



**Fabiola Valeria Cordero Uriona**

**Estudo comparativo dos sistemas integráveis  
nos espaços de polígonos, matrizes e fibrados**

**Tese de Doutorado**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Matemática, do Departamento de Matemática da PUC-Rio.

Orientador : Prof. Sergey Galkin  
Coorientador: Prof. Alessia Mandini

Rio de Janeiro  
setembro de 2021



**Fabiola Valeria Cordero Uriona**

**Estudo comparativo dos sistemas integráveis  
nos espaços de polígonos, matrizes e fibrados**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor pelo Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo:

**Prof. Sergey Galkin**

Orientador

Departamento de Matemática – PUC-Rio

**Prof. Alessia Mandini**

Coorientador

Instituto de Matemática e Estatística – UFF

**Prof. John Alexander Cruz Morales**

Universidad Nacional de Colombia

**Prof. Lino Anderson da Silva Grama**

IMECC-UNICAMP

**Prof. David Francisco Martínez Torres**

Departamento de Matemática – PUC-Rio

**Prof. Grigory Mikhalkin**

Université de Genève

**Prof. Laura Patricia Schaposnik Massollo**

University of Illinois Chicago

**Prof. Carlos Tomei**

Departamento de Matemática – PUC-Rio

**Dr. Alexander Chervov**

Institute Curie

**Prof. Leonor Pires Marques de Oliveira Godinho**

Instituto Superior Técnico Lisboa

Rio de Janeiro, 24 de setembro de 2021

Todos os direitos reservados. A reprodução, total ou parcial do trabalho, é proibida sem a autorização da universidade, do autor e do orientador.

### **Fabiola Valeria Cordero Uriona**

Licenciatura plena em Matemática pela Universidad Mayor de San Andrés (La Paz, Bolivia). Mestrado no Departamento de Matemática da Universidade Federal Fluminense (Niterói, Brasil), com ênfase em Geometria.

#### Ficha Catalográfica

Cordero Uriona, Fabiola Valeria

Estudo comparativo dos sistemas integráveis nos espaços de polígonos, matrizes e fibrados / Fabiola Valeria Cordero Uriona; orientador: Sergey Galkin; coorientador: Alessia Mandini. – 2021.

107 f: il. color. ; 30 cm

Tese (doutorado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática, 2021.

Inclui bibliografia

1. Matemática – Teses. 2. Geometria – Teses. 3. Espaço de Polígonos. 4. Sistemas Integráveis. 5. Hamiltonianas de Bending. 6. Hamiltonianas de Hitchin. 7. Fibrados Parabólicos de Higgs . I. Galkin, Sergey. II. Mandini, Alessia. III. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. IV. Título.

CDD: 620.11

## Agradecimentos

Em primeiro lugar, gostaria de agradecer especialmente a meu orientador Prof. Sergey Galkin e minha coorientadora Prof. Alessia Mandini por ter me guiado durante esta caminhada, por compartilhar comigo seu conhecimento e pela sua enorme paciência.

Também sou grata aos membros da minha banca examinadora, Prof. Lino Grama, Prof. John Alexander Cruz Morales, Prof. David Martínez Torres, Prof. Grigory Mikhalkin, Prof. Laura Schaposnik, Prof. Carlos Tomei, Dr. Alexander Chervov, Prof. Leonor Godinho que comprometeram muito generosamente seu tempo e conhecimento para avaliar a minha tese.

Agradeço a todos os professores e companheiros do pós-graduação que foram parte do meu processo de aprendizagem no doutorado, além de agradecer ao corpo administrativo de pós-graduação pelo seu trabalho eficiente e sua disposição constante.

Eu também gostaria de agradecer minha família pelo apoio e força.

Por último, mas não menos importante, gostaria de agradecer à CAPES pois o presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e à PUC-Rio pela bolsa de isenção de mensalidades do doutorado.

## Resumo

Cordero Uriona, Fabiola Valeria; Galkin, Sergey; Mandini, Alessia.  
**Estudo comparativo dos sistemas integráveis nos espaços de polígonos, matrizes e fibrados.** Rio de Janeiro, 2021. 107p.  
Tese de Doutorado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O *espaço de polígonos* de um grupo de Lie é definido como a redução simplética em um produto de órbitas pela ação coadjunta.

Neste trabalho comparamos alguns sistemas integráveis definidos em espaços de módulos de polígonos, matrizes e fibrados, tais como o sistema de Kapovich–Millson, o modelo de Gaudin e a aplicação de Hitchin.

## Palavras-chave

Espaço de Polígonos; Sistemas Integráveis; Hamiltonianas de Bending; Hamiltonianas de Hitchin; Fibrados Parabólicos de Higgs.

## Abstract

Cordero Uriona, Fabiola Valeria; Galkin, Sergey (Advisor); Mandini, Alessia (Co-Advisor). **A comparative study of integrable systems on the spaces of polygons, matrices and bundles.** Rio de Janeiro, 2021. 107p. Tese de Doutorado – Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The *Polygon Space* of a Lie group is defined as the symplectic reduction of a product of orbits by the coadjoint action.

In this work we compare integrable systems defined on different moduli spaces of polygons, matrices and bundles, such as Kapovich–Millson’s system, Gaudin’s model and the Hitchin’s map.

## Keywords

Polygon Space; Integral System; Bending Hamiltonian; Hitchin Hamiltonian; Parabolic Higgs Bundles.

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Preliminares algébricos</b>	<b>20</b>
2.1	Álgebras	20
2.2	Grupos de Lie e as suas ações	25
2.2.1	Grupos de Lie	25
2.2.2	Órbitas adjuntas e coadjuntas	26
<b>3</b>	<b>Preliminares simpléticos</b>	<b>28</b>
3.1	Variedades simpléticas	28
3.1.1	Sistemas integráveis	29
3.1.2	Pares de Lax	30
3.2	De grupos de Lie para a geometria simplética	32
3.2.1	Mapa momento	33
3.2.2	Redução simplética	35
3.2.2.1	Redução por etapas	36
<b>4</b>	<b>Espaço de polígonos e espaços de módulos relacionados</b>	<b>37</b>
4.1	Espaço de polígonos euclidianos	37
4.1.1	O sistema integrável de Kapovich–Millson	38
4.1.2	Espaço de polígonos como quociente de Grassmanniana	40
4.2	Polígonos como representações de aljavas ( <i>quivers</i> )	41
4.3	Espaço de hiperpolígonos	43
<b>5</b>	<b>Espaço de <math>SL(n, \mathbf{C})</math>-polígonos</b>	<b>45</b>
5.1	As órbitas coadjuntas de $SL(2, \mathbf{C})$	45
5.2	As órbitas coadjuntas de $SL(n, \mathbf{C})$	46
5.3	Dimensão da órbita coadjunta de $SL(n, \mathbf{C})$	46
<b>6</b>	<b>Fluxos de Kapovich–Millson para <math>SL(2, \mathbf{C})</math> e outros grupos</b>	<b>48</b>
6.1	Fluxo $\varphi_k^t$ associado a $f_k$ para o caso $G = SL(2, \mathbf{C})$	52
<b>7</b>	<b>Compatibilidade com as formas reais</b>	<b>54</b>
<b>8</b>	<b>O método de Gaudin</b>	<b>59</b>
8.1	Dos fluxos de Kapovich–Millson para a álgebra de Kohn–Drinfeld	59
8.2	O grupo simétrico e o morfismo de Gaudin	60
8.3	Os elementos de Gaudin e o modelo de Gaudin	62
8.4	Os elementos de Young–Jucys–Murphy	63
<b>9</b>	<b>O sistema de Hitchin</b>	<b>64</b>
9.1	Fibrados parabólicos	64
9.1.1	Campos de Higgs parabólicos	65
9.1.2	Redução simplética do espaço de conexões	66
9.2	O sistema integrável de Hitchin	67

