



**Diego Soares Monteiro da Silva**

**Um método de continuação estruturado para  
problemas com múltiplas soluções**

**Tese de Doutorado**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada, do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientador : Prof. Carlos Tomei  
Coorientador: Dr. Otavio Kaminski de Oliveira

Rio de Janeiro  
Setembro de 2021



**Diego Soares Monteiro da Silva**

**Um método de continuação estruturado para  
problemas com múltiplas soluções**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Matemática Aplicada da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo:

**Prof. Carlos Tomei**

Orientador

Departamento de Matemática – PUC-Rio

**Dr. Otavio Kaminski de Oliveira**

Coorientador

Instituto Benjamin Constant – IBC

**Prof. Nicolau Corção Saldanha**

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio

**Prof. Edgard Almeida Pimentel**

Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC-Rio

**Prof. Alexandre Loureiro Madureira**

Laboratório Nacional de Computação Científica – LNCC

**Prof. André Nachbin**

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA

**Prof. Dan Marchesin**

Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA

**Prof. José Teixeira Cal Neto**

Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro – UNIRIO

Rio de Janeiro, 30 de Setembro de 2021

Todos os direitos reservados. A reprodução, total ou parcial do trabalho, é proibida sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Diego Soares Monteiro da Silva**

Licenciado em Matemática e bacharel em Engenharia Elétrica. Mestre em Modelagem Computacional em Ciência e Tecnologia pela Universidade Federal Fluminense.

#### Ficha Catalográfica

Silva, Diego Soares Monteiro da

Um método de continuação estruturado para problemas com múltiplas soluções / Diego Soares Monteiro da Silva; orientador: Carlos Tomei; coorientador: Otavio Kaminski de Oliveira. – 2021.

70 f.: il. color. ; 30 cm

Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2021.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Métodos de continuação. 3. Dobras e bifurcações. 4. Método do tiro discreto. 5. Operadores não lineares de Sturm-Liouville. 6. Operadores elípticos semi-lineares. I. Tomei, Carlos. II. Oliveira, Otávio Kaminski de. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

## Agradecimentos

Agradecer, ter o que agradecer e a quem agradecer.

Não poderia começar por outra pessoa senão ao meu ilustre orientador, Carlos Tomei. Tudo o que escrever aqui não será suficiente para mensurar a gratidão que tenho por Tomei. Seu conhecimento, entusiasmo, motivação e ideias foram fundamentais para a construção desse trabalho. Nunca desistiu de mim. Eu sou fã.

Ao meu coorientador Otávio Kaminski, pelo tempo, disposição, paciência e por ter me guiado durante esse trabalho, principalmente nos aspectos de implementação de alguns métodos.

Aos meus pais (José e Rita), irmãos (Thiago e Natasha), avós, tios, primos e padrinhos, que são o alicerce de minha vida. Obrigado por estarem comigo em *todos* os momentos.

Aos meus amigos da PUC: Luis, Tamires, Renan, Raimundo, Makson, Cléa, Marcelo.

Aos meus amigos e colegas do dia a dia: Wilson, Wallace, Debo, Gustavo, Germano, Lécio, Glauber, Ronald, Roger, Manu, Kayro, Bruno, Guilherme, Victor, Natan, Dourados.

A todos os professores pelos quais tive a oportunidade de ser aluno. Em especial: Edgard, Boyan, Ricardo, David, Marcos.

Aos amigos e funcionários do departamento de Matemática da PUC. Creuza, foi e é um anjo em minha vida, sempre me salvando e Kátia também.

A todos que de alguma forma torceram e contribuíram para construção desse trabalho.

Por último, mas não menos importante, gostaria de agradecer à FAPERJ pelo apoio financeiro, à PUC-Rio pela bolsa de isenção de mensalidades do doutorado e CAPES. O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior-Brasil(CAPES)-Código de Financiamento 001.

## Resumo

Silva, Diego Soares Monteiro da; Tomei, Carlos; Oliveira, Otávio Kaminski de. **Um método de continuação estruturado para problemas com múltiplas soluções**. Rio de Janeiro, 2021. 70p. Tese de Doutorado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Seja  $F : X \rightarrow Y$  uma função entre espaços de Banach reais e  $g \in Y$ . Descrevemos um algoritmo para calcular as soluções  $u$  da equação  $F(u) = g$ . O algoritmo começa com uma curva  $c \in X$  escolhida de modo a interceptar substancialmente o conjunto crítico de  $F$ . As interseções levam a bifurcações em  $F^{-1}(F(c))$  que, por sua vez, obtêm múltiplas soluções para  $F(u) = g = F(c(t_0))$  de algum ponto  $c(t_0)$ . Este banco de dados é então usado para considerar  $F(u) = g$  para  $g$  geral. Claramente, os métodos de continuação padrão têm melhores chances de sucesso em diferentes pontos iniciais. Fornecemos argumentos geométricos para a abundância ocasional de soluções, e esses argumentos, por sua vez, são usados na construção do banco de dados. Três exemplos são considerados detalhadamente. A primeira é uma função  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  para a qual o raciocínio por trás das técnicas pode ser visualizado. O segundo conjunto de exemplos da forma  $F : \mathbb{R}^{15} \rightarrow \mathbb{R}^{15}$  é obtido a partir da discretização de um problema de Sturm-Liouville não linear com um número inesperado de soluções. Finalmente, calculamos as seis soluções de uma equação do tipo  $-\Delta - f(u) = g$  estudada por Solimini: as funções  $f$  e  $g$  satisfazem as condições apropriadas e são definidas no anel entre dois círculos não concêntricos.

## Palavras-chave

Métodos de continuação; Dobras e bifurcações; Método do tiro discreto; Operadores não lineares de Sturm-Liouville; Operadores elípticos semi-lineares.

## Abstract

Silva, Diego Soares Monteiro da; Tomei, Carlos (Advisor); Oliveira, Otávio Kaminski de (Co-Advisor). **A structured continuation method for problems with multiple solutions**. Rio de Janeiro, 2021. 70p. Tese de Doutorado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Let  $F : X \rightarrow Y$  a function between real Banach spaces, and  $g \in Y$ . We describe and algorithm to compute solutions  $u$  of the equation  $F(u) = g$ . The algorithm starts with a curve  $c \in X$  chosen so as to intercept the critical set of  $F$  substantially. Intersections lead to bifurcations in  $F^{-1}(F(c))$  which in turn obtain a multiplicity of solutions for  $F(u) = g = F(c(t_0))$  of some point  $c(t_0)$ . This data bank is used then to consider  $F(u) = g$  for general  $g$ . Clearly, standard continuation methods have better chances of success from different initial points. We provide geometric arguments for the occasional abundance of solutions, and these arguments in turn are used in the construction of the data bank. Three examples are considered in detailed. The first is a function  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  for which the reasoning behind the techniques may be visualized. The second set of examples of the form  $F : \mathbb{R}^{15} \rightarrow \mathbb{R}^{15}$  is obtained from the discretization of a nonlinear Sturm-Liouville problem with an unexpected high number of solutions. Finally, we compute the six solutions of an equation of type  $-\Delta - f(u) = g$  studied by Solimini: the functions  $f$  and  $g$  satisfy appropriate conditions and are defined on the annulus between two non-concentric circles.

## Keywords

Continuation methods; Folds and bifurcations; Discrete shooting method; Sturm-Liouville nonlinear operators; Semi-linear elliptic operator.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>9</b>
<b>2</b>	<b>O algoritmo</b>	<b>15</b>
2.1	Conjunto crítico e inversão de caminhos	15
2.2	Um primeiro exemplo	16
2.2.1	O conjunto crítico de $F$	16
2.2.2	A flor de $F$	18
2.2.3	Rotulando arcos com cores	19
2.2.4	Espelhamento	21
2.2.5	Estendendo $\mathcal{G}$	22
<b>3</b>	<b>Grafos completamente espelhados</b>	<b>24</b>
3.1	Grafos associados a funções	24
3.2	Roteiro	29
<b>4</b>	<b>Superando dobras com um método preditor-corretor</b>	<b>31</b>
4.1	O método preditor tangente	31
4.2	Invertendo perto de dobras	32
<b>5</b>	<b>Operadores não lineares de Sturm-Liouville discretizados</b>	<b>38</b>
5.1	O operador contínuo e sua discretização	38
5.2	A contagem das pré-imagens	40
5.3	O método do tiro aplicado ao operador discretizado	40
5.4	Resolvendo com grafos completamente espelhados	43
5.4.1	O caso $n = 2$	44
5.4.2	O primeiro caso em $\mathbb{R}^{15}$ , $k = 4$	49
5.4.3	O caso $k = 8$	53
<b>6</b>	<b>Perturbações semi-lineares do Laplaciano</b>	<b>56</b>
6.1	O operador	56
6.2	Discretização por elementos finitos	56
6.2.1	Aproximando os autovalores para a linearização de $F$	57
6.3	Uma situação estudada por Solimini	58
6.4	Considerações finais	62
<b>7</b>	<b>Apêndice</b>	<b>63</b>
7.1	Alguns aspectos topológicos e funções próprias	63
7.2	Operadores de Fredholm	64
7.3	Singularidades de Morin	65
7.4	Estrutura local de dobras	66
7.5	Estrutura local das cúspides	67
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>68</b>

## Lista de figuras

Figura 1.1	Inversão do segmento $[0, g]$ .	10
Figura 2.1	Conjunto crítico da função $F$ e imagem do conjunto crítico.	17
Figura 2.2	A flor $\mathcal{F} = F^{-1}(F(\mathcal{C}))$ .	18
Figura 2.3	A imagem de uma reta $r$ vertical por $F$ .	19
Figura 2.4	Rotulando os arcos de $F(r)$ .	19
Figura 2.5	O conjunto conexo $\mathcal{G} \subset F^{-1}(F(r))$ .	20
Figura 2.6	O espelhamento na vizinhança de uma dobra $a_0$ .	21
Figura 2.7	Extensão de $\mathcal{G}$ .	22
Figura 3.1	Um grafo genérico muito simples	26
Figura 3.2	Construção de um grafo completamente espelhado.	27
Figura 3.3	$\mathcal{G} \subset (\tilde{\mathcal{G}})$ .	28
Figura 3.4	$\tilde{G}$ desconexo a $\mathcal{G}$ .	29
Figura 4.1	A variável $y$ é a distância da curva ao conjunto crítico $\mathcal{C}$ .	33
Figura 5.1	Mapa de Poincaré, $\alpha \in [-550, 350]$ . Interação $k = 4$ . Parâmetros $\ell_- = 0.4984$ e $\ell_+ = 19.1248$	42
Figura 5.2	Mapa de Poincaré, $\alpha \in [-550, 150]$ . Interação $k = 8$ . Parâmetros $\ell_- = 0.4984$ e $\ell_+ = 56.9367$	42
Figura 5.3	$\mathcal{C}$ e $F^h(\mathcal{C})$ para $\ell_- = -1$ e $\ell_+ = 2$ , .	44
Figura 5.4	$\mathcal{C}$ e $F^h(\mathcal{C})$ de $F^h$ para $\ell_- = -1$ e $\ell_+ = 4$ .	45
Figura 5.5	O grafo espelhado associado à semirreta $r$ .	46
Figura 5.6	$F(G) = F(r)$ .	47
Figura 5.7	O grafo espelhado associado à semirreta $r = \{P_0 + s(\text{sen}(2I_h) + 0.1 \text{sen}(I_h)), \text{ com } s \geq 0\}$ .	48
Figura 5.8	$F(G) = F(r)$ .	48
Figura 5.9	Grafo completamente espelhado para $k = 4$ .	49
Figura 5.10	Comparando soluções	51
Figura 5.11	Erro relativo sobre cada ponto da malha.	52
Figura 5.12	Grafo espelhado	53
Figura 5.13	Grafo espelhado	55
Figura 6.1	A malha de $\Omega$ .	58
Figura 6.2	Os 4 primeiros autovalores da Jacobiana para os pontos de $r$ .	59
Figura 6.3	5 pré-imagens encontradas.	60
Figura 6.4	Grafo espelhado com as 6 pré-imagens encontradas.	60
Figura 6.5	As 6 soluções encontradas.	61

# 1 Introdução

A busca de soluções para uma dada equação é um problema fundamental em matemática. Seja  $F : X \rightarrow Y$  uma função: dado um ponto  $g \in Y$ , que é valor regular de  $F$ , queremos as soluções da equação  $F(u) = g$ , isto é, queremos as pré-imagens de  $g$ . Nesse texto,  $X$  e  $Y$  são espaços de Banach reais, em especial, para problemas de dimensão finita  $X = Y = \mathbb{R}^n$ .

Os métodos numéricos clássicos, como Newton e iteração de Picard, fazem uso abundante de argumentos locais [16]: dado  $u_0 \in X$  tal que  $F(u_0) = g_0$ , é possível procurar soluções  $u \in X$  de  $F(u) = g$  para  $g$  suficientemente próximo de  $g_0$ . Uma primeira transição do tratamento local para algo global é realizada pelos métodos de continuação ([1],[16],[24]): para resolver  $F(u) = g$ , procure soluções para  $t \in [0, 1]$  de  $F(u(t)) = (1-t)g_0 + tg$ . Dificuldades ocorrem quando  $u(t)$  se aproxima de um ponto crítico de  $F$  interrompendo o processo de continuação. Há razões concretas para isso: genericamente, para  $u_c = u(t_c)$ , se  $F(u_c) = (1 - t_c)g_0 + t_c g$  e  $DF(u_c)$  não é inversível, para  $\epsilon > 0$  pequeno, o segmento em  $Y$  associado a  $[t_c, t_c + \epsilon]$  não está na imagem de  $F$  pelo menos perto de  $F(u_c)$  (veja o arco verde no contradomínio na figura 1.1 no exemplo apresentado a seguir).

Considere o exemplo dado pela função  $F(x, y) = (x^2 - y^2 + x, 2xy - y)$ . A figura 1.1 à esquerda é o domínio da função, contendo quatro triângulos curvilíneos com vértices  $X, Y$  e  $Z$  (por triângulo, queremos dizer a região limitada pelas fronteiras em vermelho). A imagem dos pontos rotulados por  $A$  é o ponto rotulado por  $A$  no contradomínio. Cada triângulo é levado homeomorficamente ao triângulo  $XYZ$  na imagem. Mas a região  $\mathcal{R}$  por fora dos quatro triângulos no domínio é levada à região  $F(\mathcal{R})$  da imagem por fora do triângulo, mas não bijetivamente: cada ponto do interior de  $F(\mathcal{R})$  é alcançado por *dois* pontos do interior de  $\mathcal{R}$ . Geometricamente,  $\mathcal{R}$  é um recobrimento duplo de  $F(\mathcal{R})$  (veja a definição de recobrimento no Apêndice 7.1).

Tomemos  $F(0, 0) = g_0 = (0, 0)$  para tentar resolver  $F(x, y) = g = (1, 1)$ , que aliás deve ter duas soluções. A figura mostra a inversa  $G$  do segmento na imagem ligando  $(0, 0)$  a  $(1, 1)$ . Existe uma componente conexa de  $G$  (em verde) começando por  $(0, 0)$  no domínio, que não alcança uma pré-imagem de  $(1, 1)$ , mas que alcança uma outra pré-imagem de  $(0, 0)$ . Por outro lado,

as outras duas pré-imagens de  $(0, 0)$  são pontos de partida para um método de continuação que, de fato, alcançam as duas soluções da equação original,  $P_1 = (1, 1)$  e  $P_2 \approx (-1.6421, -0.2334)$ .

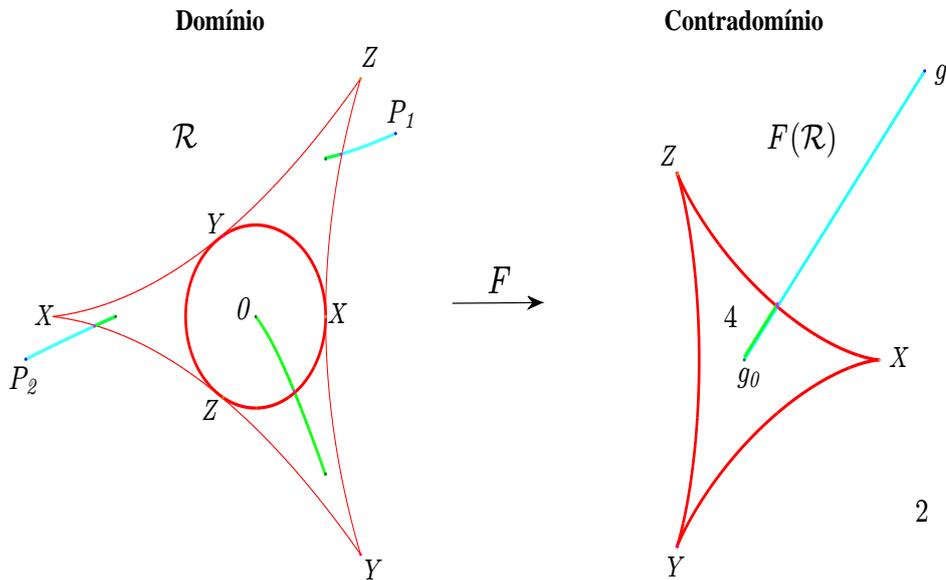


Figura 1.1: Inversão do segmento  $[0, g]$ .

O algoritmo que propomos para resolver  $F(u) = g$  inicialmente cria um banco de dados de pré-imagens conhecidas. Assim se soubéssemos as pré-imagens de um ponto  $g_0$ , todas poderiam ser empregadas como pontos de partida para resolver  $F(u) = g$  como no exemplo anterior. A preocupação agora é outra: em vez de resolver diretamente a equação, procuramos encontrar antes muitas pré-imagens de alguns pontos.

O primeiro algoritmo baseado em ideias desse tipo deu origem ao software  $2 \times 2$  (acessível na página de Humberto Bortolossi, UFF: <http://www.imuff.mat.br/puc-rio/2x2>). Desenvolvido por Malta, Saldanha e Tomei no final dos anos 80 ([20]) que estuda funções  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . De forma resumida, são obtidas curvas críticas  $\mathcal{C}_i$  de  $F$  que informam o processo de inversão de segmentos na busca de muitas soluções. Por um lado, o ponto de partida é parecido com um método de continuação, no sentido que segmentos do contradomínio são invertidos. Mas o conhecimento do conjunto crítico permite identificar a criação de novos pontos de partida para inversão e é assim que são obtidos, no exemplo acima, os arcos da inversa do segmento  $[(0, 0), (1, 1)]$  que não estão conectados a  $(0, 0)$  no domínio. O algoritmo, ainda

que bastante eficiente, tem a restrição fundamental de limitar-se a funções em dimensão dois. Dois aspectos não são realistas em dimensão mais alta: (a) guardar o conjunto crítico como uma lista de pontos, (b) lidar com informação mais detalhada sobre o conjunto crítico, a identificação das chamadas cúspides ou singularidades mais profundas.

As ideias (teoremas, conceitos) empregadas no  $2 \times 2$  foram aplicadas em uma variedade de contextos (em EDO's, ([7], [8], [28]); em EDP's, ([9],[13]), e em cada um deles, as possibilidades de implementação eram evidentes.

Uma aplicação que motiva o desenvolvimento desse trabalho é o estudo do número de soluções do problema de contorno

$$-\Delta u - f(u) = g, \quad u|_{\partial\Omega} = 0,$$

para conjuntos  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  (limitados e conexos) e não linearidades  $f$  especiais ([3],[4],[9],[25],[13]). Nesses artigos foi comprovada a conveniência de informação geométrica para a análise numérica, de forma muito mais concreta do que a simples demonstração da eventual existência de algumas soluções. Se a derivada  $f'$  tem no fecho de sua imagem só um autovalor (simples)  $\lambda_*$  de  $-\Delta$ , todas as soluções da equação acima estão em uma *fibra*, que é a inversa de uma única reta na imagem paralela a  $\phi_*$ , o autovetor associado a  $\lambda_*$ . Essa propriedade foi empregada em ([25],[9],[13]) para reduzir o problema original a uma busca unidimensional (sobre curvas calculáveis numericamente em espaços de dimensão infinita). De maneira mais geral, se  $f'$  interage [9] com um número finito de autovalores de  $-\Delta$ , a análise numérica do problema foi reduzida, na sequência dos autores acima, a um problema em dimensão finita de  $\mathbb{R}^m$  para  $\mathbb{R}^m$ , sendo  $m$  a soma das dimensões dos autoespaços dos autovetores cujos autovalores estão no fecho da imagem de  $f'$ .

Cal Neto [9], tomando como base esses fatos geométricos e teóricos, desenvolveu um algoritmo para funções definidas em retângulos usando elementos finitos. O método consistia de duas etapas: na primeira a identificação de uma fibra induzida por  $g$  e a segunda a inversão de uma função de  $\mathbb{R}^m$  para  $\mathbb{R}^m$ . Cal Neto estudou exemplos para  $m = 1$  não com foco em discutir hipóteses sobre a não linearidade para inferir um certo número de raízes, mas sim reduzir a contagem de soluções a construção um gráfico de uma função real. Cal Neto iniciou ainda o estudo para o caso  $m = 2$ , aplicando as ideias do  $2 \times 2$ . Kaminski [13] avançou o algoritmo desenvolvido por Cal Neto, tendo como principais contribuições a construção de elementos finitos para domínios  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  limitados quaisquer e programou a possibilidade da não linearidade interagir com mais de um autovalor, o que recaia na inversão de funções definidas de  $\mathbb{R}^m$  para  $\mathbb{R}^m$

para  $m \geq 2$ .

Diferentemente do  $2 \times 2$  e dos trabalhos supracitados, o estado da arte do algoritmo apresentado nessa tese tem como pilar a garantia da conexidade de uma estrutura construída implicitamente a partir da aplicação de métodos de natureza local. Para uma dada curva  $c(t) \in X$  passando por uma solução conhecida  $F(c(0)) = 0$  construímos componentes conexas  $\mathcal{G}$  da imagem inversa de  $F^{-1}(F(c))$ . O processo empregado realiza apenas buscas unidimensionais o que nos leva a um novo conceito matemático o de *grafos completamente espelhados*.

