

5 Metodologia

Neste capítulo apresentaremos todas as etapas da pesquisa e o caminho percorrido para sua realização. Também será descrita a metodologia de acordo como foi realizada a investigação, as técnicas de coleta e o tratamento dos dados que fizeram parte do processo de construção do objeto de estudo e também das variáveis que surgiram durante o percurso. Por fim, mostraremos os procedimentos escolhidos para a análise dos dados.

Ao examinarmos academicamente o processo de ensino-aprendizagem dos números reais, observamos a grande recorrência desse tema em pesquisas realizadas com professores e futuros professores de Matemática (Igliori; Silva, 1998; Cobianchi 2001; Dias, 2002/2007; Leviatan, 2004; Barthel, 2004; Moreira 2004/2005 e Zazkis; Sirotic, 2004/2007). É importante destacar que apenas uma das pesquisas⁷⁰ (Fischbein et al., 1995) que analisamos tem como sujeitos principais alunos do Ensino Médio. Essa escassez de estudos, neste nível de ensino, justifica nossa escolha do tema da presente pesquisa, que tem como objetivo identificar descritores de imagem conceitual nos registros dos alunos da 3ª série do Ensino Médio relacionados aos números reais.

Esta investigação acontece em ambiente de sala de aula, quando os alunos são estimulados a escrever ou falar sobre números reais e sobre as operações, propriedades e noções matemáticas que emergem a partir dos contextos propostos. Para isso, respondemos nesta pesquisa à seguinte questão geral: Quais imagens conceituais relacionadas aos números reais são expressas por alunos do Ensino Médio na realização de atividades?

Feitos os devidos estudos relacionados à revisão bibliográfica desta pesquisa⁷¹ e uma apresentação do panorama curricular e didático do ensino de números reais no Ensino Médio⁷², decidimos que a pesquisa aconteceria em sala de aula, com um grupo pequeno de alunos. Dessa forma, retratamos o dinamismo do processo de ensino e de aprendizagem, procurando manter um ambiente o mais

⁷⁰Estamos nos referindo ao artigo de 1995, “The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers”, que apresenta a pesquisa de Fischbein, et al., já mencionada na revisão bibliográfica.

⁷¹ Capítulo 2.

⁷² Capítulo 4.

similar possível ao dia a dia da sala de aula.

Em função dessas características e considerando a proximidade e a troca constante com os sujeitos da pesquisa, permitindo “conhecer” os significados que eles atribuem ao objeto de estudo, optamos por uma pesquisa clínico-qualitativa.

Qualitativa, pois a investigação acontece por meio de dados descritivos de uma situação estudada e colocada para os participantes, enfatizando o processo que transcorre nessa situação e dando ênfase na perspectiva desses sujeitos que fazem parte da pesquisa. De acordo com Lüdke e André (1986), as características da pesquisa qualitativa são as seguintes: i) acontecer em ambiente natural como fonte dos dados; ii) haver maior preocupação com o processo do que com o produto; iii) ter o pesquisador como principal elemento de coleta de dados; iv) os dados obtidos serem descritivos; v) ter dados que retratam os significados relacionados aos sujeitos da pesquisa como principal fonte de elementos de construção do saber para o pesquisador.

A opção pelo método clínico deve-se pela forma como trabalhamos com os dados da pesquisa, tanto no que se refere à forma da coleta, quanto à análise do material obtido, que priorizou as justificativas dadas pelos alunos na expressão de suas respostas. Este método consiste num diálogo constante com os participantes, de forma sistemática, confrontando ações provocadas pelo pesquisador e as respostas fornecidas pelos sujeitos pesquisados. Dessa forma, o método clínico possibilita uma visão ampla e profunda de um fenômeno estudado, pois permite descobrir novos aspectos do objeto de estudo.

Todos os dados foram coletados em sala de aula, lugar tradicional do conhecimento escolar, e obtidos a partir de registros dos alunos durante a realização de atividades matemáticas. Estes dados possibilitaram identificar atributos relevantes e irrelevantes (Hershkowitz, 1994), que caracterizaram elementos da imagem conceitual que os participantes têm sobre os números reais (Tall & Vinner, 1991).

Além disso, a pesquisadora foi a única responsável por todas as etapas desse estudo: coleta, observação, organização e análise dos dados. O processo ocorreu com o permanente cuidado de captar e explicitar o máximo de aspectos expressos pelos participantes nas atividades trabalhadas. Para evitar uma visão já estabelecida da realidade e, levando-se em conta nossos objetivos, optamos por realizar uma pesquisa exploratória antes do estudo principal. De acordo com Lüdke e André

(1986), esta etapa é fundamental para a aproximação do objeto de estudo, pois possibilita captar mais detalhes e aspectos imprevistos da situação pesquisada.

5.1

O estudo preliminar: delimitando caminhos

O estudo preliminar exploratório foi feito com alunos da 2ª série do Ensino Médio, de onde saíram os participantes do estudo principal. Dessa forma, adequamos o instrumento de medida à realidade que se pretendia conhecer. Esta etapa da pesquisa mostrou o panorama de elementos conhecidos e desconhecidos desses alunos sobre os números reais. Os dados obtidos foram delimitadores na escolha da abordagem pedagógica e, conseqüentemente, na definição e na elaboração das atividades que foram trabalhadas posteriormente, numa segunda etapa, com um grupo menor de alunos que, na época, já cursavam a 3ª série do Ensino Médio.

Para realizar tal estudo preliminar, convidamos 180 alunos que formavam a 2ª série do Ensino Médio do ano de 2007, da Unidade Centro do Colégio Pedro II, e que estavam distribuídos em cinco turmas. O instrumento desse estudo foi um questionário formado por 13 questões sobre números reais (Anexo 2), que possibilitaram um mapeamento desse tema, do ponto de vista da aprendizagem.

Para organizar essas questões, partimos de problemas relevantes oriundos da revisão bibliográfica, feita no capítulo 2, e da análise documental realizada no capítulo 4 desta pesquisa. Além disso, consultamos periódicos de Matemática, livros de cálculo, obras clássicas da Matemática e introdução à análise matemática, pesquisando definições, resultados e atividades relacionadas aos números reais que fossem adequadas para o Ensino Médio.

A partir de outubro de 2007, verificamos as possibilidades de datas para aplicação do questionário. Em função da indisponibilidade de alguns professores cederem suas aulas e dos alunos já estarem preocupados com as provas do último trimestre, agendamos a data para 7 de dezembro. Nessa ocasião, os alunos estavam recebendo os resultados das provas trimestrais e, naquele dia, em particular, não haveria aula.

A pesquisadora, preocupada com uma possível ausência de participantes,

por conta de alguns já estarem aprovados e outros ainda precisarem estudar para as provas finais, prontificou-se a tirar dúvidas dos alunos que fariam a prova final de Matemática. Também elaborou uma lista contendo questões de vestibulares para os alunos que foram aprovados em Matemática e já estavam de férias. Preparamos uma carta (anexo 3), que foi entregue para todos os alunos, solicitando a sua participação na pesquisa, agendando a data, apresentando um resumo do assunto e o material necessário para a realização e agradecendo antecipadamente a colaboração de todos.

Setenta alunos voluntários compareceram e responderam ao questionário, que foi realizado num tempo médio de duas horas de duração. Vale ressaltar que os alunos utilizaram o tempo que julgaram necessário para responder às questões. A identificação não foi obrigatória e solicitamos aos participantes que respondessem às questões com calma e, caso não soubessem algum item, deixassem em branco. Esclarecemos que não seria permitida a comunicação entre alunos, pois o instrumento era de natureza individual.