9.2.1	O sistema de Gaudin é o sistema de Hitchin sobre a esfera de Riemann	68
9.3	(Hiper-)polígonos e fibrados parabólicos (de Higgs)	68
9.3.1	O mapa de Hitchin em termos de hiperpolígonos	70
<b>10</b>	<b>Kapovich–Millson como redução de Gelfand–Cetlin</b>	<b>71</b>
<b>11</b>	<b>Degenerações tóricas</b>	<b>74</b>
<b>12</b>	<b>Kapovich–Millson como um limite de Gaudin–Hitchin</b>	<b>78</b>
12.1	O caso de quadrângulos	79
12.2	O caso de pentágonos	80
12.2.1	Deformação do sistema de Kapovich–Millson (construção das $x_i(t)$ )	84
12.3	O caso de hexágonos	85
12.4	Caso geral para triangulação leque (grafo dual lagarta)	85
12.5	Trabalhos atuais e futuros	87
12.5.1	Fórmulas explícitas para árvores gerais	87
12.5.2	Mais trabalhos em andamento e problemas relacionados	88
<b>A</b>	<b>Formas bilineares e bases ortonormais</b>	<b>89</b>
A.1	Posto 2	90
A.2	Posto superior	91
<b>B</b>	<b>Grafos e triangulações</b>	<b>96</b>
B.1	Grafos	96
B.2	Triangulações	97
	<b>Referências bibliográficas</b>	<b>98</b>

## Lista de figuras

Figura 1.1	Interpretação geométrica do fluxo hamiltoniano do sistema integrável de Kapovich–Millson	11
Figura 1.2	Descomposição do polígono correspondente ao sistema K-M	13
Figura 1.3	Descomposição da esfera furada correspondente ao sistema J–W	13
Figura 1.4	Relações entre distintos sistemas integráveis de posto 2	15
Figura 4.1	Imagem de $L$ quando $r_i = a$ para todo $i$	39
Figura 4.2	Imagem de $L$ quando $r_i$ 's são distintos mas próximos	40
Figura 11.1	Interpretação geométrica da construção de um sistema integrável a partir de uma degeneração tórica	76
Figura 12.1	Triangulação e grafo correspondente ao hexágono no caso lagarta	86
Figura 12.2	Triangulação e grafo correspondente ao hexágono no caso não lagarta	86
Figura 12.3	Triangulação não leque e árvore dual filogenética não lagarta	88

# 1 Introdução

Os eixos principais desta tese são *o espaço de polígonos e os sistemas integráveis* de uma variedade.

O interesse na análise dos movimentos de articulações mecânicas (por exemplo, [AL1945]) consolidou o estudo dos espaços de polígonos no espaço euclidiano  $E^3$  de dimensão três. Já que  $E^3$  não tem um sistema de coordenadas preferido, consideramos o espaço de módulos (espaço quociente) para o qual dois polígonos representam o mesmo ponto do espaço de módulos se e só se eles são congruentes, i.e. existe um movimento do espaço euclidiano que leva um polígono ao outro. As arestas modelam as dobradiças sólidas, e assim seus comprimentos  $r_1, \dots, r_n$  durante o movimento não mudam.

Inspirado por Thurston–Weeks [TW1984], Walker [W1985] estudou as propriedades dessas variedades de polígonos de um ponto de vista topológico. Cada subconjunto  $I \subset \{1, \dots, n\}$  determina uma função  $\sum_{i \in I} r_i - \sum_{j \notin I} r_j$ , e os sinais dessas funções determinam uma partição do espaço de parâmetros  $r_i$  em câmeras, o tipo topológico do espaço de polígonos esta sendo constante dentro de uma câmera. Ele conjecturou que as câmeras são essencialmente determinadas pelos números de Betti de espaço de polígonos. Klyachko [K1994] provou esse resultado calculando os números de Betti dessas variedades. Ele observou que o espaço de módulos de polígonos euclidianos pode ser munido com uma estrutura da variedade algébrica complexa projetiva

$$(\mathbf{CP}^1)^n /_{r_1, \dots, r_n} \mathrm{PGL}(2, \mathbf{C}) = \mathrm{Proj} \bigoplus_k \Gamma((\mathbf{CP}^1)^n, \mathcal{O}(kr_1, \dots, kr_n))^{\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})},$$

um quociente no sentido da teoria geométrica de invariantes (GIT). Usando a teoria de Kempf–Ness o problema de GIT pode ser reformulado como uma redução simplética, um ponto de vista abordado nessa tese seguindo Kapovich–Millson [KM1996].

Kapovich e Millson observaram que o espaço de módulos de polígonos tem uma estrutura simplética natural, por ser identificado com uma redução simplética da ação do grupo de rotações  $\mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$  no produto de  $n$  órbitas coadjuntas (que correspondem aos lados do polígono, de comprimentos fixos). Eles também notaram que os comprimentos das  $(n - 3)$  diagonais de qualquer

triangulação de polígono estão em involução, e podem ser considerados como funções hamiltonianas de um sistema integrável. Os fluxos hamiltonianos associados então podem ser interpretados em termos mecânicos como as flexões (ou dobramentos, *bending* em inglês) de polígonos em torno de suas diagonais. Os comprimentos das diagonais e os ângulos diedrais formam um sistema de coordenadas ação-ângulo.

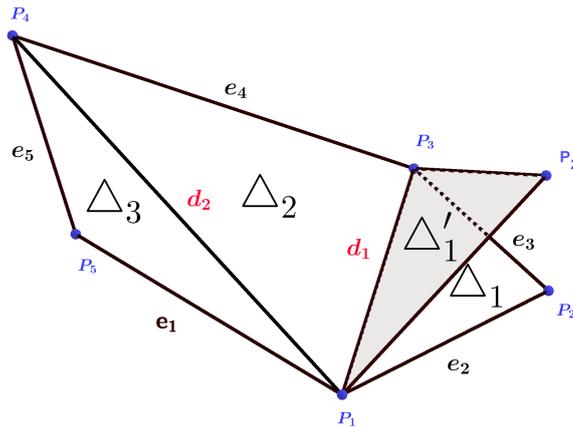


Figura 1.1: Interpretação geométrica do fluxo hamiltoniano do sistema integrável de Kapovich–Millson

Sob esse ponto de vista, o espaço de polígonos euclidianos é um caso particular e mais simples de uma variedade simplética obtida como quociente de um produto de órbitas coadjuntas pela ação diagonal de um grupo de Lie.

Os sistemas integráveis em variedades simpléticas ([DKN1985, A1996, BBT2003]), cujo estudo é motivado pelo formalismo hamiltoniano da mecânica clássica, se manifestam em várias áreas da matemática, como Geometria Simplética, Geometria Algébrica, Sistemas Dinâmicos e Teoria de Representações.

Deste estudo surgiram diferentes sistemas integráveis definidos em vários espaços, em diferentes épocas:

- os de Garnier [G1919] (veja [DKN1985, pg. 256-259])
- os elementos comutantes no anel do grupo simétrico, introduzidos por Young em 1930s, Jucys [J1971, J1974] e Murphy [M1981] (veja Vershik–Okounkov [OV2005])
- os de Gaudin [G1976, G1983], (veja [BBT2003, pg. 232-240]),
- os sistemas de Gelfand–Cetlin, introduzidos e assim denominados por Guillemin–Sternberg [GS1983],

- os de Hitchin [H1987-2, H1987-1, HSW2013],
- os de Jeffrey–Weitsman [JW1992],
- os de Kapovich–Millson [KM1996],  
Ballestreros–Corsetti–Ragnisco [BCR1996] e Karimipour [K1998],
- os de Nohara–Ueda [NU2014],
- os de Belmans–Galkin–Mukhopadhyay [BGM2020],
- ...