O algoritmo aqui apresentado é *estruturado*, no sentido que é orientado por informação geométrica. A hipótese de trabalho fundamental é que os pontos críticos de  $F$  são possíveis de serem identificados e que o conjunto dos pontos que são dobras de  $F$  é denso no conjunto crítico  $\mathcal{C}$  de  $F$ , um tipo de singularidade para a qual existem bons algoritmos locais. Entendemos por algoritmo estruturado um processo em que conhecida uma solução existe uma alta possibilidade de encontrar outras, de forma determinística a partir de certas operações. A escolha de cinquenta condições iniciais para um método de Newton pode servir de ponto de partida para buscar soluções, mas não é o que chamaríamos de um algoritmo estruturado. A busca unidimensional realizada pelo algoritmo nos leva a um novo objeto matemático que são os grafos completamente espelhados.

O que se pode esperar de um algoritmo que calcula pré-imagens? A restrição mais fundamental é o fato que o modelo habitual de análise numérica só pode calcular uma função em um número finito de pontos. Assim, em princípio, em qualquer pequeno aberto do domínio, a função pode ter raízes que nunca vão ser identificadas por nenhum algoritmo. Estimativas a priori, em particular técnicas de aritmética intervalar, reduzem incertezas desse tipo, mas estão fora de questão. Enfim, o melhor que se pode esperar de um algoritmo é que ele disponibilize um bom número de soluções, possivelmente oferecendo confiabilidade em certas situações privilegiadas.

Assim como não se espera que um sistema linear  $Ax = b$  seja resolvido da mesma maneira para qualquer matriz  $A$ , aqui também classes de funções  $F$  merecem um tratamento específico.

Um ponto de vista que nos parece mais realista é o seguinte. Em vez de buscar uma teoria geral da inversão de uma função  $F$ , convidamos o leitor a pensar que  $F$  já é tão complexa que merece uma teoria por si. Mais experimentação (isto é, mais *overhead* dedicado a explorar partes do domínio de  $F$ ) resulta em mais conhecimento do processo de inversão. Em particular, um banco de dados de pontos do contradomínio com suas respectivas pré-

imagens conhecidas é informativo e serve em princípio de ponto de partida para seu próprio enriquecimento. Esse texto é uma síntese de procedimentos mais realistas para abarcar a solução de equações com uma certa generalidade.

Na descrição do algoritmo no Capítulo 2, apresentamos inicialmente os objetos-chave através de um exemplo. Grafos completamente espelhados são apresentados no Capítulo 3 e de forma abstrata descrevem de forma resumida o algoritmo. No Capítulo 4 são tratados aspectos de implementação, especialmente referentes ao tratamento do processo de inversão perto de pontos críticos em dimensão infinita. Em vez de usar os parâmetros habituais para continuação [1], como o comprimento de arco, empregamos variáveis com interpretação espectral simples, que permitem inverter linearizações apropriadas sem induzir uma partição explícita da Jacobiana, o que seria inviável para as discretizações habituais aplicadas a equações diferenciais.

No resto do texto, o algoritmo é implementado em três contextos. O primeiro permite visualização: consideramos uma função  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . O segundo é a discretização de um problema de Sturm-Liouville não linear

$$-u'' + f(u) = g, \quad u(0) = 0 = u(\pi),$$

que tem um número inesperadamente grande de soluções ([28]), devido ao fato que a imagem do conjunto crítico gira em torno de um eixo um grande número de vezes. Muitas pré-imagens são espúrias, no sentido que desaparecem quando se faz uso de discretizações mais finas e não são associadas a soluções do problema contínuo, que aliás tem ‘poucas’ pré-imagens, como demonstrado por Costa, Figueiredo e Srikanth ([12]).

O terceiro contexto de interesse é o caso limite do cenário anterior, agora em dimensão infinita: consideramos  $F(u) = g$  para um operador elíptico semi-linear  $F(u) = -\Delta u - f(u)$ , onde  $u$  satisfaz condições de Dirichet em um domínio limitado de  $\mathbb{R}^n$ . O exemplo considerado foi estudado por Solimini ([26]), que provou que a equação tem seis soluções.

Como avaliar o algoritmo? Os contextos escolhidos tentam suprir a falta de *benchmarks*. Para os dois primeiros, sabemos as respostas dos problemas de interesse usando outros algoritmos, e podemos confrontar resultados. Para o primeiro exemplo, contamos com o  $2 \times 2$ . O segundo é um problema linear por partes, e permite tratamento essencialmente combinatório. Além disso, o fato do problema vir de uma equação diferencial ordinária permite uma implementação do clássico *shooting method* para o problema de Sturm-Liouville discretizado, que, como veremos, ratifica as propriedades geométricas peculiares da função  $F$  de interesse. O *shooting method*, aliás, é uma situação

em que todas as soluções de um problema estão ao longo de uma única curva, parametrizada pelo valor inicial da derivada, justamente o parâmetro de tiro. As soluções obtidas pelo *shooting method* se revelaram menos precisas do que as obtidas pelo algoritmo que sugerimos. Já o terceiro exemplo é uma situação pouco explorada, ainda que alguma análise numérica já tenha sido realizada na busca de várias soluções ([6], [9], [13]).

Dada a generalidade do problema, não há a intenção de apresentar um algoritmo competitivo em algum sentido. O melhor, a essa altura, é interpretar a experimentação até o momento como uma *proof of concept*.

Ao longo deste trabalho todos os gráficos e soluções numéricas foram obtidas através do MATLAB.

Sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach e  $F : X \rightarrow Y$  uma função de classe  $C^1$ . Estamos interessados em calcular uma quantidade expressiva de pré-imagens de  $g \in Y$ , isto é, pontos  $u \in X$  tais que  $F(u) = g$ .

O algoritmo apresentado nesse capítulo tem como entradas uma solução conhecida  $u = P_0$  e uma curva  $c \subset X$  por  $P_0$ , habitualmente uma reta ( $c = r$ ) ou um segmento. A partir desses dados, construímos um subconjunto especial  $\mathcal{G}$  de  $F^{-1}(F(r))$ , a imagem inversa de  $F(r)$ . É claro que as pré-imagens de  $g$  pertencem a  $F^{-1}(F(r))$ : nosso objetivo é encontrar  $\mathcal{G}$  de maneira a encontrar boa parte delas fazendo uso apenas de buscas unidimensionais.

Inicialmente, obtemos um conjunto conexo  $\mathcal{G}$ , definido na Seção 2.2.3 contendo algumas pré-imagens. Um processo de *extensão*, descrito na Seção 2.2.5, dá origem a  $\tilde{\mathcal{G}}$  satisfazendo  $\mathcal{G} \subset \tilde{\mathcal{G}} \subset F^{-1}(F(r))$ , possivelmente contendo pré-imagens adicionais. O processo de extensão pode ser iterado.

## 2.1

### Conjunto crítico e inversão de caminhos

Para uma função  $F : X \rightarrow Y$  de classe  $C^1$ , seu conjunto crítico  $\mathcal{C} \subset X$  consiste nos pontos  $u$  para os quais  $DF(u) : X \rightarrow Y$  não é uma transformação linear inversível (e limitada, em dimensão infinita). Pelo teorema da função inversa,  $F$  é um difeomorfismo local numa vizinhança de pontos regulares  $u$  (isto é,  $u \notin \mathcal{C}$ ). O conjunto  $\mathcal{F} = F^{-1}(F(\mathcal{C}))$  define a *flor* de  $F$  e as componentes conexas de  $X \setminus \mathcal{C}$  e  $Y \setminus F(\mathcal{C})$  as *placas* (como em [19], [20]).

O algoritmo faz uso intensivo dos métodos usuais para busca de pré-imagens: métodos de continuação ou homotopia [1], interpretados geometricamente como a inversão de caminhos na imagem.

Dados um caminho  $\gamma : [a, b] \rightarrow Y$  na imagem e uma condição inicial  $u_0 \in X$  tal que  $F(u_0) = \gamma(a)$ , procuramos um caminho  $\beta : [a, b] \rightarrow X$  no domínio, tal que  $\beta(a) = u_0$  e  $F \circ \beta = \gamma$ . Pelo teorema da função inversa, a inversão se realiza, de forma única na vizinhança de pontos de  $F^{-1}(\gamma)$  fora de  $\mathcal{C}$ .

O comportamento de um caminho  $F^{-1}(\gamma)$  a partir de um ponto crítico  $u_c$  em que  $F^{-1}(\gamma) \cap \mathcal{C} = u_c$  é descrito pela teoria das singularidades. A teoria

e sua implementação numérica se tornam difíceis para pontos críticos mais profundos<sup>1</sup>, especialmente quando domínio e imagem têm dimensão maior que dois (em particular, em dimensão infinita). O algoritmo explora o fato que, numa hierarquia, como a de Morin (veja apêndice), que particiona o conjunto crítico, o primeiro nível, composto de *dobras*, definidas no apêndice 7.4, são de manipulação mais simples, além de serem abundantes.

## 2.2

### Um primeiro exemplo

Considere a função  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  dada por

$$F(x, y) = \left( x^3 - 3xy^2 + \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{2}y^2 + x, 3x^2y - y^3 - 5xy + y \right).$$

que corresponde à descrição em termos de partes reais e imaginárias de

$$\begin{aligned} \tilde{F} : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto z^3 + \frac{5}{2}\bar{z}^2 + z. \end{aligned}$$

A função  $\tilde{F}$  não é analítica, mas várias propriedades suas ficam claras na notação complexa.

### 2.2.1

#### O conjunto crítico de $F$

A notação complexa deixa claro a existência de três regimes. Quando  $z$  está próximo da origem,  $\tilde{F}(z)$  se comporta como  $z$ . Para  $|z|$  próximo de 1, o termo dominante é  $\bar{z}^2$ . À medida que  $|z|$  tende ao infinito, o comportamento de  $\tilde{F}(z)$  é dominado pelo termo  $z^3$ .

Em cada regime,  $F$  leva curvas simples (fechadas e sem autointeserções) centradas na origem a curvas que giram em torno da origem na imagem com um número diferente de voltas, 1, 2 e 3. Para  $|z|$  próximo a 1, a orientação é invertida: a imagem de uma curva percorrida no sentido positivo (anti-horário) é uma curva percorrida no sentido negativo (horário).

A mudança de comportamento entre regimes sugere a presença de duas curvas críticas, identificadas numericamente: o conjunto crítico  $\mathcal{C}$  de  $F$  é formado pela união de duas curvas  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$ . Na figura 2.1, estão desenhadas as curvas críticas  $\mathcal{C}_1$  (em azul) e  $\mathcal{C}_2$  (em vermelho) e suas imagens  $F(\mathcal{C}_1)$  e  $F(\mathcal{C}_2)$ . Note a presença de pontos nas imagens em que as curvas formam pontas – elas vêm de cinco pontos em  $\mathcal{C}_2$  e três em  $\mathcal{C}_1$ , que têm um significado especial na

<sup>1</sup>Singularidades de Morin de ordem maior ou igual a 2 e singularidades em que a dimensão do núcleo do operador derivada é maior ou igual a 2.

teoria de singularidades: esses pontos são *cúspides* de  $F$  ([29]). Denotamos esses pontos e suas imagens pelas letras  $(A, B, C, D, E, X, Y, Z)$ . A rotulagem indica o sentido em que as curvas e suas imagens são percorridas.

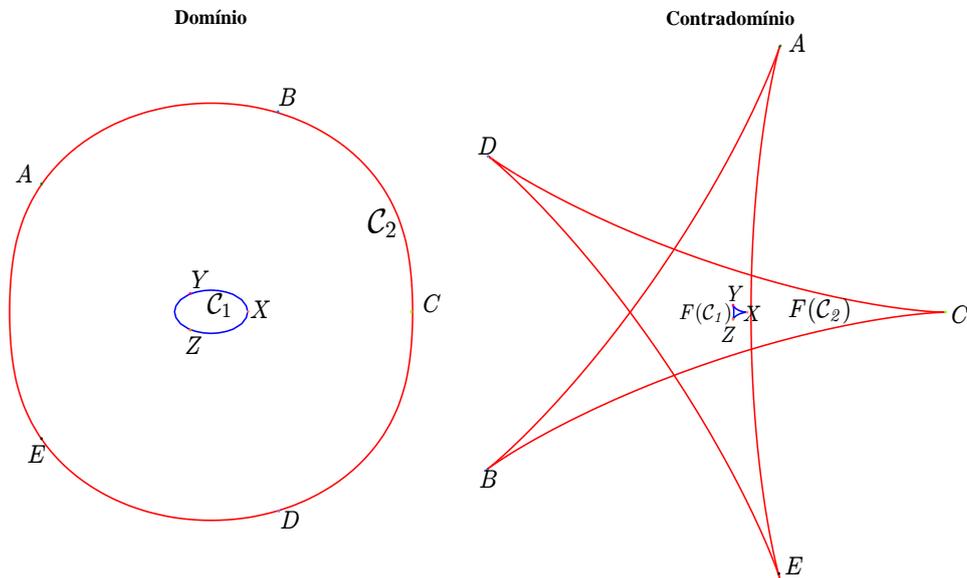


Figura 2.1: Conjunto crítico da função  $F$  e imagem do conjunto crítico.

As gições das curvas intermediárias são responsáveis pelo grande número de raízes de  $F$  (ou, equivalentemente,  $\tilde{F}$ ):  $F$  tem 9 raízes. A contagem de pré-imagens é facilitada pelas observações abaixo, as quais são aplicações das definições e teoremas apresentados no apêndice 7.1.

- As funções  $F$  e  $\tilde{F}$  são funções *próprias* (isto é, a inversa de conjuntos compactos é um conjunto compacto).
- Para funções próprias, pontos na mesma placa da imagem têm o mesmo número de pré-imagens.
- Pelo comportamento em infinito na notação complexa, pontos na placa não limitada da imagem têm três pré-imagens.
- O número de pré-imagens de placas na imagem que têm na fronteira um arco comum de  $F(\mathcal{C})$  difere de dois.

Para chegar à origem com uma curva ligando a placa não limitada à placa que contém a origem, é necessário cruzar três arcos de  $F(\mathcal{C})$ , o que é forte evidência de que  $F$  tem 9 raízes, o que de fato acontece.

### 2.2.2

#### A flor de $F$

A figura 2.2 mostra a flor  $\mathcal{F} = F^{-1}(F(\mathcal{C}))$ . As linhas em vermelho são  $F^{-1}(F(\mathcal{C}_2))$  e as linhas em azul,  $F^{-1}(F(\mathcal{C}_1))$ . Como  $F$  é própria e seu conjunto crítico  $\mathcal{C}$  é compacto, a flor também é compacta em  $X$ .

Letras iguais no domínio indicam pré-imagens associadas ao mesmo ponto. Assim, por exemplo,  $A$  é levado por  $F$  ao ponto  $A$  da figura 2.1 (direita), que tem por pré-imagens os três pontos marcados com  $A$  figura 2.2.

Apesar de computacionalmente cara, a flor é um excelente recurso para descrever  $F$ . A teoria também dá indicações relevantes.

- Os pontos internos à placa  $P$  na imagem com fronteira exterior  $F(\mathcal{C}_1)$  (figura 2.1 à direita, em azul) têm 9 pré-imagens. Na figura 2.2, cinco pré-imagens estão nas ‘pétalas’ da flor (na figura, pequenos riscos azuis, que quando ampliados parecem triângulos com lados curvilíneos), e mais quatro no centro da figura. Como  $F$  é própria e a placa rotulada por  $XYZ$  é simplesmente conexa, a restrição de  $F$  ao interior de cada uma dessas nove placas no domínio é um difeomorfismo [19].
- A placa ilimitada de  $Y \setminus F(\mathcal{C})$  consiste de pontos com três pré-imagens. De fato, sua inversa, a placa ilimitada de  $X \setminus \mathcal{F}$ , a recobre 3 vezes, confirmado pelo fato que as letras  $A, B, C, D$  e  $E$  aparecem sequencialmente três vezes ao longo da curva exterior a  $\mathcal{C}_2$ .

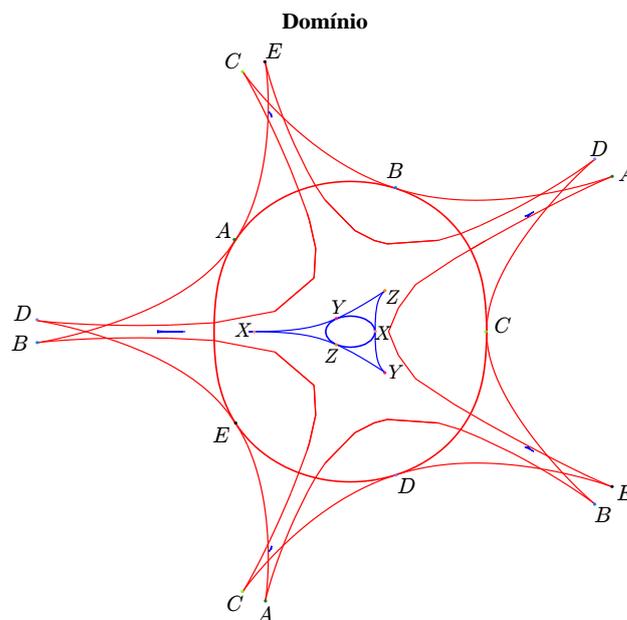


Figura 2.2: A flor  $\mathcal{F} = F^{-1}(F(\mathcal{C}))$ .

### 2.2.3 Rotulando arcos com cores

Vamos procurar as pré-imagens de  $g = (0, 0) \in Y$ , supondo conhecida uma delas,  $P_0 = (0, 0)$ . Dada uma reta  $r = \{P_0 + s\vec{v}, s \in \mathbb{R}\} \subset X$  com vetor diretor  $\vec{v}$ , considere  $F(r)$ : na figura 2.3,  $\vec{v} = (0, 1)$ .

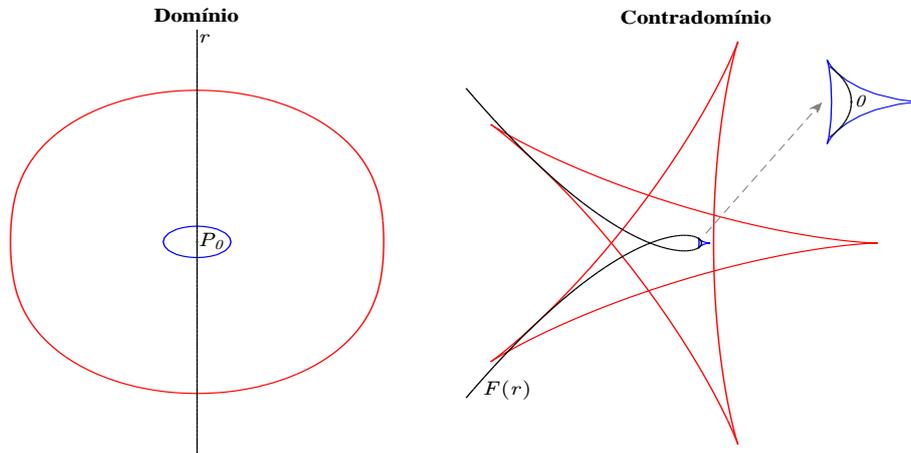


Figura 2.3: A imagem de uma reta  $r$  vertical por  $F$ .

Rotulamos com cores os arcos de  $F(r)$  tendo em seus extremos os pontos 0 e os valores singulares (pontos de  $F(r) \cap F(\mathcal{C})$ ), marcados de  $a$  até  $j$  na figura 2.4). Caminhos de mesma cor no domínio, como na figura 2.5, são levados a um arco da mesma cor na imagem na figura 2.4.

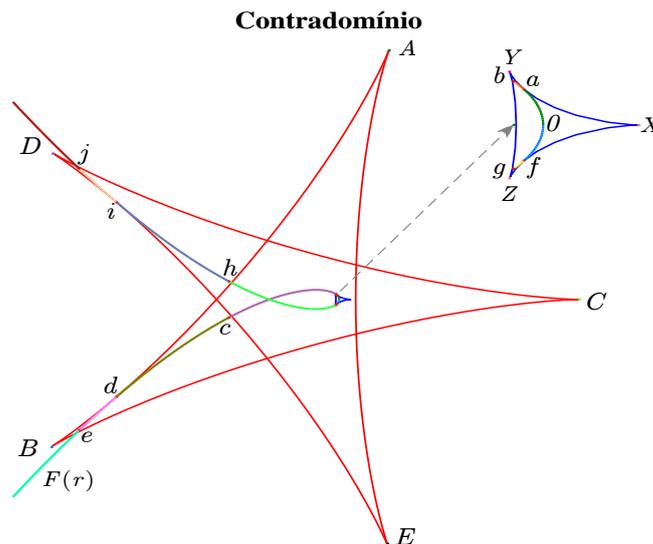


Figura 2.4: Rotulando os arcos de  $F(r)$ .

O conjunto  $\mathcal{G}$  é a componente conexa contendo  $(0,0)$  de  $F^{-1}(F(r))$ , mostrado na figura 2.5. Além de obviamente conter a reta  $r$ ,  $\mathcal{G}$  contém várias outras raízes de  $F$ , oito ao todo. Apenas uma pré-imagem, no interior de um triângulo azul à esquerda na figura, não foi encontrada.

Construímos  $\mathcal{G}$  justapondo caminhos invertidos a partir dos arcos rotulados em  $F(r)$  (figura 2.4) mantendo conexidade por caminhos: quaisquer dois pontos de  $\mathcal{G}$  podem ser ligados por um caminho em  $\mathcal{G}$ .