Das treze questões elaboradas, as quatro primeiras questões tinham como finalidade detectar habilidades e dificuldades na manipulação das frações, no algoritmo da divisão, nas representações decimais e suas decomposições. Nas questões 5, 6, 7 exploramos a representação e a identificação de números decimais, finitos e infinitos, relacionando-os aos racionais e irracionais. As dízimas periódicas e as sequências infinitas foram trabalhadas nas questões 8 e 12, com o objetivo de verificar como os alunos relacionam esses conteúdos.

A questão nove tratou da construção geométrica dos números irracionais da forma \sqrt{n} , para ilustrar o número irracional como resultado de medição e também para apresentar uma infinidade de irracionais que são obtidos com essa estratégia de construção. A questão 10 apresentou uma sequência de frações na qual cada termo é um convergente da fração contínua infinita que representa o número irracional $\sqrt{5}$. As questões 11 e 13 abordaram o conceito de densidade de racionais e irracionais, com o objetivo de perceber o universo numérico dos alunos, por meio das representações mais utilizadas por eles, e também de identificar como eles reconhecem os números reais. O uso da calculadora foi estimulado na maioria das questões.

Todas as questões foram corrigidas, tabuladas e analisadas. A tabulação

dos dados ocorreu de duas formas diferentes. Num primeiro momento, categorizamos quantitativamente cada questão, em respostas adequadas ou não. O critério utilizado para considerar uma resposta adequada foi a realização da questão de acordo com raciocínio matemático correto, sendo aceito um ou outro erro cálculo ou a falta de algum exemplo, que não comprometesse a questão. A seguir, analisamos quais questões eram favoráveis na identificação das imagens conceituais relacionadas aos números reais. Essa ação possibilitou selecionarmos as atividades que seriam trabalhadas no estudo principal, a segunda etapa da pesquisa. Nesta última etapa, no entanto, a tabulação desses mesmos dados ocorreu de forma qualitativa. Os detalhes desta nova organização serão expostos no capítulo 6 desta pesquisa.

Na análise da primeira tabulação, observamos que o algoritmo da divisão de Euclides é conhecido por todos os alunos, e a atividade não apresentou muitas dificuldades, porém grande parte do grupo pesquisado desconhece as diferentes naturezas de resultados que uma divisão de inteiros pode gerar. Dessa forma, decidimos agrupar as questões 2, 5, 6 e 7, que tratam tanto das expressões decimais que obtemos por meio de uma divisão de inteiros, quanto das expressões decimais que não são obtidas por esse processo. Essas quatro questões causaram uma riqueza de respostas e formaram, assim, o primeiro bloco de atividades selecionado para o estudo principal.

As questões 8 e 12, que abordam as sequências geométricas, foram pouco exploradas pelos alunos, o que nos surpreendeu, já que se trata de um conteúdo trabalhado no início da série que estes alunos cursavam na ocasião do questionário. Consideramos que as questões dessa natureza merecem atenção no estudo dos números reais, pois exige dos alunos o conhecimento do processo de converter uma dízima periódica em fração. Optamos em levar a questão 8, e não a 12, para o estudo principal, pois o índice de respostas nesta foi maior do que na questão 12, possibilitando mais dados para a análise.

Julgamos a questão 9 importante do ponto de vista da matemática escolar, pois aborda a construção de exemplares do campo numérico dos reais, que não são racionais. Também possibilita ao aluno visualizar uma sequência infinita de medidas que são incomensuráveis com a unidade. Foi uma questão bem trabalhada pelos alunos no questionário e selecionada para o estudo principal. A escolha pela questão 10 ocorreu, pois tínhamos a pretensão de trabalhar atividades

envolvendo as frações contínuas e as raízes quadradas irracionais, e nesse sentido essa questão é motivadora.

Observando as respostas das questões 11 e 13, percebemos que o universo numérico de muitos alunos ainda é restrito, pois grande parte dos exemplos obtidos nas respostas se limitou aos decimais finitos com poucas casas decimais. Como a tabulação de respostas adequadas e inadequadas da questão 11 possibilitou uma boa análise dos dados, ela não foi selecionada para o estudo principal, porém foi incluída na análise como instrumento comparativo. Por fim, decidimos elaborar uma questão que contemplasse os aspectos trabalhados na questão 13 e as operações entre as raízes quadradas irracionais, dessa forma, para o estudo principal, utilizamos uma adaptação da correspondente questão.

Nas respostas obtidas do questionário, observamos que a calculadora ainda é utilizada como um instrumento que finaliza a questão e não como uma ferramenta que levanta dúvidas e possibilita investigações. Esse aspecto, aliado às sugestões dos documentos curriculares, fez-nos valorizar ainda mais seu uso nas atividades do trabalho de campo do estudo principal.

Esse processo de pré-análise dos dados obtidos do questionário, de aprendizado e de amadurecimento do nosso objeto de estudo, possibilitou-nos uma visão mais ampla dos caminhos possíveis de trilhar. Além disso, forneceu-nos instrumentos matemáticos e metodológicos necessários que possibilitaram fazer um recorte das questões que julgamos relevantes, definir novas atividades, planejar e executar nosso estudo principal. Essa etapa, tanto no processo da coleta quanto na análise dos dados, foi fundamentada nos aspectos relacionados ao método clínico que será exposto a seguir.

5.2

O método clínico

O método clínico utilizado por Piaget teve início em 1926, com um significado distinto do original, pois empregou uma forma de conversar com as crianças visando à descoberta de aspectos dos seus pensamentos ao invés de quantificar respostas pré-determinadas como corretas, dos testes já existentes e mais comumente aplicados. Para “compreender” o pensamento das crianças, deteve-se na análise das justificativas das respostas fornecidas por elas quando eram indagadas. De certa forma, podemos considerar que a natureza da análise dos dados passou de uma tendência quantitativa para uma qualitativa.

Como o método é basicamente constituído pela formulação de perguntas, este permite acompanhar o pensamento da criança. Isso pode acontecer por meio de ações verbais ou utilizando materiais concretos, dessa forma, o processo de elaboração de perguntas, favorece a organização intelectual na investigação, possibilitando a criação de situações de aprendizagem. De acordo com Piaget (1926, p. 11):

O bom experimentador deve, efetivamente, reunir duas qualidades muitas vezes incompatíveis: saber observar, ou seja, deixar a criança falar, não desviar nada, não esgotar nada e, ao mesmo tempo, saber buscar algo de preciso, ter a cada instante uma hipótese de trabalho, uma teoria, verdadeira ou falsa, para controlar.

Essa interatividade “sem intervenções” entre pesquisador e sujeito pesquisado do método clínico ajuda na compreensão do processo e procura valorizar tudo que é dito pelo sujeito. Segundo Delval (2002), o método parte de um núcleo inicial de perguntas que levam a outras questões, ampliando-se para seguir o caminho que foi gerado a partir das explicações do sujeito.

É possível utilizá-lo numa situação de aprendizagem, porém com um grupo menor de alunos, pois é um método complexo, em que o professor precisa saber observar, sem interromper, e ao mesmo tempo buscar resultados justificáveis e compreensíveis.