Estes sistemas se relacionam, e neste estudo esclarecemos algumas dessa rede de relações. Não é tão claro como compará-los, porque são definidos em contextos diferentes, mas ainda às vezes podemos ver a semelhança entre suas fórmulas e imagens. Os sistemas de Kapovich–Millson são definidos diretamente nos espaços de polígonos. Em [G1976] Gaudin, usando o método de Bethe, descreveu um sistema de elementos na álgebra do grupo simétrico que comutam entre si. Essa subálgebra induz o sistema de Gaudin, um sistema integrável para qualquer representação do grupo simétrico, que é o caso particular da representação dada como potência tensorial de álgebra de polinômios (ou álgebra envelopante) de uma álgebra de Lie. Foi observado em [ER1996] que os sistemas de Gaudin para  $\mathfrak{sl}(2)$  coincidem com as equações diferenciais de Garnier [G1919]. O método de Gaudin, quando aplicado ao sistema de elementos comutantes introduzidos por Young, Jucys e Murphy [J1971, J1974, M1981], produz o sistema integrável descoberto independentemente (sem saber sobre a analogia com Gaudin) por Kapovich–Millson [KM1996], Ballestreros–Corsetti–Ragnisco [BCR1996] e Karimipour [K1998]. Os sistemas de Hitchin são definidos no espaço de módulos de fibrados estáveis de Higgs, uma compactificação parcial do espaço cotangente do espaço de módulos de fibrados estáveis. Esses sistemas generalizam para os espaços de módulos de fibrados de Higgs munidos com estrutura parabólica no divisor de  $n$  pontos marcados. O número de pontos marcados dá o número de vértices do polígono. Para uma curva de gênero zero, i.e.  $\mathbf{CP}^1$ , e o fibrado trivial podemos identificar o sistema de Hitchin com o sistema de Gaudin. Com as mesmas condições, os fibrados parabólicos de Higgs podem ser interpretados como os espaços de polígonos, e os sistemas/elementos de Garnier–Gaudin–Hitchin e os sistemas/elementos de Young–Jucys–Murphy–Kapovich–Millson–Ballestreros–Corsetti–Ragnisco–Karimipour podem ser comparados.

A generalização do conceito de espaço de polígonos e dos sistemas integráveis de Kapovich–Millson pode ser feita de várias maneiras. Nesta tese tratamos principalmente as seguintes:

- Estendendo de posto 2 para posto maior ou outros grupos/álgebras de Lie,
- Estendendo do real ao complexo (da redução simplética para hiperkähler, e de  $SU(2)$  para  $SL(2, \mathbf{C})$ ),
- Convertendo parâmetros discreto em contínuos (do sistema de Kapovich–Millson para o de Gaudin–Hitchin),

Outras direções da generalização que discutimos são:

- Do euclidiano ao esférico (ou “exponenciação” do mundo aditivo de álgebras de Lie ao mundo multiplicativo de grupos de Lie), onde o espaço de polígonos esféricos é visto como um espaço de módulos de conexões planas, ou o espaço de módulos de fibrados holomorfos de posto 2 sobre a esfera de Riemann com  $n$  pontos marcados. Jeffrey [J1994, thm.6.6] e Kapovich–Millson [KM1996, thm. 5] provam que esses espaços são simplectomorfos para a soma de comprimentos suficientemente pequena. Nohara e Ueda em [NU2015] mostram que os sistemas de Kapovich–Millson no espaço de polígonos euclidianos são isomorfos aos casos particulares dos sistemas de Jeffrey–Weitsman [JW1992] nos espaços de polígonos esféricos para comprimentos pequenos.

PUC-Rio - Certificação Digital N° 1521407/CA

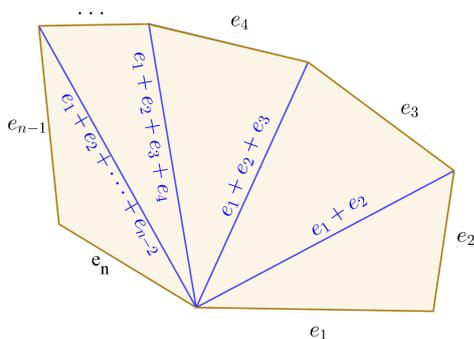


Figura 1.2: Decomposição do polígono correspondente ao sistema K–M

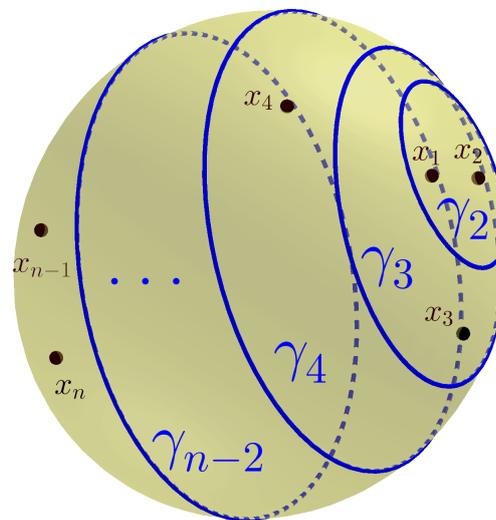


Figura 1.3: Decomposição da esfera furada correspondente ao sistema J–W

- Dos sistemas escritos em coordenadas explícitas usando invariantes geométricos intuitivos aos sistemas construídos analiticamente usando degenerações tóricas seguindo o método de Nishinou–Nohara–Ueda. Os sistemas integráveis deste tipo nos espaços de polígonos foram construídos e estudados em Nohara–Ueda [NU2014] no caso euclidiano e em

Belmans–Galkin–Mukhopadhyay [BGM2020] no caso esférico. Estes sistemas integráveis são em geral não isomorfos aos sistemas de Kapovich–Millson/Jeffrey–Weitsman, mas têm as mesmas imagens. A vantagem deles é que são melhor adaptadas à ‘contagem’ de curvas pseudoholomorfas.

Finalmente há deformações do comutativo ao não comutativo, que não discutimos explicitamente:

- Uma generalização deste tipo é a construção das chamadas álgebras de Gaudin, as subálgebras comutativas nos produtos tensoriais das álgebras envelopantes de uma álgebra de Lie.
- Outra generalização é a quantização de Beilinson–Drinfeld do sistema de Hitchin, na qual a álgebra das funções no espaço cotangente é deformada para a álgebra de operadores diferenciais na base. O símbolo de operador diferencial é uma função no espaço cotangente, e a álgebra de funções polinomiais no espaço cotangente é uma álgebra associada graduada à álgebra filtrada dos operadores diferenciais .

