

# 1

## Introdução

Na minha trajetória profissional, venho estabelecendo um vínculo estreito com os processos de ensino-aprendizagem de Matemática, em particular no Ensino Médio, desde quando ingressei na rede estadual de ensino público, em 1990. Em 1992, passei em concurso para o Colégio Pedro II, onde atuo até hoje, e, apesar de já ter trabalhado com algumas turmas do Ensino Fundamental, a minha experiência maior, o lugar em que me coloco e em que me reconheço é como professora do Ensino Médio.

Entre os anos 2000 e 2003, fiz parte de um grupo de trabalho nessa instituição, com o objetivo de produzir material didático de Matemática para o Ensino Médio. Foram três longos anos de muito estudo e aprendizagem, e considero que essa experiência está na origem do meu interesse pelo tema desta pesquisa de doutorado.

Nesse processo de elaboração do material didático, um dos obstáculos que causava discussão e dúvida era a forma como se deveria abordar os tópicos referentes ao conceito de número real. Havia uma inquietação no grupo de professores não somente com a superficialidade apresentada nos livros didáticos, mas também com a abordagem que era feita em sala de aula. O impasse dava-se principalmente porque acreditávamos que a forma apresentada nos livros didáticos não atingia pontos importantes, necessários para a construção do conceito de número real. Geralmente, a abordagem feita pelo professor ficava muito semelhante à apresentada nos livros de Ensino Fundamental, às vezes, até mais superficial. Por outro lado, também tínhamos consciência de que o grupo ainda não possuía maturidade suficiente em relação a esse conteúdo para aprofundá-lo a tempo de inseri-lo no material didático, visto que a consolidação dos conjuntos numéricos da matemática escolar acontece já na 1ª série do Ensino Médio.

Dessa forma, no que se refere ao número real, nosso material didático não se distanciou dos livros didáticos. Assim, iniciamos com noções de lógica, e nos detivemos ao ensino dos conjuntos numéricos de forma semelhante ao que vinha acontecendo, sem inovações. Já havia sido identificado, entretanto, que esse modo usual de apresentação para alunos do Ensino Médio prescindia de aprofundamentos adequados para este segmento das noções de infinito,

incomensurabilidade, densidade e completude, pois era consenso do grupo a forma superficial e acabada desse tema.

No final do Ensino Fundamental, amplia-se o conjunto dos números racionais para o conjunto dos números reais. No início do Ensino Médio, retomase o estudo dos conjuntos numéricos, quase da mesma forma como foram apresentados, sem a preocupação em proporcionar um maior esclarecimento e aprofundamento dos conceitos envolvidos.

Com a experiência de elaborar textos e atividades para a criação do material didático, consideramos que algo poderia ser feito no estudo das funções de domínio real, principalmente, nas exponenciais e logarítmicas, no cálculo de medidas na geometria espacial e na trigonometria. Concluímos, no grupo, que esses tópicos seriam contextos favoráveis do próprio programa curricular, que poderiam contribuir para o aprofundamento do tema número real.

Algumas ações tornavam-se fundamentais para amenizar essas dificuldades, como por exemplo: partir da necessidade de medir; mostrar que os números racionais são insuficientes para medir todas as grandezas; valorizar as representações decimais infinitas; trabalhar com aproximações racionais para os irracionais; utilizar a calculadora para operar números irracionais por meio de suas aproximações racionais; entre outras. Além disso, percebeu-se a necessidade da discussão para soluções de problemas em que apareciam os números reais para os alunos do Ensino Médio e, dessa forma, possibilitar um maior número de contextos e de formação de *exemplos protótipos* (Hershkowitz, 1994) por meio de diferentes representações dos números reais. Nesse momento, a urgência de estudar o conceito de número real e suas conexões com a matemática escolar mostrava-se uma constante.

O grupo tinha como preocupação o fato de que essas inquietações fossem apenas de caráter intuitivo, por consequência de nossa experiência profissional e, em função disso, pesquisamos em livros didáticos do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, com objetivo de fundamentar nossas hipóteses e de dar credibilidade a essa proposta. Essa decisão possibilitou-nos encontrar problemas e confrontar abordagens diferentes, a fim de produzirmos nosso próprio material didático.

Ao longo dessa busca, constatamos a pouca atenção dedicada ao ensino dos números reais. Verificamos, nos livros didáticos pesquisados, que os números

irracionais são definidos como números que não podem ser representados por uma razão de inteiros e os números reais como a união dos racionais com os irracionais. A questão da incomensurabilidade entre duas grandezas e o uso de aproximações racionais para números irracionais raramente era abordada. Sobre esse aspecto, os PCNs<sup>1</sup> (Brasil, 1998) afirmam que o cálculo com radicais é muito valorizado nos livros didáticos, e Dias (2007, p. 168) complementa considerando o Ensino Médio:

A representação decimal infinita do número irracional, embora seja muito usada para introduzir o número irracional, pela impossibilidade de representá-lo na forma de fração de inteiros, não é muito explorada após esse momento inicial. No Ensino Fundamental e Médio, podemos observar que prevalece o uso dos irracionais algébricos, sobretudo das raízes quadradas, seja nos cálculos que envolvem o Teorema de Pitágoras, seja na relação lado e área de quadrado ou nas equações quadráticas de um modo geral.