Dessa forma, a natureza crítica do método é uma necessidade constante, visto que o pesquisador propõe ao sujeito uma discussão sistemática com o objetivo de estabelecer uma reciprocidade entre as ações e os problemas apresentados. Delval (2002) declara que se trata de um modo de pesquisar como os sujeitos percebem os fenômenos através da interação de atitudes estabelecidas entre o pesquisador e o sujeito pesquisado. Mais especificamente, o pesquisador afirma:

Creio que a essência do método, e aquilo que tem de mais específico, que o diferencia dos outros métodos, consiste precisamente nessa intervenção sistemática do experimentador diante da atuação do sujeito e como resposta às suas ações e explicações. O experimentador está na presença de um sujeito a quem se estuda individualmente e com quem se estabelece uma interação. Coloca-se esse sujeito em uma situação problemática que ele tem que resolver ou explicar, e observa-se o que acontece. Enquanto se produz a conduta do sujeito (que, insistimos, pode consistir em simples ações, em palavras ou em uma combinação de ambas as coisas), o experimentador procura analisar o que está acontecendo e esclarecer seu significado (Delval, 2002, p. 68).

As técnicas utilizadas para possibilitar o processo poderão ser conduzidas verbalmente ou por meio de problemas concretos. A entrevista livre é um dos instrumentos utilizados no método clínico e, além disso, podem-se utilizar

explicações sobre situações com transformações de materiais diversos, métodos não verbais com ações sobre algo, enfim, instrumentos adaptáveis aos participantes da investigação que possam ser observados, manipulados, julgados por estes com possível intervenção do pesquisador. Para a realização das questões, convém enfatizar que é necessário um conhecimento do problema e dos diferentes níveis de respostas. Por isso, a seleção de perguntas ou comandos deve ser previamente estudada, embora seja flexível e adaptada ao sujeito.

Cada resposta pode levar à formulação de novas hipóteses que possibilita elaborar novos questionamentos do pesquisador. É esta flexibilização de novos caminhos — perguntas e respostas — que forma a coerência e a unidade da “entrevista”⁷³. Todas as respostas devem ser interpretadas, com base no processo que a gerou, entretanto, não se pode esquecer que, apesar de o pesquisador ter no sujeito a singularidade e as especificidades da condição humana, o método clínico vai procurar o que há de universal neste sujeito epistêmico. Deve-se atentar para as características gerais das explicações, a maneira como o indivíduo resolve os problemas apresentados e como chega às suas explicações. A análise qualitativa da situação busca as respostas mais características do pensamento do sujeito e deve investigar o que o leva a dar determinada resposta, perceber se há uma busca da coerência e se há criatividade nas respostas. Dessa forma, ressaltamos que há uma busca por aspectos comuns e não individuais.

É importante que, durante a realização do estudo, o pesquisador verifique a compreensão do sujeito em relação à pergunta. Dessa forma, o uso da linguagem deve ser adequado e o mais próximo do sujeito e, se necessário, o pesquisador deve ter conhecimento de formas alternativas de apresentar a pergunta.

Como o interesse principal desse método está voltado para o processo, o pesquisador deve observar com atenção o raciocínio do sujeito, sem fazer correções ou interferir nas respostas; pode, porém, dar seguimento com outra pergunta que não fazia parte de seu repertório original. É fundamental que as respostas venham acompanhadas de justificativas e, se possível, averiguando a certeza com que o sujeito responde.

Enfatizamos que o pesquisador deve estar atento na coerência entre as respostas dadas pelo sujeito e provocar nele reações diante de contradições, para

⁷³ Deve-se entender entrevista como o conjunto de ações consecutivas obtidas da interação sujeito e pesquisador.

verificar se há certeza no que é afirmado, ou se o sujeito percebe ou não a contradição. Pode acontecer também de o participante da pesquisa não ter o seu raciocínio esclarecido, por isso é tão importante o pesquisador buscar a relação entre os aspectos trabalhados pelo sujeito na resolução dos problemas e o raciocínio que foi utilizado. Nesse sentido, esse método é um instrumento de coleta e de análise de dados dinâmico, revelador e reflexivo tanto para o pesquisador quanto para o sujeito pesquisado.

5.3 **O estudo principal**

Como o conceito de número real relaciona-se a importantes noções matemáticas que muitas vezes não foram introduzidas no Ensino Fundamental, decidimos iniciar pelos pré-requisitos de que o assunto necessita como, por exemplo, o conhecimento dos números racionais, suas diferentes representações e o algoritmo da divisão de Euclides. Verificamos no estudo preliminar, que os alunos têm dificuldades nas questões relacionadas às diferentes naturezas de números obtidas por processo, principalmente no que se refere às dízimas periódicas.

Constatamos a estabilidade de algumas crenças relacionadas à visualização de certos números que provocam erros conceituais que são resistentes e de alguma forma impedem o avanço do conceito de número real. Dessa forma, algumas imagens precisam ser desconstruídas, para que novas imagens possam surgir e ampliar noções relacionadas aos números reais.

Pensando nos objetivos da pesquisa e nas limitações apontadas, além das dez atividades escolhidas no estudo preliminar, acrescentamos mais oito que não são usualmente trabalhadas nos livros didáticos. Julgamos conveniente propiciar um contexto didático que aumentasse as possibilidades de os alunos perceberem, estranharem e em determinadas situações até conjeturarem diferentes aspectos relacionados aos números racional e irracional, quando representados na forma decimal.

Para isso, elaboramos atividades que incentivassem o uso das representações decimais e das raízes quadradas irracionais e suas aproximações racionais, ampliando dessa forma o universo de representações conhecidas e também a operacionalidade entre os reais. Nesse sentido, o método clínico é adequado, pois há uma interação entre o pesquisador e o sujeito pesquisado, que modifica o conhecimento de ambos. Se por um lado o sujeito é solicitado a dar justificativas para suas afirmações, por outro, o pesquisador precisa pensar em estratégias que possibilitem compreender as explicações fornecidas sobre o assunto investigado. Agindo dentro desse contexto, foi possível identificar descritores da imagem conceitual de números reais nos alunos.