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1521407/CA

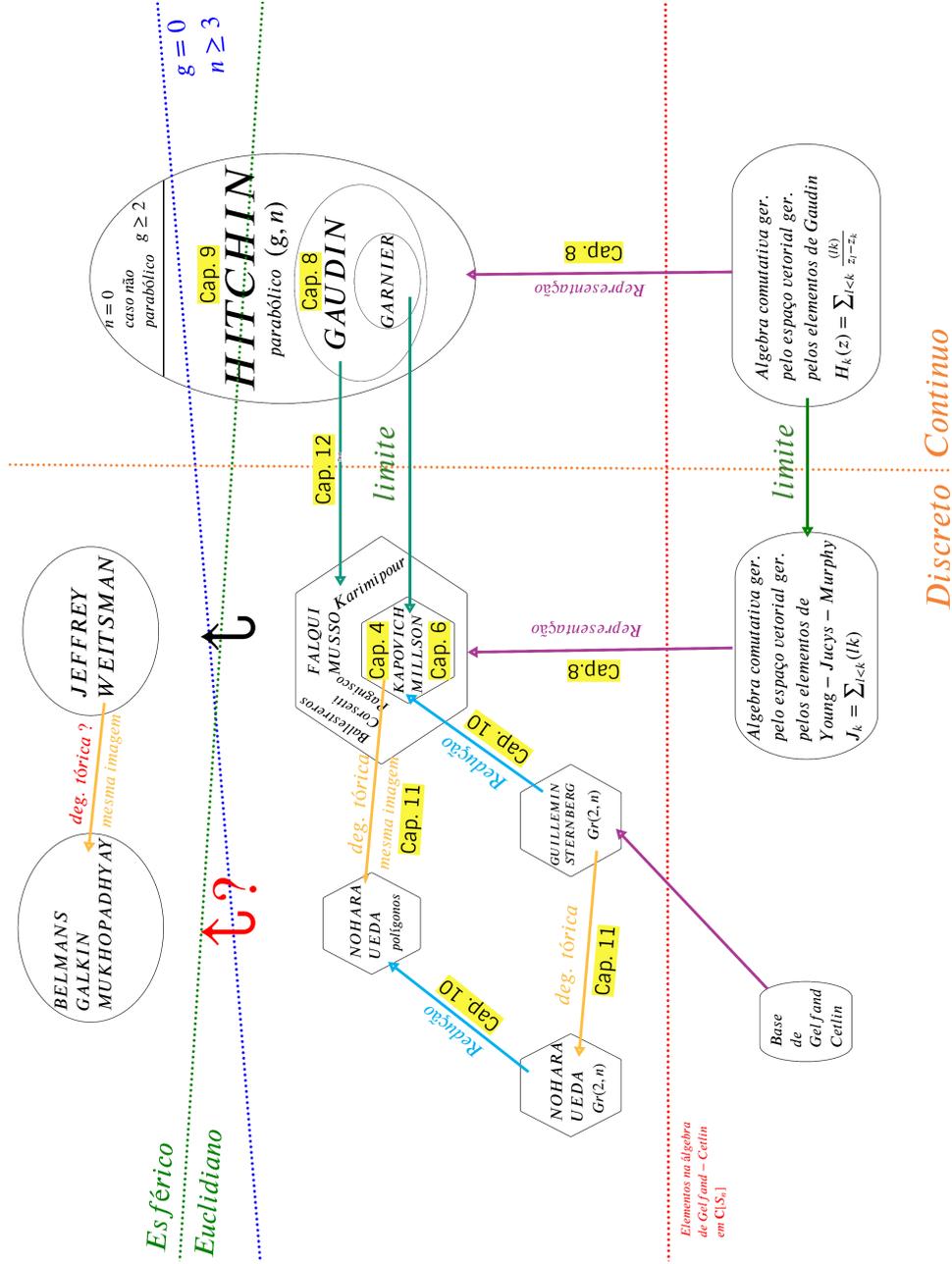


Figura 1.4: Relações entre distintos sistemas integráveis de posto 2

O objetivo principal desta tese é provar que, se considerarmos a variedade simplética do espaço do polígono para o grupo de Lie  $SL(2, \mathbf{C})$ , as hamiltonianas do sistema integrável de Kapovich–Millson podem ser vistas como o limite das hamiltonianas do sistema de Hitchin quando certos parâmetros das hamiltonianas associadas convergem.

Esse resultado, depois de perceber a equivalência dos sistemas de Gaudin e Hitchin, é só uma redescoberta, à luz de Chervov–Falqui–Rybnikov [CFR2009, CFR2010] e Aguirre–Felder–Veselov [AFV2011]. Alexander Chervov e Leonid Rybnikov nos explicaram que o limite que usamos é dual, no sentido da dualidade de Howe (ver [C2011]), aos limites encontrados nos trabalhos de Vinberg [V1991, V2014] sobre o pião de Manakov [M1976] e as subálgebras de Mishchenko–Fomenko [MF1981].<sup>1</sup>

A estrutura da tese é a seguinte.

Nos capítulos 2 a 4 revisamos os conceitos e resultados para a compreensão efetiva do material.

O capítulo 2 cobre os conhecimentos algébricos usados em geometria simplética, tais como grupo e álgebra de Lie, álgebra de Poisson, álgebra associativa envelopante, graduações e filtrações, e a estrutura de álgebra de Poisson na álgebra associada graduada de uma álgebra quase comutativa, tal como álgebra de operadores diferenciais ou álgebra envelopante. Também introduzimos o conceito de anel de grupo, usado no método de Gaudin.

O capítulo 3 contém as definições e construções básicas da geometria simplética: variedades simpléticas, sistemas integráveis e pares de Lax, ações hamiltonianas e mapa momento, redução simplética e redução em etapas, e a forma de Kirillov–Kostant–Souriau nas órbitas coadjuntas.

No capítulo 4 chegamos aos espaços de polígonos, e o trabalho de Kapovich e Millson em [KM1996]. Damos algumas caracterizações equivalentes: como redução simplética de Hausmann–Knutson do *grassmanniano de planos* na seção 4.1.2 ou como variedade de representações de uma *aljava* (quiver) na seção 4.2. Também em seção 4.3 definimos um espaço de módulos  $X(r)$  dos chamados *hiperpolígonos*, um análogo hiperkähler do espaço de módulos de polígonos, construído usando a redução hiperkähler.

No capítulo 5 descrevemos as órbitas coadjuntas (e, portanto, o espaço de polígonos) no caso do grupo de Lie  $SL(n, \mathbf{C})$ , para  $n \geq 2$ .

No capítulo 6 estendemos por analogia o sistema integrável de Kapovich–Millson do caso da álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(2)$  para  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ . Escrevemos as funções de forma invariante, para obter o sistema (incompleto) das funções em involução

<sup>1</sup>Veja o recente trabalho de Vinberg–Yakimenko [VY2019] para a perspectiva de integrabilidade completa para subvariedades invariantes na representação coadjunta.

nos espaços de polígonos de outras álgebras de Lie, como  $\mathfrak{sl}(n)$ . Em proposição 6.1(item 2) calculamos o colchete de Poisson para os geradores quadráticos de álgebra de funções polinomiais no espaço de polígonos. O cálculo implica a integrabilidade do sistema de Kapovich–Millson. O resultado pode ser obtido da computação dos fluxos para um sistema associado a uma triangulação de um quadrângulo, e naturalmente nos aproxima à definição de álgebra de Kohno–Drinfeld em seção 8.1.

No capítulo 7 mostramos a compatibilidade entre o sistema de Kapovich–Millson associado com a álgebra complexa  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}) = \mathfrak{so}(3, \mathbf{C})$  e as suas formas reais, um sistema original associado a  $\mathfrak{su}(2) = \mathfrak{so}(3, \mathbf{R})$  e outro a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) = \mathfrak{so}(2, 1; \mathbf{R})$ .

No capítulo 8 introduzimos o método de Gaudin de construção dos sistemas integráveis e o próprio modelo de Gaudin. O resultado do cálculo dos colchetes de Poisson entre os produtos escalares que obtemos em capítulo 6 tem exatamente a mesma forma que os comutadores entre transposições no anel do grupo simétrico. A álgebra de Kohno–Drinfeld é definida para capturar essas relações. Mostramos que o sistema de Kapovich–Millson pode ser obtido pelo método de Gaudin a partir de um sistema de elementos comutantes em  $\mathbf{C}[S_n]$  chamados elementos de Young–Jucys–Murphy. Também introduzimos os elementos de Gaudin, parametrizados por  $n$ -uplas de números complexos distintos, e finalmente o modelo de Gaudin.

No capítulo 9 introduzimos as hamiltonianas do sistema integrável de Hitchin e reinterpretamos o modelo de Gaudin como sendo o sistema integrável de Hitchin no espaço de módulos de fibrados parabólicos de Higgs sobre a esfera de Riemann  $\mathbf{CP}^1$  com  $n$  pontos parabólicos.

Em seção 9.3 explicamos o isomorfismo de Godinho–Mandini entre uma parte  $\mathcal{H}(\beta)$  do espaço de módulos de fibrados parabólicos de Higgs e um espaço  $X(r)$  de módulos de hiperpolígonos, e o empregamos para reescrever o sistema de Hitchin em termos de hiperpolígonos.

No capítulo 10 seguimos a demonstração de Hausmann–Knutson de que o sistema de Kapovich–Millson é uma redução simplética do sistema de Gelfand–Cetlin introduzido por Guillemin e Sternberg. Mais recentemente, Nohara–Ueda generalizaram o sistema de Gelfand–Cetlin para outras triangulações de polígonos e estenderam o resultado de Hausmann–Knutson.

No capítulo 11 discutimos o método de Nishinou–Nohara–Ueda para construir sistemas integráveis a partir de degenerações tóricas, usado por Nishinou–Nohara–Ueda, Nohara–Ueda e Belmans–Galkin–Mukhopadhyay para construir os novos sistemas com as mesmas imagens que os sistemas de Gelfand–Cetlin, Kapovich–Millson e Jeffrey–Weitsman, mas que são mais

convenientes para o estudo da simetria de espelho, como no cálculo do potencial de Floer/Ginzburg–Landau.