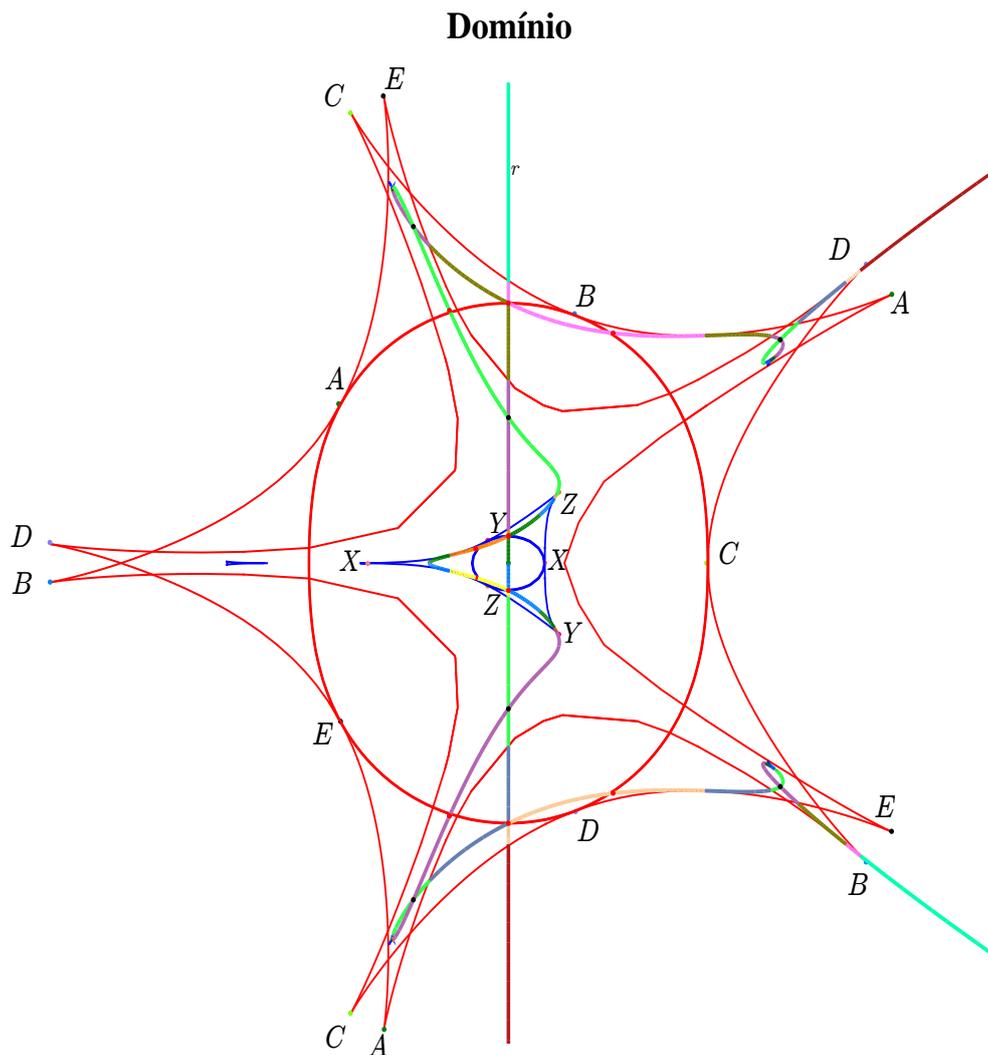


Figura 2.5: O conjunto conexo  $\mathcal{G} \subset F^{-1}(F(r))$ .

### 2.2.4 Espelhamento

Na vizinhança dos pontos críticos de  $F$  que pertencem a  $\mathcal{G}$ , o conjunto  $F^{-1}(F(r))$  é uma união de quatro curvas encontrando-se no ponto crítico.

Próximo a um ponto crítico  $a_0$ , não vale o teorema da função inversa local, mas existe uma contrapartida igualmente satisfatória. Note que, em pequenas vizinhanças de  $a_0$  e  $F(a_0)$ , os conjuntos  $X \setminus \mathcal{C}_1$  e  $Y \setminus F(\mathcal{C}_1)$  têm duas componentes conexas (figuras 2.4 e 2.6). É possível demonstrar que as duas componentes no domínio são levadas a uma mesma componente na imagem. Na figura 2.6, os dois arcos verdes são levados a um mesmo arco por  $F$ , assim como os dois arcos laranjas. Veja que uma componente da imagem (veja figura 2.4) simplesmente não têm pré-imagens perto do ponto  $a$ , enquanto os pontos na outra componente tem *duas* pré-imagens. O próprio conjunto crítico perto de  $a_0$  é levado bijetivamente por  $F$  a uma curva, e no domínio pensamos informalmente que ele age como um espelho: localmente, os dois lados do conjunto crítico têm por imagem um mesmo conjunto.

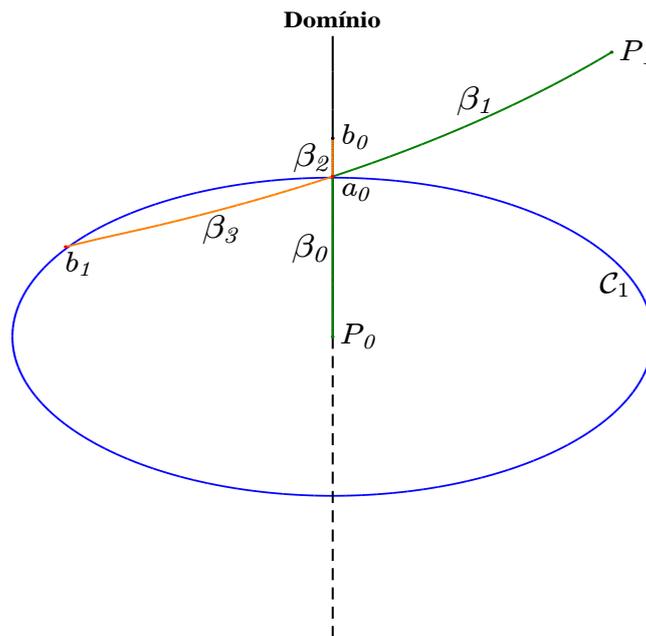


Figura 2.6: O espelhamento na vizinhança de uma dobra  $a_0$ .

Perto de  $a_0 \in r$ , os segmentos  $\beta_0 = [P_0, a_0]$  e  $\beta_2 = [a_0, b_0]$  são espelhados em relação à componente  $\mathcal{C}_1$ . Mais precisamente, existem arcos contínuos,  $\beta_1$  e  $\beta_3$ , tal que  $\beta_0 \cup \beta_1$  e  $\beta_0 \cap \beta_1 = \{a_0\}$  que são pré-imagens da mesma curva  $F([P_0, a_0])$ , assim como  $\beta_2 \cup \beta_3$  e  $\beta_2 \cap \beta_3 = \{a_0\}$  são pré-imagens de  $F([a_0, b_0])$ .

Como descrito na Seção 7.4, o ponto  $a_0$  é uma singularidade especial de  $F$ , uma *dobra*. No exemplo estudado, poucos pontos críticos não são dobras,

como as cúspides que geram as pontas nas imagens das curvas críticas.

### 2.2.5

#### Estendendo $\mathcal{G}$

Procedemos na busca de ainda outras soluções de  $F(u) = 0$ . Mais especificamente, vamos procurar pela última raiz de  $F$  que não está em  $\mathcal{G}$ .

Na figura 2.7, traçamos a semirreta (tracejada) saindo de  $P_1$  com vetor diretor  $\vec{v} = P_2 - P_1$ . Rotulamos a imagem como na figura 2.4. A interseção da semirreta com a componente  $\mathcal{C}_2$  é o ponto  $k_0$ . O caminho conexo entre  $P_2$  e  $P_8$ , é obtido, pela inversão de  $F([P_2, k_0])$ . Em  $k_0$  poderíamos realizar o espelhamento descrito na Seção 2.2.4. Neste exemplo, o conhecimento prévio do número de raízes autoriza-nos a encerrar o algoritmo sem esta etapa. Uma situação mais genérica é apresentada na Seção 3.2.

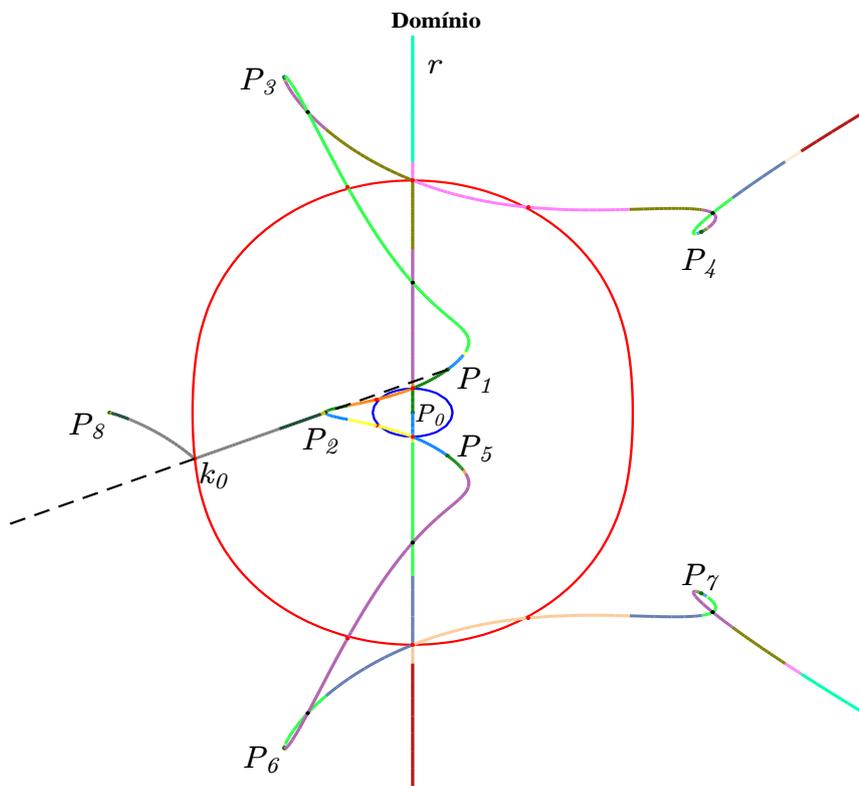


Figura 2.7: Extensão de  $\mathcal{G}$ .

As 8 raízes de  $F$  calculadas a partir de  $(0, 0)$  encontram-se na tabela a seguir.

Ponto	Solução
$P_1$	(0.2141, 0.3313)
$P_2$	(-0.5367, 0.0000)
$P_3$	(-0.7893, 2.5802)
$P_4$	(1.7752, 1.3903)
$P_5$	(0.2141, -0.3313)
$P_6$	(-0.7893, -2.5802)
$P_7$	(1.7752, -1.3903)
$P_8$	(-1.8633, 0.0000)

Tabela 2.1: Raízes encontradas.

### 3

## Grafos completamente espelhados

O centro das atenções do algoritmo que descrevemos superficialmente no exemplo é um *grafo completamente espelhado*. A definição segue de abstrair as propriedades mais relevantes das buscas unidimensionais do exemplo da Seção 2.2 .

### 3.1

#### Grafos associados a funções

Nesse texto, um grafo  $G$  não orientado é um par  $(V, E)$  em que  $V$  representa o conjunto de vértices e  $E$  o conjunto de arestas.

Um grafo  $G$  é *associado ao domínio* de  $F : X \rightarrow Y$  se

1. Vértices e arestas pertencem a  $X$  e  $E \cup V$  é um fechado em  $X$ .
2. Vértices são pontos isolados de  $X$ .
3. Arestas são imagens homeomorfas de intervalos fechados ( $C^1$  no interior) tendo vértices em seus extremos e só neles. Existe no máximo uma aresta ligando dois vértices.
4. Arestas só se encontram em vértices.

Uma aresta  $\beta$  é *incidente* a um vértice  $u$  se  $u$  é um extremo de  $\beta$ . Grafos admitem *laços*, arestas que conectam um vértice a si próprio. O *grau*  $d(u)$  de um vértice  $u$  é o número de arestas incidentes nele. Cada laço contribui com dois ao grau de seu vértice extremo.

Um vértice  $u$  é *livre* quando pertence a uma única aresta e tem grau um (vértices de um laço não são livres). O conjunto dos vértices livres de um grafo  $G$  é denotado por  $V_{\partial G}$ .

Um grafo  $G = (V, E)$  é um *subgrafo* de  $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$  e é representado por  $G \subseteq \tilde{G}$  se  $V \subseteq \tilde{V}$  e  $E \subseteq \tilde{E}$ . Um *caminho de arestas* é uma sequência finita de arestas com arestas consecutivas tendo um vértice comum. Um grafo  $G$  é *conexo* quando existe um caminho de arestas entre quaisquer dois vértices. Um *ciclo* é um caminho de arestas distintas em que o primeiro e o último vértice são iguais. Uma *árvore* é um grafo conexo e sem ciclos.

Se  $X$  é de dimensão finita, um grafo  $G$  associado ao domínio de  $F$  é *localmente finito*: se todo aberto de  $X$  contém um número finito de vértices e arestas, portanto  $G$  é fechado em  $X$ .

Vamos supor que a função  $F : X \rightarrow Y$  tem um conjunto crítico  $\mathcal{C}$  no qual o conjunto de dobras é denso.

Os métodos de continuação habituais invertem curvas  $\gamma$  no contradomínio de  $F$ . Como descrito na Seção 4.2, se a inversão de  $\gamma(t_c)$  leva a um ponto  $u_c \in \mathcal{C}$ , a análise numérica que empregamos requer que  $u_c$  seja uma dobra e que  $\gamma(t)$  seja transversal a  $F(\mathcal{C})$  (isto é,  $\gamma'(t_c)$  não está no espaço tangente de  $F(\mathcal{C})$  em  $\gamma(t_c) = F(u_c)$ ). Vamos especificar uma classe de grafos  $G$  associados a  $F$  para o qual, pelo menos teoricamente, a análise numérica da Seção 4.2 vale ao tentar inverter  $F(G)$ .

Um grafo  $G$  associado ao domínio de  $F : X \rightarrow Y$  é *genérico* se

1. Todo  $u \in G \cap \mathcal{C}$  é vértice de  $G$  e uma dobra de  $F$  ( $V_{\mathcal{C}}$  representa o conjunto desses vértices).
2. A restrição de  $F$  a  $G \setminus (V_{\mathcal{C}} \cup V_{\partial G})$  é localmente injetora.
3. A imagem de uma aresta em um vértice  $u \in \mathcal{C}$  encontra  $F(\mathcal{C})$  transversalmente em  $F(u)$ .

O termo genérico, usado para denotar abundância, é plausível: é fácil perturbar um pouco um grafo associado a  $F$  de modo que suas arestas evitem pontos críticos que não sejam dobras.

A figura 3.1 foi obtida removendo a flor da figura 2.5. Os vértices vermelhos são dobras de  $F$ , vértices pretos são pontos regulares e os vértices livres não estão marcados. Neste exemplo, os arcos de  $F(G)$  têm autointerseção fora de  $F(V \cap \mathcal{C})$ , o que faz com que alguns pontos  $u$  (em preto) regulares também sejam vértices de  $G$  com  $d(u) = 4$ .

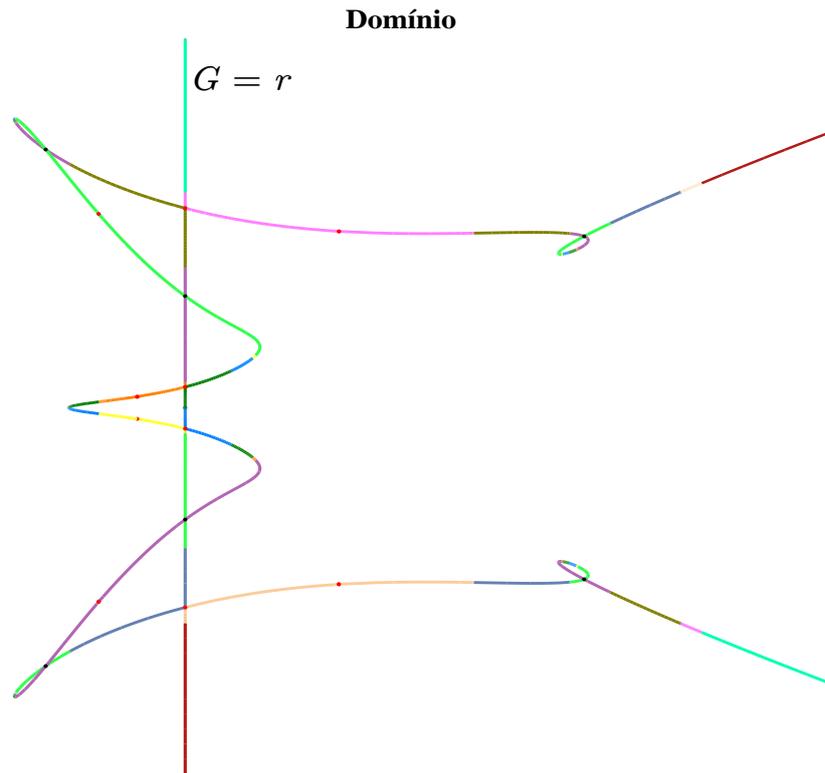


Figura 3.1: Um grafo genérico muito simples

A propriedade local de espelhamento descrita na Seção 2.2.4 define o conceito que mais nos interessa.

**Definição 3.1 (Grafo completamente espelhado)** *Um grafo genérico  $G$  associado ao domínio de  $F : X \rightarrow Y$  é completamente espelhado se*

1.  $G$  é conexo.
2.  $V_{\partial G}$  é formado apenas por pontos regulares de  $F$ .
3. Dado um ponto  $u \in G \setminus V_{\partial G}$ , existem vizinhanças  $U_X \subset X$  de  $u$  e  $V_Y \subset Y$  de  $F(u)$  tais que  $U_X \cap F^{-1}(V_Y \cap F(G)) = U_X \cap G$ .

Pela terceira propriedade,  $G$  é localmente completo por inversões: a inversa por  $F$  de  $F(G)$  perto de  $F(u)$  é, perto de  $u$ , a parte de  $G$  próxima a  $u$ . Assim, por exemplo, a reta  $r$  no exemplo 2.2 é um grafo genérico, e  $G$  descrito em 2.2.3 é completamente espelhado. Na verdade,  $G$  é o *fecho espelhado* de  $r$ , no sentido que é o menor grafo espelhado contendo  $r$ .

Para um grafo genérico  $G$ , denotamos o seu fecho espelhado por  $\mathcal{G}$ . Os pontos de dobras que pertencem ao grafo genérico  $G$  são pontos de bifurcações de  $\mathcal{G}$ . Um ponto  $u_c \in G \subset \mathcal{G}$  é um ponto de *bifurcação* de  $\mathcal{G}$  se para toda vizinhança  $U_X \subset X$  de  $u_c$  existe um ponto de  $\mathcal{G}$  que não pertence a  $G$ .

Informalmente, as dobras que estão em  $G$  podem ser interpretadas como pontos de bifurcações de  $\mathcal{G}$ , no sentido que dois novos ramos, em placas diferentes  $(X \setminus \mathcal{C})$ , são gerados a partir de cada um desses pontos na construção de  $\mathcal{G}$ .

No exemplo a seguir,

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (\cos(x) - x^2 \cos(x) + 2x \sin(x), y)$$

tem como conjunto crítico  $\mathcal{C} = \{(k\pi, y), k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots, y \in \mathbb{R}\}$ , que consiste de retas verticais que só contêm dobras e são levadas por  $F$  a outras retas verticais, como indicado na figura 3.2. A reta  $r$  define um grafo genérico com vértices dados pelas interseções com  $\mathcal{C}$  e o ponto  $P_0$ . O fecho espelhado de  $r$ , indicado na figura, obtém outras pré-imagens  $P_i$  de  $g = F(P_0)$ . Em princípio, para uma função geral, poderíamos ter um número infinito de componentes críticas e um número infinito de pré-imagens. A análise numérica vai obtendo novas pré-imagens à medida que vai tentando satisfazer a condição [3.] da definição de grafo completamente espelhado.

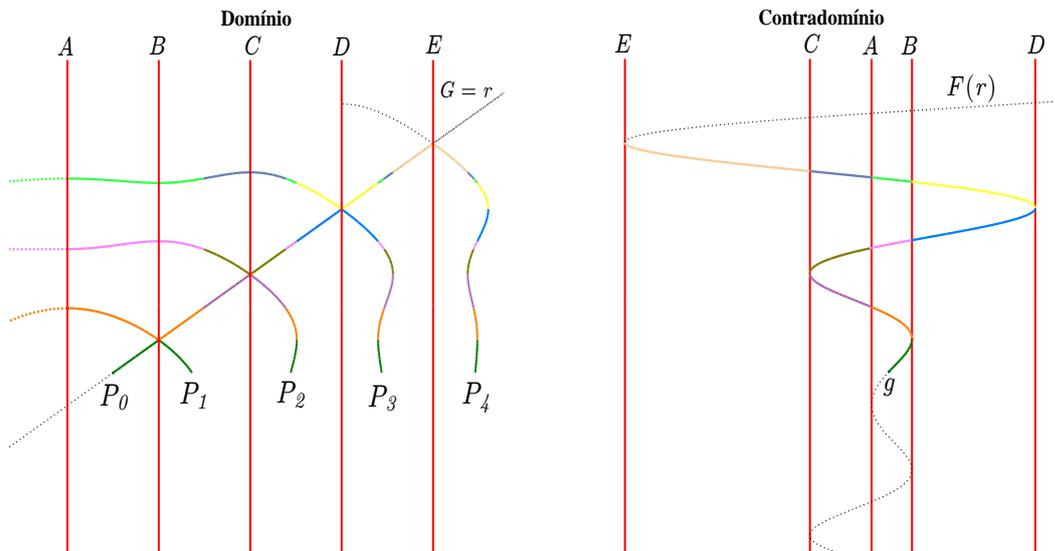


Figura 3.2: Construção de um grafo completamente espelhado.

A construção de grafos completamente espelhados se baseia em operações de inversão locais. A conexidade garante a possibilidade de ir gerando o fecho espelhado  $\mathcal{G}$  de um grafo genérico  $G$ . Nada garante, entretanto, que todas as pré-imagens estejam nesse conjunto, mesmo se o processo de fechamento for completamente realizado.

Isso leva a duas possibilidades descritas a seguir, onde completamos o espelhamento do grafo apresentado na figura 2.7

1. A partir de  $\mathcal{G}$ , construímos um grafo genérico conexo  $\tilde{G}$  que por espelhamento dá origem a um grafo espelhado  $(\tilde{\mathcal{G}})$ .

Na figura 3.3, o grafo  $\mathcal{G}$  é estendido por um segmento no retângulo pontilhado, que leva a  $(\tilde{\mathcal{G}})$ .