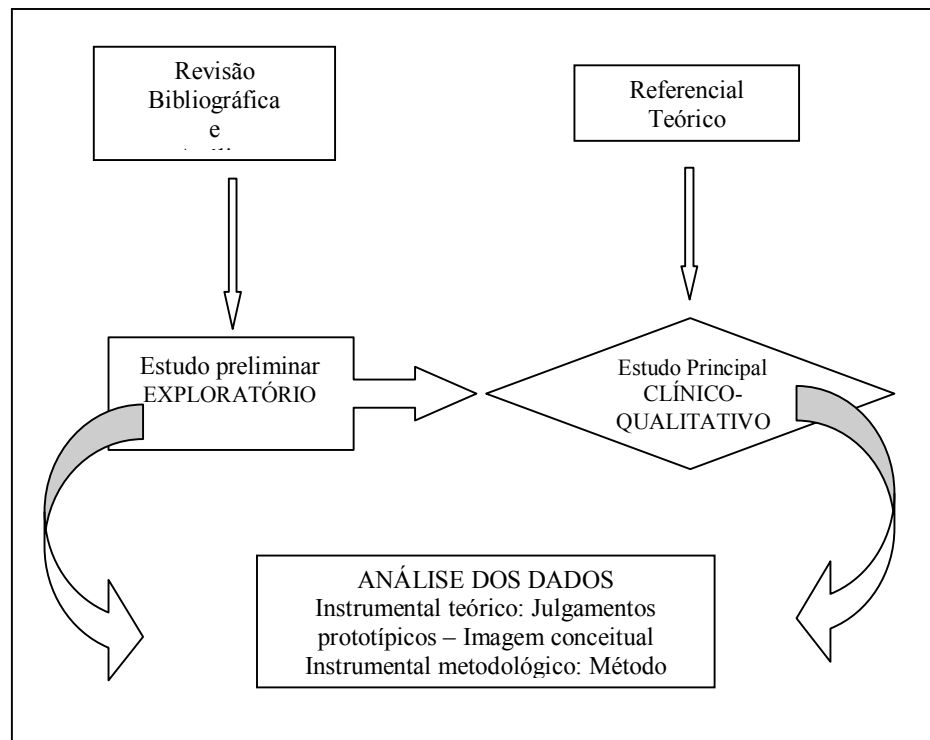
5.3.1

O desenho da pesquisa

Com a atitude de professora pesquisadora, de acordo com André (2002), buscando articular saber e prática docente, planejamos o estudo principal, aproximando os aspectos didáticos dos aspectos metodológicos expostos até aqui, em acordo com o método de pesquisa escolhido. O esquema ilustrado na Figura 8 apresenta o desenho da pesquisa. Nesse esquema, mostramos o percurso desta investigação, relacionando as etapas de estudos preliminares com a pesquisa propriamente dita, o trabalho de campo a que chamamos de estudo principal.

A ilustração indica o caminho percorrido, desde as pesquisas feitas na revisão bibliográfica e na análise documental, que atuaram diretamente na escolha do instrumento que aplicamos no estudo preliminar, até a análise dos dados que será apresentada no capítulo 6.

Figura 8: Esquema que ilustra o desenho da pesquisa



Destacamos que, apesar de a Figura 8 mostrar o referencial teórico interferindo apenas no estudo principal, ele foi utilizado na análise de todas as atividades, inclusive com dados oriundos do estudo preliminar. Esclarecemos que o desenho apresenta o método clínico, explicitado mais adiante neste capítulo, que utilizamos tanto para a coleta de dados quanto na análise dos dados, conforme será exposto no capítulo 6. Feita a escolha do caminho a ser seguido no estudo principal, planejamos e elaboramos fichas de atividades sobre números reais, que foram aplicadas e gravadas em oito encontros, com 12 alunos da 3ª série do Ensino Médio, da Unidade Centro do Colégio Pedro II.

5.3.2 Os sujeitos do estudo principal

Para sujeitos do nosso estudo principal, escolhemos alunos da 3ª série do Ensino Médio, pois, nesta etapa, os alunos já teriam tido contato com grande parte do programa de Matemática que se utiliza do campo numérico dos reais. Além disso, parte dos alunos dessa série participou do estudo preliminar que realizamos

e a maioria deles já havia tido a pesquisadora como professora de Matemática.

A familiaridade com a pesquisadora de certa forma facilitou o desenvolvimento do trabalho, geralmente dificultado pela relação de poder entre pesquisadora e sujeitos pesquisados, comum em um trabalho de pesquisa. Velho (1978, p. 42) faz declarações acerca do familiar e do exótico existentes nos grupos estudados e da objetividade e subjetividade que estão inseridas com maior ou menor grau nas pesquisas. O pesquisador afirma que “a ‘realidade’ (familiar ou exótica) sempre é filtrada por um determinado ponto de vista do observador, ela é percebida de maneira diferenciada”. Sob esse aspecto, a subjetividade está presente em todo trabalho. Também destaca uma vantagem de se estudar o familiar, pois esta oferece mais possibilidades de se “rever e enriquecer os resultados das pesquisas” (ibidem, p. 45), e, conseqüentemente, de se ampliar os argumentos utilizados nas discussões.

Para formar o grupo de sujeitos da pesquisa, em março de 2008, foi elaborada uma carta consulta⁷⁴ (anexo 4) dirigida a toda 3ª série do Ensino Médio, dos quais 160 alunos responderam. Nessa etapa final de ensino, a grande maioria dos alunos está envolvida com o vestibular, atividades extras, estágios e alguns até com trabalho. Partindo dessa condição temporal, novamente a pesquisadora se ofereceu para, ao final de cada encontro, ficar à disposição com a tarefa de tirar dúvidas de Matemática, estimulando assim, a participação dos alunos. Eles preencheram a parte final da carta, destacaram e entregaram à pesquisadora. Este levantamento (anexo 5) foi necessário para decidirmos que os encontros aconteceriam às segundas-feiras, no turno da tarde, das 13h às 15h. A partir daí, consultamos os alunos que responderam que poderiam comparecer na quarta-feira, sobre a possibilidade da participação na segunda-feira e chegamos a um total de 34 alunos que, inicialmente, poderiam fazer parte da pesquisa.

Elaboramos uma tabela com nome, turma, endereço eletrônico e telefone de cada um desses alunos. Distribuímos, então, um comunicado de participação dos encontros (anexo 6) que informava previamente as datas. Desse grupo de 34 alunos, 13 desistiram de participar por diferentes motivos e chegamos a um total de 21 alunos voluntários. Efetivamente, porém participaram do experimento um

⁷⁴ Nesse documento, a pesquisadora agradeceu a presença dos alunos que participaram do estudo preliminar e solicitou voluntários para participarem de oito encontros que aconteceriam no turno da tarde, turno contrário ao das aulas regulares da série em questão.

grupo fixo que variava de 10 a 12 alunos. Os 12 participantes do estudo principal receberam os seguintes nomes fictícios: Carla, Clara, Denise, Isabel, Thaíssa, Antônio, Artur, Bruno, Celso, Eduardo, Fernando e Vinícius.

O perfil desses alunos foi obtido por meio de um breve questionário⁷⁵. Constatamos que todos tinham 17 anos e sete deles fizeram o Ensino Fundamental no Colégio Pedro II. Quando foram indagados sobre seu desempenho em Matemática em relação à maioria dos alunos, sete deles se colocaram num nível bom, três na média e dois se posicionaram com dificuldades. A maioria não lembra quando estudou os números reais, alguns afirmam que foi na 7ª ou na 8ª série, correspondente aos atuais 8º e 9º anos do Ensino Fundamental. Em relação ao motivo que os levou a participar dos encontros, as respostas ficaram entre melhorar o desempenho em Matemática, aprofundar conceitos sobre os números, gostar de Matemática e entender o porquê dos resultados matemáticos. Eis algumas respostas:

Carla: *“uma forma de relembrar conceitos básicos da matemática que são perdidos (esquecidos) com o decorrer do tempo e que são de grande utilidade ao aprender um conceito complexo.”*

Thaíssa: *“Saber que seriam esclarecidos certos fatos que quando aprendemos simplesmente são jogados para aceitarmos; não se pensa o porquê daquilo.”*

Fernando: *“Tentar expandir meus conhecimentos matemáticos, pois eu acredito que matemática não seja só um aglomerado de números que “decorando uma fórmula, dá para passar de ano”, e sim uma interessante cadeia lógica de raciocínios, que chama muito a minha atenção.”*

Dessa forma, formamos um grupo de alunos que possuíam interesses diferentes para participar dos encontros, porém convergindo no aspecto de melhorar seus conhecimentos. É importante esclarecer que, dentre os 12 alunos voluntários que participaram dos encontros, dez realizaram o estudo preliminar, o que nos facilitou em algumas análises das atividades, pois em alguns momentos serviu como uma variável de comparação.

