3
Construção de conceitos matemáticos: julgamentos prototípicos, analíticos e imagem conceitual

As ações de um professor devem ter por objetivo planejar, mediar e orientar de forma significativa a aprendizagem do aluno. De acordo com Barufi (1999, p. 30), o professor de matemática

> (...) precisa encontrar situações significativas e motivadoras, com problemas interessantes, a fim de que seus alunos, tentando dar respostas adequadas a esses problemas, consigam estabelecer significados para o conhecimento desejado, compreendendo-o e, portanto, articulando a própria rede. Nessa busca, o professor é essencialmente um pesquisador, pois está formulando suas hipóteses pessoais a respeito da possibilidade que seus alunos têm de construir significados através de situações e problemas propostos por ele.

Perceber aspectos sobre como o aluno constrói seu conhecimento matemático possibilita ao professor um aprimoramento nos processos didáticos, na medida em que alguns caminhos se tornam mais visíveis e adequados para o ensino e a aprendizagem da matemática escolar. Dessa forma, é importante para o professor conduzir essa dinâmica, como resultado da relação professor-aluno. Os métodos de ensino são mais produtivos, quando estão, de alguma forma, sintonizados com os modos de pensar dos alunos. E estes não devem ter uma postura passiva em sala de aula, visto que cada sujeito constrói seu conhecimento.

A construção do conhecimento matemático é um tema muito amplo, com muitos conceitos e muitas teorias enunciadas e discutidas numa vasta bibliografia, seja enfocando o professor, ou tendo como sujeito principal o aluno. Em nosso olhar para o objeto de pesquisa, articulamos os conceitos de *visualização, protótipos, atributos relevantes e irrelevantes e imagem conceitual*, fundamentados principalmente nos estudos feitos por Costa (2002), Hershkowitz (1994) e Tall & Vinner (1981). Esses conceitos foram utilizados por estes autores para analisar como o aluno pensa a atividade matemática. A escolha desse referencial teórico está, portanto, em acordo com o objetivo da nossa pesquisa, que tem seu foco na análise dos registros fornecidos pelos alunos durante a realização de atividades matemáticas sobre os números reais.

Neste capítulo será discutido o processo de construção dos conceitos matemáticos. Além dos autores já citados, dialogamos com autores como Moreira

(2004), que faz uma comparação entre a matemática elementar e a matemática avançada, e Giraldo (2004), que acrescenta aspectos na teoria da imagem conceitual.

3.1
Construção de conceitos matemáticos

O professor, de posse de um conteúdo a ser ensinado e como condutor do processo dinâmico da construção do conhecimento escolar, deve proporcionar oportunidades para que o aluno se torne o agente dessa construção. Para isso, é importante criar um ambiente de discussão com atividades que sejam adequadas, compreensíveis e interessantes. Essa vivência, que parte dos conhecimentos prévios e dos conceitos já vistos, possibilita ao aluno reviver situações, estabelecer relações e conexões com elementos que estavam adormecidos e assim desenvolver e reconstruir esses conceitos. Dependendo da atividade, pode-se até levar o sujeito a elaborar novas ideias que o levarão, por sua vez, a pensar em novos conceitos. Trata-se de um processo que acrescentamos novos conhecimentos aos já existentes, formando uma estrutura que favorece a criação de novas representações e novos esquemas.

Concordamos com Sztajn (1997, p.20) quando ela afirma que construir um conceito “é muito mais do que uma sequência de passos mecânicos para a execução de uma operação e um aluno não forma um conceito em um dia ou ao decorar uma definição. Conceitos são redes de significados, são modelos.”. Perceber e compreender fragmentos dessa rede faz-se necessário para a identificação dos processos cognitivos elaborados pelos alunos, ao realizarem determinadas tarefas. Também possibilita descobrir conexões que os alunos fazem ao compor diferentes imagens, propriedades e características associadas ao conceito com que se está trabalhando.

Essa rede de significados pode ser entendida como um agregado de estruturas de conhecimentos matemáticos, que são conjunções de objetos, ideias e atributos. Estas possivelmente estão conectadas com outras estruturas e, conforme o conhecimento se amplia, novas estruturas são desenvolvidas ou simplesmente modificadas. Dessa forma, surgem novas ligações, acrescentando novas relações às estruturas já existentes. Essas novas relações passam a fazer parte das estruturas existentes com base na semelhança de seus aspectos.

A qualidade dos elementos e das ações utilizadas nesse processo depende do grau de dificuldade do conceito matemático que está em questão. Dessa forma, consideramos relevante trazer uma discussão sobre essa dificuldade para o contexto da matemática elementar e da matemática avançada. Às vezes, esses termos confundem-se com matemática escolar e matemática acadêmica, respectivamente, porém vale acrescentar que há elementos da matemática elementar que não são vistos na escola básica, assim como há conceitos da matemática avançada que devem ser iniciados já no Ensino Médio.

3.2
Matemática elementar e avançada: o caso dos números reais

Na procura de ideias para obter a compreensão dos alunos, é necessário ter por base uma teoria sobre como esse aluno produz seu conhecimento matemático. Em nosso caso, o ponto de partida foi entender a Matemática como um fazer que implica observação, experimentação, investigação, argumentação e descoberta, como bases para uma reflexão mais abstrata.