No capítulo 12 provamos o objetivo principal da tese: o sistema das funções de Kapovich–Millson pode ser obtido como o limite do sistema das funções de Garnier–Gaudin–Hitchin quando os pontos na reta  $\mathbf{CP}^1$  se aproximam de uma maneira especial.

No apêndice A construímos as bases ortonormais para a forma de Killing na  $\mathfrak{sl}(n)$ , conhecidas em literatura física como as matrizes generalizadas de Gellmann, e, escrevendo nessas bases, identificamos os sistemas de Young–Jucys–Murphy–Kapovich–Millson–Ballestreros–Corsetti–Ragnisco–Karimpour.

No apêndice B damos as definições dos conceitos relacionados a grafos e triangulações mencionados ao longo da tese.

Esses são os novos resultados e demonstrações obtidos na tese.

- No capítulo 6 estendemos, por analogia, a descrição dos fluxos hamiltonianos periódicos do sistema integrável de Kapovich – Millson do caso da álgebra de Lie  $\mathfrak{su}(2)$  para  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ .
- No capítulo 7 provamos a compatibilidade entre três sistemas: o sistema Kapovich–Millson, associado à álgebra complexa  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ , o sistema original associado a  $\mathfrak{su}(2)$ , e aquele associado a  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ .
- No capítulo 12 mostramos que as hamiltonianas do sistema de Kapovich–Millson são o limite de combinações lineares explícitas das hamiltonianas do sistema de Hitchin quando certos parâmetros dessas hamiltonianas convergem. A prova é feita em duas etapas:
  - Na primeira, ainda não conhecemos a forma da combinação linear da convergência de interesse. Para estudar o caso de pentágonos, usamos a geometria algébrica clássica da superfície de del Pezzo de grau 5 (identificada com o espaço de módulos de Deligne–Mumford  $\overline{M}_{0,5}$ ) na Grassmanniana  $Gr(2, 5)$  para identificar o fechamento do *locus* de Gaudin com a seção linear gerada pelos pontos de Kapovich–Millson. Trivializando a restrição do fibrado universal para um conjunto afim passando por um dos pontos de Kapovich–Millson, escrevemos as hamiltonianas de Kapovich–Millson como valores em 0 de combinações lineares explícitas de hamiltonianas de Hitchin com coeficientes dependendo dos parâmetros.
  - Com base na resposta que obtivemos para os pentágonos na primeira etapa, escrevemos uma resposta diretamente sem cálculos para a triangulação simétrica do hexágono, e posteriormente adi-

vinhamos uma combinação linear explícita que dá as hamiltonianas de Kapovich–Millson para toda triangulação do tipo leque.

Obtivemos este resultado de forma independente, antes de encontrar os trabalhos de Chervov–Falqui–Rybnikov e Aguirre–Felder–Veselov, e perceber que nosso resultado corresponde a um caso particular desses trabalhos, mas com as fórmulas explícitas e diferentes. Abaixo listamos algumas diferenças nas demonstrações:

- Nossa prova é mais elementar e dá funções explícitas  $c_{kj}(t)$  e  $x_j(t)$  tais que, para cada  $k$ , a soma  $\sum c_{kj}(t)H_j(x_j(t))$  é regular em  $t = 0$  e seu valor é igual às hamiltonianas de Kapovich–Millson  $f_k$ .
- Aguirre–Felder–Veselov calculam o fechamento de Zariski na Grassmanniana da imagem dos sistemas de Gaudin trabalhando com coordenadas especiais em cartas afins no espaço de módulos de Deligne–Mumford, enquanto nós calculamos o limite usando as coordenadas de Plücker, e explicitamente obtemos algumas curvas no espaço de configuração para calcular o limite.

Os resultados da tese e os de [CFR2009, CFR2010, AFV2011] sugeriram que os limites podem ser escritas pelas fórmulas explícitas do tipo

$$f_{I(e)} = \lim \sum c_k(e)H_k(x),$$

onde  $e$  é uma aresta de árvore,  $c_k(e)$  são funções explícitas de  $x$  parametrizadas pelas arestas,  $f_{I(e)}$  são variações das funções de Kapovich–Millson e  $H_k$  são funções de Gaudin. Na seção 12.5 discutimos algumas ideias como combinar todos os métodos com as ideias novas para dar as expressões naturais e explícitas para os coeficientes  $c_k(e)$ .

## 2

### Preliminares algébricos

Neste capítulo, são apresentados os conhecimentos algébricos necessários para o desenvolvimento da tese. Na seção 2.1 discutimos álgebras associativas, de grupo, polinomiais, tensoriais, de Lie e de Poisson. Na seção 2.2 discutimos os grupos de Lie e suas ações.

#### 2.1

##### Álgebras

Funções são elementos das *álgebras de funções*, e sistemas integráveis são dados por funções em involução. Veremos que às vezes é mais conveniente primeiro construir alguma subálgebra abeliana abstrata em uma álgebra (de Lie ou associativa não comutativa, como a álgebra de operadores diferenciais) e depois obter um sistema integrável geométrico como sendo a imagem dessa subálgebra por um homomorfismo.

Denotamos pela letra  $K$  um corpo. Na maioria das vezes,  $K = \mathbf{C}$  ou  $\mathbf{R}$ , os complexos ou os reais, mas às vezes é um corpo não arquimediano ou funcional como os corpos  $K'((t))$  das séries de Laurent ou  $K'(t)$  das funções racionais sobre um outro corpo  $K'$ .

Uma *álgebra* é um espaço vetorial munido de uma operação bilinear.

Consideramos duas classes principais de álgebras: as associativas e as de Lie. Também consideramos álgebras de Poisson munidas com as duas operações binárias.

Uma *filtração*  $F$  da álgebra  $B$  é uma coleção de subespaços

$$F^0 B \subset F^1 B \subset F^2 B \subset \dots$$

tais que a operação binária restrita a  $F^i B \times F^j B$  toma valores em  $F^{i+j} B$ .

**Exemplo 2.1.** *A filtração pelo grau no espaço  $\mathcal{D}_M$  dos operadores diferenciais numa variedade  $M$  com operação composição dos operadores.*

Uma *gradação*  $G$  na álgebra  $B$  é uma decomposição

$$B = G^0 B \oplus G^1 B \oplus G^2 B \oplus \dots$$

tal que a operação binária restrita a  $G^i B \times G^j B$  toma valores em  $G^{i+j} B$ .

**Observação:** Se  $G^i B \times G^j B$  tem imagem em  $G^{i+j+d} B$ , dizemos que a operação é graduada de grau  $d$ . No mesmo espaço graduado podemos considerar duas operações de graus diferentes.

A graduação  $G$  em  $B$  induz uma filtração  $F^k B := G^0 B \oplus \dots \oplus G^k B$ . No outro sentido, dada uma álgebra  $B$  com filtração  $F$ , podemos associar uma álgebra associada graduada  $Gr_F B$ , onde  $Gr_F^k B := F^k B / F^{k-1} B$  são espaços quocientes.

**Exemplo 2.2.** A álgebra graduada associada à álgebra de operadores diferenciais  $\mathcal{D}_M$  (do exemplo 2.1) é a álgebra das funções no espaço total  $T^*M$  do fibrado cotangente que são polinomiais na direção das fibras, graduada pelo grau de polinômio.

Dizemos que dois elementos  $a, b$  comutam se  $a \cdot b = b \cdot a$ . Uma álgebra é chamada *comutativa* se todos seus elementos comutam.

Uma álgebra  $A$  com uma operação  $a, b \mapsto a \cdot b$  é chamada *associativa* se  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$  para todos seus elementos  $a, b, c$ . Normalmente não usamos símbolo nenhum para as álgebras associativas e escrevemos  $ab$  e  $abc$  em vez de  $a \cdot b$  ou  $(a \cdot b) \cdot c$ .