⁷⁵As perguntas foram as seguintes: Onde fez o Ensino Fundamental? Qual o seu desempenho em Matemática em relação à maioria dos alunos? Você lembra quando foram estudados números reais na escola? Por que decidiu participar dos encontros? O que o motivou?

5.3.3 Instrumentos de coleta de dados

Como o foco da pesquisa está na identificação dos descritores de imagens conceituais dos alunos, quando são solicitados a resolver questões sobre números reais, precisávamos de instrumentos que proporcionassem reconhecer aspectos que caracterizassem esse processo. Por isso, elaboramos fichas de atividades contendo questões que favoreceram ao aluno expressar-se livremente na interpretação e na utilização das informações contidas nos enunciados e, assim, partir para sua estratégia de resolução.

Essas questões tiveram o objetivo não só de avaliar o conhecimento matemático dos alunos ao respondê-las, mas também de captar dados mais espontâneos e menos previsíveis do processo de realização das atividades. Por outro lado, também possibilitaram fazer um levantamento da natureza e da frequência dos erros cometidos, assim como das estratégias mais utilizadas.

Decidimos que as atividades seriam trabalhadas em duplas, para facilitar a identificação das relações e conexões feitas pelos alunos, ao se confrontarem com situações didáticas que levantassem dúvidas sobre seus entendimentos a respeito dos números racionais e irracionais.

Consideramos que a escolha pelo uso das atividades em dupla nos encontros constituiu um ambiente favorável às manifestações das imagens conceituais dos alunos, como o procedimento adotado por Tall & Vinner (1981) e Vinner (1983). Para coletar um maior número de informações no processo de realização e discussão dessas atividades, trabalhamos com três instrumentos de coleta de dados: os registros escritos dos alunos nas fichas de atividades, as gravações dos encontros em áudio e o diário de campo da pesquisadora.

Seguindo orientações dos documentos curriculares, elaboramos questões em que era necessário o uso adequado da calculadora para ajudar nas discussões de ideias relacionadas aos números irracionais e suas aproximações e entre as representações fracionária e decimal dos números racionais, “reconhecendo suas limitações e potencialidades” (Brasil, 2000, p. 46). Consideramos que sua utilização possibilita ao aluno o levantamento de conjecturas que podem estar adequadas ou não à atividade e, se colocadas em discussão pelo professor, levam tanto à desconstrução de concepções equivocadas quanto à construção de novas

ideias, favorecendo o avanço da aprendizagem em questão.

A utilização da calculadora aumentou as possibilidades de os alunos manifestarem suas ideias na realização das atividades, pois os cálculos numéricos fluíram com mais rapidez e tornaram-se mais fáceis e eficazes do que se fosse com lápis e papel. Ofereceu também um tratamento numérico para as relações geométricas e algébricas, tornando-as mais concretas, o que possibilitou ao aluno obter com certa rapidez os exemplos que desejava. Dessa forma, a calculadora propiciou ao aluno uma manipulação mais informal dos conceitos abstratos para depois formalizá-los. Esse instrumento estimula novos modos de trabalho e favorece uma ação mais prática e experimental da Matemática (Ponte, 1989).

Acrescentamos que, no caso de os alunos insistirem em afirmações falsas, quando a calculadora não era suficiente para fazer o aluno perceber determinados aspectos matemáticos, a pesquisadora intervinha com novos questionamentos, buscando solucionar a discussão.

5.3.3.1 As fichas de atividades

Para elaborar as atividades que conduziram nosso estudo principal, foi necessário listar questões prévias a respeito das noções e conteúdos que abordaríamos nos encontros. Para isso, respondemos às seguintes perguntas:

- Como as pesquisas estudadas, os documentos curriculares, os livros didáticos e o estudo preliminar interferirão nas atividades escolhidas?
- Que noções matemáticas relacionadas ao conceito de número real serão exploradas nesta pesquisa?
- Quais resultados matemáticos são importantes de serem apresentados e discutidos?
- Quais das atividades trabalhadas no estudo exploratório serão favoráveis à manifestação de atributos e julgamentos para caracterizar as imagens conceituais relacionadas aos números racionais e irracionais?
- Como o trabalho em duplas e o uso da calculadora contribuirão no estudo principal?

Na elaboração das fichas de atividades, decidimos valorizar questões diferentes das usuais dos livros didáticos, mas que não saíssem completamente do contexto didático com que os alunos do Ensino Médio estão mais familiarizados.

Dessa forma, procuramos partir da vivência dos alunos sobre seus conhecimentos acerca dos números reais e assim, proporcionamos uma discussão que valorizou os aspectos representativo e operacional dos números racionais e irracionais. Para isso, partimos de uma definição de número real que julgamos adequada para alunos do Ensino Médio, sem formalizar o conceito. Essa situação didática favoreceu o surgimento de descritores de imagem conceitual, visto que gerou dados para nossa investigação.

Para direcionar as atividades que foram trabalhadas nos encontros, em relação aos conteúdos abordados, optamos pelos seguintes passos:

- retomar o estudo dos números racionais, possibilitando reconhecê-los e operá-los nas suas diferentes representações.
- partir do algoritmo da divisão como disparador para enunciar e compreender resultados importantes sobre as frações;
- apresentar números que representam medidas, mas que não são racionais;
- valorizar a representação decimal;
- utilizar os números irracionais da forma \sqrt{n} para, a partir da dificuldade de operá-las, explorar as noções de aproximação, verificar propriedades válidas e não válidas e buscar estratégias para operá-las.

Inicialmente, selecionamos os exercícios de 1 a 10 do estudo preliminar, que compôs um grupo de questões que suscitaram boas discussões, que também visou sanar as dúvidas existentes sobre os números racionais. Lembramos que as respostas obtidas na fase exploratória mostraram vários obstáculos que os alunos tiveram na resolução das questões.

Decidimos acrescentar mais dez atividades para completar o grupo de questões que foram aplicadas no estudo principal, porém oito foram analisadas. Três dessas atividades versaram sobre números racionais e frações, com o objetivo de possibilitar:

- o surgimento de mais descritores da imagem conceitual associada aos racionais, suas possíveis representações e as operações com as dízimas periódicas;

- a identificação de números irracionais, por meio das expressões decimais infinitas e não periódicas;
- um amadurecimento nos conceitos de sequência, infinito e densidade.

As outras cinco atividades envolveram operações entre raízes quadradas irracionais, utilizando as aproximações racionais. Nessas questões foram abordadas noções de densidade, intervalos, aproximação e erro. Nosso objetivo com esse conjunto de questões, além dos descritos para as atividades anteriores, foi fortalecer a operacionalidade no campo numérico dos reais.

Essas atividades foram organizadas em fichas e depois distribuídas para os alunos durante os encontros da pesquisa. Buscando facilitar e otimizar nosso trabalho na análise, nomeamos cada atividade usando uma letra e um número. Para as atividades selecionadas do estudo preliminar, usamos a letra P seguida do número da respectiva atividade no questionário.

Dessa forma, as atividades P1 a P10 referem-se às dez primeiras que foram realizadas no estudo preliminar. Essas aconteceram nos dois primeiros encontros do estudo principal. Para as atividades que foram aplicadas nos 3º, 4º, 5º, 6º, 7º e 8º encontros, utilizamos, respectivamente, as letras A, B, C, D, E, F, seguidas do número correspondente à atividade. A Tabela 14 apresenta essa distribuição das atividades nas fichas ao longo dos oito encontros.