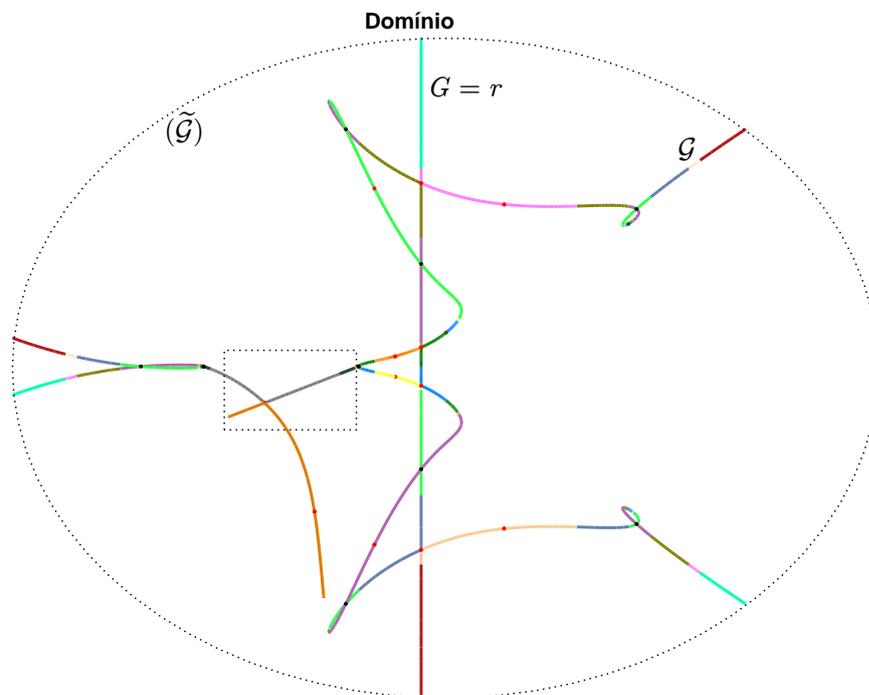


Figura 3.3:  $\mathcal{G} \subset (\tilde{\mathcal{G}})$ .

2. Começar por outro grafo genérico  $\tilde{G}$ , a princípio, não conectado a  $\mathcal{G}$  e calcular  $(\tilde{\mathcal{G}})$ .

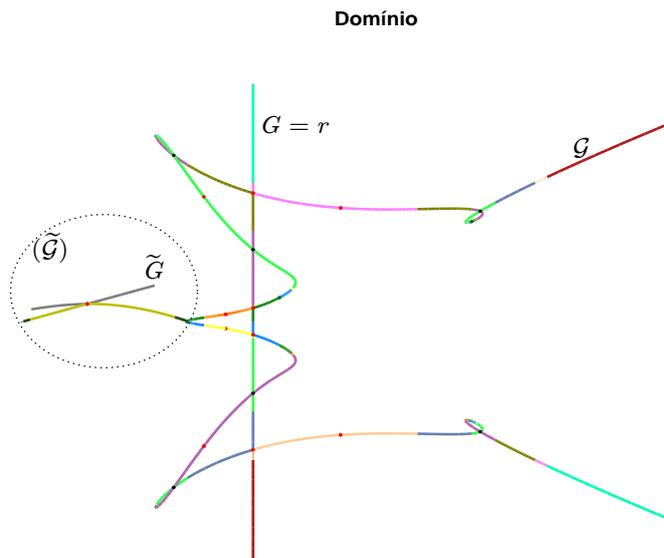


Figura 3.4:  $\tilde{G}$  desconexo a  $\mathcal{G}$ .

Na figura 3.4 partimos de um grafo genérico  $\tilde{G}$  que é um segmento de reta (em cinza e verde) desconexo a  $\mathcal{G}$ , mas ao construirmos o fecho espelhado,  $\tilde{\mathcal{G}}$  fica conectado a  $\mathcal{G}$ .

Uma vez obtidos dois grafos completamente espelhados  $\mathcal{G}_a$  e  $\mathcal{G}_b$  contendo várias pré-imagens de  $a$  e  $b$  respectivamente, parece vantajoso conectar os dois grafos para obter ainda mais pré-imagens dos dois pontos por espelhamento.

### 3.2

#### Roteiro

##### Etapa I.

1. Obtenha uma primeira solução  $u = P_0$  de  $F(u) = g$ .
2. Construa um grafo genérico  $G \subset X$  por  $P_0$ .
3. Calcule  $F(G)$ .
4. Rotule os arcos determinados por  $g$  e  $F(G \cap \mathcal{C})$ .

5. Inverta  $F(G)$  obtendo o fecho espelhado  $\mathcal{G} \subset F^{-1}(F(G))$  de  $G$ .

**Etapa II.**

6. Estenda  $\mathcal{G}$  para um grafo conexo  $\tilde{G}$  dando preferência para a construção de vértices nas pré-imagens já encontradas na etapa anterior.
- 6'. Comece com um outro grafo genérico  $\tilde{G}$ , que contenha uma nova pré-imagem de  $g$ .
7. Obtenha o fecho espelhado de  $\tilde{G}$ .

## 4

### Superando dobras com um método preditor-corretor

Existe uma extensa literatura ([1],[15], [16], [24]) dedicada aos métodos de continuação. Mesmo para valores regulares de  $F$ , as inversões, que ocorrem sem dificuldades teóricas, podem levar a problemas computacionais, passíveis de resolução se considerarmos, por exemplo, a proximidade de pontos críticos. Uma forma de contornar tais dificuldades é interpretar o processo de inversão de um caminho como sendo a inversão de um ponto por uma homotopia.

Mais precisamente, sejam  $X$  e  $Y$  espaços de Banach reais e  $F : X \rightarrow Y$  uma função suave. Queremos calcular as pré-imagens de uma curva suave  $\gamma \subset Y$  parametrizada por  $t$ , isto é, resolver  $F(u) = \gamma(t)$ .

Inverter o caminho é achar os zeros da homotopia<sup>1</sup>

$$H : X \times \mathbb{R} \longrightarrow Y, \quad (u, t) \longmapsto F(u) - \gamma(t)$$

e o estudo de  $H^{-1}(0)$  recai, muitas vezes, em aplicações de teoremas de natureza local, com hipóteses sobre a derivada de  $H$ . Em geral, em um ponto  $(u, t)$ , as derivadas de Gateaux (direcionais) de  $H$  serão representadas por  $\partial_u H(u, t) = DF(u)$ ,  $\partial_t H(u, t) = \gamma'(t)$ . A derivada de Fréchet,  $DH(u, t) : X \times \mathbb{R} \rightarrow Y$  é

$$DH(u, t)(\hat{u}, \hat{t}) = DF(u)\hat{u} - \gamma'(t)\hat{t}.$$

#### 4.1

##### O método preditor tangente

Suponha  $(u_0, t_0) \in X \times \mathbb{R}$  tal que  $H(u_0, t_0) = 0$  para o qual a derivada  $DH(u_0, t_0)$  seja sobrejetora e Fredholm de índice 1. Então, pela forma local das submersões ([24], [27]) existe uma curva  $c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow X \times \mathbb{R}$ ,  $c(s) = (u(s), t(s))$ , tal que

1. O valor inicial é  $c(0) = (u(0), t(0)) = (u_0, t_0)$ ;
2. O vetor tangente em 0 é  $c'(0) \neq 0$ , e  $DH(c(0))c'(0) = 0$ .

<sup>1</sup>A palavra, que incorpora um modo de pensar em topologia algébrica, é usada entre analistas numéricos para descrever uma situação dependente de um parâmetro real.

O método padrão preditor-corretor, visa avançar ao longo da curva  $c$  a partir um ponto  $(u_0, t_0) \in c$  encontrando um novo ponto  $(u_1, t_1) \in c$ , da seguinte forma: na etapa de predição, obtemos  $(\hat{u}_1, \hat{t}_1)$  em  $r$ , na reta tangente a  $c$  em  $(u_0, t_0)$ , com a aproximação  $(\hat{u}_1, \hat{t}_1)$ , a correção obtém o novo ponto  $(u_1, t_1) \in c$  no hiperplano que passa por  $(\hat{u}_1, \hat{t}_1)$  e é perpendicular à  $r$ .

Se a curva  $\gamma(t)$  é constituída por valores regulares de  $F$ , o operador  $DF(u)$  é inversível e podemos, em princípio, graças ao teorema da função implícita, obter  $c(t) = (u(t), t)$  e  $c'(t) = (\hat{u}, 1)$ . Na vizinhança de pontos críticos de  $F$ ,  $t$  não é um bom parâmetro para realizar continuação<sup>2</sup>. Uma prática frequente na literatura é parametrizar, a curva por comprimento de arco ou pseudo-comprimento de arco [1]. No caso que nos interessa, existe um outro parâmetro de fácil interpretação geométrica, que descrevemos na seção a seguir.

## 4.2

### Invertendo perto de dobras

Seja  $X = Y = \mathbb{R}^n$ . A Jacobiana da homotopia  $DH(u, t) = (DF(u) \ \gamma'(t))$  tem  $n$  linhas e  $n + 1$  colunas. Pelo teorema da função implícita, para obter uma solução  $H(u(t), t) = 0$ , basta que as primeiras  $n$  colunas de  $DH(u, t)$  sejam linearmente independentes. Se isso não ocorre, talvez outro subconjunto de  $n$  colunas o seja, e a variável que parametriza a inversão vai ser associada à coluna não empregada. A situação é mais geral: uma decomposição do domínio  $\tilde{X} = X \times \mathbb{R}$  numa soma direta  $\tilde{X} = X_d \oplus V_d$  para espaços  $X_d$  e  $V_d$  de dimensões  $n$  e  $1$ , respectivamente, para a qual a restrição de  $DH(u, t)$  ao subespaço  $X_d$  é injetora permite parametrizar a curva que resolve  $H(u(t), t) = 0$  em termos da variável associada a  $V_d$ . Vamos ver como a inversão perto de dobras pode ser tratada com esse argumento.

Quando  $u_c$  é uma dobra de  $F$ ,  $\dim \text{Nuc } DF(u_c) = 1$ , ou equivalentemente, o posto de  $DF(u_c)$  é  $n - 1$ : uma coluna linearmente independente às colunas de  $DF(u_c)$  permite proceder à inversão de uma curva por  $u_c$ .

Para uma dobra em sua forma normal  $F(x, y) = (x, y^2)$ , vamos ver que a variável  $y$  é um bom parâmetro para continuação. O conjunto crítico  $\mathcal{C}$  de  $F$  é o eixo horizontal,  $\{y = 0\}$ . Para inverter  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$  cruzando  $\mathcal{C}$ , consideramos a homotopia

$$\begin{aligned} H : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, t) &\longmapsto (x - \gamma_1(t), y^2 - \gamma_2(t)), \end{aligned}$$

cuja matriz Jacobiana

<sup>2</sup>Em análise numérica, a inversão em termos de  $t$ .

$$DH(x, y, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\gamma_1'(t) \\ 0 & 2y & -\gamma_2'(t) \end{pmatrix},$$

é sobrejetora se suas duas primeiras colunas são linearmente independentes (isto é,  $(x, y) \notin \mathcal{C}$ ) ou se a terceira coluna não é múltipla de  $(1, 0)$  quando  $(x, y) \in \mathcal{C}$ . O segundo caso é verdadeiro desde que  $-\gamma_2' \neq 0$  no ponto em que  $\gamma(t)$  encontra  $\mathcal{C}$ , ou geometricamente,  $\gamma(t)$  não intercepta  $\mathcal{C}$  tangencialmente.

Assim, mesmo quando  $y = 0$  (isto é, em  $\mathcal{C}$ ), a terceira coluna junto com a primeira são vetores linearmente independentes. Mais,  $y$  pode ser usada como variável de parametrização. No exemplo simples em que  $\gamma(t) = (\beta t, \alpha t)$ , com  $\alpha \neq 0$ , os zeros da homotopia são dados por

$$x = at, \quad y^2 = bt,$$

e fica claro que tanto  $t$  quanto  $x$  podem ser escritos em termos de  $y$ .

Na figura 4.1, consideramos a inversão de uma curva  $\gamma(t) = (t, \alpha t)$ , com  $\alpha \in \mathbb{R}$  e  $\alpha \neq 0$ . Note que, apesar de  $F(\mathcal{C}) \cap \gamma = (0, 0) \neq \emptyset$ , ainda assim o processo de continuação se torna, numericamente efetuable. À esquerda, a curva inversa  $\beta = (\frac{y^2}{\alpha}, y)$ , parametrizada por  $y$ .

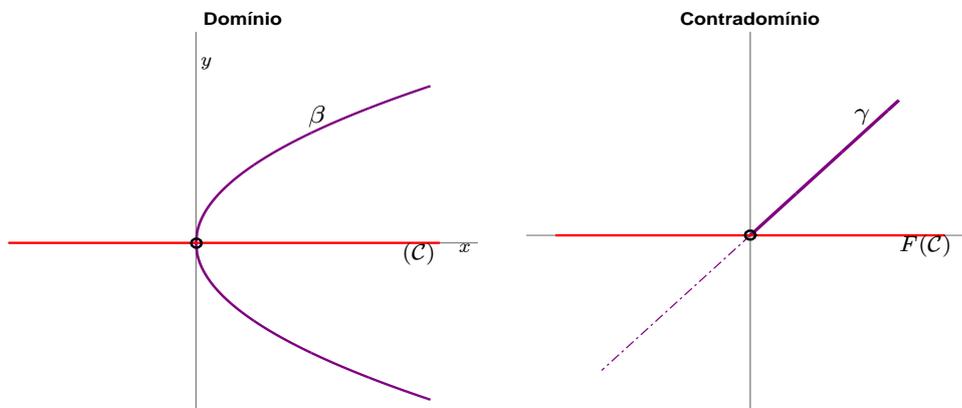


Figura 4.1: A variável  $y$  é a distância da curva ao conjunto crítico  $\mathcal{C}$ .

Como se espera de uma dobra, o segmento na imagem tem duas pré-imagens, uma de cada lado de  $\mathcal{C}$ . Curvas na outra componente de  $Y \setminus \mathcal{C}$  não têm pré-imagens perto da dobra.

Tanto para forma normal quanto para dobras arbitrárias, a menos de constantes multiplicativas, a variável  $y$  que serve para a parametrização, é da ordem da distância de  $\beta$  a  $\mathcal{C}$ , ou do menor autovalor em módulo de  $DF$  na vizinhança de um ponto crítico. Em nosso algoritmo, estamos naturalmente monitorando esse autovalor, justamente para identificar pontos em  $\mathcal{C}$ , o que torna natural sua escolha como variável de parametrização.

A implementação das ideias acima tem uma dificuldade. Queremos inverter a restrição da Jacobiana a um subespaço, e pode acontecer que a Jacobiana completa esteja associada a uma matriz esparsa e sua restrição não. Descrevemos a seguir uma maneira de contornar esse problema. Temos como motivação operadores elípticos semi-lineares

$$\begin{aligned} F : X = H_0^1(\Omega) &\longrightarrow Y = H^{-1}(\Omega) \\ u &\longmapsto -\Delta u - f(u) \end{aligned}$$

para conjuntos limitados  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  com fronteira suave. A suavidade de  $F$  é garantida se  $f$  é suave. Vamos supor também que a imagem de  $f'$  seja limitada. Queremos inverter  $\gamma \in C^1([0, 1], Y)$ .

A teoria requer diferenciabilidade do tipo Fréchet (a existência de uma Jacobiana limitada, Fredholm), mas os cálculos só usam derivadas de Gateaux (direcionais). Como no caso de dimensão finita, devemos inverter o ponto 0 em

$$\begin{aligned} H : \tilde{X} = H_0^1(\Omega) \times \mathbb{R} &\longrightarrow Y = H^{-1}(\Omega) \\ (u, t) &\longmapsto -\Delta u - f(u) - \gamma(t). \end{aligned}$$

Vamos supor que  $H \in C^1(X \times \mathbb{R}, Y)$ . Então

$$DH(u, t)(\hat{u}, \hat{t}) = -\Delta \hat{u} - f'(u)\hat{u} - \gamma'(t)\hat{t}.$$

Consideramos apenas a situação genérica, em que o autovalor zero de  $DF(u_c)$  é simples. De fato, o ponto crítico típico de  $F$  satisfaz essa propriedade [9]. Se o processo de inversão de uma curva  $\gamma$  na imagem passa pela imagem de um autovalor duplo (note que  $DF(u_c)$  é autoadjunta), uma pequena alteração de  $\gamma$  evita essa dificuldade (também considerado em [9] e [13]).

Se  $u_c$  é uma dobra, pela proposição 7.9,  $DF(u_c)$  tem que ser Fredholm.

**Proposição 4.1** *Seja  $F : X \rightarrow Y$  como acima. Então  $DF(u) : X \rightarrow Y$  é Fredholm de índice 0,  $\text{ind } DF(u) = 0$  e  $DH(u, t) : X \times \mathbb{R} \rightarrow Y$  é um operador de Fredholm de índice 1,  $\text{ind } DH(u, t) = 1$ .*

Ainda que os espaços tenham dimensão infinita,  $DH(u, t)(\hat{u}, \hat{t})$  pode ser pensado informalmente como uma matriz retangular  $n \times (n + 1)$ .

*Demonstração.* O operador  $-\Delta : X \rightarrow Y$  é um isomorfismo, e  $-\Delta^{-1} : Y \rightarrow Y$  é compacta, já que a inclusão  $X \subset Y$  é compacta. A multiplicação associada ao potencial  $f' = q$  é um operador limitado. Da teoria elíptica

$$DF(u) \circ (-\Delta)^{-1} : Y \rightarrow Y, DF(u) \circ (-\Delta)^{-1} = I - K,$$

onde  $K$  é um operador compacto. Da teoria de operadores de Fredholm,  $DF(u)$  é Fredholm de índice zero.

Para demonstrar que  $DH(u, t)$  é Fredholm de índice 1, escreva  $DH(u)$  como uma extensão de dimensão um de  $DF(u)$  e use que a composição de operadores de Fredholm também é Fredholm, com índice dado pela soma dos índices dos termos na composição. Para detalhes, [9].

□

Na etapa de predição, queremos o vetor tangente  $(\hat{u}, \hat{t})$  à  $c \subset H^{-1}(0)$ :

$$DH(u, t)(\hat{u}, \hat{t}) = DF(u)\hat{u} - \gamma'(t)\hat{t} = 0,$$

onde, sem perda, fixamos  $\hat{t} = 1$  para  $u \notin \mathcal{C}$ .

Para pontos  $u \in X$ , nos quais  $DF(u)$  é inversível e  $H(u, t) = 0$ , basta resolver  $DF(u)\hat{u} = \gamma'(t)$ , para obter  $(\hat{u}, \hat{t}) = ((DF(u))^{-1}\gamma'(t), 1)$ . Pelo teorema da função implícita,  $u(t)$  é contínua na vizinhança de  $(u, t)$ .

Vamos considerar agora pontos  $u$  próximos de uma dobra  $u_c \in \mathcal{C}$ . Seja  $k = \hat{\phi}_{u_c}$  um gerador do núcleo de  $DF(u_c)$ . Pela continuidade dos autovalores simples e seus respectivos autovetores normalizados, para  $u$  próximo a  $u_c$ ,  $DF(u)$  tem autovalor  $\mu_u$  e autovetor  $\mu_u$  próximos a  $\mu_{u_c} = 0$  e  $k$ . Motivados pela Seção 4.2, procuramos resolver  $DH(u, t)(\hat{u}, \hat{t}) = 0$  de forma contínua em  $(u, t)$  privilegiando  $\hat{\phi}_u$ . Para  $\hat{u} \in X$ , decomponha  $\hat{u} = \hat{v} + \hat{r}\hat{\phi}_u$  onde  $\langle \hat{v}, \hat{\phi}_u \rangle = 0$  e  $\langle \hat{\phi}_u, \hat{\phi}_u \rangle = 0$ , e normalizar de modo que  $\hat{r} = 1$  (o que pressupõe que a resposta  $\hat{r}$  não é zero). Queremos então resolver

$$DF(u)(\hat{v} + \hat{\phi}_u) = \hat{t}\gamma'(t).$$

**Proposição 4.2** *Seja  $u \in X$  dobra de  $F$ . O operador estendido  $S(u) = DF(u) + c(\hat{\phi}_u \otimes \hat{\phi}_u) : X \rightarrow Y$  é inversível para  $c \neq 0$ .*

*Demonstração.* O operador  $S(u)$  é uma perturbação de posto 1 de  $DF(u)$ , logo também é Fredholm de índice zero. Invertibilidade então é equivalente a injetividade. Para  $\hat{u} = \hat{v} + \hat{r}\hat{\phi}_u$  com  $DF(u)\hat{\phi}_u = 0$ , vale

$$S(u)\hat{u} = DF(u)(\hat{v} + \hat{r}\hat{\phi}_u) + c(\hat{\phi}_u \otimes \hat{\phi}_u)(\hat{v} + \hat{r}\hat{\phi}_u) = 0,$$

e usando  $DF(u)\hat{\phi}_u = 0$ ,  $\langle \hat{v}, \hat{\phi}_u \rangle = 0$  e  $\langle \hat{\phi}_u, \hat{\phi}_u \rangle = 1$ ,

$$S(u)\hat{u} = DF(u)\hat{v} + c\hat{r}\hat{\phi}_u = 0 .$$

Como  $DF(u)$  é autoadjunto,  $\text{Nuc } DF(u)^\perp$  é um subespaço invariante. Assim,  $DF(u)\hat{v} = 0$ ,  $c\hat{r}\hat{\phi}_u = 0$ . Finalmente, a restrição de  $DF(u)$  a  $\text{Nuc } DF(u)^\perp$  é um isomorfismo, logo  $\hat{v} = 0$ ,  $\hat{r} = 0$ .  $\square$

Voltamos à equação  $DF(u)(\hat{v} + \hat{\phi}_u) = \hat{t}\gamma'(t)$ . Como  $DF(u)$  é autoadjunto,  $\langle \hat{\phi}_u, DF(u)\hat{v} \rangle = 0$  donde

$$\hat{t}\langle \hat{\phi}_u, \gamma'(t) \rangle = \langle \hat{\phi}_u, DF(u)\hat{\phi}_u \rangle = \mu_u .$$

Assim,

$$\hat{t} = \frac{\mu_u}{\langle \hat{\phi}_u, \gamma'(t) \rangle} ,$$

o que impõe uma restrição geométrica a  $\gamma'(t)$ : *o vetor não pode ser perpendicular ao autovetor  $\phi_u$ .*

A autoadjunticidade de  $DF(u)$  dá ainda outra interpretação geométrica a essa restrição. Seja  $t_c$  tal que  $\gamma(t_c) = F(u_c)$ , onde  $u_c$  é uma dobra. O espaço tangente  $T_{u_c}\mathcal{C}$  do conjunto crítico em uma dobra  $u_c$  é levado por  $DF(u_c)$  ao espaço tangente de  $F(\mathcal{C})$  em  $F(u_c) = \gamma(t_c)$ . A imagem de  $DF(u_c)$  é ortogonal ao núcleo de  $DF(u_c)^* = DF(u_c)$ , que por sua vez é gerado por  $\hat{\phi}_{u_c}$ . Assim, a restrição afirma que  $\gamma(t_c)$  *intercepta  $F(u_c)$  transversalmente*, isto é, *o vetor  $\gamma'(t_c)$  não está em  $T_{F(u_c)}F(\mathcal{C})$ .*

Agora escreva a equação como

$$S(u)\hat{u} = DF(u)(\hat{v} + \hat{\phi}_u) + c(\hat{\phi}_u \otimes \hat{\phi}_u)(\hat{v} + \hat{\phi}_u)$$

$$= \hat{t}\gamma'(t) + c(\hat{\phi}_u \otimes \hat{\phi}_u)(\hat{v} + \hat{\phi}_u) = \hat{t}\gamma'(t) + c\hat{\phi}_u ,$$

e a invertibilidade de  $S(u)$  permite obter  $\hat{u}$ .