**Exemplo 2.3.** Seja  $G$  um grupo finito. A álgebra (associativa)  $K[G]$  de um grupo  $G$  (ou o anel do grupo) é o espaço vetorial sobre  $K$  com a base indexada pelos elementos de  $g \in G$  e o produto induzido pelo produto no  $G$ : para duas funções  $a, b : G \rightarrow K$ ,

$$\left( \sum a(g)g \right) \cdot \left( \sum b(h)h \right) = \sum_{g,h \in G} a(g)b(h)gh.$$

Denotamos por  $\mathbf{C}[S_n]$  a álgebra do grupo simétrico  $S_n$ , que é uma álgebra associativa não comutativa (para  $n > 2$ ) de dimensão  $n!$ .

**Exemplo 2.4** (Álgebras livres). Para um espaço vetorial  $V$ , a álgebra tensorial  $T(V)$  (resp. simétrica  $S(V)$ ) é a álgebra graduada  $T(V) = \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}$  (resp.  $S(V) = \bigoplus_{n \geq 0} S^n V$ ) onde  $V^{\otimes n} = V \otimes V \otimes \dots \otimes V$  é o produto tensorial de  $V$  consigo mesmo  $n$  vezes, e  $S^n V = (V^{\otimes n})^{S_n}$  é o subespaço de tensores simétricos (invariantes com respeito ao grupo simétrico  $S_n$ ), e a operação é induzida pelo produto tensorial (ou sua simetrização).

As duas álgebras são associativas e graduadas (por  $n$ ). Mais,  $S(V)$  é comutativa.

Se  $V$  tem dimensão finita, a álgebra simétrica  $S(V)$  pode ser interpretada como o anel de polinômios  $K[V^*]$ , no espaço dual. Às vezes  $T(V)$  é interpretada como o anel de “polinômios não comutativos”.

A álgebra  $T(V)$  (resp.  $S(V)$ ) é a álgebra associativa mínima (resp. associativa e comutativa) sobre  $K$  que contém  $V$ . O mínimo é no sentido que, para cada função linear  $f : V \rightarrow A$  onde  $A$  é uma  $K$ -álgebra associativa (resp. associativa e comutativa), existe um único homomorfismo de álgebras  $\tilde{f} : T(V) \rightarrow A$  (resp.  $\tilde{f} : S(V) \rightarrow A$ ) tal que  $f = \tilde{f} \circ i$  onde  $i : V \rightarrow T(V)$  (resp.  $i : V \rightarrow S(V)$ ) é a inclusão.

A álgebra  $\mathfrak{g}$  com uma operação  $a, b \mapsto [a, b]$  antissimétrica (i.e.  $[a, b] = -[b, a]$ ) é chamada uma álgebra de Lie se a identidade de Jacobi

$$[[a, b], c] + [[b, c], a] + [[c, a], b] = 0$$

se cumpre para todos seus elementos. Denotar a operação nas álgebras de Lie por colchetes  $[, ]$  e  $\{, \}$ . Álgebras de Lie por sua vez são denotadas por letras como  $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}, \mathfrak{s}, \mathfrak{t}, \mathfrak{sl}, \mathfrak{su}, \mathfrak{so}, \mathfrak{u}$ . Todas as álgebras de Lie que consideramos tem dimensão finita, exceto as álgebras de Kohno–Drinfeld  $\mathfrak{t}_n$ , que têm as dimensões de suas componentes graduadas finitas.

Um morfismo  $f : B \rightarrow B'$  entre duas álgebras é uma transformação linear que respeita as operações bilineares:  $f(b_1 \cdot b_2) = f(b_1) \cdot f(b_2)$  para álgebras associativas e  $f([b_1, b_2]) = [f(b_1), f(b_2)]$  para álgebras de Lie.

Associamos à álgebra associativa  $A$  uma álgebra de Lie  $lieA$  dada pelo mesmo espaço vetorial, munida com a operação de comutador induzida pelo produto associativo

$$[a, b] := ab - ba.$$

Chamamos  $A$  uma álgebra envelopante de  $lieA$ . Qualquer morfismo de álgebras associativas  $f : A \rightarrow A'$  induz um morfismo de álgebras de Lie, pois suas transformações lineares coincidem.

**Exemplo 2.5.** Seja  $V$  um espaço vetorial e  $\text{End}(V)$  a álgebra das transformações lineares de  $V$  com a operação de composição (se  $\dim V = n$ ,  $\text{End}(V)$  é a álgebra de matrizes  $\text{Mat}_{n \times n}$ ). Então  $\text{End}(V)$  é uma álgebra associativa, e  $\mathfrak{gl}(V) := lie \text{End}(V)$  é uma álgebra de Lie (se  $\dim V = n$  também a denotamos como  $\mathfrak{gl}(n)$ ).

Uma representação de uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é um morfismo  $\mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  no qual, no lado direito, consideramos  $\mathfrak{g}$  somente como espaço vetorial.

**Exemplo 2.6.** Para uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , definimos a representação adjunta  $ad : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$  por

$$ad_a : b \mapsto [a, b]$$

para  $a, b \in \mathfrak{g}$ . O fato que ela é representação da álgebra de Lie é equivalente à identidade de Jacobi. Lembre que no caso de matrizes  $[a, b] = ab - ba$ .

Uma forma simétrica bilinear  $B : a, b \mapsto B(a, b)$  é *invariante* se

$$B(ab, c) = B(a, bc)$$

para álgebras associativas ou

$$B([a, b], c) = B(a, [b, c])$$

para álgebras de Lie.

**Proposição 2.7.** *Se  $B$  é uma forma simétrica bilinear invariante para uma álgebra associativa  $A$ , ela também é invariante para a sua álgebra de Lie  $\text{lie}A$ .*

*Demonstração.*  $B([a, b], c) = B(a \cdot b, c) - B(b \cdot a, c)$ ,  $B(a \cdot b, c) = B(a, b \cdot c)$ ,  $B(b \cdot a, c) = B(c, b \cdot a) = B(c \cdot b, a) = B(a, c \cdot b)$ ,  $B(a, [b, c]) = B(a, b \cdot c) - B(a, c \cdot b)$ , logo  $B([a, b], c) = B(a, [b, c])$ .  $\square$

Pelo teorema de Ado [A1947], uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de dimensão finita tem uma representação efetiva de dimensão finita, i.e. ela é isomorfa a uma subálgebra na álgebra de matrizes  $\mathfrak{gl}(V) \simeq \mathfrak{gl}(N)$ .

**Exemplo 2.8.** *A forma bilinear  $(A, B) \mapsto \text{Tr}(A \cdot B)$  é simétrica e invariante para a álgebra associativa  $\text{End}(V)$  e para a álgebra de Lie  $\mathfrak{gl}(V)$  i.e. para todas as matrizes  $A, B, C \in M_{n \times n}(K)$  temos que*

$$\text{Tr}((A \cdot B) \cdot C) = \text{Tr}(A \cdot (B \cdot C))$$

e

$$\text{Tr}(A \cdot [B, C]) = \text{Tr}([A, B] \cdot C).$$

*Demonstração.* Lembremos que  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$  é a principal característica do traço, então a forma é simétrica. Primeira igualdade segue da associatividade de produto, segunda da proposição 2.7.  $\square$

**Corolário 2.9.** *Para qualquer representação  $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{gl}(V)$  de uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  num espaço vetorial  $V$  de dimensão finita, a forma bilinear  $\text{Tr}(\rho(a) \circ \rho(b))$  em  $\mathfrak{g}$  é invariante.*

A forma bilinear

$$\langle a, b \rangle := \text{Tr}(ad_a \circ ad_b)$$

é a *forma de Killing* da álgebra de Lie.

Uma álgebra de Lie é *semisimples* se sua forma de Killing é não degenerada.

Consequentemente, se a álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é simples (não tem ideais de Lie), todas as formas bilineares invariantes em  $\mathfrak{g}$  são proporcionais uma a outra e proporcionais à forma de Killing.

A álgebra envelopante universal  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  de uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  é o quociente da álgebra tensorial  $T(\mathfrak{g})$  módulo o ideal gerado pelas expressões  $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$  para todo  $x, y \in \mathfrak{g}$ . Nessa expressão, elementos  $x \otimes y$  e  $y \otimes x$  têm grau 2, mas  $[x, y]$  é considerado como um elemento de grau 1 correspondente ao elemento obtido usando a operação  $[\cdot, \cdot]$  em  $\mathfrak{g}$ .