Tabela 14: Organização e distribuição das atividades nos oito encontros

Fichas	Itens	Encontros	Atividades Trabalhadas
1	1 ao 10	1º	P1, P2, P3, P4, P5 e P6
		2º	P7, P8, P9 e P10
2	1, 2 e avaliação	3º	A1 e A2
		4º	B2 e considerações da ficha 2
3	1 ao 4	5º	C1 e C2
		6º	D3
		7º	E4 e considerações da ficha 3
4	1 ao 4	8º	F1, F2, F3 e F4

As fichas 1, 2, 3 e 4 estão nos correspondentes anexos 7, 8, 9 e 10. Esclarecemos que, a cada encontro, os alunos recebiam a orientação de não alterar suas respostas, após a realização das atividades, mesmo que verificassem por

comparação com as atividades de outros alunos a inadequação de alguma questão. Todas as fichas de atividades foram recolhidas pela pesquisadora no final de cada encontro.

5.3.3.2 O diário de campo

O diário de campo foi o instrumento no qual a pesquisadora registrou todas as observações acerca dos encontros do estudo principal. Nele foram traçadas estratégias para a dinâmica pretendida em cada encontro. Além disso, assentou o acontecido e avaliou os encaminhamentos realizados para modificá-los, quando necessário. Dessa forma, consideramos nosso diário de campo um instrumento de estudo fundamental tanto no aspecto descritivo, pelos registros das ações vividas nos encontros, como também no analítico, por conta das várias observações e reflexões anotadas. Com ele, segundo Oliveira (1998), os “atos c3gnitos de olhar, ouvir e escrever” da pesquisa foram certamente facilitados.

Durante cada encontro, coletamos e organizamos materiais de pesquisa variados, que englobaram registros dos alunos e da pesquisadora e tamb3m material externo ao encontro, como, por exemplo, exerc3cios propostos no experimento para elaborar quest3es, c3lculos referentes às atividades e pesquisas eventuais oriundas das d3vidas dos alunos. Para evitar esquecimentos e obter mais dados para as an3lises, a organiza3o do di3rio seguiu o seguinte roteiro de informa3es:

- data, dura3o e nomes dos participantes presentes no encontro;
- atividades que foram planejadas e as efetivamente realizadas;
- situa3es observadas pela pesquisadora, que n3o foram gravadas;
- atividades, demonstra3es de resultados matem3ticos e explica3es de d3vidas dos alunos realizados no quadro-negro;
- d3vidas da pr3pria pesquisadora e dos alunos, surgidas durante a realiza3o da atividade, com respectivos esclarecimentos aos alunos;
- observa3es feitas ap3s o t3rmino do encontro;
- avalia3o do encontro, procurando responder perguntas como, por exemplo: As atividades foram adequadas e suficientes? O uso da calculadora foi proveitoso? O tempo foi suficiente?

Todas essas anotações visavam a acompanhar, avaliar e reconduzir nosso trabalho de campo e, por isso, nossa preocupação em registrar o maior número possível de informações e situações relevantes que ocorreram nos oito encontros. Esclarecemos que tão importante quanto complementar o diário de campo ao final de cada encontro foi, antes da realização do próximo encontro, ouvir as gravações de áudio e identificar extratos relevantes das falas dos alunos. Isso nos permitiu refletir sobre a ação vivida a cada encontro e ter a possibilidade de redefinir algumas metas, tal como prescreve o método clínico.

5.3.3.3 As gravações em áudio

Para o registro das atividades realizadas pelos participantes, tanto nas individuais quanto nas de grupo, foram utilizados dois gravadores nos encontros. Na maior parte do tempo, gravamos os diálogos relacionados à atividade realizada pelas duplas escolhidas de alunos. Em outros momentos, um dos gravadores foi usado para o registro das discussões que aconteceram durante as explicações e o fechamento das atividades.

Alguns cuidados foram tomados para que as gravações fossem bem aproveitadas, por isso, foi importante passar para os alunos algumas orientações, que foram atendidas sempre que possível. Nas gravações ocorridas com as duplas, os participantes foram solicitados a não falarem ao mesmo tempo. Já nos momentos das discussões entre alunos e pesquisadora e durante as explicações e o fechamento das atividades pela professora-pesquisadora, foi fundamental manter uma ordem para que todos pudessem ser ouvidos e gravados.

A pesquisadora optou por gravar duas duplas, escolhidas aleatoriamente a cada encontro. Num primeiro momento das gravações, os alunos ficavam um pouco tímidos, mas depois esqueciam que estavam sendo gravados, e as falas aconteciam naturalmente. Algumas partes das gravações ficaram um pouco difíceis de transcrever, quando se tratava das discussões ocorridas entre todos os participantes. Nesses momentos, os registros realizados no diário de campo, durante e após os encontros, contribuíram para o resgate de algumas situações.

A transcrição das gravações foi feita exclusivamente pela pesquisadora, o

que não podia ser diferente. Em cada gravação, participavam no mínimo dois alunos, pois eram gravados diálogos de duplas, podendo haver intervenção da pesquisadora ou até de mais alunos. Dessa forma, era fundamental o reconhecimento da voz de cada participante. Além disso, durante a transcrição, a pesquisadora já realizava conexões com registros escritos e anotações feitas no seu diário de campo. Apesar do enorme trabalho, essa possibilidade de iniciar a organização e o cruzamento de dados já na transcrição favoreceu a análise dos dados obtidos.

5.3.4 A dinâmica dos encontros

Para a realização da coleta de dados, solicitamos duas autorizações na Unidade Escolar pesquisada, no que fomos prontamente atendidos. Uma à coordenadora de Matemática, pois se tratava de uma atividade extraclasse de Matemática e a outra ao Diretor da Unidade, para a reserva da sala de aula e a realização dos encontros.

A disponibilidade de espaço físico dessas aulas em turno contrário, aliada à formação do grupo de alunos interessados em participar da pesquisa, tornou possível a realização dos encontros. Todos aconteceram na mesma sala de aula, reservada para as segundas-feiras, sempre no mesmo horário, das 13h às 14:30h. A Tabela 15 apresenta as datas em que realizamos os encontros e o número de participantes presentes.

Tabela 15: Datas e número de participantes de cada encontro

Encontro	Data de realização	Número de participantes
1º	07 - 04	12
2º	14 - 04	12
3º	28 - 04	10
4º	05 - 05	11
5º	19 - 05	10
6º	26 -05	10
7º	09 - 06	12
8º	16 - 06	11

No primeiro encontro, a pesquisadora agradeceu a participação dos alunos e procurou saber sobre os que não compareceram. Inicialmente, teceu explicações e comentários sobre a pesquisa e esclareceu a necessidade de estar ali, coletando dados com eles, que passavam a ser os sujeitos da pesquisa. Enfatizou a importância desses dados e a responsabilidade em retratá-los da forma mais fidedigna possível, por isso, contava com a seriedade da participação de todos. A seguir, pediu autorização aos alunos para gravar suas discussões, no que foi prontamente atendida.

