2
Números Reais: o que dizem as pesquisas?

Este capítulo apresenta a revisão bibliográfica sobre o ensino e a aprendizagem dos números reais que realizamos, com o objetivo de conhecer o panorama do assunto investigado e, dessa forma, atualizar o estado da arte deste tema nos círculos acadêmicos e nas escolas.

As fontes utilizadas foram dissertações, teses[3], livros didáticos de Matemática do Ensino Superior, artigos de periódicos e de anais de congressos de educação matemática. São pesquisas nacionais e internacionais, que abordam metodologias utilizadas na construção das ideias ou de conteúdos matemáticos relacionados aos números reais, tais como: incomensurabilidade, densidade, completude, expansões decimais infinitas e sequências.

Essa etapa da investigação contribuiu para delimitar nosso tema e definir o objetivo desta pesquisa, assim como para elaborar as questões norteadoras do trabalho de campo e auxiliar a análise dos dados, principalmente na comparação com as pesquisas estudadas.

Por conta da diversidade de aspectos encontrados nessas pesquisas, em relação ao público alvo, aos procedimentos metodológicos, ou ainda relacionados a conteúdos, decidimos organizar este capítulo a partir da proximidade entre os aspectos abordados e, na medida do possível, levando-se em conta a ordem cronológica da publicação das pesquisas.

Além do caráter bibliográfico deste capítulo, ao mapearmos as produções realizadas, tivemos como objetivo dialogar com os autores, buscando contribuições para nossa pesquisa, tanto de aspectos metodológicos como de sugestões de atividades propostas nos instrumentos de coleta de dados. Por isso, ao longo desta revisão bibliográfica, destacaremos os obstáculos enfrentados por alunos e futuros professores relacionados aos números reais, bem como as sugestões apresentadas nas leituras que visam a melhorar o ensino e a aprendizagem desse conteúdo, procurando enfatizar questões relacionadas ao Ensino Médio.

[3]Grande parte das dissertações e teses foi obtida pelo sistema on-line das bibliotecas das universidades.

2.1
Pesquisas diagnósticas sobre números reais

A pesquisa mais reportada em artigos e trabalhos acadêmicos no que diz respeito aos números reais foi realizada por Fischbein et al. (1995), com 62 alunos dos níveis 9 e 10[4] e 29 futuros professores de Matemática. Nela, os pesquisadores afirmam a pouca atenção dedicada ao ensino de números irracionais na matemática escolar e acrescentam que, neste nível de escolaridade, essa disciplina é essencialmente concebida como um conjunto de técnicas de resolução. Declaram que, nas pesquisas anteriores realizadas por este mesmo grupo[5], identificaram como são vagas e frágeis as noções matemáticas dos futuros professores, principalmente em relação aos conjuntos numéricos.

Os pesquisadores propuseram as seguintes questões, ao realizarem esse estudo: *As dificuldades intuitivas relacionadas a números irracionais que apareceram na história da Matemática também impedem, nos dias de hoje, a verdadeira compreensão dessa classe de números? Como a idade e a formação matemática influenciam na compreensão e na utilização desses números?*

O objetivo do trabalho, então, foi investigar o conhecimento que alunos do ensino secundário e futuros professores de Matemática detêm sobre números irracionais. Os autores partiram dos pressupostos de que existe uma lacuna no ensino em relação ao conjunto dos números irracionais e que seu conceito é intuitivamente difícil, por conta das noções de incomensurabilidade e de densidade. Fischbein et al. (1995, p.2) destacaram:

> Como seria possível passar dos números racionais para o conjunto dos números reais sem descrever o conjunto dos números irracionais? Os números irracionais são uma parte do sistema e, sem eles, o conceito de número real é incompleto. Se negligenciarmos os números irracionais, todo o sistema desaba. É o que acontece hoje. [...] Na verdade, o conceito de número irracional é encontrado principalmente em conexão com alguns exemplos — como o número π ou as raízes de números como 2 ou 3.[6]

---

[4] O equivalente aqui a alunos da 1ª e da 2ª séries do Ensino Médio.
[5] Com a participação de Dina Tirosh.
[6] No original:
How would it be possible to pass from the rational numbers to the set of real numbers without describing the set of irrational numbers? The irrational numbers are a part of the system and without them the concept of real numbers is incomplete. It suffices to neglect the irrational numbers and the whole system falls apart. This is what happens today.[…] As a matter of fact, the concept of irrational numbers is encountered mainly in connection with a few examples — like π or the roots of numbers like 2 or 3.

Fischbein e colaboradores (op. cit.) esclareceram que a demora histórica em formalizar rigorosamente a teoria dos números reais expressa não apenas dificuldades formais, mas também obstáculos intuitivos. Citaram como um dos exemplos, que pode parecer estranho, o fato de o conjunto dos números racionais, embora denso, não ser suficiente para representar todos os pontos da reta. O outro é aceitar que duas grandezas possam ser incomensuráveis. Utilizaram na pesquisa um questionário contendo a lista com os números π, $-\frac{22}{7}$, 0,12122..., $3\sqrt{8}$, 0,0555..., $\sqrt{16}$ e 34,2727.... e perguntaram aos participantes se cada exemplar apresentado é um número, e também se cada número é "racional, irracional ou real".

É importante destacar que as dízimas infinitas dessa lista de números não foram esclarecidas pelos pesquisadores nas perguntas, porém, analisando as tabulações, nas quais as respostas corretas foram identificadas, percebemos que o número 0,12122... foi classificado como irracional, e que os números 0,0555... e 34,2727... foram considerados racionais. Dessa forma, concluímos que os autores consideraram que cada número decimal infinito utilizado na pesquisa deveria seguir o suposto padrão de formação. Como exemplo, destacamos a Tabela 1 que mostra a tabulação em dados percentuais dos resultados obtidos para o número 0,0555.... O símbolo (*) indica as respostas corretas. Nesse caso, 0,0555... é um número, é racional e é real.

Tabela 1: Tabulação dos dados obtidos dos participantes sobre o número 0,0555...

Tabela V				
Percentual de respostas certas e erradas				
0,0555...	É um número*	Racional*	Irracional	Real*
nível 9	83	50	23	13
nível 10	97	53	25	41
futuros professores	100	97	-	83

Fonte: Fischbein et al. (1995) – tradução nossa

A metade dos participantes do nível médio reconheceu 0,0555... como um número racional e um quarto desses alunos consideram-no irracional. Vale destacar que a maioria dos alunos do nível médio (níveis 9 e 10) não o classificou como número real. Apesar de a maior parte dos participantes ter identificado este número como racional, o mesmo não aconteceu com o número 34,2727..., conforme mostra a Tabela 2.

Tabela 2: Tabulação dos dados obtidos dos participantes sobre o número 34,2727...

Tabela VII				
Percentual de respostas certas e erradas				
34,2727...	É um número*	Racional*	Irracional	Real*
nível 9	83	83	70	13
nível 10	84	13	56	44
futuros professores	97	59	28	83

Fonte: Fischbein et al. (1995) – tradução nossa

A maioria dos alunos do nível 9 classificou o número em questão como racional e irracional, mas não como real. E no nível 10, poucos o reconheceram como um exemplo de número racional. No grupo dos futuros professores, 28% classificaram-no como irracional.

Nessa mesma pesquisa, Fischbein et al. (1995) solicitaram dos participantes definições sobre o que é número racional, número irracional e número real. Observaram a reação dos participantes da pesquisa, em questões que exploraram atitudes intuitivas com relação à densidade e à incomensurabilidade[7]. Além disso, perguntaram sobre a relação existente entre o eixo numérico e os números reais, irracionais e racionais. Constataram nesta pesquisa que a maioria dos estudantes tem ideias confusas e inadequadas sobres os conceitos de números racionais e irracionais e sobre a relação entre eles. No que se refere ao histórico intuitivo, foi surpresa para os pesquisadores constatar que os participantes não se surpreenderam com os dois fatos investigados: segmentos podem ser incomensuráveis e, em um intervalo, existe uma infinidade de números racionais e uma infinidade de irracionais.

No mesmo viés, Igliori & Silva (1998) realizaram um estudo comparativo entre alunos iniciantes e finalistas de um curso universitário na área de ciências exatas, sobre a concepção de números reais. Para isso, aplicaram um questionário, composto por nove questões, para 36 alunos principiantes do curso de Computação e 14 alunos do último ano do curso de Matemática. Um objetivo foi o de investigar que concepções errôneas apontadas em estudos diagnósticos de pesquisas realizadas em outros países, inclusive a pesquisa de Fischbein et al. (1995), eram também concepções dos alunos pesquisados; outro foi o de avaliar quais dessas persistem após um estudo sistemático de número real; por isso, optaram também pela escolha de participantes concluintes do curso de

[7] Em relação à incomensurabilidade, duas perguntas foram realizadas: *1) É sempre possível achar uma unidade comum para dois segmentos de reta AB e CD de comprimentos diferentes?; 2) É possível achar uma unidade comum para o lado e a diagonal de um quadrado?*

Matemática. Nessa pesquisa, os pesquisadores apresentaram um breve histórico da evolução do conceito de número real e conceitos afins e, em consonância com Fischbein et al. (1995), destacaram:

> O processo de elaboração do conceito de número real foi conflituoso, uma vez que esse conceito traz, no seu bojo, noções que, durante séculos, criaram dificuldades de ordem filosófica. Noções como: incomensurabilidade de grandezas, de infinito atual e potencial, de contínuo, de limite, etc. (Igliori & Silva, 1998, p.1)

Levando em conta as dificuldades que foram registradas na pesquisa, os autores enfatizaram a necessidade de novas abordagens e metodologias de ensino de números reais, pois são vários os aspectos a serem analisados, a partir das concepções apresentadas nas justificativas dadas pelos alunos. Ressaltaram também a importância de modificar o que for inadequado nas explicações dos estudantes, sempre que for necessário.

Nas questões formuladas no questionário, os pesquisadores solicitaram dos alunos a classificação do número dado em racional ou irracional, acompanhada de justificativa do critério utilizado na decisão. A partir dos dados obtidos, Igliori & Silva (1998) observaram que o número 0,33...3 (com 30 dígitos) causou instabilidade nas respostas, pois foi classificado como irracional por 10 alunos iniciantes e 2 finalistas e consideraram que as representações decimais infinitas possivelmente estão associadas à irracionalidade, como exemplo, o número 4,212121... foi considerado irracional por 22 alunos iniciantes e 4 finalistas. A classificação do número π como racional por 15 alunos causou surpresa aos pesquisadores. Eles verificaram que a identificação dos números irracionais $\underline{\pi}$ e $\underline{e}$ com suas aproximações 3,1416 e 2,7182 foi mais forte entre os alunos finalistas, conforme mostra a Tabela 3, que é um recorte dos dados obtidos nessa pesquisa.