Vale a seguinte propriedade universal: para qualquer álgebra associativa  $A$ , os morfismos de álgebras de Lie de  $\mathfrak{g} \rightarrow \text{lie}A$  estão em bijeção canônica com os morfismos de álgebras associativas  $\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \rightarrow A$ .

A filtração de  $T(\mathfrak{g})$  induz uma filtração em  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$ :  $K = \mathcal{U}_0\mathfrak{g} \subset \mathcal{U}_1\mathfrak{g} \subset \dots$  tal que  $\mathcal{U}_i\mathfrak{g} \cdot \mathcal{U}_j\mathfrak{g} \subset \mathcal{U}_{i+j}\mathfrak{g}$ . Aqui  $\mathcal{U}_j\mathfrak{g}$  é o espaço vetorial gerado por todos os monômios de grau  $\leq j$  formado por elementos de  $\mathfrak{g}$ . Além disso,  $\text{gr}(\mathcal{U}\mathfrak{g}) := \bigoplus_i (\mathcal{U}_i\mathfrak{g}/\mathcal{U}_{i-1}\mathfrak{g})$ .

Uma álgebra de Poisson é um espaço vetorial munido de uma estrutura de álgebra associativa comutativa com operação  $\cdot$  e uma estrutura de álgebra de Lie com operação  $\{, \}$  que é uma derivação em cada um de seus argumentos i.e.  $\{ab, c\} = a\{b, c\} + b\{a, c\}$ .

Uma álgebra associativa filtrada  $(A, F)$  é *quase-comutativa* se a álgebra graduada associada  $\text{gr}_F(A)$  é comutativa.

**Proposição 2.10.** *Se  $A$  é uma álgebra associativa quase-comutativa, podemos munir  $\text{gr}_F(A)$  de uma estrutura de álgebra de Poisson: se  $\tilde{a} \in F^i A$  e  $\tilde{b} \in F^j A$  são representantes de dois elementos de  $a \in \text{gr}_F^i(A)$  e  $b \in \text{gr}_F^j(A)$ , respectivamente, definimos  $\{a, b\} := [\tilde{a}, \tilde{b}] \in \text{gr}_F^{i+j-1}(A)$ , onde usamos a quase-comutatividade para ver que  $[\tilde{a}, \tilde{b}]$  está em uma filtração menor que no caso geral.*

**Exemplo 2.11.** *A álgebra associativa  $\mathcal{D}_M$  de operadores diferenciais sobre uma variedade  $M$  é quase-comutativa, com álgebra graduada associada igual à álgebra das funções polinomiais no espaço cotangente  $T^*M$ . Logo essa álgebra associativa comutativa tem uma estrutura natural de álgebra de Poisson. No seguinte capítulo vemos que  $T^*M$  é um exemplo básico de variedade simplética, e a álgebra das funções de qualquer variedade simplética tem uma estrutura de álgebra de Poisson. Estes dois modos de construir um colchete de Poisson são equivalentes.*

A álgebra envelopante universal  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  pode ser interpretada como uma subálgebra da álgebra  $\mathcal{D}_G$  de operadores diferenciais (no grupo de Lie), feita dos operadores invariantes à esquerda.

Com isso em mente, enunciamos o seguinte resultado cuja prova pode ser encontrada em [D1996, pg, 77] ou [CG2010, pg. 36]:

**Teorema 2.12** (Isomorfismo de Poincaré–Birkhoff–Witt). *As álgebras  $\text{gr } \mathcal{U}(\mathfrak{g})$  e  $S(\mathfrak{g}) = \mathbf{C}[\mathfrak{g}^*]$  são isomorfas. Em particular, a álgebra envelopante  $\mathcal{U}(\mathfrak{g})$  é quase comutativa. A álgebra polinomial  $S(\mathfrak{g}) = \mathbf{C}[\mathfrak{g}^*]$  tem estrutura de álgebra de Poisson com o colchete dado por*

$$\{f, h\} : \alpha \mapsto \langle \alpha, [d_\alpha f, d_\alpha h] \rangle,$$

onde  $f, h \in \mathbf{C}[\mathfrak{g}^*]$  são polinômios em  $\mathfrak{g}^*$  e  $d_\alpha$  é a diferencial de de Rham no ponto  $\alpha \in \mathfrak{g}^*$ .

## 2.2

### Grupos de Lie e as suas ações

Para esta seção usamos como referência o livro [C2008].

#### 2.2.1

##### Grupos de Lie

**Definição 2.13.** *Um grupo de Lie é uma variedade diferenciável  $G$  dotada de uma estrutura de grupo, para as quais as operações*

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longmapsto a \cdot b, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow G \\ a &\longmapsto a^{-1} \end{aligned}$$

são diferenciáveis.

**Definição 2.14.** *Uma ação de um grupo de Lie  $G$  sobre uma variedade diferenciável  $M$  é um homomorfismo de grupos*

$$\begin{aligned} \psi : G &\longrightarrow \text{Dif}(M) \\ g &\longmapsto \psi_g. \end{aligned}$$

A ação  $\psi$  é diferenciável se a função avaliação de  $\psi$ ,  $ev_\psi$ , definida por

$$\begin{aligned} ev_\psi : M \times G &\longrightarrow M \\ (m, g) &\longmapsto \psi_g(m) \end{aligned}$$

é diferenciável.

**Definição 2.15** (Órbitas e estabilizadores). *Seja  $\psi$  uma ação de  $G$  numa variedade  $M$ . Para cada  $x \in M$  definimos*

- a órbita de  $x$ ,  $\mathcal{O}_x := \{y \in M : y = \psi_g(x) \text{ para algum } g \in G\}$ ,
- o estabilizador de  $x$ ,  $G_x := \{g \in G : \psi_g(x) = x\}$ .

### 2.2.2

#### Órbitas adjuntas e coadjuntas

Seja  $G$  grupo de Lie. Dado  $A \in G$ , definimos

$$\begin{aligned} C_A : G &\longrightarrow G \\ B &\longmapsto ABA^{-1} \end{aligned}$$

e a ação conjugada  $G \curvearrowright G$ :

$$\begin{aligned} G \times G &\longrightarrow G \\ (A, B) &\longmapsto C_A(B) \end{aligned}$$

Para um grupo de Lie  $G$ , a álgebra linear de  $G$  (ou a álgebra de Lie do grupo  $G$ ) é  $\mathfrak{g} = \text{lie}G := T_eG$ , um espaço vetorial munido de operação binária obtida como um limite de comutadores de fluxos (colchete de Lie dos campos vetoriais).

Diferenciando  $C_A$ , obtemos

$$\begin{aligned} Ad_A := (dC_A)_e : T_eG \simeq \mathfrak{g} &\longrightarrow T_eG \simeq \mathfrak{g} \\ \beta &\longmapsto Ad_A(\beta) := (dC_A)_e(\beta) \end{aligned}$$

e a ação adjunta  $G \curvearrowright \mathfrak{g}$

$$\begin{aligned} G \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ (A, \beta) &\longmapsto Ad_A(\beta) \end{aligned}$$

Por outro lado, para o espaço vetorial dual  $\mathfrak{g}^*$  de funcionais lineares em  $\mathfrak{g}$ , definimos

$$\begin{aligned} Ad_A^* : \mathfrak{g}^* &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ \varepsilon &\longmapsto Ad_A^*(\varepsilon), \end{aligned}$$

onde  $\langle Ad_A^*(\varepsilon), X \rangle = \langle \varepsilon, Ad_{A^{-1}}(X) \rangle$  para todo  $X \in \mathfrak{g}$ . A ação coadjunta  $G \curvearrowright \mathfrak{g}^*$  é

$$\begin{aligned} G \times \mathfrak{g}^* &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ (A, \varepsilon) &\longmapsto Ad_A^*(\varepsilon) \end{aligned}$$

$$d_{Id}C_A(\beta) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{A(Id + t\beta)A^{-1} - AA^{-1}}{t} = A\beta A^{-1}.$$

Assim, se  $\beta \in \mathfrak{g}$ , a órbita de  $\beta$ , denotada por  $\mathcal{O}(\beta)$ , é dada por  $\mathcal{O}(\beta) = \{A\beta A^{-1} : A \in G\}$ .