A restrição geométrica garante que  $\hat{r} \neq 0$ . Existe outra maneira de expressar a restrição: como

$$\gamma'(t) \notin \{a\phi_u, a \in \mathbb{R} = \text{Im } DF(u)^\perp = DF(u)\} ,$$

para  $u = u_c$  temos que

$$\gamma'(t) \notin DF(u)T_{u_c}\mathcal{C} .$$

Em palavras, a curva  $\gamma$  intercepta a imagem  $F(\mathcal{C})$  do conjunto crítico trans-

versalmente.

A escolha de  $c = 1$  leva a resultados numéricos satisfatórios. De posse do vetor  $(\hat{u}, \hat{t})$ , realizamos a etapa de correção em um plano perpendicular ao vetor tangente à curva. Talvez a representação matricial do termo de posto um não seja esparsa. Ainda assim, o sistema agora pode ser resolvido com técnicas específicas de resolução associadas a perturbações de posto um [13].

## 5

### Operadores não lineares de Sturm-Liouville discretizados

Nesse capítulo, consideramos a discretização de um operador de Sturm-Liouville não linear  $F : X \rightarrow Y$ . Costa, Figueiredo e Srikanth [12] demonstraram uma conjectura de Lazer-McKenna sobre o número de soluções de  $F(u) = g$  para uma classe de funções  $g$ . A contrapartida discreta, considerada por Teles e Tomei [28], se revelou bem diversa: a equação tem um número bem maior de soluções, que vão desaparecendo à medida que a discretização se refina.

Substanciada por esses fatos teóricos, apresentamos a análise numérica para o problema sob três perspectivas diferentes: o argumento em [28], o método do tiro (o *shooting method*, na Seção 5.3) e o uso de grafos completamente espelhados na Seção 5.4.

#### 5.1

##### O operador contínuo e sua discretização

Para  $F : X = H^2([0, \pi]) \rightarrow Y = L^2([0, \pi])$ , consideramos o problema de contorno não linear

$$F(u) = -u'' - f(u) = g, \quad u(0) = 0, \quad u(\pi) = 0, \quad (5-1)$$

em que  $g = -t \operatorname{sen}(x)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ . É sabido que  $u \mapsto -u''$  agindo de  $X$  em  $Y$  tem autovalores simples  $\lambda_k = k^2$  e autofunções associadas  $\phi_k = \operatorname{sen}(kx)$  para  $k = 1, 2, \dots$ . Por hipótese,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função suave, convexa, assintoticamente linear com parâmetros  $\ell_-, \ell_+$  (isto é,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = \ell_-$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \ell_+$ ) tais que

$$\ell_- < \lambda_1 = 1, \quad \lambda_k = k^2 < \ell_+ < (k+1)^2 = \lambda_{k+1},$$

e a interação é *não ressonante* (isto é,  $\ell_-$  e  $\ell_+$  não são autovalores do problema livre). Costa, Figueiredo e Srikanth [12] mostraram que, para  $t \gg 0$ , a equação  $F(u) = -t \operatorname{sen}(x)$  tem exatamente  $2k$  soluções.

Para descrever a versão discretizada, definimos a malha regular

$$\bar{I}_h = \{x_0 = 0, \dots, x_i = ih, \dots, x_{n+1} = \pi, \quad i = 0, \dots, n+1\},$$

onde  $h = \frac{\pi}{n+1}$ , e para pontos de  $I_h = \overline{I_h} \setminus \{x_0, x_n + 1\}$  tomamos a aproximação da segunda derivada

$$-u''(x_i) = \frac{-u(x_{i+1}) + 2u(x_i) - u(x_{i-1}))}{h^2}.$$

A discretização do operador  $F$  conduz ao estudo de  $F^h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,

$$F^h(u^h) = A^h u^h - f(u^h). \tag{5-2}$$

Aqui,  $A^h$  é a matriz  $n \times n$ , simétrica, positiva definida,

$$A^h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

com autovalores simples  $\lambda_1^h < \dots < \lambda_n^h$  dados por

$$\lambda_k^h = \frac{2}{h^2} - \frac{2}{h^2} \cos(\pi - kh), \quad k = 1, \dots, n$$

e os autovetores  $\phi_k^h$  têm por coordenadas os valores de  $\sin(kx)$  na malha, que denotamos por  $\sin(kI_h)$ . A discretização  $u^h \in \mathbb{R}^n$  aproxima os valores da solução  $u$  sobre pontos de  $I_h$ . A não linearidade  $f$  age pontualmente,  $f(u^h) = (f(u^h(x_1)), \dots, f(u^h(x_n)))^T$ . Como antes,  $f$  é uma função suave, convexa, assintoticamente linear com parâmetros  $\ell_-$  e  $\ell_+$ . O lado direito é da forma  $g^h = y - tp$ , para vetores fixos  $y, p \in \mathbb{R}^n$  com  $p > 0$  (isto é, todas as coordenadas de  $p$  são positivas). Teles e Tomei provaram que, para  $t \gg 0$  e  $\ell_+ \gg \lambda_n^h$ , a equação

$$F^h(u^h) = A^h u^h - f(u^h) = y - tp,$$

tem exatamente  $2^n$  soluções.

Tanto [12] quanto [28] consideram as funções lineares por partes,

$$f(u) = \ell_+ u^+ - \ell_- u^- , \quad \text{onde } u^+ = \max(u, 0) , \quad u^- = \max(-u, 0) ,$$

como ponto de partida em seus argumentos, permitindo introduzir argumentos de teoria de bifurcação. Para a análise numérica ocorrem simplificações nos três pontos de vista, especialmente nos cálculos de Jacobianas.

Apresentamos, a seguir, métodos de cálculo de pré-imagens  $u^h$  de um

dado ponto específico,  $g^h = -t\phi_1^h = -t \operatorname{sen}(I_h)$  pelo operador discretizado  $F^h$ . Nos exemplos estudados,  $t = 1000$ .

## 5.2

### A contagem das pré-imagens

Aqui explicitamos o método em [28], e ressaltamos a diferença do número de pré-imagens entre o problema contínuo e o discreto. Vamos fixar  $n = 15$  e  $g^h = -1000 \operatorname{sen}(I_h)$ , para  $f$  lineares por partes como acima, com

$$\ell_- = \frac{\lambda_1^h}{2} \text{ e } \ell_+^k = \frac{\lambda_k^h + \lambda_{k+1}^h}{2}, \text{ para } k = 1, \dots, 14 \text{ e } \ell_+^{15} = \lambda_{15}^h + \frac{\lambda_1^h}{2}.$$

O número de soluções  $N(g^h)$  para esses valores de  $\ell_+^k$  é dado a seguir.

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$N(g^h)$	2	4	6	8	12	12	22	24	32	100	286	634	972	1320	2058

Para uma interação de  $f'$  com  $k$  autovalores de  $A^h$ , encontramos o regime linear  $2k$  para  $k$  pequeno encontrado por Costa-Figueiredo-Srikanth, e o regime exponencial  $2^k$  de Teles-Tomei para  $k$  grande.

O fato que  $f$  é tão simples permite o cálculo do número de pré-imagens da tabela 5.2. A função  $F^h$  (5-2) é contínua, linear dentro de cada ortante de  $\mathbb{R}^{15}$ . Mais precisamente, vetores no interior de um ortante têm sinais constantes, indicados por uma sequência  $s$ :  $F^h$  é igual à transformação linear  $F^h = A^h - D^O$ , onde  $D^O$  é uma matriz diagonal com entradas  $\ell_-$  ou  $\ell_+$  determinadas por  $s$ . Assim, basta resolver um sistema linear  $F^h(x) = (A^h - D^O)x = g^h$  de tamanho  $15 \times 15$  em cada um dos  $2^{15}$  ortantes, e verificar se a solução está naquele ortante.

A abundância de pré-imagens no caso discreto é explicada em [28] por um fenômeno geométrico, a *turbulência topológica*, especialmente relevante para o método numérico empregando grafos completamente espelhados. Essencialmente, para a discretização em  $\mathbb{R}^n$ , o conjunto crítico consiste de  $k$  componentes conexas  $\mathcal{C}_j, j = 1, \dots, k$ , cada uma difeomorfa a um hiperplano. As imagens  $F(\mathcal{C}_j)$  giram em torno do vetor  $t(1, 1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$  (para  $\ell_+ \gg 0$ ) um grande número de vezes, mais precisamente,  $\binom{n-1}{j-1}$  vezes [28].

## 5.3

### O método do tiro aplicado ao operador discretizado

O método do tiro aplicado ao problema

$$-u'' - f(u) = g, \quad u(0) = 0, \quad u(\pi) = 0$$

consiste em estudar uma família de soluções  $u(x, \alpha)$ , com parâmetro  $\alpha$ , do problema de valor inicial

$$-u'' - f(u) = g, \quad u(0, \alpha) = 0, \quad u'(0, \alpha) = \alpha.$$

As raízes  $\alpha_i$  do *mapa de Poincaré*  $u(\pi, \alpha)$  levam às soluções  $u(x, \alpha_i)$  do problema de contorno. Analogamente, para o problema discretizado, considere

$$F^h(u^h(x_i, \alpha)) = -t \operatorname{sen}(x_i), \quad u^h(x_0, \alpha) = 0, \quad u^h(x_1, \alpha) = \alpha. \quad (5-3)$$

Omitindo a dependência dos  $u^h(x_i)$  em  $\alpha$ , da equação  $i$ , calcula-se  $u^h(x_{i+1})$ ,  $i = 1, \dots, n$  no sistema

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ u^h(x_2) \\ \vdots \\ u^h(x_n) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f(\alpha) \\ f(u^h(x_2)) \\ \vdots \\ f(u^h(x_n)) \end{bmatrix} = -t \begin{bmatrix} \operatorname{sen}(x_1) \\ \operatorname{sen}(x_2) \\ \vdots \\ \operatorname{sen}(x_n) - \frac{u^h(x_{n+1})}{th^2} \end{bmatrix}$$

onde, na última equação,  $-u^h(x_{n+1}) = -u^h(x_{n+1}, \alpha)$  tem que ser zero para uma solução satisfazendo as condições de Dirichlet. E aí é questão de encontrar os valores apropriados de  $\alpha$ .

As figuras 5.1 e 5.2 mostram os gráficos do mapa de Poincaré  $u^h(\pi, \alpha)$  para  $n = 15$ ,  $k = 4$  e  $k = 8$ . Raízes indicam uma solução (aproximada numericamente) do problema de contorno. Na figura 5.1, para  $k = 4$ , a contagem de pré-imagens coincide com o valor na tabela 5.2: existem oito soluções, como no caso contínuo. Já na figura 5.2, para  $k = 8$ , estamos em transição para o regime exponencial, e encontramos 20 soluções, em vez das 24 indicadas na tabela acima. Na verdade, o método de tiro é bastante instável, como veremos a seguir: as soluções encontradas são comparadas na Seção a seguir com as obtidas pelos outros dois métodos.

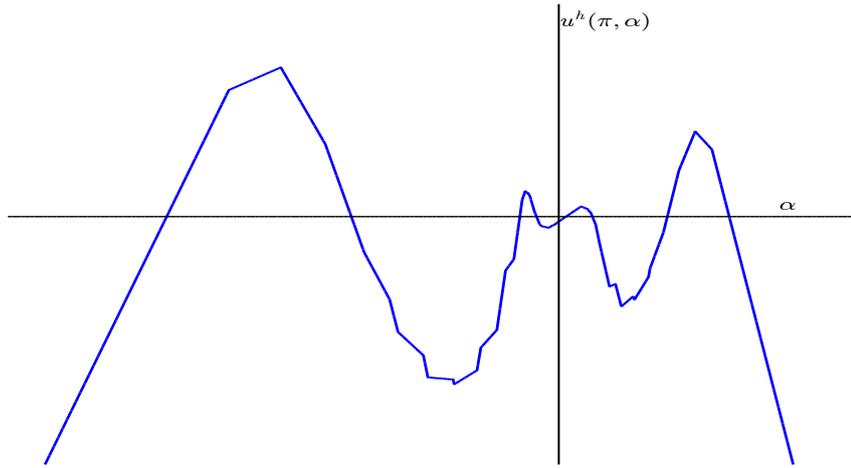


Figura 5.1: Mapa de Poincaré,  $\alpha \in [-550, 350]$ . Interação  $k = 4$ . Parâmetros  $\ell_- = 0.4984$  e  $\ell_+ = 19.1248$

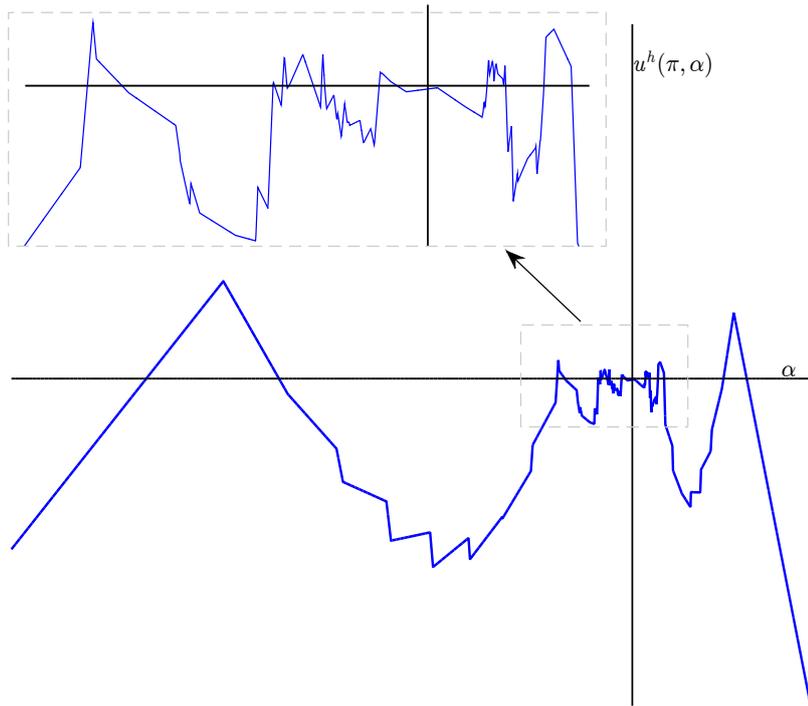


Figura 5.2: Mapa de Poincaré,  $\alpha \in [-550, 150]$ . Interação  $k = 8$ . Parâmetros  $\ell_- = 0.4984$  e  $\ell_+ = 56.9367$

## 5.4

**Resolvendo com grafos completamente espelhados**

Como nas seções anteriores, desejamos encontrar múltiplas pré-imagens  $u^h = P_i$  de  $g^h = -1000 \operatorname{sen}(I_h)$ , por  $F^h$ , agora por meio da construção de grafos completamente espelhados.

A escolha de funções lineares por partes  $f$  no lugar da não linearidade implica a perda da suavidade global de  $F^h$ : não se pode empregar um método de Newton para realizar a continuação. Novamente, aproveitamos a linearidade de  $F^h$  em cada ortante. Mais precisamente, vetores no interior de um ortante têm sinais constantes, indicados por uma sequência  $s$ :  $F^h$  é igual à transformação linear  $F^h = A^h - D^O$ , onde  $D^O$  é uma matriz diagonal com entradas  $\ell_-$  ou  $\ell_+$  determinadas por  $s$ . Pontos nas fronteiras dos ortantes têm pelo menos uma coordenada zero. Dois ortantes  $O_i$  e  $O_j$  são *adjacentes* se as sequências  $s_i$  e  $s_j$  associadas a seus vetores interiores diferem somente em apenas um sinal. Seja  $u \in O_i \cap O_j$  um ponto com uma única coordenada igual a zero. Então  $F^h$  é um homeomorfismo local em torno de  $u$  se e somente se  $\det(A^h - D^O)$  tem o mesmo sinal nos dois ortantes. Se os sinais forem diferentes,  $u$  é uma dobra topológica. De fato,  $(A^h - D_i^O)$  e  $(A^h - D_j^O)$  diferem de uma matriz de posto um, associada a um vetor transversal à interseção dos ortantes: o sinal do determinante especifica se o vetor transversal é levado por  $F^h$  para o mesmo lado da dobra ou não. Em dimensão um (onde a interseção dos dois ortantes é só um ponto), as duas situações são exemplificadas pelas funções  $f(x) = 2x + |x|$  e  $f(x) = |x|$ .

É natural então definir o conjunto crítico  $\mathcal{C}$  de  $F^h$  pelo conjunto de pontos pertencentes a ortantes adjacentes com sinais de  $\det(A^h - D^O)$  opostos. Os pontos críticos de  $F^h$  que só contêm uma coordenada igual a zero, são dobras topológicas [28].

Nos problemas estudados, precisamos de um ponto de partida. Temos como candidatas à solução  $P_0$ , pequenas alterações das soluções do problema contínuo apresentadas por Lazer e McKenna [18]. Para  $\ell_- < \lambda_1 = 1 < \ell_+$  e  $t > 0$ , duas soluções do problema linear por partes  $-u'' - \ell_+ u^+ + \ell_- u^- = -t \operatorname{sen}(x)$  são:  $t \operatorname{sen}(x)/(\ell_+ - 1)$ ,  $t \operatorname{sen}(x)/(\ell_- - 1)$ , verificável por substituição direta na equação [6]. A primeira delas é positiva e a segunda negativa. Podemos mostrar que para o operador discretizado as soluções são os vetores

$$\frac{t \operatorname{sen}(I_h)}{(\ell_+ - \lambda_1^h)} \quad \text{e} \quad \frac{t \operatorname{sen}(I_h)}{(\ell_- - \lambda_1^h)},$$

onde  $\lambda_1^h = \frac{2}{h^2} (1 - \cos(h))$  é o menor autovalor da matriz  $A^h$ . Novamente, a primeira solução é positiva e a segunda negativa. Na maioria dos exemplos a

seguir, tomamos como  $P_0$  a solução positiva.

### 5.4.1

#### O caso $n = 2$

Para dar uma ideia da análise numérica empregada para obter grafos completamente espelhados, consideramos inicialmente a situação visualizável,  $n = 2$ , e então  $h = \pi/3$  e

$$A^h = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

tem autovalores  $\lambda_1 \approx 0.9119$  e  $\lambda_2 \approx 2.7357$ . Para os parâmetros  $\ell_- = -1$ , e  $\ell_+ = 2$  ou  $\ell_+ = 4$ , as aplicações  $F^h = A^h - f$  são não ressonantes. Nas figuras 5.3 e 5.4, estão desenhados os conjuntos críticos e suas imagens. Em cada quadrante do domínio, indicamos o sinal do determinante da Jacobiana de  $F^h$ , e em cada componente conexa de  $\mathbb{R}^2 \setminus F^h(\mathcal{C})$  o número de pré-imagens.

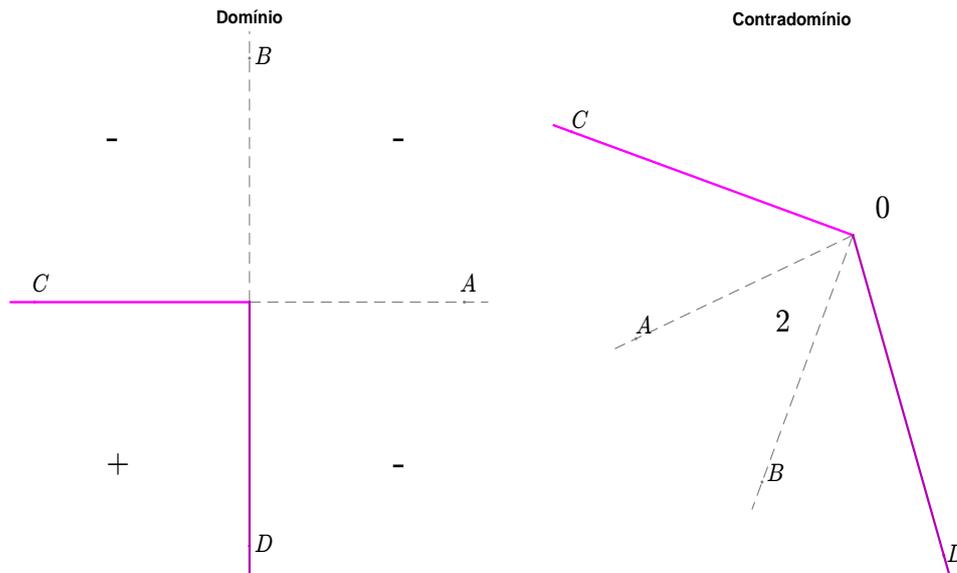


Figura 5.3:  $\mathcal{C}$  e  $F^h(\mathcal{C})$  para  $\ell_- = -1$  e  $\ell_+ = 2$ , .