Diante da complexidade do conhecimento matemático, quanto mais se avança na elaboração de pensamentos abstratos na construção de estruturas formais, mais o conhecimento desloca-se de uma concepção elementar para uma que envolve pensamentos mais sofisticados. Costa (2002) apresenta uma discussão sobre o sentido do termo “pensamento matemático avançado”, por meio dos seus vários aspectos. Declara que, quando os alunos são solicitados a utilizar definições que foram dadas, na busca de dar significados a elas, normalmente eles criam estruturas formais apoiadas por uma variedade de imagens visuais ou de outras naturezas. Esse processo pode acontecer de duas formas diferentes para os sujeitos: ou procuram, na reconstrução dessas estruturas, atribuir um significado mais rico à teoria formal e, neste caso, os conflitos podem ser contínuos para o sujeito; ou concentram-se antes na definição, utilizando-a e repetindo-a sempre que forem solicitados — com isso, as imagens visuais e as intuições ficam em segundo plano. Sobre esta última colocação, a pesquisadora acrescenta que “esta forma de abordagem pode produzir uma imagem formal do conceito capaz de usar as definições e provar teoremas quando se lhes é pedido” (p. 259).

Dessa forma, consideramos que no pensamento matemático avançado, a construção de um conceito formado a partir de definições e teoremas informados pode acontecer de duas formas distintas pelo sujeito: um caminho que envolva a construção de imagens e intuições, num processo mental criativo; e um outro que, manipula as definições e teoremas, aperfeiçoando essas relações num processo simbólico e logicamente orientado para a dedução.

Nesse mesmo artigo, Tall (1991, *apud* Costa, 2002) distingue dois níveis de ensino de Matemática — o elementar e o avançado — e afirma que o movimento do elementar para o avançado implica uma "transição significativa", pois se trata da passagem do descrever para "o definir" e do convencer para "o provar", usando encaminhamentos lógicos baseados em definições.

Abordagens da matemática avançada geralmente não acontecem no Ensino Médio, mas apenas nos cursos superiores. Assim, por exemplo, não se definem os números reais por meio dos cortes de Dedekind e das sequências de Cauchy. Neste nível de ensino, é sugerido que se utilize a medição de grandezas contínuas para se definir o número real ou também qualquer expansão decimal finita ou infinita. Na matemática escolar, de acordo com os PCNs (Brasil, 1998), os números reais são apresentados aos alunos no 4º ciclo do Ensino Fundamental. A orientação dada é que seja feita uma conexão e uma continuidade lógica com outros conceitos que são "considerados" elementares, tais como os números racionais e as medidas em geometria (por exemplo, a diagonal do quadrado, a altura do triângulo equilátero, todas determinadas a partir do teorema de Pitágoras).

É importante acrescentar que, em se tratando do conjunto dos números racionais, as dificuldades ainda são muitas e o aspecto operacional não está bem solucionado, pois os alunos cometem muitos equívocos nas operações com os números decimais e as frações. Moreira (2004, p. 79), em sua tese, no capítulo em que trata da licenciatura e dos conjuntos numéricos[39], conclui que "os racionais são considerados, ao que parecem, objetos suficientemente conhecidos para o trabalho do licenciando em sua futura prática docente escolar". O autor alerta, com base nas pesquisas sobre a prática docente, que a construção dos números racionais, na matemática escolar, pode ser considerada uma das mais complexas.

[39]O pesquisador faz um levantamento extensivo e muito esclarecedor sobre questões que tratam do conhecimento matemático a respeito dos sistemas numéricos e que são vividas pelos professores quando com eles se deparam, direta ou indiretamente, na matemática escolar.

Alguns aspectos dos conjuntos numéricos que necessitam de atenção e de uma adequada recontextualização nas licenciaturas são citados:

> Em N, todo subconjunto (não vazio) possui um menor elemento; em Q_+, isso não acontece;
> em N, a ideia de sucessor tem sentido, em Q^+ não;
> em Q^+, existe uma infinidade de números entre quaisquer dois dados; em N, não;
> em N, a multiplicação "aumenta" e a divisão "diminui"; em Q^+, isso não acontece sempre;
> em Q^+, dados a e b, existe sempre um elemento c, tal que bc=a; em N, isso não acontece sempre. (ibidem, p. 105)

O pesquisador esclarece que, apesar de parecer sem importância do ponto de vista da matemática acadêmica, essas considerações, conforme apontam as pesquisas, estão ligadas a certos tipos de imagens e equívocos que prejudicam o processo de aprendizagem das etapas que se sucedem, na extensão dos conjuntos numéricos.

No estudo dos números reais, deparamo-nos com noções matemáticas que, na sua maioria, são abstratas e não elementares e, conforme o autor bem esclarece, "o conjunto dos números reais é um objeto para a matemática escolar e *outro objeto* para a matemática científica" (ibidem, p. 118). Como objeto da matemática avançada, o conceito número real envolve ideias matemáticas mais complexas, tais como densidade, incomensurabilidade e completude; já como objeto da matemática escolar, são utilizadas para a construção do conceito formas de representação e operações no campo numérico dos números reais, sendo o conceito fundamental para o estudo das funções e das medidas na geometria e na trigonometria.

Dessa forma, o trabalho do docente da Matemática no Ensino Médio envolve o resgate e o aprofundamento das noções que são iniciadas no Ensino Fundamental, a fim de possibilitar um processo de transição da matemática elementar para a avançada.