Os participantes receberam a ficha 1, contendo as atividades P1 a P10 e um anexo contendo a tabulação dos resultados destas mesmas questões. Esse anexo foi confeccionado a partir dos dados obtidos no estudo preliminar e ele foi utilizado para os alunos que desejassem tecer comentários sobre o índice de respostas adequadas e inadequadas referentes à cada questão.

Foi solicitado aos alunos que se agrupassem em duplas e respondessem a todas as atividades, acrescentando sempre uma justificativa. Lembramos que as primeiras atividades foram retiradas do estudo preliminar.

No decorrer do 1º encontro, a pesquisadora identificou as questões já realizadas por todas as duplas e, ao verificar que o tempo não seria suficiente para realizar todas as atividades propostas na ficha, interrompeu as discussões e deu sequência à segunda parte do encontro, quando realizou a discussão das atividades P1 a P6 com todo o grupo e encerrou as atividades que foram realizadas.

Avaliando cuidadosamente as ações ocorridas no primeiro encontro, a partir do segundo encontro, a pesquisadora definiu a estratégia a ser seguida, considerando os aspectos utilizados no método clínico:

- retomar o trabalho realizado e as discussões do encontro anterior, com o objetivo de diminuir dúvidas pendentes e reforçar resultados que foram debatidos;
- distribuir e apresentar as atividades do dia, lendo os comandos junto com os participantes, para que dificuldades em relação aos enunciados não interferissem na execução das atividades;
- orientar os alunos nas discussões das atividades, indicando o tempo pré-determinado para a realização das tarefas;
- verificar até que ponto cada dupla tinha caminhado ao término do tempo e definir quais atividades seriam debatidas no mesmo encontro, visto que o

objetivo era discuti-las com o grupo todo, após os alunos terem vivido a experiência didática nas duplas de trabalho;

- fazer considerações sobre as atividades com todos os alunos, discutindo as respostas dadas por cada dupla, procurando esclarecer detalhes nas justificativas, contrapondo as pendências e finalizando com as respostas corretas de cada questão.

Esclarecemos que o último encontro foi diferente dos demais, pois os alunos receberam a ficha 4, contendo quatro atividades, que revisavam os tópicos vistos nos encontros anteriores. O objetivo foi identificar elementos que caracterizassem uma alteração nos descritores de imagem conceitual dos números reais após a realização dos sete encontros. Esse encontro diferenciou-se dos demais, pois a natureza do instrumento foi individual.

É importante acrescentar que a pesquisadora exercia o papel de disparadora dos trabalhos, mediadora das discussões e orientadora de todo o processo, sempre com o objetivo de colher o maior número de informações possível.

5.3.5 Procedimentos de análise dos dados

Como já foi mencionado, ao final de cada encontro, as gravações eram ouvidas e transcritas pela própria pesquisadora antes do próximo encontro. Isso favoreceu a organização e o cruzamento de dados dos registros escritos com as falas dos alunos, pois uma primeira seleção de extratos de gravação e recortes das fichas pôde ser realizada, possibilitando um amadurecimento do processo vivido.

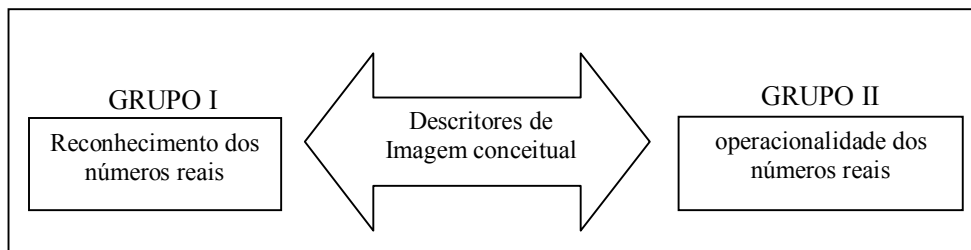
Consideramos que todos esses registros são indicadores da imagem conceitual *evocada* (Tall & Vinner, 1981), pois são fragmentos — falados e escritos — da imagem conceitual que o aluno exterioriza ao acionar o conceito na realização da atividade. Identificamos as características da imagem conceitual por meio dos conjuntos de atributos relevantes e irrelevantes que os alunos utilizaram na elaboração de seus julgamentos. Lembramos que esses fragmentos não necessariamente são coerentes com o conceito em questão e, por isso, podem ser favoráveis ou não para o aprendizado.

Em se tratando do Ensino Médio, consideramos que todos os argumentos utilizados pelos alunos para justificar a racionalidade e a irracionalidade de um número real fazem parte dos descritores da imagem conceitual que o aluno possui desse conceito, conforme foi definido no capítulo 3. Dessa forma, indicamos os descritores como favoráveis ou não ao desenvolvimento do conceito, de acordo com os fragmentos que estão mais próximos ou mais distantes de uma imagem conceitual completa, de acordo com Hershkowitz (1994).

Organizamos a análise dos dados por conjunto de atividades, pois consideramos que estas convergiram para dois grupos distintos. O primeiro grupo trata do repertório de imagens conceituais dos alunos relacionadas à identificação dos números racionais e irracionais, a partir das representações trabalhadas.

As imagens conceituais associadas à operacionalidade dos números reais, no que se refere aos números irracionais da forma \sqrt{n} e às noções matemáticas de densidade e aproximação, são apresentadas no segundo grupo. A Figura 9 esquematiza a organização feita após uma primeira análise geral dos dados, a partir dos quais identificamos as imagens conceituais de cada um desses grupos de atividades.

Figura 9: Esquema que organiza os dados por grupos de atividades



Nas Figuras 10 e 11, respectivamente, encontram-se a organização das atividades escolhidas para análise, que compuseram os grupos I e II.

Figura 10: Atividades do Grupo I

Atividades P2, P5, P6, P7, P8, P12, A1, F1, F2 e F3.

P2 – Questão 2 da sondagem diagnóstica: Escreva a representação decimal dos números a seguir,

fazendo a divisão passo a passo, sem utilizar a calculadora. a) $\frac{1}{8} =$ b) $\frac{50}{7} =$

P5 - Questão 5 do estudo preliminar: Duas determinadas operações feitas com números, numa calculadora de 9 dígitos, mostrou como resultado no visor os números 1,35353535 e 2,12345678.

O que se pode afirmar sobre esses números? Eles são racionais ou irracionais? Por quê?

P6 - Questão 6 do estudo preliminar: O número 0,121221222... é um decimal infinito cujas casas decimais só têm os algarismos 1 e 2 conforme um padrão: aumenta-se em um a quantidade de algarismos 2 separados pelo algarismo 1. Esse número é racional ou irracional? Justifique sua resposta.

P7 - Questão 7 do estudo preliminar: Utilize a calculadora e dê a representação decimal do número

$M = \frac{53}{83}$. a) Que número aparece no visor?

b) O número M é racional ou irracional? Justifique sua resposta.

P8 - Questão 8 do estudo preliminar: Escreva a dízima periódica $5,\bar{4} = 5,44444\dots$ na forma de fração. Apresente as etapas do raciocínio que você utilizou.

P12 - Seja a seqüência infinita (0,4; 0,04; 0,004; ...) de termo geral $a_n = \frac{4}{10^n}$. Agora, considere uma nova seqüência infinita ($S_1, S_2, S_3, \dots, S_n, \dots$) onde $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

(a) Encontre os quatro primeiros termos de S_n .

(b) Qual o limite de S_n quando n tende a infinito? Apresente uma justificativa.