Tabela 3: Dados selecionados da pesquisa de Igliori & Silva (1998)

	alunos iniciantes			alunos finalistas		
	$\in Q$	$\notin Q$	sem resposta	$\in Q$	$\notin Q$	sem resposta
π	15	20	1	0	14	0
e	8	25	3	0	14	0
3,1416	28	8	0	6	7	1
2,7182	24	7	5	7	6	1

Fonte: Igliori & Silva, (1998)

Em relação aos números $-\frac{3}{7}$ e $\frac{\pi}{10}$, metade dos alunos iniciantes classificou o número $-\frac{3}{7}$ como irracional. Os pesquisadores justificaram que esse fato possivelmente ocorreu porque esse número é, ao mesmo tempo, negativo e apresentado por meio de uma representação decimal infinita, parecendo ter ocorrido uma associação número-representação. Da mesma forma, declararam que o número $\frac{\pi}{10}$ ter sido classificado como racional por 13 iniciantes pareceu indicar que houve a correspondência entre um número racional e sua representação fracionária simbolizada pelo traço de fração. Destacaram ainda vários critérios utilizados pelos alunos ao afirmarem a racionalidade ou não de determinado número. Seguem alguns deles:

> (1) "Número com casas decimais é irracional, senão é racional"; (2) "A infinitude de casas decimais significa irracionalidade"; (3) "Racionais: frações e razões, **irracionais constantes**[8], dízimas ou raízes". (4) "Racionais: números positivos, irracionais: números negativos". (5) "Os racionais são números finitos e os irracionais, infinitos" (6) "Número irracional é aquele que nunca pode ser representado com exatidão, exceto se usarmos um artifício, como uma simbologia (ex.π) ou uma forma de divisão (ex. $-\frac{3}{7}$)" (7) "Racionais: aqueles que não são dízimas". (8) "Racionais: números que podem ser escritos como fração e as dízimas periódicas simples".(9) "Irracionais são as raízes inexatas" (10) "Racionais são números que podem ser escritos na forma a/b, b≠0". (11) "Racionais: N, Z e Q". (ibidem, p.8)

Os pesquisadores identificaram que muitas vezes os critérios enunciados pelos alunos não correspondiam às suas decisões tomadas, por exemplo, um aluno que classificou 3,1416 como número irracional, utilizou o critério (10) para se justificar. Eles indicaram que possivelmente este aluno associou 3,1416 a π, ou não o imaginou em sua forma fracionária. Observaram também que alguns alunos iniciantes usaram, simultaneamente, mais de um critério, gerando contradições despercebidas por eles, pois alunos que caracterizaram os irracionais como sendo as raízes inexatas, incluíram como exemplos os números π, e 4,21222324... Igliori & Silva (1998) declararam que provavelmente esses alunos não tenham

[8]Grifo nosso. Interpretamos que o aluno quando usa a expressão **irracional constante** se refere aos números irracionais π, e, ϕ (número de ouro).

conseguido elaborar um critério mais abrangente para incluir esses números de diferentes representações.

Outras questões foram propostas com o objetivo de apurar o efeito do uso da calculadora nas resoluções feitas pelos alunos e nas suas tomadas de decisão em relação ao número e sua aproximação. Sobre isso, os pesquisadores destacaram que o uso da calculadora merece atenção e cuidado dos docentes, pois esta possibilita aos alunos identificar o número real com alguma de suas aproximações decimais, caso sua utilização não seja feita adequadamente. Isto porque observaram na pesquisa feita que um número e suas aproximações parecem ter, para alguns alunos, o mesmo significado e, quanto menor for o erro da aproximação, mais forte é a identificação.

Na mesma pesquisa, os autores avaliaram os conhecimentos dos alunos sobre as propriedades densidade, ordenação e a não completude de Q no conjunto R. Algumas de suas conclusões apontaram que as respostas de alguns alunos evidenciaram obstáculos existentes entre os conceitos de número racional e irracional, dificuldades na classificação de números decimais como um racional ou irracional, e inadequações no uso do conceito de sucessor[9].

Destacaram que tanto os iniciantes como os alunos finalistas do curso de Matemática desconheciam a propriedade da densidade dos racionais em R e da completude em R. Em relação às concepções apresentadas sobre os números reais pelos participantes da pesquisa, constataram diversas associações, como a do número com sua representação, a da irracionalidade com representação decimal infinita, a da irracionalidade com "não exatidão" e a de um número com uma de suas aproximações, esta última mais marcante nas respostas dos alunos finalistas.

Igliori & Silva (1998) ressaltaram que, apesar de uma evolução nas respostas dos finalistas em relação aos iniciantes, as concepções errôneas detectadas ainda persistiam após um curso de análise real tratado de forma tradicional, na instituição em que ocorreu a pesquisa.

[9] Por exemplo, 1,23 é o sucessor de 1,22.

2.2
Contribuições do Ensino Superior

Na busca de material didático sobre números reais, para mapear o tema de nossa pesquisa, encontramos Palis (1999), Malta et al. (2002) e Ripoll et al. (2006), que apontaram sugestões de encaminhamentos para que o ensino do conceito de número real para o público do Ensino Superior aconteça com significado e rigor matemático. Para isso, enfatizaram conceitos de distância, aproximação e erro, porém sem a formalidade normalmente encontrada nas disciplinas de Análise Matemática, em que o conjunto R é definido abstratamente como um corpo ordenado completo e pouco se valorizam as representações decimais infinitas.

Palis (2005) declarou que professores das disciplinas iniciais de cursos superiores, na tentativa de promoverem uma boa transição da matemática elementar para a avançada, quase sempre remetem seus olhares para o programa do Ensino Médio. Lembrou que os números irracionais aparecem em grande parte do programa neste segmento, ao se trabalharem as funções elementares. Alunos recém-ingressos nesses cursos, entretanto, atrapalharam-se nas operações com números racionais, frequentemente utilizaram-se de exemplos de números inteiros no intervalo [−3, 3] e possuíam ideias equivocadas sobre os irracionais. Sobre isso, apresentou o exemplo:

> Já observamos que alguns alunos consideram a presença do número π no eixo OX do sistema de coordenadas em que se esboça o gráfico de funções trigonométricas como etiquetas, nada tendo a ver com a unidade de medida do comprimento do eixo OX. (Palis, 2005, p. 6)

A pesquisadora citada declarou que "o campo numérico dos alunos na passagem entre o Ensino Médio e inicial universitário, na área técnico científica, é frequentemente muito pobre" (ibidem, p. 6), causando sérios obstáculos nos cursos superiores, visto que "os números reais são provavelmente o objeto matemático mais amplamente empregado no Ensino Superior inicial nas disciplinas de Cálculo e em outras disciplinas de conteúdo matemático" (ibidem, p. 6). Apontou também que talvez essa escassez de habilidades no ensino e na aprendizagem dos números reais explique porque os segmentos médio e inicial universitários trabalham esse tema de forma tão superficial. A pesquisadora concluiu que “assim, em geral, não se faz um ensino possível dos reais, matematicamente correto e suficientemente operacional com vistas à compreensão que se deseja de outros conteúdos que se apoiam no conceito de número real” (ibidem, p.8).

Palis (1989), investigando o tópico *comprimento da circunferência*, em um curso de formação continuada de professores de Matemática, defendeu que “colocar precisão em ideias intuitivas geométricas pode envolver o uso de propriedades fundamentais dos números reais”. Em outra iniciativa, Palis (1994) apresentou dois problemas envolvendo número real, que podem ser resolvidos com o apoio de calculadoras gráficas ou softwares gráficos. Inicialmente, a pesquisadora tomou o cuidado de definir aproximações de um número real r, com erro menor que E, ilustrando na reta numérica, e declarou:

> Problemas de construção de aproximações de números reais, envolvendo diversos procedimentos (truncamentos da expansão decimal, método de bisseção, método de aproximações sucessivas, etc), são muito interessantes para ampliar o conhecimento dos alunos sobre o *Sistema de Números Reais* e para apoiar o desenvolvimento posterior do conceito de *Sequência Convergente.* (Palis, 1994, p. 37)

A pesquisadora sugeriu que deve ficar bem claro para o aluno a distinção entre uma solução exata e sua aproximação e que esta prática pode ser incluída na prática escolar mais cedo do que usualmente se tem realizado. Enfatizou que deve haver mais cuidado na utilização do sinal de igual, limitando-se a utilizá-lo apenas quando se tratar realmente de uma igualdade e defendeu uma familiarização com o emprego da simbologia de valor absoluto nas situações de aproximação. Afirmou que também “a procura de zeros de funções reais é um problema que permite trabalhar com essas ideias” e concluiu que “a conjugação de cálculos exatos com cálculos "reais", logo aproximados, contrapõe objetivos algébricos e numéricos e a matemática se "decimaliza" (ibidem, p. 31).

Um dos materiais proposto por Palis (1999) chamou-nos a atenção, pois trata do tema “número real”. Trata-se de material didático impresso, composto por notas de aula sobre números reais e aproximações. Este apresenta o conjunto R como uma extensão do sistema de números racionais, pois, feita uma escolha de unidade de comprimento, mostra que o conjunto Q é insuficiente para medir todos os segmentos de reta. Definiu a autora:

> (...) podemos pensar o sistema de números reais como sendo constituído dos resultados de medição do comprimento de todos os segmentos de reta, por comparação com uma unidade de comprimento escolhida, dos seus simétricos, que são os números negativos, e do número zero. (ibidem, p. 3)

Destacamos o capítulo em que a pesquisadora trabalhou com as representações decimais dos números reais. Para isso, definiu formalmente aproximação de um número real, trazendo exemplos que facilitam o entendimento desse conceito. Os conceitos de expansão decimal e truncamentos são abordados, apresentando como exemplo, o desenvolvimento decimal de $\sqrt{2}$. A autora retomou os racionais e, por meio do algoritmo da divisão, mostrou que a expansão decimal de números racionais só pode ser finita ou infinita e periódica. A recíproca desse resultado também é valorizada, em uma exposição acompanhada de exemplos.

Um aspecto relevante desse material didático é o esclarecimento feito sobre as notações que utiliza. Por exemplo, a pesquisadora explicou que o número $50{,}37\overline{25}$ é uma dízima periódica de período 25; já o número 50,3725 é um decimal finito e a dízima infinita 50,3725... indica somente que a parte inteira é 50 e que os primeiros quatro dígitos de sua parte decimal são 3, 7, 2 e 5 e que mais nada pode ser afirmado sobre os outros infinitos dígitos. Na continuidade, parte para o cálculo de aproximações de números reais pelo método da bisseção e declarou que "a cada repetição do processo, determinamos uma aproximação de $\sqrt{2}$ com erro menor do que a metade da margem de erro da aproximação anterior" (ibidem, p. 28). Algumas questões ficaram em aberto na sua exposição, em virtude de necessidades teóricas para respondê-las. São elas:

> Dado um número decimal infinito qualquer, existe um número real cujo desenvolvimento é exatamente esse decimal? Que sentido podemos dar a igualdade $0,\overline{9}=1$? Consideremos agora o decimal não periódico 0, 53553...[10] existe um número real cuja expansão é este decimal? Como poderíamos calcular $\sqrt{3}+\sqrt{17}$ ou $\sqrt{3}.\sqrt{17}$? (ibidem, p. 29)

A lista de exercícios desse material explorou as demonstrações de irracionalidades, a densidade e os conceitos de expansão decimal, aproximação e erro, trabalhados na parte teórica do texto. Em continuidade a esse projeto[11],

[10] Palis esclarece que o número de cincos entre os algarismos 3 vai aumentando de uma unidade.
[11] Realizado no Instituto de Matemática da PUC Rio.

Malta et al.(2002) produziram um livro[12] que, no tópico relacionado aos números reais, foi inspirado na experiência de lecionar com as notas de aula de Palis (1999). Esse livro foi escrito para uma disciplina de Matemática com o objetivo de preparar alunos para um primeiro curso de cálculo, tradicionalmente dirigido a um público da área de ciências exatas. Iaci Malta, uma das autoras, esclareceu a proposta do grupo, quando declarou no prefácio do livro que:

> As ideias que nortearam minha proposta para tal disciplina, denominada então Cálculo 0, foram, basicamente, olhar para o aluno como um jovem recém-ingresso na universidade, em oposição a tratá-lo como um estudante secundário (que em geral é considerado apto a apenas ser treinado na execução de alguns algoritmos), buscar meios e conteúdos que viessem a desenvolver suas capacidades de raciocínio e expressão organizados, capacidades estas imprescindíveis para uma efetiva compreensão da matemática, assim como já introduzi-los no contexto numérico, isto é, no contexto do cálculo aproximado e dos recursos computacionais. (Malta et al., 2002, p. 13)

Os autores dedicaram dois capítulos desse livro para tratar de números reais. O capítulo 2 é introdutório e faz um breve histórico da evolução do conceito de número real, pois apresenta os números reais a partir de sua concepção geométrica, em que surgem como medidas de comprimentos de segmento de reta. Os tópicos desse capítulo têm aspectos muito semelhantes às notas de Palis (1999), pois, da mesma forma, introduziram os conceitos de aproximação e erro.