Avaliamos que, hoje, no Colégio Pedro II, o cálculo com radicais não está tão valorizado como acontecia anteriormente; porém os números reais continuam sendo definidos como antes:  $R=Q\cup I$ .

Baldino (1997) ressalta que a maioria dos livros-textos do Ensino Médio apresenta uma "circularidade" ao definirem os irracionais como números que não são racionais e os reais como a união dos racionais com os irracionais. Definindo desta forma, então, seria necessário que a ideia de número real estivesse construída para que a de número irracional fizesse sentido, ao mesmo tempo em que seria necessário que a ideia de número irracional estivesse construída para que a de número real fizesse sentido. Além disso, pouco se fala na densidade do conjunto dos números racionais e a forma como este assunto é abordado não esclarece a existência de outros números reais que não sejam racionais. Moreira (2004, p.122) destaca também, em sua tese, tal circularidade, quando diz:

(...) Se a idéia escolar de número está associada, no seu significado mais amplo, apenas a uma razão de inteiros, os irracionais, não sendo razão de inteiros, não são números. Trata-se de uma situação análoga àquela de procurar no dicionário o sinônimo para uma palavra cujo significado não conhecemos e encontrar apenas duas palavras, as quais, também, não sabemos o que significam. No final, define-se o conjunto dos números reais como a união dos racionais com os irracionais. Fecha-se, assim, um ciclo de inconsistências e não se esclarece o sentido de se conceber os irracionais como números ou o significado que possa vir a ter essa nova espécie de número.

---

<sup>1</sup> Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental.

Esse é um dos aspectos importantes que vamos discutir ao longo deste trabalho, isto é, a dificuldade gerada por autores e professores no aprendizado dos alunos de Ensino Médio por não saírem dessa circularidade quando apresentam e definem os números reais. Essa questão, muito presente nos livros didáticos atuais, será abordada no capítulo 4 desta tese.

Na busca de contextos ricos para a construção do conceito de números reais para o material didático, constatamos o ‘cuidado’ excessivo dos autores, na formulação de problemas e atividades, cujas soluções sejam os números inteiros ou os racionais mais ‘elementares’, não possibilitando que apareçam decimais finitos com muitas casas decimais e pouco explorando as dízimas periódicas.

Também observamos que os números irracionais utilizados nos exemplos e nos exercícios, geralmente, são os mais usuais, tais como,  $\pi$ ,  $\sqrt{2}$  ou  $\sqrt{3}$ . Dizendo de outro modo, exploram-se poucos exemplos negativos para os números racionais, o que dificulta a naturalização da ideia de que eles existem.

Ainda hoje, observamos que muitos números reais são evitados para que os alunos não se atrapalhem na evolução dos cálculos, pois eles causam inseguranças na sua utilização, muitas vezes motivadas pelo não reconhecimento ou pelo desconhecimento dos números reais, ou pela falta de habilidade no uso das propriedades.

As pesquisas relacionadas ao trabalho docente mostram que, em geral, o professor tende a reproduzir na prática de sala de aula a experiência a que ele foi submetido (Tardif, 2002). Normalmente esse ensino aconteceu a partir de aulas essencialmente tradicionais, com conhecimentos gerais e teóricos, seguidos de exercícios e pautados numa metodologia de transmissão de informações, por isso, apesar da vontade de inovarmos na produção de material didático, nossa prática ainda era bastante orientada por essa rotina tradicional. Dessa forma, nosso trabalho de produção do material didático não foi de fácil execução, pois além de realizarmos muitas pesquisas, era necessário ainda estudarmos, discutirmos e, acima de tudo, alcançarmos um consenso no grupo.

Esse envolvimento permanente da equipe nessa produção de material para o Ensino Médio, quando efetivamente se deu a reorganização no programa de Matemática, incluindo novas abordagens para alguns temas, conduziu-me ao tema da minha Dissertação de Mestrado. Este trabalho investigou o desenvolvimento profissional de professores de Matemática na produção de material didático para o

Ensino Médio. Naquele momento, o tema de estudo voltava-se para a formação de professores e seu desenvolvimento profissional frente às mudanças políticas que estavam acontecendo nas diretrizes nacionais e, de forma bem mais lenta, nas escolas. Uma das conclusões daquele trabalho é que o professor, na produção do seu material didático em equipe, passa a tomar consciência de suas teorias pessoais, de seus esquemas de ação e de suas rotinas, tornando-se um profissional reflexivo, tal como o define Shön (1983). Assim, ele atua diretamente como sujeito do trabalho pedagógico e, com isso, possibilita transformações na sua prática da sala de aula (Silva, 2001).