A1 - Questão 1 do terceiro encontro: Observe as frações a seguir, escreva cada uma na sua forma decimal usando calculadora ou o algoritmo da divisão e diga se correspondem a decimais finitos ou dízimas periódicas. Apresente seus argumentos.

a) $\frac{17}{40}$ b) $\frac{39}{140}$ c) $\frac{50}{19}$ d) $\frac{129}{2480}$

F1 - Decida sobre a racionalidade ou a irracionalidade dos números a seguir. Cada decisão deve

ser justificada⁷⁶. a) 0,1234 b) $0,\overline{1234}$ c) 0,1234.. d) 0,1234...n n+1...onde n é natural g) 2,35674126578923

F2 - Quando dividimos dois números inteiros p e q, onde $q \neq 0$, e escrevemos o resultado na forma decimal, que resultados possíveis podemos obter?

F3 - Identifique se os números racionais a seguir são decimais finitos ou dízimas periódicas. a)

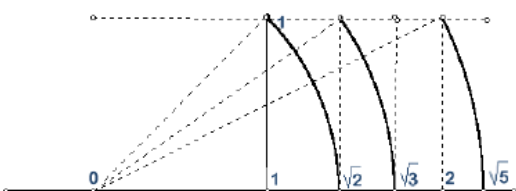
$\frac{15}{154}$ b) $\frac{1387}{80}$ c) $\frac{1}{17}$

⁷⁶ Os itens e e f, por se tratarem dos números irracionais da forma \sqrt{n} , fazem parte do grupo II.

Figura 11: Atividades do Grupo II

Atividades P9, P13, C1, C2, D3, E4, F1

P9) Observe a figura a seguir, onde se mostra a construção dos números da forma \sqrt{n} , onde n é natural positivo.



Entre os inteiros 1 e 2, temos os números $\sqrt{2}$ e $\sqrt{3}$.

Entre os inteiros 2 e 3, temos os números _____

Entre os inteiros 3 e 4, temos os números _____

Entre os inteiros 1 e 100, quantos números não inteiros da forma \sqrt{n} existem? Apresente seu raciocínio.

Os exercícios 1, 2 e 3 devem ser feitos utilizando a tabela do Excel que foi entregue no último encontro e a calculadora.

P13) Considere $N = 2,314$. Encontre dois valores para b , que satisfazem as desigualdades em cada caso:

a) $N - 0,1 < b < N + 0,1$	b) $N - 0,01 < b < N + 0,01$
c) $ b - N < 0,1$	d) $ b - N < 0,01$
e) $N - 0,00001 < b < N + 0,00001$	f) $ b - N < 0,00001$

C1) Calcule $\sqrt{3} + \sqrt{5}$, com erro menor que:

a) 10^{-1}	b) 10^{-2}	c) 10^{-4}	d) 10^{-6}
--------------	--------------	--------------	--------------

C2) Considere $N = \sqrt{11}$. Encontre os valores de b , que satisfazem as desigualdades em cada caso.

a) $ b - N < 10^{-2}$	b) $ b - N < 10^{-5}$
------------------------	------------------------

D3) Encontre os resultados dos itens a seguir e comente sobre cada operação realizada, destacando, facilidades e dificuldades.

a) $\sqrt{2} + \sqrt{8}$	b) $\sqrt{7} + \sqrt{13}$	c) $\sqrt{3} \cdot \sqrt{27}$	d) $\sqrt{15} \cdot \sqrt{15}$
--------------------------	---------------------------	-------------------------------	--------------------------------

E4) Agora, juntos, vamos demonstrar que $\sqrt{2}$ é um número irracional.

F1) Decida sobre a racionalidade ou a irracionalidade dos números a seguir. Cada decisão deve ser justificada. e) $\sqrt{3}$ f) $\frac{1}{3} + \sqrt{3}$

Os grupos de atividades I e II possibilitaram uma rica coleta de informações, por isso eles se coadunam a este perfil de análise. De cada grupo, selecionamos todos os extratos das fichas de atividades e os trechos das gravações considerados relevantes, referentes a estas atividades, tendo em vista o objetivo desta pesquisa.

Tomada essa decisão, apresentamos o desenho de como procedemos na análise dos dados, conectando os dados obtidos nos estudos preliminar e principal e levando em consideração as ferramentas metodológicas escolhidas. Detectamos,

no cruzamento dos dados, os descritores de imagens conceituais dos alunos e os classificamos como favoráveis ou não ao desenvolvimento do conceito de número real com base no estudo realizado nos capítulos 2 e 4 e os aspectos referentes aos atributos relevantes e irrelevantes e seus julgamentos, conforme apontados no capítulo 3.

Além disso, conectamos os dados obtidos dos extratos de fichas de atividades, dos trechos de gravações em áudio e dos registros do diário, obtidos no estudo principal, sempre com respaldo e fundamentação dos estudos realizados ao longo desse trabalho e orientados pelos aspectos inerentes ao método clínico. Dessa forma realizamos a análise das atividades que ficou organizada do seguinte modo, em cada grupo:

- 1º) apresenta os aspectos gerais do grupo, identificando resultados e conteúdos matemáticos que foram discutidos na realização das atividades;
- 2º) indica o esquema didático, relacionando os conteúdos e as noções lógico-matemáticas que sustentam o bloco de atividades;
- 3º) apresenta as atividades, uma de cada vez, identificando sua origem, se foi aplicada também no estudo preliminar ou somente elaborada para o estudo principal.
- 4º) é fornecido, para cada atividade, um estudo prévio por meio de uma tabela que contém o enunciado da atividade, a resposta e os objetivos pretendidos e, no caso da questão pertencer ao estudo preliminar, acrescenta-se ao estudo prévio uma tabulação dos dados organizados em respostas adequadas, inadequadas ou em branco;
- 5º) são identificados atributos relevantes e irrelevantes, sempre que possível, relacionados aos números racionais e irracionais seguidos de uma breve análise dos julgamentos prototípicos e/ou analíticos fornecidos nas respostas dos alunos;
- 6º) no caso de a atividade ter sido aplicada tanto no estudo preliminar quanto no principal, a análise é feita inicialmente com os dados obtidos no estudo preliminar e, a seguir, com os registros obtidos no estudo principal.⁷⁷
- 6º) para as atividades aplicadas somente no estudo principal, são inseridos fragmentos de gravações e de registros escritos dos alunos, obtidos na

⁷⁷ Neste caso, os dois momentos são destacados ao longo da análise.

coleta de dados, que são analisados, objetivando identificar os descritores de imagens conceituais associados aos números reais.

7º) é feita uma síntese ao final de cada grupo de atividades analisadas, caracterizando aspectos recorrentes de pesquisas anteriores, comparando resultados, destacando aspectos peculiares e identificando os descritores de imagem conceitual.

É importante esclarecer alguns códigos que estabelecemos para melhor conduzir a análise dos dados. Os fragmentos retirados das gravações e das fichas de atividades estão situados no texto com recuos laterais, para dar destaque e para melhor visualização. Estes são identificados pela letra G, quando são dados de gravações, ou E, quando são registros escritos das fichas de atividades. Entre parênteses está indicado o aluno que forneceu o correspondente registro, por exemplo, **G** (Thaíssa), indica **trecho de gravação** da aluna **Thaíssa**, e **E** (Denise-Artur), indica **extrato escrito da ficha** feita pela dupla de alunos **Denise e Artur**.

A análise desse trabalho de campo será exposta no capítulo a seguir.