No capítulo 3, Malta et al. (2002, p. 13) abordaram as sequências de números reais e têm como objetivo "introduzir, do ponto de vista conceitual, o aluno no mundo dos algoritmos que, com a acessibilidade aos computadores, se tornou o mundo daqueles que utilizam a Matemática". É importante destacar uma das questões deixadas em aberto por Palis (1999)[13] mencionada neste capítulo, para exemplificar a utilização de resultados teóricos (teoremas) no estudo do comportamento de uma sequência. Os autores apresentaram a prova de que existe um número real, limite de uma dada sequência, cuja expansão decimal é o número 0,53553555355553... Esse capítulo se diferencia dos apresentados em outros livros tradicionais de Cálculo, pois valorizaram as expansões decimais infinitas para exemplificar os resultados teóricos.

---

[12] Intitulado "*Cálculo a uma variável: uma introdução ao Cálculo*", em que a parte do conteúdo é mais formal e rigorosa, portanto, com um nível de dificuldade maior que o material didático de Palis (1999).

[13] Retomando a questão: consideremos agora o decimal não periódico 0, 53553555355553... (o número de cincos vai aumentando em um) existe um número real cuja expansão é este decimal?

Os exercícios e experimentos propostos foram elaborados para serem realizados com o auxílio de computadores. Malta et al. (2002) declararam que alguns desses exercícios dependem de programas específicos do matmídia, porém muitos outros podem ser feitos com programas adequados para Matemática. A pesquisadora acrescentou que a partir de 2006 todos os alunos de Introdução ao Cálculo passaram a trabalhar uma hora semanal de aula com o Maple[14] e atualmente passaram a ter, nessa disciplina, 4 horas semanais para as aulas de laboratório computacional. Sobre isso, Palis (2007, p. 4) destacou:

> Além das potencialidades do programa, e que são diversas, ficamos surpresos com a evidência de que há uma série de competências algébricas pertinentes ao ensino fundamental e médio que são indispensáveis em um ambiente de ensino-aprendizagem apoiado em sistemas de computação algébrica em uma disciplina de transição Ensino Médio/Superior e que são estranhas ao alunado típico deste tipo de disciplina.

Caminhando nessa mesma linha de produção de livro didático sobre os números reais, destacamos Ripoll[15] et al. (2006). Nesse livro[16], os autores trataram a noção de número, destacando os campos numéricos dos racionais, dos reais e dos complexos com o objetivo de apontar e esclarecer dificuldades. Esclareceram que a abordagem dos autores não ultrapassa "o nível do primeiro ano universitário" e que o público alvo são alunos e professores de cursos de Licenciatura em Matemática. Sobre isso acrescentaram: "Este texto é fruto de longas discussões que os autores vêm tendo, já há três anos, sobre o ensino de números reais e complexos ministrado aos alunos do Curso de Licenciatura em Matemática da UFRGS" (ibidem, p.5).

Antes de introduzirem a exposição sobre o conjunto dos números reais, o texto iniciou com os números inteiros, em seguida, os racionais e algumas noções sobre a reta euclidiana. Trabalharam detalhadamente o algoritmo da divisão, as dízimas periódicas, as propriedades de ordenação e densidade. Enunciaram uma série

---

[14] Sobre os recursos computacionais disponibilizados na PUC Rio, vale ressaltar que o uso do programa Maple, pelos alunos, se iniciou em 2004 no curso de Introdução ao Cálculo, disciplina que faz a transição Ensino Médio/Superior. Essa experiência, segundo Palis (2007), ocorreu no contexto de um projeto de integração de disciplinas introdutórias, e, em 2004 e 2005, o programa serviu como apoio aos professores para demonstrações.

[15] Cydara Rippol, uma das autoras, gentilmente doou este livro para nossa pesquisa. Aqui vai nosso agradecimento. Atualmente é professora associada da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, atuando na Pós-Graduação em Matemática e na Pós-Graduação em Ensino de Matemática. É membro da Comissão de Ensino da SBM. (Texto retirado da plataforma LATTES)

[16] Intitulado "Números Racionais, Reais e Complexos", os autores são Jaime Bruck Ripoll, Cydara Cavedon Ripoll e José Francisco Porto da Silveira.

de resultados matemáticos, intercalando teoria e prática. Assim como Palis (1999) e Malta et al. (2002), a abordagem foi feita por meio das representações decimais. O conceito de número real foi introduzido com a ideia de medida de comprimento. Fizeram uso do que chamaram de régua decimal infinita e esclareceram:

> (...) de fato, nosso texto sobre medição de segmentos apoia-se totalmente nessa inspiração de [...] construir uma régua decimal *matemática*, que é uma visão, um pouco mais sofisticada, da régua decimal escolar [...] A régua matemática terá de ter, portanto, infinitas subdivisões: metros, decímetros, centímetros, milímetros, décimos de milímetros e assim por diante. Por esta razão chamamos a régua decimal matemática de Régua Decimal Infinita. (Ripoll et al., 2006, p. 102)

Os encaminhamentos desses autores para enunciar os resultados de ordem e soma de números reais foram feitos com rigor. O tópico números reais foi finalizado com perguntas e respostas que favoreceram o aprofundamento do estudo desse conjunto. Para isso, justificaram a necessidade de compreender os números irracionais por meio da complexidade das expansões decimais, as representações aritmética e algébrica dos números reais, as irracionalidades quadráticas e acrescentaram um ensaio sobre números irracionais algébricos e transcendentes.

Os materiais didáticos apresentados conduziram o conceito de números reais ao estudo das sequências convergentes. Ripoll et al. (2006) dissertaram sobre sequências encaixantes e evanescentes e Palis (1999, p. 3) declarou:

> A integração de uma introdução a sequências numéricas, tanto nas disciplinas iniciais na universidade como nos cursos de formação continuada, tem um objetivo ambicioso: aprofundar o conhecimento de estudantes e professores sobre o sistema dos números reais. Embora sequências numéricas e números reais sejam conceitos entrelaçados, o ensino secundário e o inicial universitário não ensinam, de modo geral, as potencialidades da representação decimal dos reais como um objeto cognitivamente acessível aos estudantes. Nós sentimos que o tema se presta como uma introdução ideal para complexos conceitos do Cálculo, como aproximação e convergência.[17]

[17] No original:
The integration of an introduction to numerical sequences in both our initial university disciplines and in-service courses has an ambitious purpose: to deepen students' and teachers' knowledge of the real number system. Although numerical sequences and real numbers are interwoven domains, secondary level instruction and initial university teaching do not, as a rule, explore the potentialities of the decimal representation of reals as an object cognitively accessible to students. We feel that the topic lends itself as an ideal introduction to the complex concepts of Calculus such as approximation and convergence.

Sobre o ensino de números reais na graduação em Israel, Leviatan (2004) afirmou que essa apresentação formal, deixada para cursos de análise real, faz com que muitos alunos terminem a universidade tendo uma vaga ideia do que é número real. Mesmo em cursos de Cálculo avançado é evitado um ensino mais aprofundado e com significado de número real, cujo conceito normalmente é suposto como dado e entendido. A pesquisadora apresentou razões para defender a ideia de que, neste nível, pouco se conhece sobre os números reais. Ela fundamentou-se nas respostas obtidas, quando fez uma série de questionamentos, que mostraram a falta de conhecimento ou apresentaram equívocos e inseguranças a respeito desses números. Eis algumas de suas questões:

> Qual o significado de 0,999...? É menor que 1? Igual a 1? Como nós sabemos que $\sqrt[3]{2}$, por exemplo, é um número real? A tela da sua calculadora (limitada a nove dígitos) mostra 1,35353535 (alternativamente 2,12345678 ou 3,14159265), você pode garantir que esses números são racionais? Como somamos /multiplicamos dois números reais (como π, $\sqrt{2}$)? Como os números reais são caracterizados? Como definimos um número real qualquer? Qualquer número real pode ser descrito (calculado)?[18] (ibidem, p. 1)

A pesquisadora afirmou que essas perguntas só poderão proporcionar discussões significativas se, numa etapa anterior, for realizado um estudo adequado de números reais. Acrescentou que os conceitos e ideias que são desenvolvidos nas abordagens formais são muito abstratos para os alunos iniciantes do ensino superior e, dessa forma, esse aprendizado não possibilita compreender os diferentes usos e os conhecimentos práticos que as questões propiciam. Foi realizada uma rápida apresentação teórica das possíveis abordagens formais no aprendizado de números reais no Ensino Superior[19]. A seguir, a pesquisadora apresentou sua proposta de abordagem geométrica decimal, que será detalhada mais adiante.

---

[18] No original:

What is the meaning of 0.999…? Is it less than 1? Equal to 1? How do we know that $\sqrt[3]{2}$, for example, is a real number? Your calculator's screen (limited to 9 digits) shows 1.35353535 (alternatively 2.12345678 or 3.14159265) can you tell if your number is rational? How do we add/multiply two real numbers (like $\sqrt{2}$, π)? How are real numbers characterized? How do we specify a particular real number? Can every real number be described (calculated)?

[19] Esclarece que, na abordagem axiomática, o conjunto R é definido abstratamente por suas propriedades como um corpo ordenado completo. Cita como referência os livros de Spivak (1994) e Tall (1977). Já na abordagem construtiva, são enfatizadas as classes de equivalência de sequências de números racionais de Cauchy ou os cortes de Dedekind e indica, respectivamente, Rudin (1976) ou Landau (1960) e Hardy (1963).

Ela acredita numa forma de ensino construtiva e operacional, ao invés da axiomática, uma vez que defendeu que “os números reais deveriam ser apresentados ao futuro professor de Matemática de um modo que os capacitasse a transferir esse conhecimento aos seus futuros alunos.”[20] (Leviatan, 2004, p. 3). A pesquisadora partiu da premissa de que os professores de Matemática precisam conhecer profundamente os números reais, já que se trata de um objeto matemático constante em vários conteúdos dessa disciplina.

Convém destacar sua preocupação com a necessidade de ensinar ao futuro professor não somente o conceito de número real, mas também, de oferecer uma verdadeira compreensão sobre o assunto e sobre como o tema pode ser trabalhado na matemática escolar. Esclareceu que essa abordagem deve ser rigorosa para evitar erros conceituais, porém não deve deixar de ser intuitiva e de levar em conta todos os tipos de concepções errôneas que possam ser detectadas. Ressaltou que os axiomas não devem ser enunciados *a priori*, mas sim que os resultados necessários devem surgir de acordo com a evolução do próprio processo de construção dos números reais.

Leviatan (2004) enfatizou a importância de esclarecer aos alunos a necessidade da expansão do sistema numérico dos números racionais para os reais. Indicou a reta numérica como ponto de partida para tal ensino, já que essa abordagem parte de conceitos geométricos, tais como medições de distâncias no plano, diagonais de retângulos, fatos já vividos e conhecidos pelos alunos, desde a escola. Acrescentou que o uso de computadores e de calculadoras é fundamental no enfoque proposto, pois esses instrumentos apresentam os números decimais, quando infinitos, por suas expansões decimais truncadas. É necessário, no entanto, que os alunos tenham esse conhecimento, para observar que não se podem apresentar todos os dígitos de uma expansão infinita (ou até mesmo finita, mas longa). Além disso, mostrou aos alunos que os truncamentos servem para aproximar um número real qualquer, tomando os devidos cuidados, e que os programas computacionais oferecem a possibilidade de controlar o grau de precisão desejável.