Conforme apresentaremos no capítulo 4, os livros didáticos ainda não contribuem para esse movimento, pois as noções matemáticas relacionadas ao conceito de número real são ainda pouco exploradas. Além disso, os professores não trazem para a sala de aula abordagens didáticas adequadas, pois a sua formação acadêmica não valoriza aspectos didáticos da matemática escolar. Essa carência é apontada na declaração:

> (...) a apresentação dos reais feita na licenciatura, em que se valoriza enfaticamente a ideia de estrutura abstrata (corpo ordenado completo), em que os números e as operações têm seus significados dados pela estrutura e esta, por sua vez, é constituída através de axiomas, configura, a nosso ver, uma forma de conhecer os reais que se desconecta das questões que se apresentam para o professor de matemática da escola básica. Este, na sua prática docente, terá que se desincumbir da tarefa de discutir com os alunos, ao longo das séries finais do Ensino Fundamental, a necessidade de se trabalhar com "números" que não são razão de inteiros, encarando, a partir daí, uma série de sutilezas, obstáculos e dificuldades de natureza cognitiva, epistemológica ou didático-pedagógica associados à construção dessa nova noção de número. (ibidem, p. 118)

Geralmente, o professor recém-formado chega à escola com uma bagagem de conteúdo muito formal, que é indispensável, mas não é suficiente, visto que não possui uma prática de ensino que tenha abordagens adequadas e necessárias para o dia a dia da sala de aula. Em consequência, muitos professores seguem as orientações dos livros didáticos, sem aprofundamentos e complementações. No caso dos números reais, esse conteúdo costuma ser visto rapidamente ou aceito como já conhecido pelos alunos no Ensino Fundamental. Dessa forma, torna-se também necessária uma ação didático-pedagógica nas licenciaturas que oriente o professor no processo de adaptação dos conteúdos para a sala de aula, de acordo com o segmento de ensino.

A Matemática do Ensino Médio, no que diz respeito ao ensino de números reais (Brasil, 2006), tem a finalidade de apresentar ao aluno a necessidade de ampliar o campo numérico dos racionais, de estimular o uso de aproximações racionais para os números irracionais, de discutir aspectos relacionados a demonstrações de irracionalidade e de facilitar a operacionalidade desses números em diferentes contextos. Moreira (2004) destaca oportunidades existentes no programa da matemática escolar que favorecem o estabelecimento de estatuto de número ao número real, mas enfatiza que essa abordagem tem a sua limitação e é restrita a alguns casos. Apresentamos suas argumentações na íntegra, pois ilustra exemplos relevantes, acompanhados de uma breve análise que enriquece o ensino de números reais na matemática escolar.

> A identificação da representação decimal com o resultado de uma "divisão continuada" é uma das formas eficientes de atribuição da qualidade de "número" às dízimas periódicas. Quando vistos como resultado de uma divisão que se prolonga indefinidamente, na qual percebe-se claramente que nunca aparecerá um resto zero, esses decimais são aceitos como números porque já se parte do número (a fração) para se obter a dízima, ou seja, esta já se apresenta ao aluno, antecipadamente, como número. Outros tipos de referência também contribuem

> para a aceitação de certas formas decimais infinitas como números. O $\sqrt{2}$, por exemplo, é visto como número, mesmo possuindo uma representação decimal infinita não periódica, porque já tem um significado que independe de sua forma decimal: ele é o "número" que elevado ao quadrado dá como resultado o 2. Por outra via, o fato de $\sqrt{2}$ ser a medida do comprimento da diagonal do quadrado de lado 1, também garante o seu estatuto de número. Entretanto, quando retirada de um contexto desse tipo, em que a condição de número já está garantida por outros mecanismos, a forma decimal infinita perde significado e pode se associar a algo anômalo ou misterioso. Pesquisas mostram que, embora os alunos tenham a tendência de acatar, talvez irrefletidamente, os decimais infinitos como números, frequentemente se sentem inseguros ao responder perguntas que "desnaturalizam" essa atitude e penetram, de alguma forma, nos significados desses decimais. (ibidem, p. 132)

O significado de algo anômalo ou misterioso foi também verificado nesta pesquisa. Percebemos insegurança nos alunos ao fazerem julgamentos a respeito tanto dos números reais quando dos racionais.

Quando os estudantes do Ensino Médio são motivados a falar e a escrever a partir de atividades exploratórias sobre os números reais, diferentes aspectos relacionados ao conceito articulam-se, estabelecendo novas relações. Cada contexto, que é prático e específico da atividade, faz parte dessa dinâmica que, a partir de certos usos e significados que são mais frequentes que outros, constitui o modo de entender aquele conceito em questão.

Atividades de diferentes naturezas possibilitam aos alunos interagirem com diferentes demandas as quais, adequadamente monitoradas, favorecem a composição de um repertório, cada vez mais amplo, de significados para tal conceito. Dessa forma, escolhemos uma ferramenta teórica que nos auxiliou a identificar elementos relacionados à compreensão dos conceitos por parte dos alunos, quando estes exteriorizam seus raciocínios por meio de imagens de qualquer natureza.

3.3
Imagem conceitual e definição conceitual

Os termos *imagem conceitual* e *definição conceitual* são utilizados por Tall & Vinner (1981) para explicar o processo cognitivo da formação dos conceitos matemáticos. Identificam aspectos que explicitam como os conceitos matemáticos são compreendidos, por meio de diferentes representações. Os autores focalizam o confronto das noções obtidas pelo sujeito ao longo da vida escolar com as que são favoráveis aos contextos científicos. Declaram que as definições, em contextos científicos, impõem diferentes hábitos de raciocínio necessários à evolução do conceito. Na Matemática, a definição formal está intimamente ligada à noção de conceito, e, em muitos livros textos, de acordo com Castro, Frant e Lima (2000) há uma identificação entre os termos conceito e definição. Em nossa pesquisa, consideramos o termo conceito abrangendo a noção de definição e as várias formas de representação. Concordamos com estes pesquisadores quando declaram:

> Uma visão bastante recorrente é aquela que procura relacionar estes três termos da seguinte maneira: enquanto a representação estaria ligada a diferentes modos de se apresentar ou de se observar o conceito, a definição nos forneceria os seus limites, a sua fronteira. (ibidem, p. 2)

Os diferentes modos de apresentar e de observar o conceito são constituídos por meio de um repertório de imagens, ideias e procedimentos, denominado por Tall & Vinner (1981) de *imagem conceitual*, que é assim definida:

> Usamos o termo imagem conceitual para descrever a estrutura cognitiva total associada ao conceito, que inclui todas as figuras mentais e propriedades e processos associados. São construídas ao longo dos anos por meio de experiências de todo tipo, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece. Durante o processo de desenvolvimento, a imagem conceitual pode não ser coerente o tempo todo. (...) Desta maneira, estímulos diferentes podem ativar partes diferentes da imagem conceitual, desenvolvendo-as de maneira que não possam constituir um todo coerente.[40] (ibidem, p. 152)

A imagem conceitual de um indivíduo é formada por representações verbais e não verbais de vários tipos, que se associam ao nome do conceito. No caso dos números reais, podemos imaginar, por exemplo, uma reta, o número $\sqrt{2}$ (exemplar mais utilizado de número irracional), a palavra incomensurabilidade, o teorema de Pitágoras, as dízimas periódicas, o número 0,123456..., um diagrama de Venn, que apresenta a relação entre os conjuntos numéricos. Enfim, uma variedade de representações, podendo ser coerentes ou não coerentes com a definição formal.

---

[40] No original:
We shall use the term concept image to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. It is built up over the years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures....As the concept image evelops it need not be coherent at all times. (…) In this way different stimuli can activate different parts of the concept image, developing them in a way which need not make a coherent whole.

Para Moreira (2004), detectar nos alunos as imagens conceituais corretas ou não, que constituem seu saber sobre os números reais, é muito importante pois, quando estas são ignoradas no processo pedagógico, correm o risco de se transformarem em obstáculos para a aprendizagem.

Segundo Tall & Vinner (1981), para entender como esses processos ocorrem, com sucesso ou erroneamente, precisamos esclarecer a diferença entre conceitos matemáticos formalmente definidos e processos cognitivos, conforme eles são percebidos e entendidos durante o processo de aprendizagem.

De acordo com os pesquisadores consultados, nem todos os conceitos que usamos na matemática escolar são formalmente definidos, pois alguns são assimilados pela vivência, pelos contextos em que estão situados, por suas propriedades e exemplos e, assim, o indivíduo aprende a identificá-los e a utilizá-los.

No Ensino Médio, muitos dos conceitos trabalhados são introduzidos por meio de uma definição formal, que pode ou não fazer parte da imagem conceitual de cada aluno. Nessa etapa do ensino, consideramos que os conceitos matemáticos devam ser apresentados tanto por uma definição formal adequada, quanto por exemplos e contraexemplos, que devem ser confrontados, sempre que possível, com a definição formal. Giraldo (2004, p. 192) considera que "a forma de operar com o conceito também é constituinte da forma de concebê-lo, sendo portanto um atributo da imagem de conceito[41]". Avaliamos que esta forma de operar o conceito pode ser reconhecida quando os alunos são solicitados, por meio das atividades, a manipular seus exemplos e contraexemplos na busca de respostas para essas tarefas.

Os conceitos, quando retomados, podem sofrer uma alteração em seus significados e ser reinterpretados com ou sem o rigor de uma definição precisa. Usualmente, nesse processo, é dado ao conceito um símbolo ou nome que permite que ele seja comunicado e que ajude na sua manipulação mental. Tall & Vinner (1981) declaram a importância de esclarecer que a estrutura cognitiva que ilustra o significado do conceito é muito maior do que a evocação de um símbolo. Dessa forma, o ensino da Matemática não deve visar apenas à construção formal, mas ao enriquecimento da imagem conceitual de cada aluno. Acrescentamos ainda que:

[41]Imagem de conceito é a tradução dada por Giraldo (2004) para o que traduzimos por imagem conceitual.

> A teoria de imagens de conceito distingue o objeto matemático de ensino do objeto matemático técnico ao estabelecer o enriquecimento da imagem de conceito como objetivo do ensino e ao afirmar que a assimilação da estrutura formal é necessária, mas não suficiente para a aprendizagem. (Giraldo, 2004, p. 204)

Tall & Vinner (1981) definem o termo imagem conceitual *evocada* como qualquer fragmento da imagem conceitual que o indivíduo exterioriza no momento em que esse conceito é ativado, mas esclarecem que esses elementos não necessariamente são coerentes com o conceito em questão. Os pesquisadores chamam de *fator de conflito potencial* uma parte da imagem conceitual que apresenta algum conflito em relação ao conceito. Se esses fatores forem exteriorizados, como consequência de alguma solicitação externa — uma atividade ou uma pergunta — eles são chamados de *fatores de conflito cognitivo*.

Dessa forma, cria-se uma *situação de conflito*, sempre que surgirem aspectos contraditórios em relação ao conceito, a partir dos fragmentos da imagem conceitual evocada que foram estimulados simultaneamente. Giraldo (2004), em sua tese, conceitua conflito como uma situação de dúvidas gerada por uma aparente contradição associada a uma *descrição* que se relaciona a um conceito matemático. O termo *descrição* é definido como qualquer referência ao conceito feita num contexto pedagógico não necessariamente associado à definição formal, mas ao conceito em si.

Com base nos resultados obtidos, Giraldo (2004, p. 191) declara que "... a vivência de conflitos surtiu efeitos positivos significativos (...) e em diversas ocasiões, as situações de conflito motivaram os estudantes a adotar atitudes investigativas, na busca da compreensão teórica mais profunda".

O pesquisador esclarece que o termo conflito sofreu evoluções ao longo de seus estudos a partir de outras reflexões teóricas e define: "identificamos por meio do termo *conflito* um processo particular de desenvolvimento de imagem de conceito, portanto uma estrutura inerente à própria dinâmica da imagem de conceito"[42] (ibidem p.75). Com isso, o sentido do termo conflito para Giraldo (2004) não é o mesmo definido por Tall & Vinner (1981). Estes consideram que uma situação de conflito é algo a ser superado.