Esta atitude tem norteado minhas ações na sala de aula desde então e tem como uma de suas consequências esta tese. Além do meu interesse profissional, no entanto, o estudo dos números reais, cujo foco é o aprendizado do aluno do nível médio da escola básica, é ainda pouco explorado nas pesquisas em Educação Matemática no Brasil e em outros países. Acreditamos que esse é um campo rico de investigação e que merece mais atenção, devido a sua relevância dentro do currículo de Matemática do Ensino Médio.

Pelas leituras feitas durante a realização deste trabalho, podemos afirmar que o entendimento de número real é motivo de dúvidas e conflitos tanto para alunos do Ensino Médio, quanto para licenciandos em Matemática e professores que já atuam na Escola Básica.

De acordo com Fishbein et al. (1995) e Iglioni e Silva (1998), alunos e futuros professores fazem confusão ao classificar esses números e também desconhecem noções importantes como incomensurabilidade e densidade. Em pesquisa realizada com professores, Cobianchi (2001) e Dias (2002) declararam que estes têm dificuldades de trabalhar com os números reais e por isso demonstram preocupação, por se tratar de um tema fundamental para a Matemática. Zazkis e Sirotic (2004) e Moreira (2004) afirmam que os números racionais e irracionais não fazem parte do repertório de conhecimento de futuros professores, apesar da experiência escolar de vários anos.

Considerando os aspectos que foram expostos, decidimos estudar como o aluno produz seu conhecimento matemático, observando suas articulações de ideias por meio de imagens de qualquer natureza, isto é, objetos mentais, relacionados ao conceito em questão, que utilizam para tomar decisões quando estão em atividade matemática. Os diferentes modos de apresentar e de

reconhecer o conceito são constituídos por meio de um repertório de imagens, ideias e procedimentos, denominado por Tall e Vinner (1981) como *imagem conceitual* e definido como sendo o conjunto formado por todas as figuras mentais, propriedades e processos associados a um conceito matemático, coerentes ou não, que um indivíduo tem desse conceito.

As razões aqui apresentadas justificam o tema escolhido para esta pesquisa: o ensino-aprendizagem de números reais para alunos do Ensino Médio. A presente investigação teve como objetivo *analisar as imagens conceituais dos alunos da 3ª série do Ensino Médio, em ambiente de sala de aula, quando foram estimulados a escrever e/ou falar sobre os números reais, motivados por atividades em que o uso da calculadora não só foi permitido como estimulado.*

Sabemos que todo conhecimento envolve uma relação entre sujeito e objeto e, para tornar o processo de aprendizagem significativo, foi constituído um ambiente de pesquisa e ensino-aprendizagem no qual o aluno ocupou um papel ativo, como elemento responsável pela construção do seu conhecimento e não um mero expectador. Concordamos com Moreira (2004, p.91) quando declara:

No trabalho escolar, o que parece importante é que o professor seja capaz de envolver os alunos em um leque de situações didáticas adequadas, isto é, situações que se colocam como *problemas* e que, de algum modo, desafiem os seus saberes anteriores, conduzindo à reflexão sobre novos significados e novos domínios de uso desses saberes. Nesse processo dialético conjugam-se dois aspectos da aprendizagem: desenvolve-se uma *diversificação* dos significados concretos dos objetos matemáticos e uma progressiva *integração* desses significados numa forma abstrata, cujo sentido é potencializar as possibilidades de uso em novas situações concretas.

Dessa maneira, buscamos atividades abrangentes e adequadas sobre os números reais, para um público do Ensino Médio. “Abrangentes”, no sentido de oferecer ao aluno situações didáticas que possibilitassem a manifestação de *exemplos protótipos e resultados lógico-analíticos* (Hershkowitz, 1994). Consideramos que essa abrangência, ao favorecer o enriquecimento da imagem conceitual, abre a possibilidade de o aluno dar sentido a noções que estão intrinsecamente relacionadas aos números reais, tais como, densidade e infinito, focos das atividades escolhidas para esta investigação, embora haja outras igualmente importantes. A escolha do termo “adequadas” refere-se à forma de explorar essas noções com os alunos, considerando que estão no Ensino Médio, e

que se deve viabilizar o aprofundamento de ideias, de definições, e ainda, se possível, de demonstrações matemáticas.

Para tal, elaboramos, aplicamos e analisamos atividades, incentivando o uso da calculadora, que favoreceram a identificação de *atributos relevantes e irrelevantes*, com o objetivo de caracterizar as imagens conceituais dos alunos a partir dos seus *juízos prototípicos e analíticos*, conforme define Hershkowitz (1994).