A pesquisadora apresentou uma visão geral da sua proposta de ensino, que se inicia com a impossibilidade de medir a diagonal do quadrado unitário

[20] No original: “real numbers should be presented to future math teachers in a way that will enable them to transfer knowledge to their future students.”.

considerando somente os números racionais. Para realizar essa medição fez uma opção pela geometria métrica e construiu uma régua virtual, assim como Ripoll et al. (2006), que mede distâncias entre dois pontos do plano. Nessa construção, constatou que há buracos na régua racional numérica e procurou um método para cobrir esses buracos, ampliando assim as expansões decimais infinitas. Dessa forma, cada ponto da régua teria um número correspondente que mediria a sua distância até a origem. Trabalha todo o tempo com expressões decimais para representar esses números.

Neste aspecto específico, Barthel (2004) apresentou uma proposta de trabalho no computador com o objetivo de familiarizar, de forma concreta, os alunos com a noção de expansão decimal infinita de números reais. Neste artigo, a pesquisadora declarou que os números reais são frequentemente considerados iguais às suas expansões decimais truncadas e, assim como Leviatan (2004), propôs a necessidade de associar expansões decimais ao conceito de números reais. Para isso, descreveu um caso de soma de números reais, utilizando as somas truncadas dos números dados no software Mathematica.

Barthel (2004) defendeu também a importância de apresentar exemplos que ilustram como se pode usar o programa Mathematica notebooks, com o objetivo de expandir para os alunos o repertório de imagens relacionadas aos números reais e aprofundar seus entendimentos usando as expansões decimais. Afirmou que há várias razões para insistir na definição de números reais por meio das expansões decimais e, com esse objetivo, o Mathematica notebooks possibilita a visualização de diferentes aspectos das expansões decimais. Declarou que essa abordagem foi originalmente desenvolvida para cursos de formação de professores, mas que é adequada para outros ramos do Ensino Superior.

Essa pesquisadora exemplificou alguns equívocos dos alunos relacionados a números racionais, números reais e expansões decimais, afirmando que o objetivo do trabalho é aumentar a compreensão e a fluência na manipulação desses conceitos. Explicou como a simbologia do software ajuda na realização dessas metas e descreveu exemplos interativos específicos dessa pesquisa. Também conjeturou que a dificuldade dos alunos em entender a noção de limite e a tendência a identificar um número real com sua expansão decimal truncada estão relacionadas. Em relação a isso declarou:

> Por um lado, existem os números reais e como os alunos os compreendem, um decimal com alguns dígitos na sua expansão. Por outro lado, existe a abstrata noção de limite. Ela está ou não formalmente definida, dependendo do caso, mas a maioria dos estudantes tem-no encontrado pelo menos no contexto da soma de séries geométricas. Mas a intuição dos alunos separa esses dois lados. Não existe a "sensação" do número real sendo o próprio limite.[21] (ibidem, p. 4)

Sobre as vantagens do uso do software, afirmou ainda que a principal delas é a possibilidade de realização de cálculos para qualquer precisão desejada, visto que a experiência dos alunos com expansões decimais é muito limitada. Uma calculadora comum restringe um número fixo de casas decimais, e o cálculo feito à mão o faz ainda mais. Além disso, declarou que o software Mathematica ou outro similar possibilita ver 50, 100 casas decimais, o que dá uma intuição muito melhor da infinidade da expansão. Dessa forma, o comprimento da expansão torna-se variável e não fixo, como na calculadora comum, pois se pode calcular mais e mais casas decimais. Os exemplos não se limitam a casos simples, sendo fácil construir um programa no qual os alunos podem facilmente alterar os dados, fazendo que possam experimentar muito mais exemplos.

O programa ilustra também as expansões decimais das raízes quadradas e as representações fracionária e decimal dos números racionais. Neste último, se o aluno entra com uma fração que corresponde a uma dízima periódica, o programa mostrará os sucessivos restos obtidos do algoritmo da divisão, fornecendo a visualização da periodicidade da expansão, e apresentará como resultado final a expansão periódica. Exemplos como $\frac{1}{49}$, que possuem um período muito longo, ampliarão a imagem comum de uma expansão periódica do tipo $0,\overline{3}$. Por outro lado, se o número dado se apresenta na forma decimal, o programa devolverá um número expresso na forma de fração. Além disso, a pesquisadora afirmou que este programa possui vários outros recursos, que proporcionam o desenvolvimento de muitas atividades, cujo objetivo é ajudar a construir imagens para os alunos.

O artigo foi finalizado descrevendo o caso da soma de números reais. A autora, inicialmente, sugeriu que a soma de dois números decimais com

[21] No original:
On the one hand, there are the real numbers as the students think of them, a decimal with a few digits in its expansion. On the other hand, there is the abstract notion of limit. It has or has not been formally defined, depending of the case, but most students have at least encountered it in the context of the sum of geometric series. But the students' intuition separates these two sides. There is no "feeling" of the real number as the limit itself.

expansões finitas fosse retomada. Nessa operação, a adição foi feita da direita para a esquerda, uma vez arrumadas as expansões decimais com igual comprimento. A seguir, apresentou o problema da adição de duas expansões decimais infinitas. Nesse caso, verificou-se a impossibilidade do processo comum da direita para a esquerda e a estratégia foi, então, calcular a soma dos sucessivos truncamentos das expansões.

Dessa forma, foi possível ver, nessa sequência formada por essas somas, alguns dígitos serem alterados e investigar, sob que condições, se pode ter a certeza de que o dígito não se modificará. Barthel (2004) apresentou um exemplo em que se mostra como é possível obter uma expansão decimal do montante que é uma boa aproximação da soma dos números reais, mas que não exibe os decimais corretos[22]. Em uma outra etapa, a autora tratou da soma dos números racionais. Por um lado, é possível adicionar algebricamente a soma de dois números racionais por meio da sua forma fracionária e obter um número também representado na forma fracionária. Por outro lado, é possível calcular os montantes das sucessivas expansões truncadas e compará-los com as expansões decimais finitas da correspondente fração.

Em continuidade a esse mesmo trabalho, Leviatan (2006) declarou que os números reais são um elo perdido na educação matemática, que geralmente não são apresentados por meio de um método construtivo e comumente são utilizados mecanicamente, sem significado. A pesquisadora propôs um algoritmo geométrico, que estende o algoritmo da divisão e prossegue descrevendo um processo direto para somar números reais. Defendeu que essa metodologia possibilita uma definição construtiva de números reais. O artigo foi desenvolvido enunciando definições, teoremas e proposições, sempre apresentando exemplos que esclarecem a teoria e o método utilizado.

A formalização das ideias matemáticas e dos resultados foi realizada à medida que surge a necessidade. Declarou que o uso combinado dos dois algoritmos permite uma apresentação significativa e uniforme, oferecendo tanto uma imagem geométrica, quanto numérica dos números reais que são trabalhados por meio de números decimais. A pesquisadora considerou a reta tal como concebida pelos matemáticos gregos, como o lugar que associa uma fração a cada

[22] Veremos mais adiante em Leviatan (2006) como esse processo é realizado.

ponto racional localizado nessa reta e que é registrado como a distância do ponto à origem. Esclareceu que, nessa época, já se tinha conhecimento da existência de pontos sobre essa reta que não correspondiam a nenhuma fração.

A partir daí, Leviatan (2006) apresentou o algoritmo geométrico, que é o processo de localização de um ponto (PLA [23]). Este vai substituir o método ainda incompleto de localização de racionais associando a cada ponto da reta numérica, uma única expansão decimal infinita. Declarou que o novo método é uma extensão geométrica natural que parte do algoritmo algébrico da divisão (LDA[24]), em que se associam expansões decimais finitas ou infinitas e periódicas a cada número racional não negativo. Acrescentou que o uso da notação decimal é mais prático e simples e, além disso, reflete as sutilezas do raciocínio analítico, porém enfatizou:

> Infelizmente, os resultados desse processo, por serem obtidos geometricamente, só podem ser interpretados como localizadores de ponto. Nossa tarefa é, portanto, possibilitar uma interpretação numérica para expansões infinitas obtidas por meio do PLA como "números" medindo "distâncias" (ambos os termos ainda não estão bem definidos).[25] (ibidem, p. 630)

A pesquisadora iniciou localizando cuidadosamente os números racionais na reta numérica. Fez isso passo a passo, trabalhando primeiro com os números decimais finitos utilizando intervalos obtidos por meio de partições decimais. Seu artigo expôs todas as etapas do processo de localização do ponto, com a preocupação de apresentar exemplos antes de generalizar esse algoritmo. O exemplo utilizado para os racionais, cuja representação decimal é finita, é o número $\frac{3}{8}$. Destacamos na Figura 1 o trecho do artigo que ilustra o processo enunciado pela pesquisadora e sua respectiva localização na reta numérica.

[23] Point location algorithm.
[24] Long division algorithm.
[25] No original:
Alas, geometrically obtained, the products of this process can only be interpreted as point locators. Our task is therefore to enable a numeric interpretation to infinite expansions obtained via the PLA as 'numbers' measuring 'distances' (both terms are not yet fully defined).

Figura 1: Representação do PLA para x = $^{3}\!/_{8}$.

Example 1: $x = 3/8 = 375/1000$ is a stage 3 partition point. It lies inside the partition intervals interval $[3/10,\ 4/10)$ (#3), $[37/100,\ 38/100)$ (#7) and is the left endpoint of the partition interval $[375/1000, 376/1000)$ (#5). At this stage the process associates a unique decimal expansion 0.375 with x. Note that, technically speaking, in subsequent stages $x = 3/8$ remains a partition point; it is always the left endpoint of a (unique) partition interval (#0) yielding the expansions $0.3750, 0.37500, \ldots$

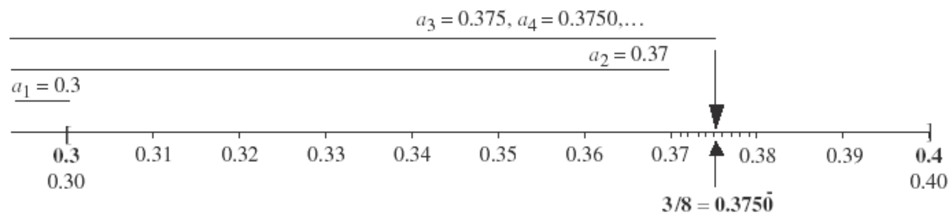

Figure 2. $x = 3/8$, standard location procedure.

Fonte: Leviatan, 2006, p. 631.

A seguir, Leviatan (2006) considerou os pontos x do intervalo [0, 1] que não coincidem com nenhuma partição decimal do intervalo[26]. Apresentou com rigor um algoritmo geométrico infinito para localizar o ponto x, usando intervalos fechados de partições decimais. Esse procedimento é todo detalhado no artigo. Citou como exemplo, o número $\frac{1}{9}$ e construiu uma sequência infinita[27] de intervalos fechados e encaixados, todos contendo o ponto x = $\frac{1}{9}$. Observou que a expansão decimal $0{,}1111\ldots = 0{,}\bar{1}$ obtida pelo PLA, nesse caso, coincide com a expansão obtida via o LDA, quando se faz a divisão de 1 por 9. Generalizou depois, afirmando que para cada "non-partition point" x, o PLA associa uma sequência de intervalos fechados e encaixados que contêm x e uma única sequência infinita, formada por expansões decimais finitas[28], em que cada termo dessa sequência é um truncamento da expansão infinita $0{,}k_1k_2k_3\ldots$

A seguir a pesquisadora aplicou o PLA a $\sqrt{2}$, que pode partir de argumentos aritméticos ou geométricos, com o objetivo de obter os truncamentos

---

[26] "non-partition points" apresenta como exemplos os números $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Aqui a pesquisadora se refere a todas as dízimas infinitas, as periódicas e as não periódicas.

[27] [0.1, 0.2], [0.11, 0.12], [0.111, 0.112], ...