Os descritores de imagem conceitual que emergem durante atividades e discussões podem sugerir, segundo Tall (1988), caminhos a seguir no ensino e na

[42] Grifos do autor

aprendizagem desse conceito, mas o autor alerta que uma abordagem que valorize definições e teoremas só deve ser utilizada se os alunos já tiverem imagens conceituais que os tornem capazes de lidar com as formalidades. Por isso, essa teoria enfatiza a necessidade de se ter uma imagem conceitual bem formada, para que a definição formal faça sentido.

O papel das definições no ensino da Matemática merece atenção especial, principalmente no que se refere à linguagem utilizada, pois no uso cotidiano, a maior parte das palavras tem significados diferentes. Definir com acuidade os termos relacionados a um conceito tem um papel relevante no pensamento matemático, pois possibilita maior clareza para refletir, exteriorizar e assimilar aspectos matemáticos relacionados a este determinado conceito, evitando ambiguidades. Por isso, os alunos necessitam vivenciar situações não apenas para usar as definições, mas também para analisar e para criar as suas próprias definições, visto que é na manipulação dos termos que o contexto pode ser afetado, se um significado for atribuído de forma equivocada.

Tall (1988) declara que as definições começam a ser utilizadas, no sentido mais técnico, numa "fase final do Ensino Médio"[43], com alguma variação entre países. Destacamos o que Tall & Vinner (1981, p. 152) dizem sobre definição conceitual:

> A definição conceitual (se o indivíduo a possuir) é um assunto diferente. Consideramos o termo *definição conceitual* como sendo uma forma de palavras usadas para especificar esse conceito. Pode ser aprendida por um indivíduo de forma mecânica, ou de forma mais significativa e relacionada em maior ou menor grau ao conceito como um todo. Também pode ser uma reconstrução particular feita pelo aluno a partir de uma definição. Neste caso, o aluno emprega a forma de palavras para dar sua própria explicação da imagem conceitual (evocada ou trazida à lembrança). A definição conceitual pode ser dada ao aluno ou construída por ele próprio, mas em ambos os casos, é possível que o aluno faça modificações de tempo em tempo. Desta maneira, uma definição conceitual *particular* pode ser diferente de uma definição conceitual *formal*, sendo esta última uma definição conceitual aceita pela comunidade matemática em geral.[44]

---

[43] No original, "the upper age range in the secondary school"

[44] No original:
The definition of a concept (if it has one) is quite a different matter. We shall regard the *concept definition* to be a form of words used to specify that concept. It may be learnt by an individual in a rote fashion or more meaningfully learnt and related to a greater or lesser degree to the concept as a whole. It may also be a personal reconstruction by the student of a definition. It is then the form of words that the student uses for his own explanation of his (evoked) concept image. Whether the concept definition is given to him or constructed by himself, he may vary it from time to time. In this way a *personal* concept definition can differ from a *formal* concept definition, the latter being a concept definition which is accepted by the mathematical community at large.

Vinner (1991) afirma que a definição pode ser gradualmente melhorada, mesmo que ainda não seja concisa e precisa na linguagem, se a imagem conceitual estiver bem formada. Tall (1998) alerta que as pesquisas sobre conflitos cognitivos sugerem que não é sensato esperar que os alunos sejam capazes de argumentar logicamente a partir da definição conceitual, sem que surjam interferências de sua imagem conceitual. Vinner (1983), no mesmo caminho, afirma que, para utilizar conceitos, o aluno precisa de imagens conceituais e não de definições conceituais, pois normalmente estas ficam esquecidas e aquelas são evocadas.

Dessa forma, a imagem conceitual não deve ser obtida exclusivamente da definição formal de um conceito, como normalmente acontece nas disciplinas oferecidas pelos departamentos de Matemática das universidades, em que os conceitos geralmente são desenvolvidos a partir da lógica formal. Ainda sobre a importância da imagem conceitual no processo de formação do conceito, Tall (1998) acrescenta que no resgate de um conceito, em um novo contexto, normalmente a imagem conceitual responde a essa tarefa, com toda a bagagem implícita e explícita que foi formada em situações anteriores. Também declara que "se a imagem é construída com base em experiências que estejam em conflito com a definição formal, isto pode levá-los a respostas que estão em contradição com a teoria formal"[45] (ibidem, p. 3).

Damico (2007), em sua tese, em entrevista aos alunos de licenciatura, pergunta o que é um número racional. O objetivo não é verificar se sabem ou não a definição, — pois, segundo o pesquisador, ter memorizado a definição de um conceito não é garantia, que o sujeito tenha o conceito de fato construído em sua memória — mas identificar se a imagem conceitual está bem construída. Dos 15 participantes, 14 declararam não se sentirem preparados para ensinar números racionais ou frações e o pesquisador percebeu, pelos dados obtidos, que

> a maioria dos alunos entrevistados é consciente de que existem métodos de ensino que superam em eficácia o ensino tradicional, mas, em contrapartida, reclamam não terem discutido essas possibilidades didáticas durante o processo de formação" (ibidem, p. 245).

Podemos observar nessas pesquisas a valorização do conceito de imagem conceitual em detrimento à definição conceitual e um consenso em relação à

[45] No original:
If the image is built on experiences that conflict with the formal definition, this can lead to responses which are at variance with the formal theory.

necessidade de enriquecer a imagem conceitual para uma melhor compreensão da definição formal.

