escoamento do aço;
- $\gamma$  é o coeficiente de redução, igual a 1,2 seundo NBR 14762:2010 [18].

Se o esforço resistente for maior ou igual ao solicitante, o perfil foi aprovado quanto a resistência. A última verificação a ser feita é quanto a esbelteza global do perfil, usando a equação

$$\lambda = \frac{L}{r} \quad (\text{A-20})$$

#### A.4

##### Perfil tubular Circular

O perfil metálico circular vazado se mostra ser uma boa opção, pois é completamente simétrico. Seu dimensionamento tem simplificações nos cálculos. A esbelteza ( $\lambda$ ) do perfil adotado nos exemplos precisa estar entre os limites de escoamento da seção ( $\lambda_p$ ) e plastificação ( $\lambda_r$ ), os quais são definidos pela NBR 8800 [17]

$$\lambda_p = 0,07 \frac{E_{aço}}{f_y} \quad (\text{A-21})$$

$$\lambda_r = 0,31 \frac{E_{aço}}{f_y} \quad (\text{A-22})$$

O raio de giração da peça é calculado por

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (\text{A-23})$$

onde  $I$  é o momento de inércia e  $A$  é a área da seção transversal. Na ausência de algum destes parâmetros geométrico, é possível encontrar o raio de giração, pela equação:

$$r = \frac{L}{\lambda} \quad (\text{A-24})$$

Assim é possível encontrar um raio de giração máximo ( $r_{máx}$ ) e um mínimo ( $r_{mín}$ ), basta variar a esbelteza do perfil entre  $\lambda_p$  e  $\lambda_r$ . Com os raios de giração mínimo e máximo, é possível calcular o diâmetro externo máximo e o mínimo, pela equação

$$r = \frac{D_{ext}}{3} \quad (\text{A-25})$$

Com o diâmetro externo e a esbelteza do perfil, é possível determinar a espessura ( $t$ ) do perfil. Para isso a NBR 8800 [17] apresenta a seguinte formulação

$$\lambda = \frac{D_{ext}}{t} \quad (\text{A-26})$$

A área do perfil pode calculada pela equação a seguir

$$A = \pi(D_{ext} - t)t \quad (\text{A-27})$$

O momento de inércia é determinado pela equação

$$I \equiv I_y \equiv I_z = \frac{\pi(D_{ext}^4 - D_{int}^4)}{64} \quad (\text{A-28})$$

onde  $D_{int}$  é o diâmetro interno e pode ser determinado por:

$$D_{int} = D_{ext} - 2t \quad (\text{A-29})$$

Após calcular os parâmetros geométricos do perfil tubular circular, faz-se a verificação quanto à resistência e esbelteza, através dos processos descritos nas seções A.1 - A.3.