[28] $(0{,}k_1;\ 0{,}k_1k_2;\ 0{,}k_1k_2k_3;\ \ldots)$

da expansão desejada, apresentando a sequência (1.4, 1.41, 1.414, . . . , 1.41421356237, ...). Indicou que o PLA é um processo infinito que produz uma única sequência de partições de intervalos encaixados e uma única expansão decimal infinita. No caso de x = $\sqrt{2}$, é a dízima 1.41421356237... O PLA foi ampliado cuidadosamente para decimais finitos, que são os pontos limites da partição decimal. A Tabela 4 ilustra e sintetiza seus dois encaminhamentos para o decimal finito $\frac{1}{10}$.

Tabela 4: Duas opções de sequência de truncamentos para x = $^{1}/_{10}$

Sequência de truncamentos para x = $^{1}/_{10}$		
Opção padrão	[0.1, 0.2], [0.10, 0.11], [0.100, 0.101], . . . e os respectivos pontos à esquerda são 0.1, 0.10, 0.100, . . .	$0{,}1\overline{0}$
Opção alternativa	[0.0, 0.1], [0.09, 0.10], [0.099, 0.100], . . . e os respectivos pontos à esquerda são 0.0, 0.09, 0.099, 0.0999, . . .	$0{,}0\overline{9}$

Fonte: Leviatan, p. 634, 2006.

A pesquisadora ressaltou que a expansão da opção padrão coincide com o LDA. O mesmo procedimento é realizado para x = $\frac{3}{8}$, encontrando pela opção padrão e pela alternativa, respectivamente, as expansões decimais infinitas $0{,}375\overline{0}$ e $0{,}374\overline{9}$. Com isso, ela solucionou o problema das partições decimais de x, inteiras e não inteiras. Enunciou uma proposição que associa por meio do PLA, a cada número dessa natureza, duas expansões infinitas e periódicas: a expansão padrão, terminada em repetidos zeros, e a expansão alternativa, terminada em repetidos noves. Considerou essas duas expansões equivalentes e enunciou que a cada ponto da reta decimal, o PLA associa uma única expansão infinita da forma $m + 0,k_1k_2k_3...$ Dessa forma, o dilema 0,9999... = 1 ficou resolvido. Por meio de uma proposição, enunciou que expansões terminadas em repetidos noves não podem ser obtidas por meio do LDA e apresentou o teorema afirmando que cada expansão decimal infinita e periódica pode ser obtida pelo PLA, além disso, existe um único ponto racional associado à expansão periódica dada.

Leviatan (2006) definiu números reais como sendo a coleção de todas as infinitas expressões do tipo $x = m+0.k_1k_2k_{3...}$, em que m é um inteiro (parte inteira de x) e... k_1, k_2 e k_3 são dígitos entre 0 e 9. A cada ponto da reta, o PLA associa um único número real da forma $x = m+0.k_1k_2k_3$... A autora fez uma comparação entre os algoritmos da divisão e os da localização do ponto e afirmou que o PLA, ao fornecer dígito por dígito, possibilita uma interpretação geométrica dos números da expansão racional obtida pelo LDA. Forneceu uma interpretação semelhante de expansões decimais que terminam em repetidos noves e enfatizou que essas expansões geram confusão para os estudantes, quando são introduzidas unicamente pelo algoritmo da divisão.

A pesquisadora enunciou o importante teorema que prova a existência da correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos da reta numérica decimal, que será chamada de reta real. Até então, somente as expansões infinitas e periódicas e as frações têm significado numérico, pois medem distâncias de pontos à origem; já em relação às expansões infinitas e não periódicas, tal significado ainda não existe. Só se pode afirmar, até este momento, que a expansão decimal infinita $m+0.k_1k_2k_3$...descreve a localização de um ponto por meio de uma sequência infinita de intervalos decimais encaixados com interseção nesse ponto. Ela também lembrou que, para se obter uma interpretação numérica, foi preciso definir ordem e as operações aritméticas sobre expansões decimais infinitas arbitrárias. Essas expansões devem ser compatíveis com as definições existentes para números racionais, assim, o número com essa notação numérica terá, na reta real, o significado de medir distâncias a partir da origem.

Leviatan (2006) descreveu também uma abordagem construtiva para definir operações aritméticas com os números reais. Para isso apresentou o algoritmo vertical da adição (VAA)[29], que realiza as "somas de expansões decimais finitas". Afirmou que o clássico algoritmo da soma pode ser modificado, de forma que seja aplicável a qualquer expansão infinita, mas essa adaptação não é evidente, porque uma apresentação formal exige o conceito de limite.

Segundo a autora, o algoritmo pode ser facilmente estendido para expansões infinitas e periódicas; basta para tanto, realizar truncamentos nas expansões, longe o suficiente para garantir o surgimento de blocos repetidos na soma, permitindo, então, a aplicação do método da soma da direita para a esquerda. Ela enfatizou que a extensão do algoritmo depende fortemente do fato de as expansões periódicas serem determinadas por um truncamento correto, mas que uma modificação do algoritmo para incluir expansões infinitas arbitrárias já

[29]Vertical addition algorithm é o clássico algoritmo em que somamos dois números inteiros positivos da direita-para-esquerda.

não pode ser baseada no procedimento de adição da direita para a esquerda.

O exemplo, destacado na Figura 2, foi apresentado para lustrar e ajudar a visualizar o importante corolário que afirma que a soma de duas sequências formadas pelos truncamentos de dois números reais x e y não é necessariamente uma sequência de truncamentos do número real x+y.

Figura 2: Sequência formada pela soma dos truncamentos dos números reais x e y.

Example 6: Let $x = 0.5010120123\cdots$ and $y = 0.289898989\cdots$. Adding their respective accumulating sequences (term by term) we get the following 'partial sum sequence':

$$0.7, 0.78, 0.790, 0.7908, 0.79090, 0.790910, 0.7909109, 0.79091099, 0.790911001, \ldots .$$

Fonte: Leviatan, p. 637, 2006

Dessa forma, esclareceu que sua abordagem não exigirá a sofisticada ideia de convergência e indicou uma série de exemplos que possibilitaram descobertas de interessantes propriedades, observadas a partir dos montantes obtidos na sequência formada pelas somas parciais. Ela sintetizou:

> Estamos procurando um algoritmo que parte de sequências convergentes de duas expansões infinitas arbitrárias, x, y, para obter os termos, um após o outro, da sequência convergente da soma (x+y) das sequências dadas. Um algoritmo desse tipo deveria coincidir com o clássico algoritmo vertical da soma quando este é aplicado a expansões finitas e dízimas periódicas.[30] (Leviatan, 2006, p.637)

Para isso, a pesquisadora acompanhou as possíveis alterações que poderiam ocorrer no n-ésimo dígito da soma, para cada n fixado. Uma vez que esse dígito sofreu uma mudança, não poderá sofrer outra alteração. Além disso, a partir desse momento, todos os dígitos nas posições de 1 a n permanecerão inalterados; chegar-se-á, então, a um bom candidato pelo algoritmo VAA, simbolizado por r_n^{x+y}, para n-ésimo dígito da soma x+y.

Inicia-se o processo somando-se verticalmente r_n^x e r_n^y, sem deixar de considerar todos os dígitos da soma como "candidatos" que podem sofrer uma mudança em uma unidade devido a um futuro "carregamento[31]". Prossegue-se avançando-se para a direita, somando-se dois dígitos de casas decimais

[30] No original:
We are looking for an algorithm, based on the accumulating sequences of two arbitrary infinite expansions x, y, yielding one after the other the terms of the accumulating sequence of x + y. Such an algorithm should agree with the classical vertical addition algorithm when applied to finite/periodic expansions.

[31] Esse termo é mais comumente conhecido como "vai um".

correspondentes, até uma primeira soma diferente de 9, faz-se uso então, do critério que a pesquisadora organizou, por meio de um roteiro ilustrado na Figura 3, que encaminha o procedimento do VAA.

Figura 3: Determinação do dígito r_n^{x+y} no algoritmo vertical da adição (VAA)

- Add vertically $\begin{array}{r} 0.k_1^x\cdots k_n^x \\ +\; 0.k_1^y\cdots k_n^y \\ \hline -.c_1\cdots c_n \end{array}$,
- Compute $k_{n+1}^x + k_{n+1}^y, k_{n+2}^x + k_{n+2}^y, \ldots$ stop at the first $i \geq 1$ such that $k_{n+i}^x + k_{n+i}^y \neq 9$.
- If $k_{n+i}^x + k_{n+i}^y < 9$, $\boxed{r_n^{x+y} = -.c_1\cdots c_n}$ (and the next $i-1$ digits are all 9s)

  If $k_{n+i}^x + k_{n+i}^y > 9$, add vertically $\boxed{\begin{array}{r} -.c_1\cdots c_n \\ +\; 0.0\cdots 01 \\ \hline r_n^{x+y} \end{array}}$ (and the next $i-1$ digits are all 0s)

Fonte: Leviatan, 2006, p. 638

Leviatan (2006) declarou inclusive que a representação decimal dos números racionais é de importância prática, pois proporciona uniformidade na forma como os números são representados e coincide com a representação do número quando se usa uma calculadora. O uso concomitante do PLA tem o efeito de esclarecer as ideias que embasam o LDA.

O processo de produção na expansão de dígitos, um após o outro, usando o PLA, fica bastante esclarecedor. Principalmente, quando os programas de computador estão envolvidos no processo, pois oferecem uma dinamicidade na visualização geométrica quando, ao fazerem o zoom em cada etapa do intervalo em questão, gravam o seu número sequencial e sua extremidade esquerda (o truncamento). Segundo essa perspectiva, após a introdução de números reais por meio de sua expansão decimal, deve-se discutir a ordem e a aritmética das operações sobre essas expansões. A pesquisadora afirmou que o VAA adaptado faz isso, e após a soma ter sido trabalhada, basta definir subtração e ordem. A distância entre os pontos sobre a reta real é definida normalmente como a diferença entre as respectivas expansões, dando significado numérico ao ponto sobre a reta real como a sua distância até a origem.

Introduzir os números reais por meio do PLA possibilita uma dupla interpretação de um número real $x = m+0.k_1k_2k_3$... Se por um lado descreve uma sequência de partições decimais de intervalos encaixados, convergindo para um único ponto x, por outro, simultaneamente, mede a distância de x a partir da origem. Além disso, na prática, os termos da sequência ($m+0.k_1$, $m+0.k_1k_2$, $m+0.k_1k_2k_3$...), em que os números são racionais, oferecem aproximações cada vez mais finas para o número real x.

A pesquisadora esclareceu ainda que a teoria formal não depende do algoritmo vertical demonstrado, porém seu valor está na apresentação didática ao aluno. Por outro lado, enfatizou que essa metodologia se adapta naturalmente a cursos de pré-Cálculo e que essa forma de apresentar o número real é de importância tanto conceitual como prática. Sobre o ensino tradicional de números reais, ela declarou:

> Surveys e entrevistas realizadas regularmente no nosso curso universitário de professores secundários revelaram que, normalmente, os alunos que entram no programa não eram capazes (mesmo que informalmente) de dizer o que significa para eles um número real. A maioria entrou num ciclo vicioso ao tentar explicar número irracional. Além disso, em termos práticos, a grande maioria dos estudantes ignora totalmente o algoritmo da divisão, como o que produz as expansões decimais a partir das frações.[32] (Leviatan, 2006, p. 641)

Assim, como já havíamos destacado, ao resgatar Baldino (1997) e Moreira (2004) no capítulo 1, sobre o problema da circularidade na definição de número real, Leviatan (2006) enfatizou a dificuldade vivenciada por professores ao tentar uma definição para número real nas suas pesquisas. Em consonância com nossas hipóteses, a autora identificou como um complicador desse processo o desconhecimento total do algoritmo da divisão, como gerador das expansões decimais a partir das frações. Esse aspecto prático e disparador que o algoritmo de Euclides possui, para o ensino de números reais no Ensino Médio, foi o principal condutor das atividades aplicadas na nossa pesquisa.