> A grande variedade de imagens conceituais individuais sugere que não é um simples caso de transformar o conhecimento matemático num conhecimento formal. A alternativa é dar aos estudantes experiências ricas, a fim de que eles sejam capazes de formar um conceito mais coerente. Este último não é tão fácil como parece, já que envolve um equilíbrio entre a variedade de exemplos e contraexemplos necessários para obter uma imagem correta e a complexidade que pode aumentar a demanda cognitiva a níveis inaceitáveis[46] (Tall, 1988, p. 40).

Convém observar, de acordo com Tall (1988), que, ao fornecer essas experiências ricas para formar um conceito mais coerente, é necessário criar situações que gradativamente aumentam o grau de dificuldade e deve-se evitar um demasiado número de exemplos, pois isso pode acarretar outros problemas cognitivos.

Voltando a nossa pesquisa, consideramos que, enquanto os alunos encontrarem obstáculos para responder questões relacionadas aos racionais — como, por exemplo, que não existe um menor número racional no intervalo (0, 1], conforme observamos em Damico (2007) e Igliori & Silva (1998) — a imagem conceitual de número racional não estará bem formada para eles e, portanto, o objeto matemático 'número racional' ainda não estará adequadamente construído. Essa dificuldade é transferida para o momento em que o conteúdo números reais é novamente retomado. É importante que nesse retorno, que tem como objetivo ampliar o universo numérico do aluno, sejam consideradas essas limitações existentes no conceito de número racional e seja possível ao aluno uma retomada nas ideias matemáticas inerentes aos racionais. Isso possibilita também solucionar problemas passados e favorece seu desempenho no novo campo numérico que se apresenta, na formação da imagem conceitual de número real.

Considerando os aspectos relacionados a esta ferramenta teórica, acreditamos que, em uma pesquisa com alunos do Ensino Médio, o enfoque deva direcionar-se à imagem conceitual que os alunos possuem e ao que podem alcançar. Vimos nas pesquisas apresentadas no capítulo 2, e no estudo preliminar realizado e que será apresentado neste trabalho, que apesar de os estudantes trabalharem com

[46] No original:
The sheer variety of individual concept imagery suggests that it is not simply a case of passing on mathematical knowledge in a formal way. The alternative is to give the students richer experiences so that they are able to form a more coherent concept. The latter is not as easy as it sounds, as it involves a balance between the variety of examples and nonexamples necessary to gain a coherent image and the complexity which may increase the cognitive demand to unacceptable levels.

os números reais durante quase todo o Ensino Médio, a grande maioria não sabe se expressar sobre o que é um número real[47]. Tal constatação é bastante razoável, pois a imagem conceitual desses alunos em relação ao conceito de número real é ainda pobre, considerando que as atividades propostas sobre esse campo numérico não favorecem um enriquecimento de imagens relacionadas às noções que constroem o conceito, como a densidade, a incomensurabilidade e a completude.

Na identificação dos aspectos da imagem conceitual relacionados ao conceito de número real, observamos que determinados exemplos utilizados pelos alunos são mais recorrentes do que outros. Ao analisarmos as justificativas fornecidas nas atividades, focalizamos as características apresentadas pelos alunos no confronto dos exemplos das atividades propostas pela pesquisa com os exemplos conhecidos dos seus repertórios. Esses aspectos estão relacionados ao que Hershkowitz (1994) define como *fenômeno prototípico*.

3.4. Categorias e protótipos

Nos processos cognitivos, categorizar é uma das possibilidades de estruturar as informações que são recebidas. Neste contexto, de acordo com Lima (2010), a categorização procura refletir a organização da estrutura informacional de uma pessoa sobre determinado assunto e afirma:

> Todas as vezes que vemos alguma coisa como um tipo de coisa, ou como parte de alguma coisa, nós estamos categorizando. Isso ocorre, principalmente, pelas características oriundas das similaridades e diferenças existentes entre conceitos, dentro de determinado contexto. (ibidem, p. 110)

Na aprendizagem da Matemática, categorizamos quase que o tempo todo, pois é necessário organizar logicamente os dados recebidos e fazer conexões com os já categorizados e que de alguma forma estão ligados a alguma estrutura. Essas informações recebidas possuem características, que chamaremos de *atributos*. Os graus de relevância dessas características dependem do nível em que estão organizadas em torno de um cognitivo exemplar, sendo então incluídas ou não pelos sujeitos, e ordenadas, produzindo o que se conhece como efeitos de protótipo (Lakoff, 1987; Taylor, 1989 *apud* Duque, 2001).

[47] Referimo-nos aqui às formas utilizadas no Ensino Médio.

De acordo com Gardner (1996 *apud* Lima, 2010, p. 373), "as categorias têm uma estrutura interna, centrada em protótipos ou estereótipos, e outros exemplares são definidos como mais ou menos periféricos, dependendo do grau em que eles compartilham características cruciais com o protótipo central".

Em nossa pesquisa, os protótipos serão considerados pontos de referência cognitiva, isto é, o que o sujeito considera serem os melhores exemplares de uma determinada categoria (Rosch, 1978). É importante ressaltar que os protótipos não constituem por si só uma teoria de representação das categorias. Ao mesmo tempo em que os exemplos protótipos serão utilizados para identificarmos características de uma determinada categoria, os contraexemplos também serão, pois exercem um papel importante neste processo, uma vez que apontam quais aspectos não foram contemplados, acarretando que deixassem de ser exemplos positivos da mesma categoria.

Todo esse processo de identificação e análise foi feito com base nos registros falados e escritos, que foram exteriorizados pelos alunos na realização de atividades matemáticas. Estes apresentaram, na sua maioria, o aspecto visual do número real, por meio de três diferentes representações: as frações, os números decimais finitos e infinitos e as raízes quadradas irracionais.