O conjunto crítico, na figura 5.3 é a união de dois semi-eixos (rosa e roxo). Os demais semi-eixos estão tracejados, marcados para ressaltar que  $F^h$  é definida em cada um dos quadrantes por fórmulas diferentes. O conjunto crítico está na fronteira de quadrantes adjacentes que têm determinantes das

Jacobianas com sinais opostos. Na figura 5.4, o conjunto crítico é formado pela união de todos os semi-eixos (vermelho, laranja, rosa e roxo).

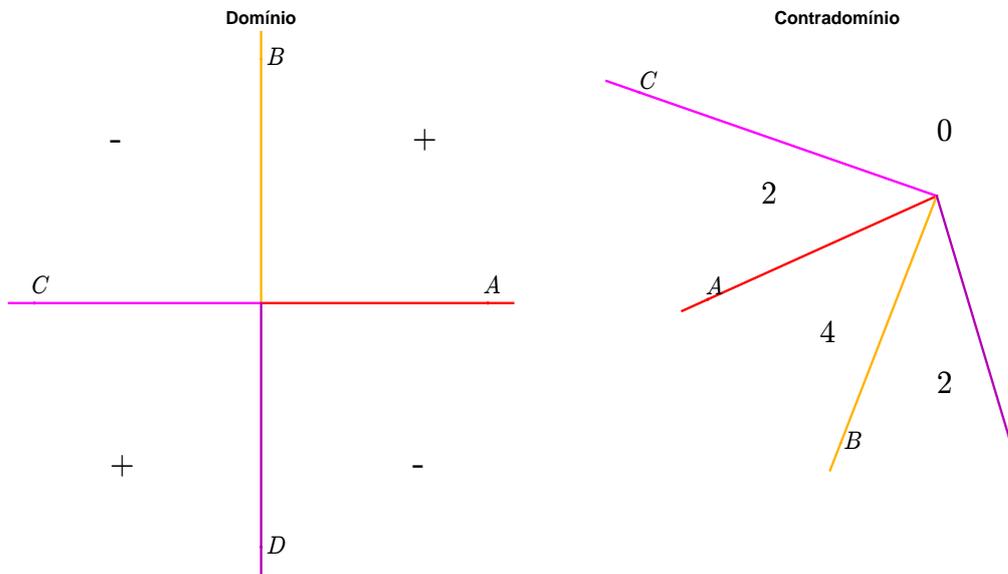


Figura 5.4:  $\mathcal{C}$  e  $F^h(\mathcal{C})$  de  $F^h$  para  $\ell_- = -1$  e  $\ell_+ = 4$ .

Vamos descrever o algoritmo para os valores  $\ell_- = -1$ ,  $\ell_+ = 4$ . Começamos com a solução positiva  $P_0 \approx (280.4396, 280.4396)$ . Traçamos uma semirreta  $r = \{P_0 + s(0.2 \sin(2I_h) - 0.8 \sin(I_h)), \text{ com } s \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$  por  $P_0$  e identificamos os pontos críticos de  $F^h$  que estão em  $r$ :  $a$  e  $c$ . Para que  $r$  defina um grafo genérico, as interseções de  $r$  com os hiperplanos coordenados devem ter somente uma coordenada nula, o que de fato acontece: a parcela envolvendo o segundo autovetor  $\sin(2I_h)$  serve para isso. Construimos uma componente do fecho espelhado de  $r$ , seguindo com dois ‘ramos’ diferentes a partir de cada um dos pontos críticos encontrados. Os ramos são obtidos pela resolução de sistemas lineares.

Na figura 5.5, os segmentos  $[P_0, a)$  (em verde) e  $(a, c)$  (em azul e cinza) estão contidos em  $r$  e neles os sinais são da forma  $s_I = (+, +)$  e  $s_{IV} = (+, -)$ . O ponto  $a$  é uma dobra com segunda coordenada nula. Para obter um grafo espelhado perto de  $a$ , encontramos  $(a, P_1]$  (em verde), no quarto quadrante (invertendo o sistema associado aos sinais  $s_{IV} = (+, -)$ ),  $P_1 \approx (463.7124, -156.9422)$ . Para completarmos o espelhamento em  $a$ , escrevemos o problema como uma homotopia e o resolvemos como uma família de sistemas lineares  $F^h(u^h(t)) = \gamma(t)$ , com  $F^h$  definida a partir de  $s_I = (+, +)$  e  $\gamma(t)$  uma parametrização de  $F((a, c))$ . Pela estrutura do conjunto crítico de  $F^h$ ,



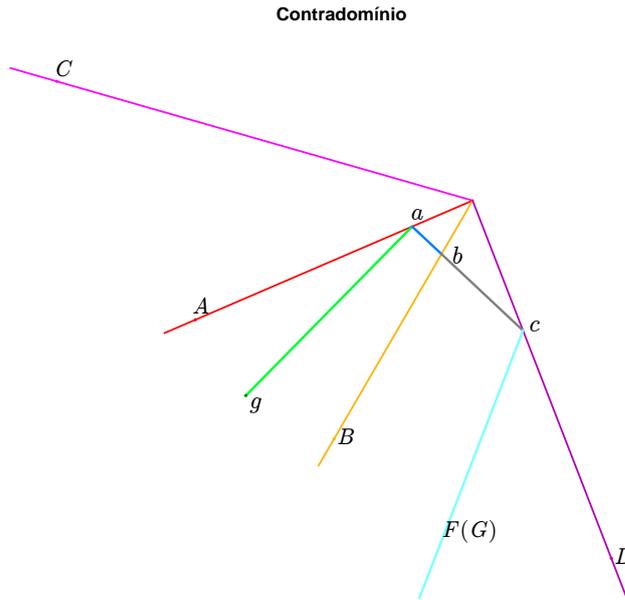


Figura 5.6:  $F(G) = F(r)$ .

Para finalizarmos os exemplos em dimensão 2, consideramos os seguintes dados na figura 5.7:  $\ell_- = -1$ ,  $\ell_+ = 4$ ,  $P_0 \approx (-156.9422, 463.7124)$  e  $r = \{P_0 + s(\text{sen}(2I_h) + 0.1 \text{sen}(I_h)), \text{ com } s \geq 0\} \subset \mathbb{R}^2$ . Para a construção do grafo espelhado a partir dos pontos críticos  $a$  e  $b$  que pertencem a  $r$ , seguimos com ramos nos ortantes adjacentes. Pela resolução dos sistemas lineares de forma direta, encontramos  $P_1 \approx (280.4396, 280.4396)$  e  $P_2 \approx (463.7124, -156.9422)$ . Nesse exemplo, ressaltamos que mesmo após a realização do espelhamento, cada ponto crítico contribui para a obtenção de 1 pré-imagem, diferente da figura 5.5. Esse fato pode ser melhor compreendido nas figuras 5.6 e 5.8, note que, na primeira o ponto  $a$  encontra-se ‘suficientemente próximo’ à imagem de uma singularidade mais profunda, o que não ocorre na segunda figura. Observe também, na figura 5.7 que a geometria da flor  $F^{-1}(F(C))$  (retas tracejadas em laranja e vermelho unidas com os semi-eixos) funciona como uma ‘fronteira’ para chegarmos à última pré-imagem  $P_3 \approx (-452.9681, -452.9681)$ , tornando necessário o processo de extensão do grafo.

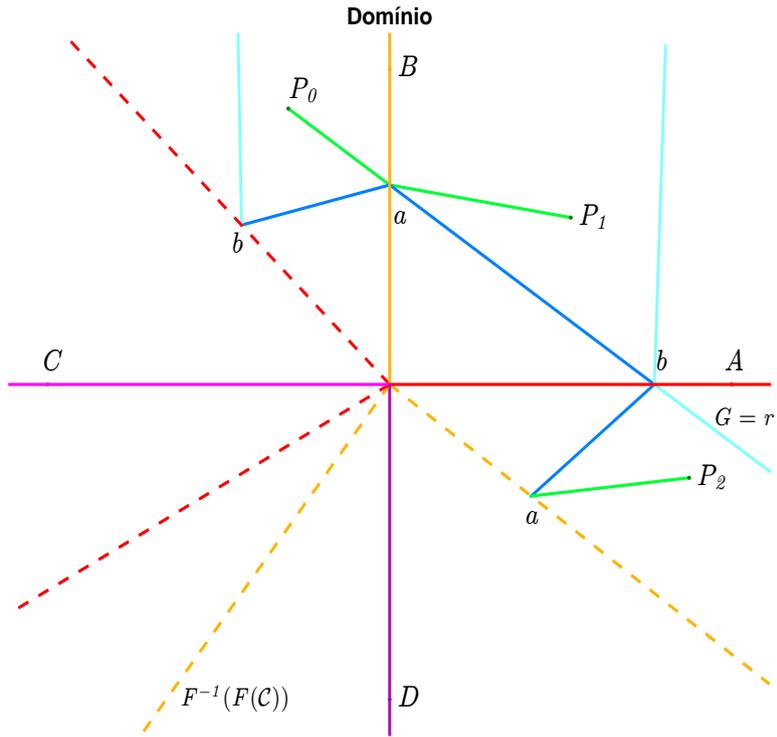


Figura 5.7: O grafo espelhado associado à semirreta  $r = \{P_0 + s(\text{sen}(2I_h) + 0.1 \text{sen}(I_h)), \text{ com } s \geq 0\}$ .

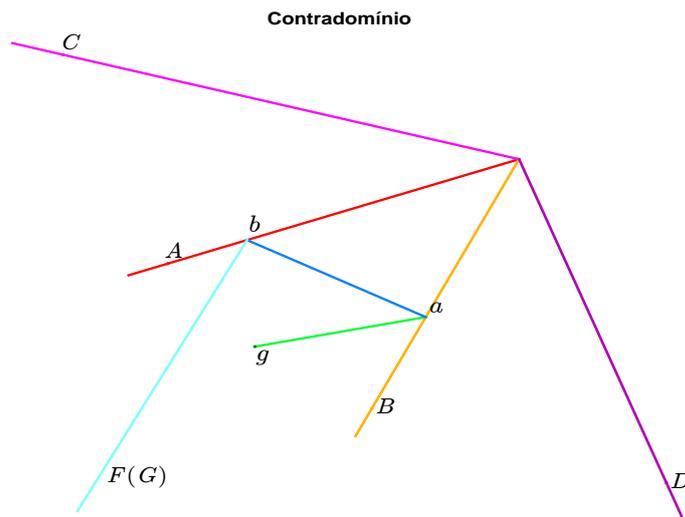


Figura 5.8:  $F(G) = F(r)$ .

### 5.4.2

#### O primeiro caso em $\mathbb{R}^{15}$ , $k = 4$

Retornamos, agora, à construção de grafos espelhados para a resolução de  $F^h(u^h) = g^h$  para  $n = 15$ . A primeiro momento, consideramos  $k = 4$  e na Seção seguinte  $k = 8$ . Para este primeiro caso, além de construirmos os grafos espelhados para o cálculo das soluções de 5-2, realizamos a comparação com as soluções obtidas pelo método do tiro e por Teles-Tomei.

Os parâmetros assintóticos são:  $\ell_- = 0.4984$  e  $\ell_+ = 19.1248$ . Iniciamos a busca por soluções a partir da solução positiva  $P_0 = 55.1633 \text{sen}(I_h)$ . A semirreta  $r = \{P_0 + s(0.1 \text{sen}(4I_h) + 0.1 \text{sen}(3I_h) + 0.1 \text{sen}(2I_h) - \text{sen}(I_h)), \text{ com } s \geq 0\} \subset \mathbb{R}^{15}$  por  $P_0$  define um grafo genérico  $G = r$ . A semirreta intercepta o conjunto crítico  $\mathcal{C}$  de  $F^h$  em 4 hiperplanos coordenados, em pontos em que alguma coordenada é zero.

A figura 5.9 representa o domínio da função e as cinco componentes conexas do complemento de  $\mathcal{C}$ . Em pontos nas mesmas componentes regulares, as matrizes  $A^h - D^O$  têm o mesmo número de autovalores negativos, ainda que os pontos não estejam no mesmo ortante. A construção do fecho espelhado de  $G$  nos leva às 7 pré-imagens restantes.

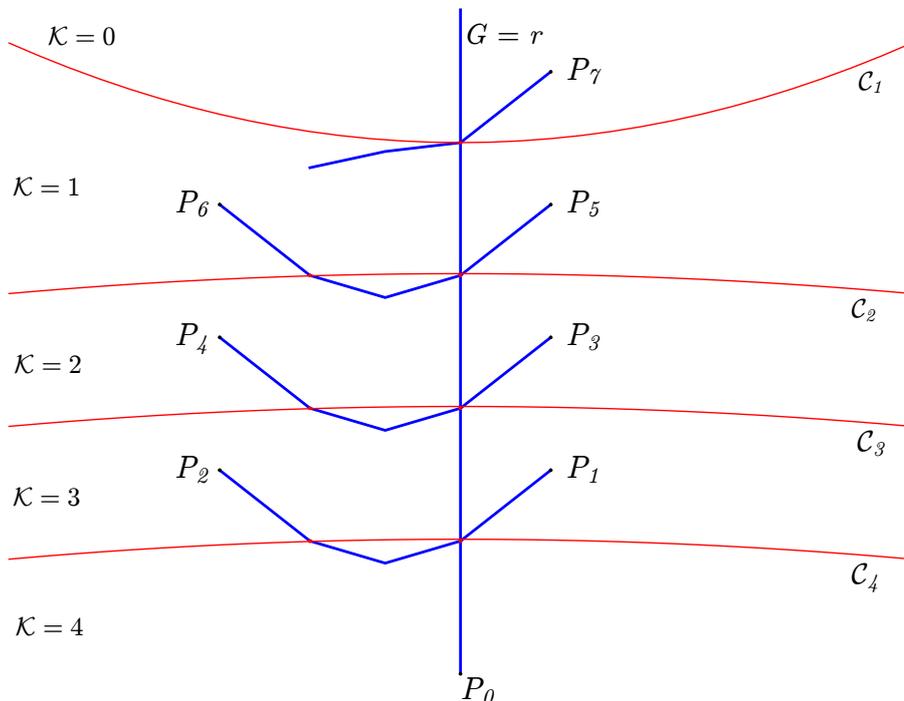


Figura 5.9: Grafo completamente espelhado para  $k = 4$ .

Em dimensão um (isto é, para problemas de Sturm-Liouville), a clássica teoria de oscilação ([11]) para o problema contínuo informa que os autovetores associados a pontos críticos na componente  $\mathcal{C}_k$  têm  $k - 1$  zeros no interior do intervalo  $(0, \pi)$ . Um resultado equivalente vale para a versão discretizada – zeros dos autovetores são substituídos por trocas de sinal ([14]). Em dimensão mais alta (trocando segundas derivadas pelo Laplaciano, por exemplo), esse indexador  $\mathcal{K}$ , constante em componentes conexas do complemento de  $\mathcal{C}_k$ , é substituído pelo índice de Morse, o número de autovalores negativos da Jacobiana, que no problema de interesse é  $A^h - D^O$ . Acima de  $\mathcal{C}_1$ , as Jacobianas são matrizes positivas definidas e para pontos entre  $\mathcal{C}_k$  e  $\mathcal{C}_{k+1}$ , têm  $k$  autovalores negativos.

Como previsto pela teoria [12], associadas aos índices de Morse extremos, 0 e 4, existe uma solução para cada índice. Cada outro índice tem duas pré-imagens.

O conhecimento prévio do número de pré-imagens nos permite encerrar o algoritmo não havendo a necessidade de estender o grafo.

O fato que são esperadas  $2k$  soluções para  $k$  pequeno deve ser comparado com o exemplo da figura 3.2. Naquele caso, o número de soluções é da forma  $k + \text{const}$ . A diferença entre as duas situações deve-se à presença de singularidades mais profundas no exemplo dessa seção, em oposição à presença exclusiva de dobras no exemplo da seção anterior. De fato, o grafo completamente espelhado costuma gerar pré-imagens adicionais já no caso em que  $n = 2$  na proximidade de uma cúspide, como se verifica no exemplo da Seção 2.2. O programa original, 2x2, identificava singularidades mais profundas no contexto  $n = 2$ . Isso não é realista em dimensão mais alta, mas o algoritmo ainda assim alcança outras soluções pelo efeito dessas singularidades sobre a geometria da função.

Na figura 5.4, apresentamos graficamente as soluções. Em cada um dos gráficos comparamos as soluções obtidas pelo método do tiro, pelos grafos espelhados e por Teles-Tomei [28].

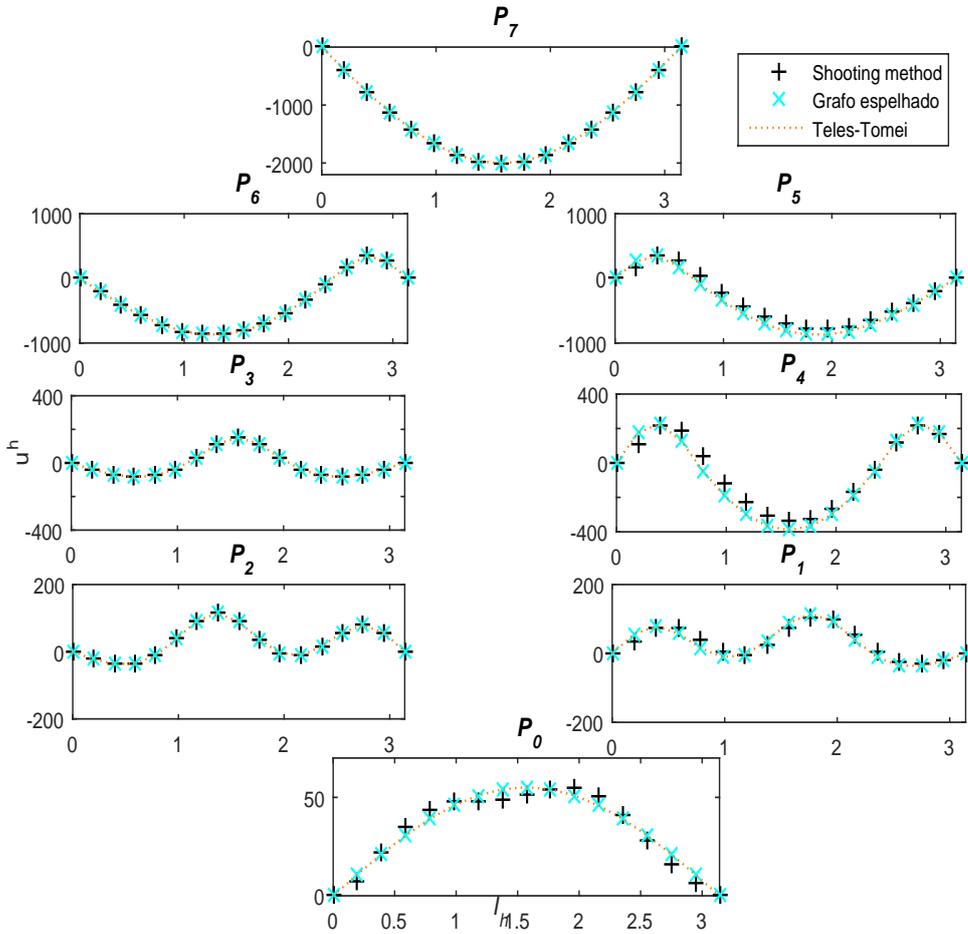


Figura 5.10: Comparando soluções

Na figura abaixo, plotamos o erro  $\delta^h$ . Tomamos como referência ( $u^h$ ) as soluções obtidas por Teles-Tomei.

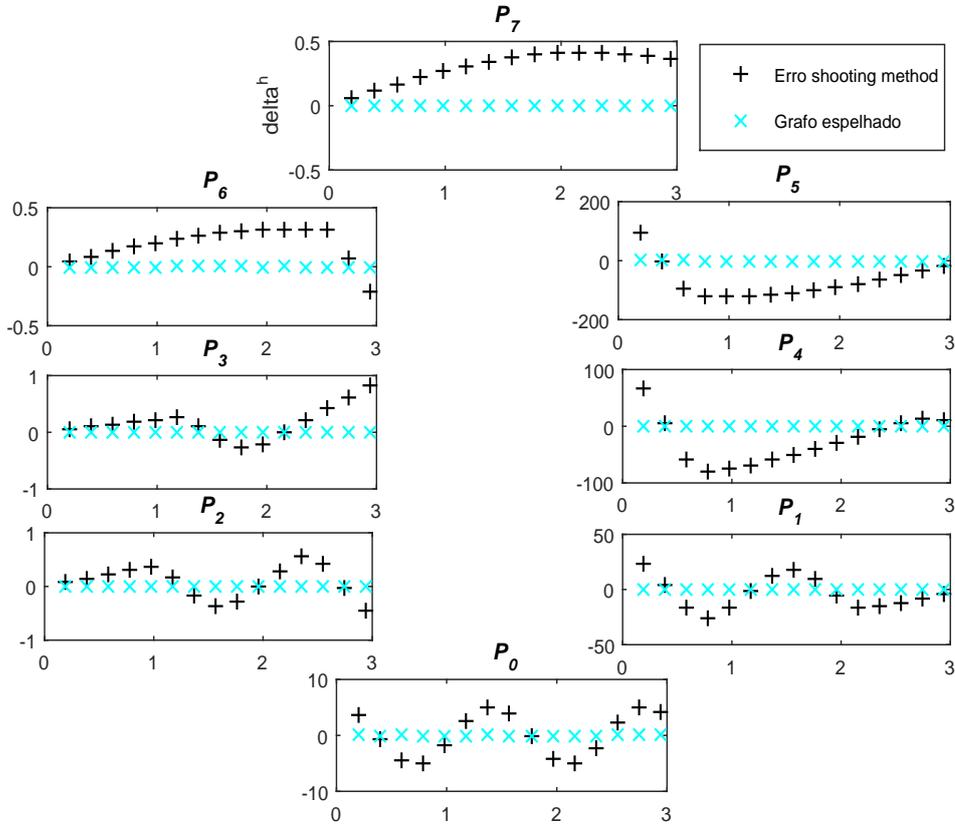


Figura 5.11: Erro relativo sobre cada ponto da malha.

A propagação crescente do erro do método de tiro é previsível. As soluções encontradas pela construção do grafo completamente espelhado são obtidas pela resolução dos sistemas lineares de forma direta (decomposição LU), enquanto pelo método do tiro são obtidas recursivamente, coordenada a coordenada.