Leviatan (2006) esclareceu por fim, a estratégia adotada no curso de Introdução à Matemática Avançada, no qual fez uma introdução sistemática, embora semiformal, aos conjuntos, grupos e números e apresentou a dupla PLA + PVA. Nos quatro anos de formação de professores, o programa seguiu com um caráter mais formal e com a recém-adquirida intuição, e os números reais são apresentados abstratamente como expansões decimais infinitas, abordagem

[32] No original:
Statistical surveys and personal interviews conducted regularly at our secondary teachers' college revealed that, typically, students entering our program could not (even informally) define what they mean by a real number. Most of them entered a loop trying to explain the term irrational number. Furthermore, in practical applications the vast majority of students totally ignored the LDA, yielding decimal expansion for fractions.

motivada pelo PLA, o que possibilitou uma boa base para o ensino significativo do Cálculo. O resultado foi aprovado pelos futuros professores do secundário, em fase final do curso pois, quando foram entrevistados informalmente, após uma apresentação dos números reais utilizando PLA+VAA, sentiram-se contemplados com a dupla imagem geométrica e numérica do número real. Outro aspecto destacado foi a apresentação antecipada do VAA, pois isso exige a exposição à muitos exemplos, permitindo a descoberta por conta própria e propriedades das sequências de somas parciais, levando naturalmente para o algoritmo.

2.3
Números reais na licenciatura

Neste tópico apresentaremos os artigos de Zazkis & Sirotic (2004) e Moreira (1999 e 2005), que mostram o interesse desses pesquisadores em detectar imagens mentais, que estão relacionadas à dificuldade na aprendizagem dos conceitos relacionados a número real. Zazkis & Sirotic (2004) investigaram aspectos relacionados ao entendimento que os participantes têm a respeito dos números irracionais e como diferentes representações influenciam suas respostas. Essa pesquisa foi realizada com 46 futuros professores do ensino secundário, correspondente ao Ensino Médio no Brasil, em fase final de curso, e que já tinham cursado duas disciplinas de Cálculo. As pesquisadoras focaram as representações e sua relevância na manipulação de objetos matemáticos, na comunicação de ideias e nas resoluções de problemas. Indicaram outras pesquisas que mostram essa forte conexão entre as representações feitas pelos alunos, seus entendimentos e o que eles aprenderam em termos da formação do conceito. Essa pesquisa foi conduzida por meio de duas perguntas:

> 1. Considere o número 0,121221222...(há infinitos dígitos em que a quantidade de algarismos 2 entre os 1’s aumenta de um em um). Este número é racional ou irracional? Como você sabe?

2. Considere o número $\frac{53}{83}$. Vamos chamá-lo de M. Efetuando esta divisão, o visor da calculadora mostra 0,63855421687. M é um número racional ou irracional? Explique.[33] (p. 3)

Na tabulação das respostas, mais de 40% dos participantes não reconheceram a representação decimal infinita e não periódica de 0,121221222... como um número irracional, e mais de 30% falharam ou forneceram justificativas incorretas no reconhecimento do número $\frac{53}{83}$ como um número racional. Zazkis & Sirotic (2004) afirmaram que, embora a maioria dos participantes tenha apresentado respostas corretas e devidamente justificadas, as respostas inadequadas são problemáticas, principalmente levando-se em conta a experiência da matemática formal de alguns participantes. Elas constataram que as definições de números irracionais e racionais não estavam presentes no repertório ativo do conhecimento dessa minoria de participantes.

Houve uma tendência para confiar na calculadora e os participantes expressaram preferência pela forma decimal para representar uma fração. Ocorreu, ainda, confusão entre irracionalidade e representação decimal infinita. Elas observaram que a ideia de repetir padrão, na representação decimal dos números, foi às vezes generalizada para significar qualquer padrão. As pesquisadoras consideraram que um possível entrave dos alunos no entendimento dos números irracionais diz respeito à equivalência entre as duas definições apresentadas na matemática escolar: a inexistência de uma representação por meio de uma fração e a representação decimal infinita e periódica. Sugeriram, então, que os professores criem possibilidades para seus alunos manipularem atividades, utilizando essas duas representações, levando-os a fazer conexões que as tornem equivalentes.

Sirotic & Zazkis (2007), em outro artigo procedente da mesma pesquisa, apresentaram uma investigação sobre como os futuros professores da escola secundária compreendem os números irracionais. Os participantes foram solicitados a responder um questionário contendo vários itens relacionados à

[33] No original:
1. Consider the following number 0.12122122212… (there is an infinite number of digits where the number of 2's between the 1's keeps increasing by one). Is this a rational or irrational number? How do you know?
2. Consider 53/83. Let's call this number M. In performing this division, the calculator display shows 0.63855421687. Is M a rational or an irrational number? Explain.

irracionalidade e um deles pedia para se localizar precisamente o irracional $\sqrt{5}$ na reta numérica. Os dados obtidos neste item é o foco da investigação, cujo objetivo foi identificar significados que os participantes empregaram ao localizar precisamente $\sqrt{5}$ na reta. As pesquisadoras escolheram $\sqrt{5}$ ao invés de $\sqrt{2}$, pois a construção deste último é muito utilizada na matemática escolar e isso, de certa forma, poderia interferir nas respostas.

Também foram realizadas entrevistas clínicas com os participantes, fundamentadas nas respostas obtidas, das quais surpreendentemente, evidenciaram que as representações geométricas dos números irracionais estavam ausentes de imagens conceituais em muitos dos participantes, fato que esperávamos acontecer também em nossa pesquisa. Assim como Leviatan (2006), os resultados sugeriram confusão entre números irracionais e suas aproximações decimais e mostraram uma grande tendência em representá-los por meio de suas aproximações decimais. De acordo com essa experiência, para os futuros professores, as aproximações decimais finitas são convenientes e suficientes e Sirotic & Zazkis (2007) indicaram que essa consideração poderia ser a fonte desses conflitos.

As pesquisadoras destacaram algumas respostas, dentre as certas e as erradas, obtidas utilizando-se a aproximação, pois foram 18 participantes que responderam usando aproximações decimais de $\sqrt{5}$, com um ou mais dígitos decimais, e apenas alguns participantes que declararam não ser possível a localização do irracional. Como somente nove dos participantes localizaram corretamente $\sqrt{5}$ na reta numérica, aplicando o teorema de Pitágoras, as pesquisadoras, durante as entrevistas clínicas, procuraram identificar as justificativas para tal dificuldade. Elas esclareceram aos participantes que solicitavam a localização precisa de $\sqrt{5}$, e não a aproximada. Observaram que a maioria dos futuros professores percebeu a reta numérica como uma reta numérica racional, pois a opinião comum desses participantes foi a de que a solução precisava ser cercada antes de ser localizada.

A partir da análise de extratos da entrevista, as pesquisadoras concluíram que parte das dificuldades obtidas residiu na infinidade de dígitos da expansão decimal e não na irracionalidade em si. Isso se confirmou quando, na entrevista, elas solicitaram a localização precisa do racional $\frac{1}{3}$, e alguns participantes partiram da representação decimal 0,333... para solucionar a questão. Outro aspecto considerado relevante foi o teorema de Pitágoras ter sido raramente abordado na resolução da questão proposta. As pesquisadoras conjeturaram que o conhecimento sobre esse teorema está inerte no conhecimento da grande maioria dos futuros professores participantes da pesquisa. Avaliaram tal situação como um sintoma de duas questões gerais que apontam para o estado atual da educação matemática: a tendência a um enfraquecimento da geometria no currículo escolar e a fragmentação do currículo.

As autoras acreditaram em que suas argumentações, no sentido de dar mais destaque na representação geométrica dos números irracionais, poderiam facilitar o entendimento dos alunos. Tal atitude didática possibilita maior distinção em números irracionais e suas aproximações racionais e também ajuda a encapsular o conceito de irracionalidade, visto que chama a atenção para outras representações do objeto, como um ponto na reta numérica e uma distância irracional partindo do zero, "afastando do interminável processo de construção no tempo, como muitas vezes percebida por meio da representação decimal infinita" [34] (p. 488).

Em outro artigo oriundo dessa grande pesquisa, Sirotic & Zazkis (2007b) apresentaram um relato que tem como objetivo identificar adequações e inadequações dos participantes no uso desses números, a fim de interpretar como a compreensão da irracionalidade acontece e para explicar como e por que ocorrem dificuldades no seu entendimento. Declararam que há poucos estudos na literatura educacional, cujo enfoque seja o conceito de números irracionais, além disso, afirmaram que todos os estudos investigados apontam deficiências na compreensão dos números irracionais por alunos e professores. Nesse estudo, as pesquisadoras levaram em consideração o conhecimento dos participantes, de suas intuições e crenças, no que diz respeito à relação entre os dois conjuntos numéricos, os racionais e os irracionais, e algumas de suas propriedades.

As pesquisadoras procuraram analisar nos participantes a capacidade de produzir modelos intuitivos adequados, no sentido de que não fossem inconsistentes com as dimensões formal e intuitiva do conhecimento, para representar seus conceitos numéricos e acomodar os resultados existentes de números irracionais. Dessa forma, listaram algumas das justificativas coerentes e

[34] No original: "away from the never-ending process of construction in time, as often perceived through the infinite decimal representation".

também incoerentes sobre a densidade, considerando a dimensão formal do conhecimento. Somente quatro participantes utilizaram o argumento geral de que "a média aritmética dos dois racionais é também racional”.

A maior parte das explicações corretas dos participantes foi dada quase inteiramente sobre a representação de números decimais. Esta foi destacada em todos os quatro itens. Em uma das entrevistas, um participante se utilizou da expressão "irracionais consecutivos", para descrever a ideia da inexistência de lacunas entre os números irracionais. Ainda mais interessante é a inesperada frequência da crença de que existem números racionais muito próximos, de tal forma que nenhum outro número racional pode ser encontrado entre eles. As pesquisadoras partiram em busca de uma explicação para tal fato e concluíram que uma possível fonte de erro, detectada numa entrevista, poderia estar na confusão existente entre os conceitos de contável e finito.

Sirotic e Zazkis (2007b) julgaram, como um dos problemas, o fato de a maioria dos participantes ter baseado seu pensamento somente sobre um único tipo de representação, a decimal. Sobre as perguntas realizadas a respeito das operações, destacamos trechos da pesquisa que identificam respostas incompatíveis com a dimensão formal do conhecimento:

> Quando você multiplica dois números, cada um com um número infinito de dígitos em conjunto, o resultado ainda será um número com uma quantidade infinita de dígitos. Você não pode adicionar $\sqrt{2}+\pi$, mas você pode adicionar suas representações decimais. A soma não pode ser um número decimal finito.
> Se pensarmos no produto de dois números irracionais como um número irracional de coisas irracionais, a questão passa a ser "se estes números de alguma forma, na soma, podem dar racional?” Eu acho que não.
> Não padrão × não padrão = não padrão. Você não pode criar um padrão por meio da multiplicação. Você está apenas aumentando os números, não alterando o relacionamento. Você não pode adicionar dois números irracionais, porque ambos continuam para sempre, assim você iria somar infinitamente.[35] (ibidem, p. 70)

---

[35] No original:
When you multiply two numbers each with an infinite number of digits together, the result will still be a number with an infinite number of digits.
You cannot add $\sqrt{2}+\pi$, but you can add their decimal representations. The sum cannot be a terminating decimal.
If we think of the product of two irrational numbers as an irrational number of irrational things, the question becomes “will these numbers somehow add up to rational?” I don’t think so.
No pattern × no pattern = no pattern. You can’t create a pattern through multiplication. You are just increasing the numbers, not changing the relationship.
You cannot add two irrational numbers because they both continue forever so you would be adding infinitely.