Partimos de pressuposto de que a visualização é parte integrante do processo de desenvolvimento dos conceitos matemáticos apresentados na escola básica. O conceito é construído à medida em que são dados exemplos e contraexemplos relacionados ao conceito em questão. Concordamos com Hershkowitz (1994), quando afirma que "não podemos formar uma imagem de um conceito e de seus exemplos sem visualizar seus elementos"[48]. É a partir dos exemplos iniciais e dos contraexemplos que imaginamos novos exemplos. Por outro lado, Vinner (1993, *apud* Costa 2002) chama atenção para a possibilidade de um obstáculo quando afirma que "os elementos visuais podem empobrecer a imagem conceitual". Se forem fornecidos exemplos restritos a algumas poucas situações, o aluno só irá basear seus julgamentos nas imagens formadas em sua interação nestas situações, o que poderá determinar que *atributos irrelevantes* sejam considerados válidos para determinar se um exemplar é ou não um número real.

[48] O termo imagem de conceito a que a pesquisadora se refere é o mesmo que imagem conceitual.

3.4.1
A importância da visualização

A visualização é uma etapa importante no processo de construção e exploração dos conceitos matemáticos, apesar de, no ensino da Matemática, a preocupação maior acontecer na geometria. Por meio da visualização dos exemplos numéricos ou das imagens formadas, é possível observar, comparar e descrever semelhanças e diferenças dos exemplares. Nesse processo, o aluno constrói uma imagem mental, que o auxilia na identificação de características figurais e até conceituais, dependendo do grau do seu conhecimento. Dessa forma, é importante a escolha de situações que favoreçam a formação de boas imagens que possam ser utilizadas para ensinar conceitos matemáticos elementares e até avançados.

Assim como Costa (2002), consideramos a visualização um processo que possibilita a construção de conceitos matemáticos, facilitando a comunicação das ideias e a identificação dos *atributos* envolvidos. Nesse processo, "as representações mentais ganham existência" (Dreyfus, 1991 *apud* Costa, 2002, p.262), ou seja, são formadas imagens que o sujeito utiliza em seus julgamentos a respeito de um conceito. Como a visualização é um aspecto relevante da nossa pesquisa, apresentamos um modelo de pensamento visual-espacial da pesquisa de Costa (2002), que distingue três modos diferentes de reconhecimento:

- resultante da percepção;
- resultante da manipulação de imagens e construção de relações entre imagens; e
- relacionado à exteriorização do pensamento.

O primeiro é um modo inicial que poderá ser construído pelo sujeito partindo das sensações que recebe. O sujeito, durante a experiência, organiza a informação, possibilitando a construção e o resgate de imagens. Nesse reconhecimento visual, é possível interpretar e identificar objetos, modelos e processos. Pode também realizar as primeiras inferências intuitivas sobre conceitos.

A segunda forma de pensamento visual-espacial provoca abstração reflexiva e intuições secundárias[49], que levam o sujeito a descobrir relações entre imagens e resultados. Dessa forma, esse tipo de pensamento faz comparações, transformações, transfere propriedades, cria novos modelos que possibilitam novas formas de ver

[49] Intuições que são desenvolvidas após uma formação sistemática.

um objeto. Essa dinâmica do processo origina generalizações.

O terceiro modo, relacionado à exteriorização do pensamento, está ligado ao levantamento de conjeturas, à construção de argumentação que possibilita fazer descrições verbais da dinâmica mental que foi vivenciada. A linguagem nesse caso é fundamental, pois é necessário decodificar as imagens visuais recebidas na forma simbólica e associar representações diferentes de um mesmo objeto. Na comunicação dessas imagens, os sujeitos constroem esquemas, desenhos e novas representações.

Consideramos que esses três eixos explicam as diferentes formas de como o pensamento visual-espacial auxilia na compreensão dos conceitos e ajudam-nos, fornecendo indicadores de ações, apresentadas pelos alunos, tanto no estudo preliminar quanto no estudo principal desta pesquisa. Essas ações foram diagnosticadas por meio dos *atributos* que destacamos das respostas fornecidas nas atividades, quando os alunos as justificavam.

3.4.2
Atributos relevantes e irrelevantes

Consideramos na matemática elementar, que as estruturas — as redes de significados — formadoras dos conceitos podem ser constituídas por meio de uma conjunção de *atributos críticos*, de acordo com Hershkowitz (1994, p. 47):

> Cada conceito possui um conjunto de atributos críticos (aspectos relevantes) e um conjunto de exemplos. Todos os exemplos do conceito são matematicamente equivalentes, no sentido de que eles satisfazem a definição do conceito e contêm todos os seus atributos críticos, mas eles são diferentes uns dos outros visualmente e psicologicamente.

Visualmente, uma vez que se baseiam em aspectos meramente visuais do exemplo; psicologicamente, visto que são provenientes de estruturas mentais diversas. Segundo a pesquisadora, qualquer exemplo positivo do conceito deve satisfazer todos os atributos críticos, mas um conceito também possui atributos não críticos, que são aqueles que têm apenas alguns dos exemplos positivos. Como exemplo, no caso dos números racionais, citamos os atributos, "pode ser representado como uma divisão de números inteiros" e "ser um número decimal finito". O primeiro é um atributo crítico de número racional, enquanto o segundo é um atributo não crítico de número racional, pois há números racionais que não são decimais finitos.