Essas atividades aconteceram num ambiente de discussão de ideias, em que o aluno foi constantemente solicitado a esclarecer tais juízos por meio das suas justificativas. Mais especificamente, buscamos respostas para os seguintes questionamentos:

- Quais atributos relevantes e irrelevantes são expressos pelos alunos, relacionados aos números racionais e irracionais, na realização das atividades?
- Que elementos das atividades caracterizam os juízos prototípicos e analíticos manifestados pelos alunos?
- Que atividades favorecem a manifestação de exemplos protótipos que caracterizam a imagem conceitual do aluno em relação aos números racionais e irracionais?
- Que significados os alunos atribuem às dízimas periódicas e não periódicas nas representações decimais infinitas?
- Como o uso da calculadora pode contribuir na busca de atributos relacionados à imagem conceitual dos números reais?
- De que forma o estudo dos números irracionais da forma  $\sqrt{n}$  e suas aproximações racionais podem contribuir para uma exposição dos atributos considerados relevantes para os alunos e seus exemplos protótipos?
- Que ideias aparecem e como aparecem para as noções relacionadas ao número real, especificamente, densidade e infinito?

Esta tese apresenta e discute o processo vivido pelos alunos frente a atividades que lhes foram propostas sobre o tema. No capítulo 2, apresentamos a revisão bibliográfica sobre o tema desta pesquisa, as dificuldades de aprendizagem dos sujeitos pesquisados nos vários segmentos de ensino,

principalmente em relação a futuros professores de Matemática. Para isso, selecionamos pesquisas brasileiras e de outros países, realizadas com futuros professores, professores e alunos do Ensino Médio. Identificamos, nos livros didáticos que são utilizados no Ensino Superior, as abordagens, as orientações e as sugestões sobre o ensino de números reais para o futuro professor de Matemática.

No capítulo 3, apresentamos o quadro teórico escolhido. Consideramos os aspectos relacionados à construção de conceitos em matemática e apresentamos uma discussão sobre o número real como objeto da matemática elementar e avançada (Costa, 2002; Moreira, 2005). Para categorizar as diferentes formas que os alunos elaboram e estruturam o conceito de número real no Ensino Médio, articulamos os conceitos de *imagem conceitual* e *definição conceitual*<sup>2</sup>, de Tall e Vinner (1991), com os de *juízos prototípicos e analíticos* e *atributos relevantes e irrelevantes*, conforme define Hershkowitz (1994). Estas são as ferramentas teóricas que utilizamos nessa identificação e nessa categorização da imagem conceitual de cada aluno.

O objetivo do capítulo 4 é apresentar ao leitor um panorama de como o tópico números reais está presente em alguns documentos referentes à Matemática do Ensino Médio. Para isso, realizamos uma análise documental, na qual destacamos aspectos orientadores dos documentos curriculares nacionais relacionados ao ensino desse tema. O alcance dessas orientações é avaliado por meio da análise de três coleções de livros didáticos de Matemática e que também expomos nesse capítulo. O documento elaborado por Lima et al. (2001) auxiliou-nos nessa tarefa.

A metodologia clínico-qualitativa (Delval, 2002 e Lüdke e André, 1996) desta pesquisa está apresentada no capítulo 5, quando esclarecemos nossas escolhas metodológicas, assim como as etapas da pesquisa, o caminho percorrido para sua realização e os procedimentos escolhidos para a análise dos dados. Coletamos os dados em duas etapas: um estudo preliminar exploratório, realizado com 70 alunos da 2ª série do Ensino Médio, e o estudo principal - clínico - com 12 alunos da 3ª série do Ensino Médio. Nesse capítulo também apresentamos os sujeitos da pesquisa, os instrumentos utilizados na coleta de dados e a dinâmica dos encontros realizados com os alunos.

---

<sup>2</sup> O termo *definição conceitual* é a expressão verbal de que o sujeito se utiliza, para especificar o conceito.



Os dados coletados permitiram-nos perceber os significados atribuídos ao objeto de estudo e contribuíram para a análise dos atributos relevantes e irrelevantes, manifestados a partir dos exemplos protótipos do repertório de imagens dos alunos. Essa análise foi organizada em dois grupos de atividades e está apresentada no capítulo 6.

Finalizamos esta pesquisa no capítulo sete, apresentando as inferências que os dados possibilitaram, nossas considerações e conclusões, indicando as contribuições que este trabalho nos possibilitou realizar e as perspectivas para futuras pesquisas que ainda se fazem necessárias, visto a importância do tema.

Esperamos com esta pesquisa contribuir para o ensino e a aprendizagem do tema número real, conceito de grande relevância para os professores de Matemática e para os alunos que, de alguma forma, se servirão da Matemática na busca de sua profissão.