Segundo as pesquisadoras, os dados indicaram que intuições erradas são muitas vezes relacionadas a deficiências adquiridas sobre os conhecimentos formais e à falta de experiência algorítmica. Acrescentaram que as construções de conexões consistentes entre algoritmos, intuições e conceitos são essenciais para o domínio do conhecimento matemático e, consequentemente, para a compreensão da irracionalidade. Afirmaram, também, que as respostas obtidas esclareceram bastante a compreensão dos números pelos participantes, principalmente, sobre os conhecimentos formais e intuitivos a respeito dos números irracionais.

Sirotic e Zazkis (2007b) perguntaram-se qual a importância do conhecimento dos números irracionais para o ensino na escola secundária. Antes de emitirem suas respostas, ilustraram uma situação a que assistiram na observação de uma aula da matemática escolar, que destacamos: “Aluno: π é o único número irracional? Professor: Não, lembra, tem $\sqrt{2}$.”[36] (ibidem, p. 74). Matematicamente falando, o professor está certo, mas elas observaram que o professor perdeu uma ótima oportunidade para ampliar o repertório dos alunos com uma variedade de exemplos de números irracionais. Acreditaram que cerca de um quinto dos participantes desse estudo não tinham conhecimento da existência de números irracionais além de π, e e algumas raízes quadradas mais comuns.

Em face do exposto, consideraram que as ideias de densidade e os efeitos das operações com os irracionais estão estreitamente relacionados com o currículo do ensino secundário e, como a noção de número é um dos principais conceitos do currículo de Matemática, apesar de o conceito de um número irracional ser difícil, sua compreensão é fundamental para a ampliação e reconstrução do conceito de número, partindo do sistema de números racionais para o sistema dos números reais. Enfatizaram, portanto, que cuidados didáticos são importantes para o bom desenvolvimento desse conceito e que o conhecimento do assunto pelos professores é uma condição indispensável para o desenvolvimento dessa compreensão em seus alunos. Concluíram indicando que os resultados dessa investigação ajudam na compreensão dos desafios que o conceito de número irracional apresenta aos alunos em todos os níveis.

[36] No original:
Student: Is π the only irrational number? Teacher: No, remember, there is also $\sqrt{2}$.

Nessa mesma direção, Moreira et al. (1999), em pesquisa feita na Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), procuraram detectar imagens mentais[37] que pudessem dificultar a aprendizagem dos conceitos relacionados a número real, tais como, infinito atual, completude, continuidade, densidade e limite. Nesse trabalho, eles ressaltaram o fato de haver pouca literatura relacionada ao assunto e apontaram as pesquisas de Tall (1994), Tall e Schwarzenberger (1978), Robinet (1996), Fischbein et al. (1979), Fischbein et al. (1995), Pinto e Tall (1996), que procuram conhecer concepções dos alunos sobre noções subjacentes ao conceito de número real, normalmente formadas em experiências escolares. Sobre isso, os pesquisadores declararam:

> É ingenuidade acreditar que os alunos vão abandonar suas imagens, construídas ao longo da vida escolar, para substituí-las de imediato por uma definição formalmente correta apresentada pelo professor de um curso de Análise na Universidade. De um modo geral, o aluno tende a manter as suas imagens conceituais e acrescentar a elas uma versão (possivelmente distorcida) da definição formal apresentada. Dessa forma ele constrói uma espécie de mosaico com várias representações de um determinado conceito recorrendo a uma ou outra dessas representações, dependendo das circunstâncias. (Moreira et al., 1999, p.97)

Para conhecer essas imagens mentais, Moreira et al. (1999) aplicaram um questionário para 84 alunos do curso de Matemática de duas universidades federais do estado de Minas Gerais. As questões foram elaboradas com o objetivo de fazer que os alunos apresentassem respostas não formais.

Analisando os dados obtidos, eles declararam que o significado da incomensurabilidade de dois segmentos e a necessidade dos irracionais no sistema numérico não estão presentes na maioria das respostas dos alunos pesquisados, o que parece ser o cerne do problema das dificuldades relacionadas à compreensão de uma série de conceitos ligados a números reais. Quase 50% dos alunos pesquisados associaram, de maneira bem explícita, os irracionais ao que não é bem compreendido ou é estranho no seu universo, apresentando respostas do tipo:

---

[37]Para isso, fazem as seguintes perguntas: *O conjunto* $A=\{x\in \mathbf{Q};\ 0<x<1\}$ *tem um menor elemento? O conjunto* $B=\{\ x\ \in\ \mathbf{Q};\ x^2<1\}$ *tem um maior elemento? Para você, o que é um número irracional? O que leva você a acreditar na existência de números irracionais? Você quebra uma barra de chocolate em dois pedaços ao acaso. É sempre possível exprimir a razão entre os "tamanhos" desses dois pedaços (as áreas deles, por exemplo) por um número racional? Sabe-se que* π *é a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro. Chamando de C o comprimento da circunferência (em cm) e de D a medida do diâmetro (em cm) obtemos* $\pi=C/D$. *Isso levou um aluno a concluir que* π *era racional.O que você diria a um aluno que lhe apresentasse tal conclusão?*

números que não são exatos, difíceis de imaginar, indefinidos, que não sabemos determinar, números que depois da vírgula apresentam infinitas casas... Essas e muitas outras respostas mostram "o ar de mistério que cerca os irracionais, mesmo para alunos que optaram pelo curso de Matemática no 3º grau" (ibidem, p. 6). Sobre essas imagens errôneas oriundas da sua escola, segue a declaração:

> (...) o desafio é trabalhar sobre esse mosaico de representações que o aluno possui, proporcionando-lhe a oportunidade de reelaborar a sua intuição sobre os elementos conceituais que vão se colocar em questão na sua prática de ensino na escola. Moreira (1999, p. 116)

Moreira (1999) defende um aprendizado com significado, no qual o professor deve ser capaz de envolver seus alunos num maior número possível de situações didáticas que sejam adequadas e apresentadas como problemas que "desafiem os seus saberes anteriores, conduzindo à reflexão sobre novos significados e novos domínios de uso desses saberes" (Moreira, 2004, p. 91). Ainda sobre isso, consideramos relevante destacar um depoimento de um dos participantes da pesquisa, quando era investigado o ensino da disciplina Análise Real:

> Entretanto, os reais deveriam ser apresentados menos formalmente (na licenciatura). Acho que é importante que o aluno de licenciatura saiba que $\sqrt{2}$ é apenas um símbolo para representar uma sequência infinita de dígitos e que usando sequências infinitas de dígitos, pode-se representar todos os reais.... Acho que é importante saber que 1 = 0,9999999999.... e assim por diante. (ibidem, p.15)

A declaração do aluno foi pontual e identificou a falta de entendimento dos números reais na prática, fatos fundamentais para o conhecimento matemático de um futuro professor. Com isso, entendemos que a questão que se impõe, na formação matemática do futuro professor, é o estabelecimento de uma sequência didática adequada que complemente a sequência puramente lógico-formal, usualmente adotada nos cursos superiores. Torna-se importante identificar, portanto, no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, o que o aluno possui de conhecimento de números até aquele ponto. Para isso, faz-se necessário compreender esquemas, modelos e exemplos que os alunos trazem sobre os números reais, para que, partindo desse lugar, se detectem as concepções errôneas e incoerências adquiridas na vida escolar.

Ainda sobre o ensino de números, o pesquisador constatou, em sua pesquisa de doutorado, que certos aspectos do saber matemático a respeito dos sistemas numéricos não são discutidos sistematicamente no processo de formação na licenciatura e afirmou:

> (...) no curso de licenciatura, o conjunto dos números reais ou é suposto conhecido ou é objeto de uma abordagem axiomática, em que os elementos, as operações e as propriedades estruturais são simplesmente tomados como postulados o que, em certo sentido, encerra toda discussão sobre o assunto. (Moreira, 2004, p. 155)

Isso, de certa forma, explica a carência de abordagens sobre os números reais no Ensino Médio, já que se trata de um tema pouco utilizado em termos práticos nas licenciaturas. Parte de sua pesquisa, feita com alunos da licenciatura de Matemática da UFMG, teve como objetivo avaliar os conhecimentos matemáticos a respeito dos números reais desenvolvidos na escola. Os sujeitos da pesquisa foram separados em dois grupos, nos quais 44 dos participantes eram do primeiro período e 25 do último. As questões propostas abordaram conhecimentos relacionados a atividades da prática da escola. O objetivo era conhecer tanto a visão dos alunos iniciantes da licenciatura, por ser uma fonte de dados para trabalhar certas questões na formação inicial do professor, e a possibilidade de identificar os pontos de vista que trazem da escola, quanto a visão dos formandos, por fornecer dados das concepções que levarão para a sala de aula. Classificou as respostas, a partir de critério previamente definido, em satisfatórias ou não satisfatórias, depois fez comentários e análise dessas respostas para cada questão.

Em sua tese, o pesquisador também investigou cinco questões sobre o ensino dos números. Aqui vamos destacar as três últimas, específicas do conjunto dos números reais. Em relação à pergunta "como você justifica o fato de que o produto de números reais é comutativo? Em outras palavras, por que se pode acreditar que ab = ba para quaisquer dois números reais a e b?" (Moreira, 2004, p.155), ele afirmou que seu objetivo era detectar como os alunos iniciantes entendem essa questão, estando num processo inicial de formação profissional na universidade. No caso dos formandos, o objetivo era investigar como o curso de licenciatura da UFMG promove ou induz as reflexões que são feitas em relação à validade da propriedade comutativa do produto de números reais.

Como resultado de sua análise, concluiu que, entre os naturais, a multiplicação tem o significado de soma de parcelas iguais e que, de certa forma, esse é um bom recurso didático para a discussão da comutatividade. Com os números racionais escritos na forma fracionária, a comutatividade do produto pode ser explicada diretamente pelo algoritmo, desde que se estabeleça uma conexão adequada deste com os significados da operação. Observou que, quando se usa a propriedade com os números reais, “a multiplicação já desenvolveu um processo de relativa ‘autonomização’ em relação à soma” (ibidem, p.156). Também esclareceu que a relação do produto em **R** com o produto em **Q** deveria ser feito usando a ideia de limite, pois já se encontra subjacente à noção de número irracional. Dessa forma, argumentos que justificam a comutatividade do produto de números reais mostraram, de alguma maneira, o grau de entendimento do aluno, desenvolvido na escola, com essa extensão numérica.

Já com a questão “Sabe-se que a expressão 2^3 significa o produto $2\times2\times2$. A expressão $2^{\sqrt{3}}$ tem algum significado para você? Se a sua resposta for sim, por favor, explique” (ibidem, p.159), o pesquisador teve como objetivos:

> (...) no caso dos iniciantes, detectar os significados que eles atribuem à potência com expoente irracional, provavelmente desenvolvido a partir da formação escolar básica. Com relação aos formandos, queríamos verificar em que medida o processo de formação no curso de licenciatura contribui para a construção de significados para expressões desse tipo. (ibidem, p.160)

Sobre essa pergunta, em relação a $2^{\sqrt{3}}$, 60% do total de formandos pesquisados afirmaram que esse número não possui significado para eles e na análise geral, 80% dos formandos e 90% dos iniciantes têm dificuldades com a potência de expoente irracional.