Esclarecemos que em seu artigo, a pesquisadora focaliza o ensino da Geometria, entretanto, assim como Hershkowitz (1999) utilizou a mesma teoria para investigar a construção do conceito de função, nossa pesquisa aplica esta ferramenta teórica para identificar elementos da imagem conceitual dos alunos relacionados aos números reais. Neste caso, utilizaremos os termos *crítico e não crítico*, respectivamente, por *relevante e irrelevante*. Decidimos utilizar os termos relevante e irrelevante, também utilizados pela autora, em função do maior uso na literatura e pela facilidade de interpretação, uma vez que são utilizados para esclarecer o sentido de crítico e não crítico. A própria pesquisadora esclarece em notas de rodapé:

> Atributos críticos (relevantes) são aqueles atributos que um exemplo deve ter de modo a ser um exemplo de determinado conceito. Atributos não críticos (irrelevantes) são aqueles atributos que apenas exemplos particulares possuem. (Hershkowitz, 1994, p. 68).

A definição é formada por um conjunto mínimo de atributos relevantes, que são suficientes para definir o conceito. Isto será utilizado em nossa pesquisa para identificarmos exemplos positivos e os negativos — os contraexemplos — do conceito. Os exemplos protótipos de um conceito, "geralmente são o subconjunto de exemplos que possui 'a maior listagem' de atributos – todos os atributos críticos do conceito e mais ainda aqueles atributos (não críticos) específicos que possuem fortes características visuais" (Hershkowitz, 1994, p. 17). Em outras palavras, o fato de alguns exemplos serem mais representativos para os alunos do que outros faz que considerem certos atributos irrelevantes como mais significativos para julgar se um dado exemplar é um exemplo positivo ou negativo do conceito, o que acaba por determinar que alguns atributos irrelevantes sejam considerados na hora do julgamento, acarretando erro.

Quando os alunos decidem se um determinado atributo pode ser incluído ou não numa categoria conceitual, possivelmente eles fazem comparações com seus exemplos protótipos e não se baseiam na definição matemática relacionada àquele conceito. Herskowitz (1994) afirma que, na maioria das vezes, os alunos usam atributos irrelevantes para fazerem tal comparação, pois se baseiam nos atributos específicos do exemplo protótipo, quando deveriam utilizar os atributos relevantes que caracterizariam o conceito em questão.

Dessa forma, quando identificamos os atributos relevantes e irrelevantes relacionados a um conceito, que emergiram durante as atividades feitas pelos alunos, tornamos possível, por meio dessa leitura, revelar os descritores que denunciam seus julgamentos, os quais podem fundamentar-se somente em exemplos protótipos ou também podem utilizar-se de aspectos lógico-cognitivos.

3.5
Julgamentos prototípicos e analíticos na formação da imagem conceitual

Herskowitz (1994) afirma que o exemplo protótipo é a base para julgamentos prototípicos que são exteriorizados quando o aluno utiliza este exemplo como modelo para suas justificativas. A pesquisadora apresenta dois tipos de julgamentos prototípicos baseados em elementos puramente visuais, conforme (Vinner & Hershkowitz, 1983 *apud* Hershkowitz, 1994). No primeiro, a referência usada é um exemplo protótipo e é aplicado o julgamento visual para outros exemplos, como quando o aluno afirma que $\frac{\pi}{6}$ é um número racional, pois o visualiza como uma fração. No outro julgamento prototípico, o aluno também usa o exemplo protótipo como referência, porém o julgamento é feito com base nos atributos próprios do protótipo, por exemplo, quando o aluno afirma que o número 0,121221222 ... — decimal infinito que apresenta uma seqüência crescente de algarismos 2 — é um número racional, porque apresenta um padrão.

Nestes dois tipos de julgamento, o aspecto visual é o que fundamenta a escolha. Herskowitz (1994, p. 18) afirma que os atributos irrelevantes do exemplo protótipo, normalmente exercem uma forte influência visual, e "eles são atingidos primeiro e então passam a atuar como perturbadores" nesse processo.

Um terceiro julgamento, resultado de um processo lógico-analítico, pode ser feito pelos alunos. Nesse caso, eles utilizam-se de resultados matemáticos ou da própria definição formal para julgar os exemplares e categorizá-los. A pesquisadora declara que "existe alguma evidência de que a construção da imagem conceitual seja uma mistura de processos visuais e analíticos" (ibidem, p. 19) e esta afirmação é corroborada pelos resultados analisados nesta pesquisa. Ela identificou mudanças de comportamento de um caso para o outro, pois alunos e professores que utilizaram julgamentos analíticos corretos falharam em outra situação quando realizaram um julgamento prototípico.

Esses julgamentos prototípicos são formadores da imagem conceitual de cada aluno, que pode ser completa, parcial ou incorreta. Uma imagem conceitual parcial ou ainda não possui todos os atributos relevantes necessários ao conceito ou inclui alguns atributos irrelevantes. Uma imagem conceitual incorreta inclui atributos não pertencentes à definição do conceito.

Essas considerações explicam em parte que "os elementos visuais podem empobrecer a imagem conceitual" (Vinner, 1993 *apud* Costa 2002), conforme destacamos neste capítulo. O julgamento visual através dos exemplos protótipos pode não esgotar todos os exemplos relacionados ao conceito. Dessa forma, segundo Herskowitz (1994) é desejável que os alunos baseiem suas justificativas nos atributos críticos e superem as tendências visuais que os levam a cometer equívocos nas categorizações. A pesquisadora conjectura, no entanto, que o processo real de aprendizagem dos conceitos deve estar entre esses dois eixos de julgamentos — algum processo que faça o aluno se apropriar de todos os atributos críticos, pela aprendizagem de tentativa e erro, obtendo retornos em cada tentativa executada.

Nossa pesquisa apresenta possibilidades de estratégias didáticas que promovem um movimento positivo na imagem conceitual de número real, pois as atividades trabalhadas estimulam a construção de exemplos e contraexemplos, enriquecendo formas de representação, operacionalidade e relações que os alunos venham a construir nessa rede de significados. Nessa perspectiva, a pesquisa imbui-se de um caráter de intervenção, característica coerente com o método escolhido.