Para uma solução  $u_s^h$  aproximada pelo método de tiro e  $u^h$  a solução exata do sistema linear em um determinado ortante, vamos considerar os erros  $\delta^h = (\delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n) = u_s^h - u^h$  e os resíduos  $\epsilon^h = (\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_n) = F^h(u_s^h) - g^h$ . Pela linearidade, o erro satisfaz as equações do sistema de diferenças  $F^h(\delta^h) = (A^h - D^O)\delta^h = \epsilon^h$ . Assim, um erro  $\delta_1$  e resíduo  $\epsilon_1$  que se propaga como

$$\delta^h = (\delta_1, \delta_1(2 - h^2 f) - h^2 \epsilon_1, \delta_1[(2 - h^2 f)(2 - h^2 f) - 1] - h^2[\epsilon_2 + (2 - h^2 f)\epsilon_1], \dots),$$

e as potências sucessivas de  $(2 - h^2 f)$  podem ser problemáticas. Aqui,  $f$

corresponde a multiplicar por um dos parâmetros,  $\ell_-$  ou  $\ell_+$ , cujos valores podem variar muito.

Voltando à figura 5.11, os erros para as soluções  $P_2, P_3, P_6$  e  $P_7$ , para as quais  $\delta_1$  é bem inferior ao demais.

### 5.4.3

#### O caso $k = 8$

Para  $k = 8$ , tomamos os parâmetros  $\ell_- = 0.4984$  e  $\ell_+ = 56.9367$ . Neste caso, iniciamos o algoritmo de uma forma diferente. Sorteamos vetores nos  $2^{15}$  ortantes e tentamos resolver os sistemas lineares  $(A^h - D^o)x = g^h$  até encontrarmos uma primeira solução  $P_0$ . Especificamente, a realização de 127 sorteios nos levou à primeira pré-imagem  $P_0$ , na componente em que  $\mathcal{K} = 5$ . A partir desta solução, construímos sobre a reta  $r_1 = \{P_0 + s(-0.8 \text{sen}(I_h) + 0.1 \text{sen}(2I_h) + 0.1 \text{sen}(3I_h) + 0.1 \text{sen}(4I_h) + 0.1 \text{sen}(5I_h) + 0.1 \text{sen}(6I_h) + 0.1 \text{sen}(7I_h) - 0.1 \text{sen}(8I_h))\}$  o grafo genérico  $G = r$ , representado na figura 5.12 pelas semirretas em azul ( $s \geq 0$ ) e verde ( $s \leq 0$ ).

Na figura 5.12, obtemos o fecho espelhado de  $G$ . Aparentemente, 18 pré-imagens foram encontradas.

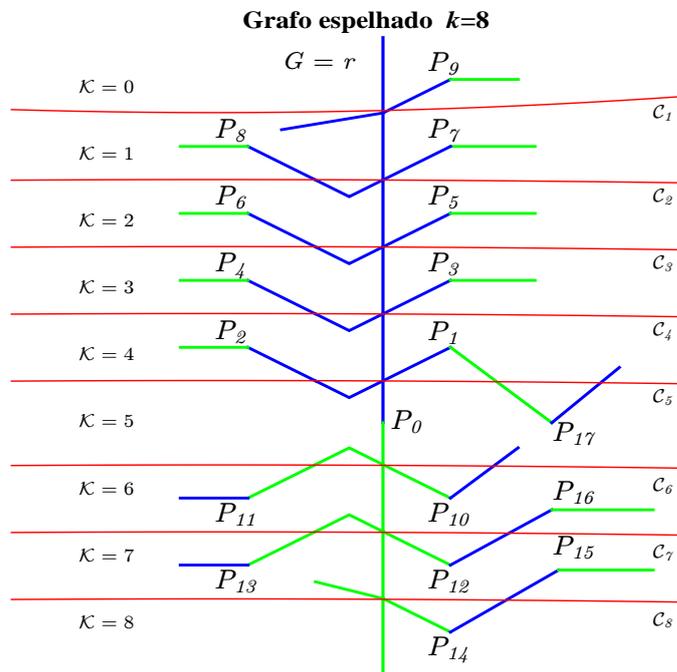


Figura 5.12: Grafo espelhado

Na tabela a seguir, calculamos o resíduo relativo de cada das solução.

Soluções	Resíduo relativo
$P_1$	$3.8185 \cdot 10^{-15}$
$P_2$	0.0650
$P_3$	0.4939
$P_4$	0.6504
$P_5$	0.8750
$P_6$	0.9985
$P_7$	$6.3948 \cdot 10^{-15}$
$P_8$	$7.1942 \cdot 10^{-15}$
$P_9$	$9.2107 \cdot 10^{-15}$
$P_{10}$	0.6059
$P_{11}$	0.9169
$P_{12}$	$1.2344 \cdot 10^{-15}$
$P_{13}$	1.5466
$P_{14}$	$1.1042 \cdot 10^{-15}$
$P_{15}$	$5.6410 \cdot 10^{-15}$
$P_{16}$	$2.6510 \cdot 10^{-15}$
$P_{17}$	$5.6787 \cdot 10^{-15}$

Tabela 5.1: Erros relativos das 18 soluções encontradas.

Os resíduos grandes de algumas falsas soluções se devem à inversão de matrizes com autovalores próximos de zero para  $(A^h - D^o)$  em diversos ortantes, o que evidencia o mau-condicionamento dos sistemas lineares no processo de homotopia. Para algumas dessas soluções, podemos calcular os erros relativos tomando Teles-Tomei como referência ainda que seja difícil associar em geral uma solução encontrada em Teles-Tomei com alguma encontrada pelos grafos espelhados.

Assim, consideramos como soluções no grafo da figura 5.12 apenas aquelas que apresentam resíduos pequenos. Apenas 10 soluções atendem esse critério, veja figura 5.13.

Na figura 5.13, estendemos o fecho espelhado de  $G$  pelo sorteio de mais vetores até obtermos uma nova pré-imagem  $P_{10}$ . Um novo grafo genérico  $\tilde{G}$  é construído sobre a reta  $r_2 = \{P_{10} + s(\text{sen}(8I_h) - \text{sen}(I_h))\}$ , em rosa e roxo na figura 5.13. Completamos o espelhamento de  $\tilde{G}$  e 4 novas soluções são encontradas, além de  $P_{10}$ . Novamente, realizamos a contagem desconsiderando soluções com erro relativo grande.

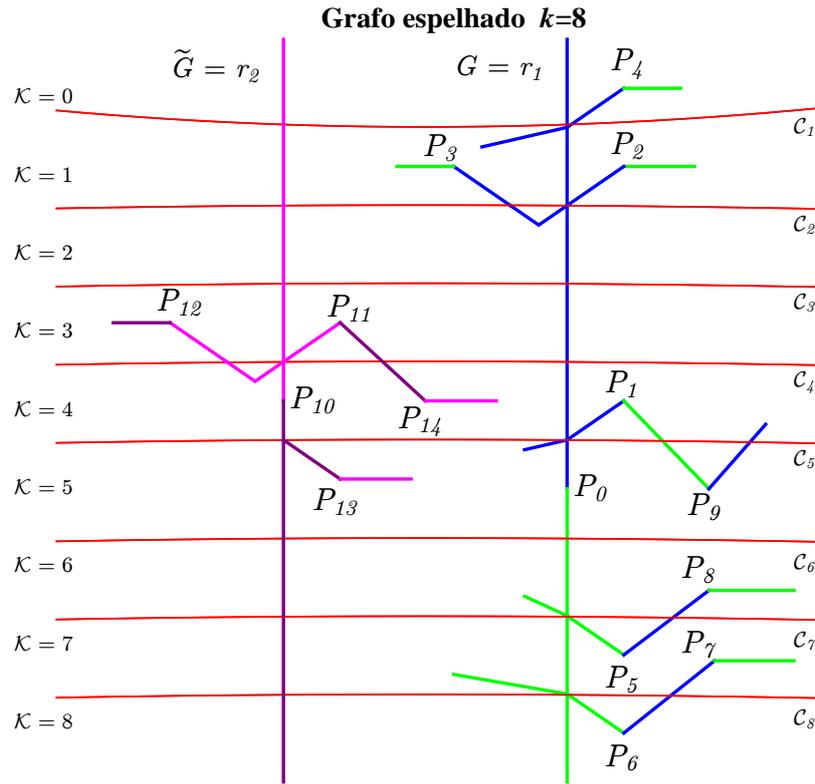


Figura 5.13: Grafo espelhado

Em duas etapas, encontramos 15 soluções diferentes pela construção do grafo completamente espelhado. Mais três novos sorteios de vetores e a extensão dos grafos já construídos nos levam às 24 soluções em Teles-Tomei. A distribuição das pré-imagens em cada componente conexa do complemento do conjunto crítico encontra-se na tabela abaixo.

Número de autovalores negativos ( $\mathcal{K}$ )	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de pré-imagens ( $N(g^h)$ )	1	2	2	4	6	4	2	2	1

Tabela 5.2: Soluções nas componentes do complemento de  $\mathcal{C}$ .

## 6

### Perturbações semi-lineares do Laplaciano

Nesse capítulo, apresentamos um experimento numérico sobre a multiplicidade de soluções de perturbações não-lineares do Laplaciano, ratificados por resultados teóricos. A discretização do operador é realizada por elementos finitos.

Novamente, queremos as pré-imagens de um ponto  $g \in Y$  por uma dada função  $F : X = H_0^1(\Omega) \rightarrow Y = H^{-1}(\Omega)$ .

#### 6.1

##### O operador

Como na Seção 4.2, consideramos a equação

$$F(u) = -\Delta u - f(u) = g, \quad \text{com } u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (6-1)$$

O conjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  é limitado, conexo e com fronteira suave por partes. Assumimos que  $F$  seja  $C^1$ . A não-linearidade é tal que  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é suave e  $f'(\mathbb{R}) \subset [\ell_-, \ell_+]$ .

Para a condição de Dirichlet, o Laplaciano  $-\Delta : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  é autoadjunto com autovalores,  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots \rightarrow \infty$  e correspondentes autovetores  $\phi_k$ ,  $-\Delta_k \phi_k = \lambda_k \phi_k$ .

A linearização  $DF(u_i) : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$  de  $F$  em  $u_i$  que é dada por:

$$DF(u_i)\hat{u} = -\Delta\hat{u} - f'(u_i)\hat{u},$$

e também é autoadjunta. Denotamos seus autovalores por  $\mu_k$  e correspondentes autovetores  $\hat{\phi}_k(DF(u_i)\hat{\phi}_k = \mu_k\hat{\phi}_k)$ . Associamos esses fatos teóricos descritos com a discretização do operador  $F$  (seção 6.2) na aplicação de nosso algoritmo.

#### 6.2

##### Discretização por elementos finitos

Para obter as equações discretas, decompomos o domínio  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  em triângulos (elementos) com vértices internos  $\eta_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Consideramos o espaço de dimensão finita  $\mathcal{P}_1$  [10], gerado pelas funções  $\psi_i^h$ , lineares em cada elemento e contínuas em  $\Omega$ , definidas por  $\psi_i^h(\eta_j) = \delta_{ij}$ .

Seja  $X^h = \mathcal{P}_1 \subset H_0^1(\Omega)$ . Qualquer função  $u^h \in X^h$  é da forma  $u^h(x) = \sum_{i=1}^n \underline{u}_i \psi_i^h(x)$ . As coordenadas do vetor  $\underline{u} = (\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n) \in \mathbb{R}^n$  são avaliações de  $u^h$  nos vértices ( $\underline{u}_i = u^h(\eta_i)$ ), assim, a identificação entre  $u^h$  e  $\underline{u}$  ocorre de forma única.

Funções em  $Y \subset H^{-1}(\Omega)$  também podem ser aproximadas por elementos  $\mathcal{P}_1$  [9], mas com funções de base apropriadas. Uma função  $g^h \in Y^h$  pode ser escrita por  $g^h(x) = \sum_{i=1}^n \bar{g}_i l_i^*(x)$ . As componentes do vetor  $\bar{g} = (\bar{g}_1, \dots, \bar{g}_n)$  são os valores dos funcionais  $l_j(g^h) = \langle g^h, \psi_j^h \rangle = \bar{g}_j$ . As bases duais em  $Y^h$  são  $l_i^*$ ,  $i = 1, \dots, n$ , definidas por  $l_j(l_i^*) = \delta_{ij}$ .

Dado  $g^h \in Y^h$ , uma solução fraca  $u^h \in X^h$  associada ao problema discreto  $F^h : X^h \rightarrow Y^h$  e que atenda as condições de Dirichlet satisfaz

$$\langle F^h(u^h), \psi_j^h \rangle = \langle -\Delta u^h, \psi_j^h \rangle - \langle f(u^h), \psi_j^h \rangle = \langle g^h, \psi_j^h \rangle, \quad \forall \psi_j^h \in X^h.$$

De forma mais direta, escrevemos as equações em termos do vetor  $\underline{u}$ : para isso, consideramos as matrizes habituais de rigidez  $K$  e massa  $M$ . Ambas são  $n \times n$ , simétricas e positivas definidas. Suas entradas são

$$K_{ij} = \langle \nabla \psi_i^h, \nabla \psi_j^h \rangle, \quad M_{ij} = \langle \psi_i^h, \psi_j^h \rangle.$$

A matriz de massa realiza a mudança de coordenadas  $\bar{g} = M\underline{g}$ . Assim, supondo  $f(u^h) \in \mathcal{P}_1$ , resolver o problema discreto  $F^h(u^h) = g^h$  é equivalente à resolver o sistema

$$K\underline{u} - Mf(\underline{u}) = \bar{g},$$

sendo  $f(\underline{u}) = (f(\underline{u}_1), \dots, f(\underline{u}_n))^T$ .

### 6.2.1

#### Aproximando os autovalores para a linearização de $F$

No algoritmo, precisamos identificar pontos críticos de  $F$  numa curva  $c \subset X$ . Determinamos esses pontos pela variação do número de autovalores negativos ao longo de  $c$ .

Usamos a construção das matrizes fundamentais (rigidez e massa) obtidas pelo método de elementos finitos para aproximar com boa precisão os  $k$  primeiros autovalores pelo método de Rayleigh-Ritz ([23], [5]). É fundamental o uso de malhas finas para esses cálculos. Aproximamos os autovalores do

Laplaciano pelo problema de autovalor generalizado,

$$K\underline{\phi}^h = \lambda^h M\underline{\phi}^h \quad \langle \underline{\phi}^h, \underline{\phi}^h \rangle_{X^h},$$

e da linearização de  $F$ , que também é autoadjunta, por,

$$(K - M(f'(\underline{u}_i)))\hat{\underline{\phi}}^h = \mu^h M\hat{\underline{\phi}}^h, \quad \langle \hat{\underline{\phi}}^h, \hat{\underline{\phi}}^h \rangle_{X^h}$$

para cada ponto  $\underline{u}_i$  sobre a reta  $r \in X$ . Estes sistemas lineares são resolvidos por métodos tradicionais. Usando a caracterização min-max dos autovalores, o método de Rayleigh-Ritz, não só fornece boas aproximações mas também cotas superiores para os autovalores, isto é,  $\lambda_k \leq \lambda_k^h$  e  $\mu_k \leq \mu_k^h$  para todo  $k = 1, \dots, n$ .

Consideramos a seguir um cenário especial da construção de grafo completamente espelhado para obter soluções de 6-1.

### 6.3

#### Uma situação estudada por Solimini

Como no Capítulo anterior, considere  $g = -t\phi_1$ . Em [17], Lazer e McKenna conjecturaram que para  $f$  assintoticamente linear e  $\ell_- < \lambda_1$  e  $\lambda_k < \ell_+ < \lambda_{k+1}$  com  $k \in \mathbb{N}$ , contando a multiplicidade, existem pelo menos  $2k$  soluções da equação (6-1) para  $t$  muito grande, o que foi desmentido por Dancer ([18]). Entretanto, um caso particular com hipóteses adicionais foi provado por Solimini [26]: se existe  $\epsilon > 0$ , tal que  $\lambda_3 < \ell_+ < \lambda_3 + \epsilon < \lambda_4$  e  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$  autovalores simples, a equação (6-1) tem *exatamente* 6 soluções para  $t$  muito grande.

Consideramos um anel  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1 \text{ e } |x - (-0.3, -0.3)| > 0.2\}$  e uma aproximação com 274 triângulos.

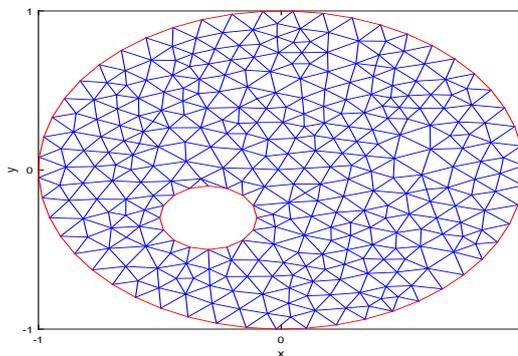


Figura 6.1: A malha de  $\Omega$ .

Os primeiros autovalores aproximados do Laplaciano para essa geometria são simples:  $\lambda_1^h \approx 9.0988$ ,  $\lambda_2^h \approx 16.3218$ ,  $\lambda_3^h \approx 22.9346$  e  $\lambda_4^h \approx 30.4949$ . A não linearidade é uma função convexa escolhida de tal forma que para constantes  $\alpha$  e  $\beta$ ,  $f'(x) = \alpha \arctan(x) + \beta$  interaja com os 3 primeiros autovalores do Laplaciano.

Queremos inverter o ponto  $g^h = -1000\phi_1^h$ . A primeiro momento, encontramos uma solução  $P_0$  pelo método habitual de continuação. A partir desta, o grafo genérico  $G$  é definido pela discretização da reta  $r = \{P_0 + s(-0.8\phi_1^h + 0.1\phi_2^h + 0.1\phi_3^h), s \in \mathbb{R}\}$  sobre a malha uniforme  $I_s$ . A malha tem como extremos  $-1000$  e  $1000$  e o incremento  $h_s = 0.1$ .

Os 4 primeiros autovalores da Jacobiana para cada ponto de  $r$  são apresentados na figura 6.2. Pontos críticos são identificados pela variação do número de autovalores negativos,  $\mathcal{K}$ , da Jacobiana nos pontos da reta. O ponto  $P_0$  encontra-se em uma componente com  $\mathcal{K} = 2$ . Os trechos em azul e verde correspondem às duas semirretas que saem de  $P_0$ , azul para  $s \geq 0$  e verde para  $s \leq 0$ , como na figura 6.3.

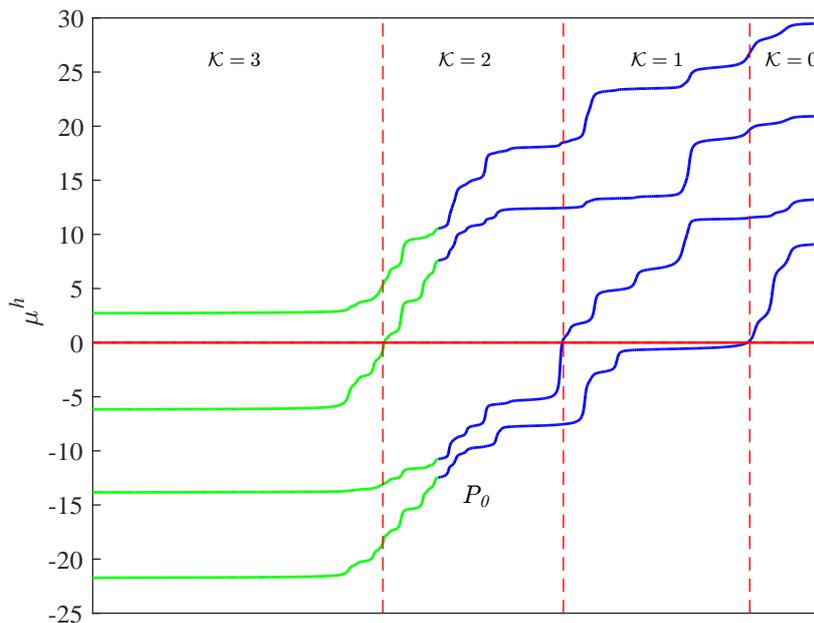


Figura 6.2: Os 4 primeiros autovalores da Jacobiana para os pontos de  $r$ .

Na figura 6.3, construímos o fecho espelhado de  $G = r$ . Perto do ponto crítico  $a$ , a inversão da curva  $F([P_0, a])$  ocorre como o esperado gerando uma

nova pré-imagem  $P_1$ . Entretanto, quando tentamos completar o espelhamento sobre este ponto, uma dificuldade numérica se faz presente: o incremento  $s = 0.1$  utilizado na discretização de  $[a, b]$  não foi adequado para garantir as condições de convergência esperadas. Veja na figura 6.3, onde temos apenas uma solução na componente em que  $\kappa = 1$ . Um ajuste desse parâmetro contorna essa dificuldade e nos leva as 6 pré-imagens previstas.

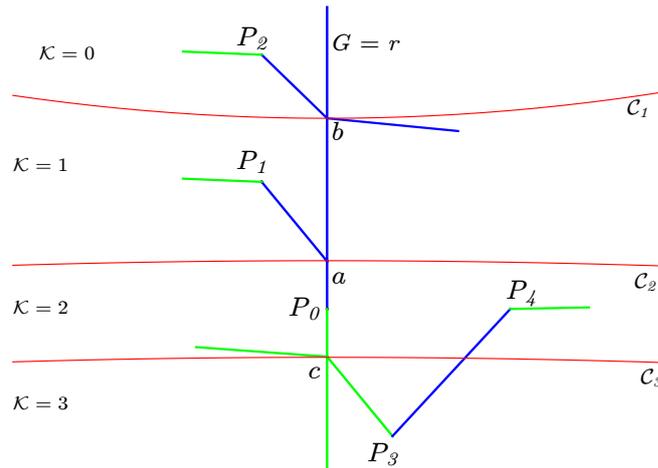


Figura 6.3: 5 pré-imagens encontradas.