A última questão valorizou a necessidade dos números naturais para contar coleções de objetos e dos números racionais para expressar uma medida fracionária; em seguida quis obter informações a respeito das imagens que os licenciandos iniciantes e os formandos detêm com relação aos irracionais. Nesse contexto, Moreira (2004) perguntou para os futuros professores de Matemática o que são números irracionais e para que eles servem. Apenas três formandos apresentaram uma resposta razoável para justificar a necessidade do número irracional, considerando, como número, algo que não se expressa como razão de inteiros. Somente um formando respondeu de forma consistente, utilizando a noção de incomensurabilidade, fato que não ocorreu entre nenhum dos iniciantes. Destacamos uma das conclusões do pesquisador no que se referiu ao ensino dos sistemas numéricos a partir dos sujeitos pesquisados:

> Se o processo de formação busca preparar o futuro professor de Matemática da escola para uma prática de negociação e de construção de significados com os alunos, infere-se dos resultados obtidos que é necessário repensar esse processo, pelo menos no que concerne à abordagem dos sistemas numéricos. Uma condição básica para o desenvolvimento de uma prática pedagógica desse tipo é o domínio, por parte do professor, dos conceitos matemáticos numa forma multifacetada isto é, capaz de se conectar a diferentes caminhos no processo de construção dos conceitos. (ibidem, p. 167)

Consideramos que tanto Moreira (2004), com a ideia de “conceitos matemáticos numa forma multifacetada”, quanto Leviatan (2004), com a ideia de “um conhecimento íntimo e profundo de números reais”, defendem que o ensino dos números reais deva ser trabalhado nas licenciaturas, de forma mais abrangente e prática, sempre com o propósito de estar conectada com as necessidades da sala de aula. Dessa forma, o futuro professor de Matemática terá domínio desse conteúdo e se utilizará de métodos diferentes de abordar e aprofundar o assunto, seja por meio da noção de incomensurabilidade, de expansões decimais infinitas e de outras importantes noções relacionadas ao assunto. Isso possibilita aos alunos pensar, julgar e consequentemente construir um conceito de número real que seja correto e adequado para esse nível de ensino.

2.4
Professores e o ensino de números reais

Nas pesquisas de Cobianchi (2001) e Dias (2002), eles investigaram, de forma mais geral, como o tema “números reais” foi tratado por professores. Na pesquisa de Cobianchi (2001), as concepções dos professores entrevistados sobre a importância de conhecer os números reais e do seu ensino demonstraram uma preocupação com o entendimento desse conteúdo e consideraram o seu ensino fundamental para a Matemática, apesar de não explicitarem efetivamente, em suas respostas, esse grau declarado de importância. Já outros professores pesquisados desconhecem a importância de ensinar e aprender números reais. As justificativas que surgiram foram pautadas por um lado, na importância desse assunto para entender o mundo que nos cerca, por outro, como uma decorrência natural para a ampliação dos conjuntos numéricos e ainda por possibilitar pré-requisitos para o aprendizado de outros conceitos matemáticos. Destacamos algumas perguntas feitas aos professores:

> Para você, qual a importância para a Educação Matemática, em se ensinar/aprender números reais e continuidade? Como você introduz didaticamente para seus alunos a questão de números reais e continuidade? Quais as maiores dificuldades que você encontra ao ensinar esse conteúdo? Na sua compreensão, é satisfatória a maneira como os livros didáticos abordam a questão números reais e continuidade? (ibidem, p. 284)

Algumas respostas giraram em torno da necessidade de aprender os números reais e a continuidade pela sua utilidade ao longo dos estudos, pois são pré-requisitos para muitos temas matemáticos. Um dos participantes declarou que sua importância no primeiro grau[38] está no entendimento e na correlação com a reta real. Outra resposta que demonstrou uma imagem desse assunto é que o ensino é importante, mas para esse sujeito, não vai além da classificação dos conjuntos numéricos até os complexos. Dezessete dos 43 entrevistados desconheceram a importância de se ensinar e, logicamente, de aprender números reais.

Quanto à forma de apresentar o conteúdo para seus alunos, a grande maioria utiliza com a reta numerada e apresentaram os irracionais pela negação dos racionais. Alguns professores, além de abordarem dessa maneira, acrescentaram novos elementos, tais como o paradoxo de Zenão, medições com o π e a densidade na reta graduada.

Cobianchi (2001) identificou várias questões relacionadas às dificuldades apresentadas pelos alunos, a saber, falta de conhecimento de noções de infinito, localização de diferentes números na reta, como os negativos, as frações, e os decimais. Um professor, sujeito da pesquisa, declarou que tem dificuldade em conseguir que os alunos compreendam que entre dois números existem outros infinitos números. E também que a raiz quadrada irracional possui representação decimal infinita e não periódica, mas que a calculadora apresenta somente sete casas decimais. O pesquisador conjeturou que essa dificuldade em se trabalhar com os números reais está diretamente relacionada à forma didática como os conjuntos numéricos são apresentados. Indicou que talvez isso aconteça porque o assunto continuidade não seja tratado em sala de aula. Quanto à abordagem dos números reais no livro didático, afirmou:

[38] Atual Ensino Fundamental.

> Alguns dos entrevistados julgam que o conteúdo "números reais" não é ainda uma questão resolvida pelos autores de livros didáticos e também para a maioria dos professores. Podemos observar a opinião de um deles sobre os livros didáticos: *não concordo com a maneira com que os livros didáticos abordam os reais. Eles apresentam esse conjunto numérico de uma forma já construída e acabada,...* (ibidem, p.412)

Em Dias (2002), professores justificaram a importância do conjunto R, entendendo que se trata de um conjunto amplo, que comporta todas as soluções para todos os problemas, e que, com o aprendizado desse conjunto, o universo dos alunos passa por um processo de enriquecimento.

Tanto em Dias (2002) como em Cobianchi (2001), a grande maioria dos professores definiu o conjunto dos reais como a união dos racionais com os irracionais ou como a união dos naturais, inteiros, racionais e irracionais. Outros definiram os irracionais como números que não podem ser obtidos por meio de uma divisão de inteiros. Os pesquisadores declararam que os professores apresentaram dificuldades, quando foram solicitados a refletir sobre questões que envolviam propriedades dos reais, ordem, densidade, definição de número racional, definição de número irracional, o próprio conceito de número e suas representações. Nas duas pesquisas, surgiram concepções que refletiram a não distinção entre densidade e continuidade e, talvez por isso, os pesquisadores conjeturaram que, para os participantes dessa pesquisa, a densidade foi concebida somente para o conjunto dos reais.

Dias e Cobianchi (2004) colaboraram com uma proposta de ensino e aprendizagem para a construção dos reais dando significado para a existência desses números. Utilizaram, com essa finalidade, elementos históricos, permitindo compreender a evolução dos conceitos, objetivando proporcionar relações sobre a prática do ensino desses números e a lógica da sua construção. Para isso, investigaram o desenvolvimento histórico do conceito de número irracional, não no sentido de conduzir o pensamento por conta dos fatos históricos, mas para que a formação de ideias faça parte da lógica da evolução do pensamento.

2.5 Contribuições para esta pesquisa

Percebemos nas pesquisas de Fischbein et al. (1995) e Igliori & Silva (1998), as confusões que alunos de Ensino Médio e futuros professores fazem com os números racionais e irracionais e sobre a relação entre eles. Com base nas dificuldades que foram registradas na pesquisa, todos enfatizaram a necessidade de novas abordagens envolvendo os números reais e indicaram algumas possibilidades nesse sentido.

Igliori & Silva (1998) incentivaram o uso da calculadora, assim como Barthel (2004) e Leviatan(2004), e destacaram que se deve ter atenção para não criar nos alunos confusões na identificação do número e de uma aproximação para esse número. De acordo com Igliori & Silva (1998, p. 9), "quanto maior for essa aproximação, mais força parece ter a identificação". Os pesquisadores declararam que as concepções errôneas detectadas nos alunos iniciantes ainda persistem após um curso de Análise Real, tratado de forma tradicional.

Palis (1989), em consulta a livros didáticos, observou que os autores não fazem um trabalho com os alunos em relação à passagem de processos finitos a infinitos. Sugeriu que se trabalhem problemas envolvendo aproximações de números reais, como por exemplo, os truncamentos, pois possibilitam ampliar o conhecimento dos alunos sobre os números reais e incentivou que seja feita a necessária distinção entre soluções exatas e aproximadas.

A régua decimal infinita, utilizada para construir e definir os números reais, foi sugerida e indicada por Palis (1999), Malta et al. (2002), Ripoll et al.(2006), Leviatan (2004 e 2006) e Barthel (2004), porém nem todas as pesquisadoras se utilizaram da mesma nomenclatura. Nessa abordagem, o conceito de medida e as expansões decimais foram bastante valorizadas e incentivaram também a reta numérica como ponto de partida, para se iniciar um ensino construtivo e com significado dos números reais.

Além de todo o estudo e o aprofundamento que realizamos nesta revisão bibliográfica, resgatamos para nosso estudo preliminar e também para as atividades que aplicamos no campo com os alunos, questões de algumas pesquisas. Utilizamos nesta tese a atividade das dízimas 1,35353535 e 2,12345678, apresentadas no visor, e resultados de operações feitas na calculadora usados em Leviatan (2004), as perguntas da pesquisa de Zazkis & Sirotic (2004) referentes ao número irracional 0,121221222... e a fração $\frac{53}{83}$ em conjunto com a aproximação 0,63855421687 obtida na calculadora.

A partir dos estudos feitos em Palis (1999), Barthel (2004) e Leviatan (2007), elaboramos atividades iniciais que levaram os alunos a somarem números irracionais do tipo $\sqrt{3}+\sqrt{5}$, pelos seus respectivos truncamentos, para vivenciarem a dificuldade do processo comum da direita para a esquerda. Nesse sentido, o artigo de Leviatan (2006), que descreveu uma abordagem construtiva para definir operações aritméticas com os números reais foi importante fonte para a fundamentação do nosso estudo.

Nas pesquisas de Moreira (2004), Cobianchi (2001) e Dias (2002), percebemos a dificuldade de professores em relação ao conteúdo dos números reais, pois pouco se aprende na matemática escolar e o que se ensina na matemática acadêmica está normalmente desconectado daquilo que se vai ensinar nas escolas. Com isso, cria-se um ciclo vicioso que, de forma geral, o professor ensina aquilo que aprendeu, isto é, fragmentos sem conexão, carentes de abordagens e considerados acabados, já que certos conceitos a respeito dos sistemas numéricos não são discutidos didaticamente no processo de formação na licenciatura.

Destacamos, a partir dos resultados das pesquisas de Sirotic & Zazkis (2007 e 2007b) e de Leviatan (2006), algumas indicações que vão ao encontro dos objetivos de nossa pesquisa. Estudantes geralmente não usam em suas justificativas para os conceitos de números irracionais e reais a relação destes com noções geométricas, diante de atividades a eles propostas. Além disso, há uma falta de experiência algorítmica, que justifica a necessidade de fazer os alunos vivenciarem essas práticas e de ampliarem seu repertório com uma variedade de exemplos de números irracionais.

Enfatizamos que o problema da circularidade da definição dos números reais mostrou-se um aspecto relevante que deve ser estudado cautelosa e didaticamente, pois tem consequências indesejáveis no ensino da matemática escolar e nos cursos de formação de professores. Foi nossa pretensão observar esses efeitos nas justificativas que os alunos deram para seus julgamentos acerca dos números reais.

O objetivo desta pesquisa remeteu-se principalmente à questão de reconhecimento e manipulação dos números reais. Não tivemos a pretensão de ensinar esse conteúdo. Nosso estudo privilegiou e valorizou situações que favoreceram o aparecimento de imagens conceituais relativas a abordagens numérica e algébrica do conceito de número real, visto que a literatura apontou essas abordagens como predominantes no Ensino Médio e porque visamos a analisar as imagens conceituais evocadas por estudantes diante de atividades propostas sobre o tema**.** Nesse sentido, priorizamos as ideias de densidade e de representação decimal infinita e a vivência das operações com os irracionais, noções que segundo Zazkis & Sirotic (2007b) estão estreitamente relacionadas com o currículo do ensino secundário. Dessa forma, vencido o desafio de conhecer e partir do que já foi produzido, este estudo contribuiu para uma delimitação do nosso objeto de estudo, apontando alguns caminhos e evitando casos já investigados, partindo de lugares já pesquisados e buscando avançar um pouco mais dentro do que ainda não foi feito.