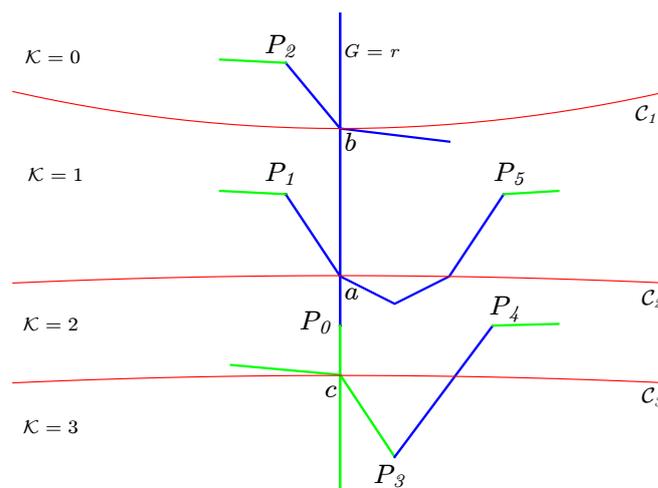
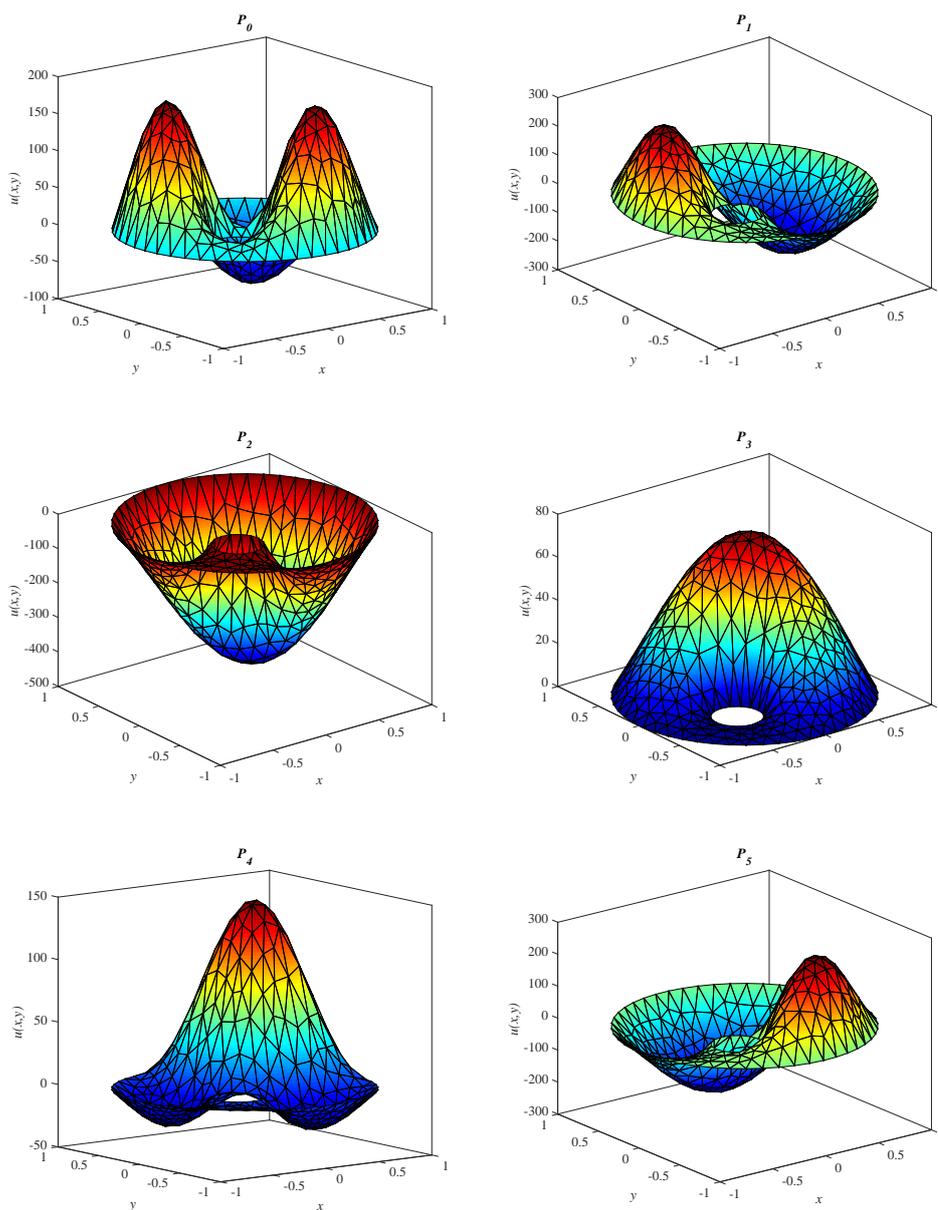


Figura 6.4: Grafo espelhado com as 6 pré-imagens encontradas.



PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1621747/CA

Figura 6.5: As 6 soluções encontradas.

O resíduo relativo para cada solução calculado por  $\epsilon(u^h) = \frac{\|F^h(u^h) - g^h\|_{Y^h}}{\|g^h\|_{Y^h}}$  é mostrado na tabela a seguir.

Soluções	Resíduo relativo
$P_0$	$9.6791 \cdot 10^{-15}$
$P_1$	$4.3516 \cdot 10^{-13}$
$P_2$	$9.6851 \cdot 10^{-14}$
$P_3$	$4.3993 \cdot 10^{-15}$
$P_4$	$6.4286 \cdot 10^{-15}$
$P_5$	$1.7224 \cdot 10^{-14}$

Tabela 6.1: Resíduos relativos

## 6.4

### Considerações finais

Para os exemplos apresentados, o método descrito obteve resultados satisfatórios no sentido que encontramos o número de soluções previstas. O algoritmo parte de uma pré-imagem conhecida  $P_0$  em busca de outras, em cada exemplo foi apresentado um caminho diferente de calcular  $P_0$ .

As buscas unidimensionais realizadas pelo algoritmo nos levou a um novo conceito matemático o de grafos completamente espelhados. De forma concisa esse novo objeto descreve topologicamente as etapas realizadas pelo algoritmo.

O estudo prévio sobre cada uma das funções e seus conjuntos críticos nos conduziu à escolha de curvas no domínio favoráveis à obtenção componentes conexas contendo diversas pré-imagens. A presença de singularidades profundas e a geometria do conjunto crítico da função mostrou ser responsável pela abundância de pré-imagens de certos pontos.

## 7

### Apêndice

#### 7.1

##### Alguns aspectos topológicos e funções próprias

**Definição 7.1** Uma função  $F : X \rightarrow Y$  é um homeomorfismo local quando para cada ponto  $u \in X$ , existe um aberto  $U$  tal que  $V = F(U)$  é aberto em  $Y$  e  $F : U \rightarrow V$  é um homeomorfismo.

**Lema 7.2** Se  $F : X \rightarrow Y$  é uma função contínua localmente injetiva (em particular, um homeomorfismo local), então a imagem inversa  $N(g) = F^{-1}(g)$  de cada ponto  $g \in Y$  é um subconjunto discreto de  $X$ .

*Demonstração.* Por hipótese, para cada ponto  $u \in N(g)$  existe uma vizinhança  $U$ , na qual ele é o único ponto que é levado por  $F$  a  $g$ . Então  $U \cap F^{-1}(g) = \{u\}$ . Isto é, todo ponto  $u \in N(g)$  é isolado em  $N(g)$ .  $\square$

Um corolário do lema acima é que, se  $X$  é um compacto, então o número de pré-imagens  $F^{-1}(g)$  é finito para cada  $g \in Y$ . Uma classe de funções especiais, em que a cardinalidade do conjunto de pré-imagens é finita, são as funções próprias e que são homeomorfismos locais.

**Definição 7.3** Uma função  $F : X \rightarrow Y$  é própria se a inversa  $F^{-1}(K)$  de um compacto  $K \subset Y$  é um compacto em  $X$ . Em dimensão finita isto é equivalente a dizer que  $F$  leva infinito a infinito,

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \|F(u)\| = \infty .$$

Uma função própria  $F : X \rightarrow Y$  é fechada, no sentido que para todo subconjunto fechado  $W \in X$ , sua imagem  $F(W)$  é fechada em  $Y$ .

**Proposição 7.4** Seja  $F : X \rightarrow Y$  uma função própria, contínua e que é um homeomorfismo local. Então, a função  $g \mapsto N(g) = F^{-1}(g)$  é finita e localmente constante.

*Demonstração.* Pelo lema 7.2, para todo  $g \in Y$  temos que  $N(g)$  é discreto. Por hipótese,  $N(g)$  é compacto, uma vez que  $F$  é própria, logo  $N(g)$  é finito.

Podemos escrever:

$$N(g) = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}.$$

Como  $F$  é homeomorfismo local, para cada  $u_i$  com  $1 \leq i \leq m$ , existem abertos  $U_i \subset X$  e  $V \subset Y$ , tal que  $F : U_i \rightarrow V$  é um homeomorfismo. Note que, para todo  $g \in V$ ,  $N(g) \geq m$ , uma vez que a equação  $F(u) = g$  tem pelo menos  $m$  soluções, uma em cada  $U_i$ . Existe um aberto  $W \subset V$  de  $g$  tal que para todo  $w \in W$ ,  $N(w) = m$ . Se não, existiria uma sequência  $(g_n) \rightarrow g$ , com  $g_n \in V$  tal que  $N(g_n) > m$ , então existem pontos  $x_n \notin \bigcup U_i$ , com  $F(x_n) = g_n$ . Como  $F$  é própria e contínua, existe subsequência  $(x_n)_k \rightarrow x$  e  $F(x) = g$ , mas isto implicaria  $x \in U_i$  para algum  $i$ , o que contradiz  $x_n \notin U_i$ .  $\square$

Um corolário da proposição 7.4 é que se  $Y$  é conexo, então  $N(g)$  é constante.

**Proposição 7.5** *Seja  $F : X \rightarrow Y$  uma função própria e contínua, então  $N(g)$  é constante em cada placa de  $Y \setminus F(\mathcal{C})$ .*

*Demonstração.* Considere a restrição  $F : X \setminus \mathcal{F} \rightarrow Y \setminus F(\mathcal{C})$ , que é própria e inversível em todo ponto  $u \in X \setminus \mathcal{F}$  e aplique 7.4.  $\square$

**Definição 7.6** *Uma aplicação  $F : X \rightarrow Y$  é um recobrimento quando cada ponto  $g \in Y$  pertencente a um aberto  $V \subset Y$  tal que  $F^{-1}(V) = \bigcup_i U_i$  é uma união de abertos  $U_i$ , dois a dois disjuntos, cada um dos quais se aplica por  $F$  homeomorficamente sobre  $V$ .*

Uma aplicação de recobrimento  $F : X \rightarrow Y$  é um homeomorfismo local de  $X$  sobre  $Y$ .

## 7.2

### Operadores de Fredholm

**Definição 7.7** *Um operador  $F : X \rightarrow Y$  linear e limitado é um operador de Fredholm se*

1. a dimensão do núcleo de  $F$  é finita ( $\dim \text{Nuc } F < \infty$ ),
2. a dimensão do conúcleo ( $Y/\text{Im } F$ ) de  $F$  é finita ( $\dim \text{coNuc } F < \infty$ ),
3. a imagem de  $F$  é fechada em  $Y$ .

O índice de um operador de Fredholm  $F$  é definido como  $\text{ind } F = \dim \text{Nuc } F - \dim \text{coNuc } F$ .

### 7.3

#### Singularidades de Morin

Uma classificação para as singularidades de funções de  $\mathbb{R}^n$  para  $\mathbb{R}^n$  cujos operadores derivadas tem núcleo de dimensão 1 foi apresentado por Morin ([22], [21]). Por meio do teorema da função implícita, Morin escreve as singularidades na origem em coordenadas adaptadas

$$(x, y) \mapsto (x, h(x, y)), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}$$

e depois compõe com difeomorfismos adequados em torno da origem, tanto no domínio quanto na imagem [21].

**Definição 7.8** *Uma singularidade de Morin de ordem  $i$  é um ponto para o qual*

1.  $D_y h(x, y) = \dots = D_y^i h(x, y) = 0$ ,
2.  $D_y^{i+1} h(x, y) \neq 0$ ,
3. A Jacobiana  $D(D_y h, \dots, D_y^{i-1} h)(x, y)$  é sobrejetiva.

Compondo com difeomorfismos adequados no domínio e imagem, uma singularidade de Morin em dimensão  $n$  e ordem  $i$  assume a forma normal

$$(x_1, \dots, x_{n-1}, y) \mapsto (x_1, \dots, x_{n-1}, y^{i+1} + x_1 y^{i-1} + \dots + x_{i-1} y).$$

Em [21] os autores descrevem uma classificação equivalente para funções entre espaços de dimensão infinita. Seja  $F : X \rightarrow Y$  uma função suave definida entre espaços de Banach tal que  $DF(u_c)$  é um operador de Fredholm de índice 0 e com núcleo de dimensão 1. Como em dimensão finita, após a mudança de variáveis no domínio e imagem,  $F$  pode ser escrita na vizinhança de  $u_c$  em coordenadas adaptadas como

$$\tilde{F} : W \times \mathbb{R} \longrightarrow W \times \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longmapsto (x, h(x, y)).$$

e se as condições 1,2 e 3 da definição 7.8 são válidas para  $\tilde{F}$  em uma decomposição apropriada de  $W = \mathbb{R}^{i-1} \oplus \tilde{W}$ , então  $u_c$  é uma singularidade de Morin de ordem  $i$  [21].

Uma dobra é uma singularidade de Morin de ordem 1 e uma cúspide de ordem 2.

## 7.4

**Estrutura local de dobras**

Seja  $F : X \rightarrow Y$  de classe  $C^1$  e um ponto crítico  $u_c$  em que  $DF(u_c)$  é um operador de Fredholm de índice 0 com núcleo de dimensão 1. Em dimensão finita, isso quer dizer que  $X = Y = \mathbb{R}^n$  e  $DF(u_c)$  é uma matriz (quadrada) com núcleo de dimensão um.

O ponto  $u_c$  é uma *dobra* de  $F$  se existem difeomorfismos locais  $\psi$  e  $\phi$  em vizinhanças de  $u_c$  e  $F(u_c)$  tal que, próximo à origem, a função  $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$  assume a *forma normal*

$$\begin{aligned} \tilde{F} : W \times \mathbb{R} &\longrightarrow W \times \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto (x, y^2). \end{aligned}$$

para algum espaço de Banach  $W$ .

A forma normal é invariante por composição de  $F$  com difeomorfismos à esquerda e à direita ([21], [22]). A definição é conveniente para estudar o comportamento de  $F$  perto de um ponto crítico. Agora, apresentamos um critério para identificar dobras.

**Definição 7.9** *Seja  $F : X \rightarrow Y$  uma função suave. O ponto  $u_c \in X$  é uma dobra de  $F$  se e somente se valem as seguintes propriedades.*

1.  $DF(u_c)$  é um operador de Fredholm de índice 0;
2. O núcleo de  $DF(u_c)$  tem dimensão 1;
3. o conjunto crítico  $\mathcal{C}$  de  $F$  é uma variedade de codimensão 1 perto de  $u_c$ ;
4. Um gerador  $k$  do núcleo de  $DF(u_c)$  não pertence ao espaço tangente de  $\mathcal{C}$ ,  $k \notin \mathbf{T}_{u_c}\mathcal{C}$ .
5. a segunda derivada de  $F$  na direção  $k$  é tal que sua projeção nas direções transversais à imagem de  $DF(u_c)$  é diferente de zero, isto é,  $D^2F(u_c)(k, k) \notin \text{Im } DF(u_c)$ .

## 7.5

### Estrutura local das cúspides

Seja  $F : X \rightarrow Y$ , uma função suave,  $u_c$  um ponto crítico de  $F$ ,  $DF(u_c)$  um operador de Fredholm de índice 0 e núcleo de dimensão 1. O ponto  $u_c$  é uma cúspide de  $F$  se existem difeomorfismos locais  $\psi$  e  $\phi$  em vizinhanças de  $u_c$  e  $F(u_c)$  tal que, próximo a origem, a função  $\psi \circ F \circ \phi^{-1}$  assume a forma normal:

$$\begin{aligned} \tilde{F} : W \times \mathbb{R}^2 &\longrightarrow W \times \mathbb{R}^2 \\ (w, x, y) &\longmapsto (w, x, y^3 - xy), \end{aligned}$$

Uma observação mais geométrica é que, diferentemente, do que acontece na dobra (definição 7.9 item 4)- o núcleo de  $D\tilde{F}(0, 0, 0)$  é gerado pelo vetor  $k = (0, 0, 1)$  o qual pertence ao espaço tangente ao conjunto crítico em  $(0, 0, 0)$ .

O conjunto crítico da forma normal de uma cúspide  $\tilde{F}$  é  $\mathcal{C} = \{(w, x, y) \in W \times \mathbb{R}^2 : 3y^2 - x = 0\}$ , que representa um cilindro parabólico, restrito a  $\mathbb{R}^2$  corresponde a parábola  $x = 3y^2$ . Observe que, o conjunto  $\mathcal{C} \setminus W \times (0, 0)$  é formado apenas por dobras, assim cada ponto  $g \in \tilde{F}(\mathcal{C}) \setminus \tilde{F}(0, 0)$ , tem duas pré-imagens.

## Referências bibliográficas

- [1] ALLGOWER, E. L.; GEORG, K. **Numerical continuation methods: an introduction**. Springer-Verlag, New York, 1991.
- [3] AMBROSETTI, A. ; PRODI, G. **On the inversion of some differentiable mappings with singularities between Banach spaces**. Annali di Matematica Pura ed Applicata. Serie Quarta, 93:231–246, 1972.
- [4] BERGER, M. S. ; PODOLAK, E. **On the solutions of a nonlinear dirichlet problem**. Indiana University Mathematics Journal, 24:837–846, 1974/75.
- [5] BOFFI, D.. **Finite element approximation of eigenvalue problems**. Acta Numerica, p. 1–120., 2010.
- [6] BREUER, B. ; MCKENNA, P. J. ; PLUM, M. **Multiple solutions for a semilinear boundary value problem: a computational multiplicity proof**. Journal of Differential Equations, 195(1):243–269, 2003.
- [7] BUENO, H. ; TOMEI, C. **Critical sets of nonlinear sturm-liouville problems of ambrosetti-prodi type**. Nonlinearity, 15:1073–1077., 2002.
- [8] BURGHELEA, D.; SALDANHA, N. C. ; TOMEI, C. **Results on infinite-dimensional topology and applications to the structure of the critical set of nonlinear sturm liouville operators**. Journal of Differential Equations, 188:569–590., 2003.
- [9] CAL NETO, J. T. ; TOMEI, C. **Numerical analysis of semilinear elliptic equations with finite spectral interaction**. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 395(1):63–77, 2012.
- [10] CIARLET, P. G.. **The finite element method for elliptic problems**, volumen 40 de **Classics in Applied Mathematics**. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002.
- [11] CODDINGTON, E. A. ; LEVINSON, N.. **Theory of Ordinary Differential Equations**. McGraw-Hill, New York., 1974.

- [12] COSTA, D.G.; FIGUEIREDO, D.G.; SRIKANTH, P.N. **The exact number of solutions for a class of ordinary differential equations through morse index computation.** Journal of Differential Equations., 96:185–199., 1992.
- [13] KAMINSKI, O. **Análise Numérica de Operadores Elípticos Semi-Lineares com Interação Espectral Finita.** Tese de doutorado em matemática, PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2016.
- [14] GANTHMACHER, F.P.; KREIN, M.G. **Oscillation matrices and kernels and small vibrations of mechanical systems.** AMS Chelsea Publishing, Rhode Island., 2002.
- [15] KELLER, H. B. **Lectures on Numerical Methods in Bifurcation Theory.** Tata Institute of Fundamental Research, Lectures on Mathematics and Physics, Springer, New York., 1987.
- [16] KELLEY, C.T. **Numerical methods for nonlinear equations.** Acta Numerica, 27:207–287, 2018.
- [17] LAZER, A.C. ; MCKENNA, P.J. **On a conjecture related to the number of solutions of a nonlinear dirichlet problem.** Proceedings of the Royal Society of Edinburgh., 95A:275–283., 1983.
- [18] LAZER, A.C. ; MCKENNA, P.J. **A symmetry theorem and applications to nonlinear partial differential equations.** Journal of Differential Equations., 72:95–106., 1988.
- [19] MALTA, I. ; SALDANHA, N. C. ; TOMEI, C. **The numerical inversion of functions from the plane to the plane.** Mathematics of Computation, 65(216):1531–1552, 1996.
- [20] MALTA, I. ; SALDANHA, N. C. ; TOMEI, C. **Geometria e Análise Numérica de Funções do Plano no Plano.** 19<sup>o</sup> Colóquio Brasileiro de Matemática, Impa, Rio de Janeiro, 1993.
- [21] MALTA, I. ; SALDANHA, N. C. ; TOMEI, C. **Morin singularities and global geometry in a class of ordinary differential operators.** Topol. Methods Nonlinear Anal., 10:137–169, 1997.
- [22] MORIN, B. **Formes canoniques des singularités d’une application différentiable.** C. R. Acad. Sci. Paris, 260:6503–6506, 1965.

- [23] NAGATOU, K.. Numerical verification method for infinite dimensional eigenvalue problems. *Japa Indust. Appl. Math.*, 26:477–491., 2009.
- [24] RHEINBOLDT, W.C. Numerical continuation methods: a perspective. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 124:229–244, 2000.
- [25] SMILEY, M. W. ; CHUN, C. Approximation of the bifurcation function for elliptic boundary value problems. *Numer. Methods P.D.E.*, 16:194–213, 2000.
- [26] SOLIMINI, S. Some remarks on the number of solutions of some nonlinear elliptic problems. *Analyse non linéaire*, 2:143–156., 1985.
- [27] SORIANO, J.M. Compact mappings and proper mappings between spaces that share a value. *Mathematica Balkanica.*, 14, 2000.
- [28] TELES, E. ; TOMEI, C. The geometry of finite difference discretizations of semilinear elliptic operators. *Nonlinearity*, 25(4):1135–1154, 2012.
- [29] WHITNEY, H. On singularities of mappings of euclidean spaces. mappings of the plane into the plane. *Annals of Mathematics. Second Series*, 62:374–410, 1955.