Um grupo de Lie é chamado *semisimples* se a sua álgebra de Lie é semisimples. Neste caso se  $G$  tem dimensão finita, a aplicação

$$\begin{aligned} T : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g}^* \\ A &\longmapsto (B \mapsto \text{Tr}(ad_A \circ ad_B)) \end{aligned}$$

é um isomorfismo.

Dado  $\varepsilon \in \mathfrak{g}^*$ , definimos  $Y_\varepsilon$  como o único elemento de  $\mathfrak{g}$  tal que  $T(Y_\varepsilon) = \varepsilon$ .

Então

$$\begin{aligned} \langle Ad_A^* \varepsilon, \beta \rangle &= \langle \varepsilon, Ad_{A^{-1}} \beta \rangle \\ &= \langle Ad_A Y_\varepsilon, \beta \rangle, \forall \beta \in \mathfrak{g}. \end{aligned}$$

A segunda igualdade vem do fato que  $Ad$  é  $G$ -invariante, i.e.  $\langle Ad_A(\beta), Ad_A(\gamma) \rangle = \langle \beta, \gamma \rangle$  para todo  $\beta, \gamma \in \mathfrak{g}$ . Portanto  $Ad_A^*(\varepsilon) = Ad_A(Y_\varepsilon)$  e

$$\mathcal{O}(Y_\varepsilon) = \mathcal{O}^*(\varepsilon). \tag{2-1}$$

Aqui  $\mathcal{O}^*(\varepsilon)$  é a órbita coadjunta de  $\varepsilon \in \mathfrak{g}$ .

Assim, no caso de grupos semisimples, para estudar (ou classificar) órbitas coadjuntas, basta estudar as órbitas adjuntas.

### 3

## Preliminares simpléticos

Neste capítulo, são apresentados as noções e resultados gerais de geometria simplética necessários para o desenvolvimento da tese.

### 3.1

#### Variedades simpléticas

Uma *forma simplética*  $\omega$  ([A2004, pg. 46]) sobre uma variedade diferenciável  $M$  é uma 2-forma diferencial fechada e não degenerada, i.e,  $d\omega = 0$ , e para cada  $p \in M$ ,  $\omega$  é não degenerada em  $T_pM$  (se  $\omega_p(X, Y) = 0, \forall Y \in T_pM$  então  $X = 0$ ).

Chamamos variedade simplética ao par  $(M, \omega)$  de uma variedade diferenciável  $M$  e uma forma simplética  $\omega$  sobre  $M$ .

**Exemplo 3.1.** (*Estrutura simplética para o fibrado cotangente*) Seja  $Q$  uma variedade diferenciável e  $M := T^*Q$  seu fibrado cotangente. Usamos a projeção

$$\begin{aligned} \pi : M &\longrightarrow Q \\ (x, p) &\longmapsto x, \end{aligned}$$

para definir a 1-forma  $\alpha \in \Omega^1(M)$  dada por

$$\alpha_{(x,p)}(X_{(x,p)}) := p(d\pi_{(x,p)}X_{(x,p)}), \quad (3-1)$$

para cada  $(x, p) \in M$  e  $X_{(x,p)} \in T_{(x,p)}M$ , que está bem definida pois  $p \in T_x^*M$  e  $d\pi_{(x,p)}(X_{(x,p)}) \in T_xQ$ . A forma simplética canônica para  $T^*M$  é definida por  $\omega := -d\alpha$ . Claramente  $\alpha$  é fechada. Para verificar que não é degenerada, escrevemos  $\alpha$  em coordenadas locais. Sejam  $(x_1, \dots, x_n)$  coordenadas locais para  $Q$  e  $(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$  coordenadas locais para  $T^*Q$ . Então

$$d_{(x,p)} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{(x,p)} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_x$$

e

$$d_{(x,p)} \left( \frac{\partial}{\partial p_i} \Big|_{(x,p)} \right) = 0.$$

Da equação (3-1):

$$\alpha_{(x,p)} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{(x,p)} \right) = \sum_{j=1}^n p_j dp_j \frac{\partial}{\partial x_i \Big|_{(x,p)}} = p_i$$

e

$$\alpha_{(x,p)} \left( \frac{\partial}{\partial p_i} \Big|_{(x,p)} \right) = \sum_{j=1}^n p_j dx_j \frac{\partial}{\partial p_i \Big|_{(x,p)}} = 0,$$

e então  $\alpha_{(x,p)} = \sum_{j=1}^n p_j dx_j$ . Assim,  $\omega = d\alpha = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dp_i$ , que é não degenerada.

Sejam  $(M_1, \omega_1)$  e  $(M_2, \omega_2)$  duas variedades simpléticas. Uma função  $f : M_1 \rightarrow M_2$  é chamada *difeomorfismo simplético* ou *simpletomorfismo* ([GS1984, pg. 34]) se  $f$  é um difeomorfismo e  $f^*\omega_2 = \omega_1$ .

Um *sistema hamiltoniano* é uma tripla  $(M, \omega, H)$  composta de uma variedade simplética  $(M, \omega)$  e uma função  $H \in C^\infty(M)$ , a *função hamiltoniana* de  $M$ . O campo vetorial  $X_k$  para o qual

$$dH(\cdot) = \omega(X_H, \cdot), \tag{3-2}$$

é o *campo hamiltoniano* associado a  $H$ .

Dada uma variedade simplética  $(M, \omega)$ , o *colchete de Poisson* é  $\{f, g\} := \omega(X_f, X_g)$ , para funções hamiltonianas  $f$  e  $g$  de  $M$ .

**Exemplo 3.2.** A esfera  $S^2$  é variedade simplética com a forma área dada por  $d\theta \wedge dh$  (em coordenadas cilíndricas  $(\theta, h)$ ). A altura  $h : S^2 \rightarrow \mathbf{R}$  é hamiltoniana com campo hamiltoniano  $X_h = \frac{\partial}{\partial \theta}$  pois  $i_{\frac{\partial}{\partial \theta}} d\theta \wedge dh = dh$ .

**Teorema 3.3** (Darboux). *Se  $(M, \omega)$  é uma variedade simplética de dimensão  $2n$  e  $p \in M$ . Então existe um sistema de coordenadas  $(U, p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$  centrado em  $p$  no qual  $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$ .*

### 3.1.1 Sistemas integráveis

Uma variedade simplética  $M$  de dimensão  $2n$  tem um *sistema integrável* ([A1978, pg. 271]) se existem  $n$  funções independentes  $f_1, \dots, f_n : M \rightarrow \mathbf{R}$  em involução, i.e.  $\{f_i, f_j\} = 0$ . Se  $(M, J, \omega)$  é uma variedade simplética holomórfa, as  $f_i$ 's são funções com valores em  $\mathbf{C}$  holomórfas sobre um subconjunto aberto denso ou sobre seu recobrimento.

### 3.1.2

#### Pares de Lax

A referência para esta subseção é [BBT2003]. A maioria dos sistemas integráveis explícitos considerados nesta tese cabem no formalismo de Lax. Por exemplo, a integrabilidade do sistema de Hitchin é mais fácil de ver no formalismo de Lax. Para o sistema de Gelfand–Cetlin no formalismo de Lax, veja [CL2021].

Dada uma variedade simplética  $(M, \omega)$ , um par de Lax é dado por duas funções

$$L, P : (M, \omega) \longrightarrow M_{r \times r} \cong \text{End}(\mathbf{R}^r) = \mathfrak{gl}(r, \mathbf{R}),$$

onde  $L$  é a matriz de Lax e  $P$  a matriz auxiliar, com  $r > 0$ . Aqui  $\mathfrak{gl}(r, \mathbf{R})$  é álgebra de Lie com  $[A, B] = AB - BA$ .

**Observação:** Seja  $(M, \omega)$  uma variedade simplética de dimensão  $2n$ . Localmente  $(M, \omega) \cong (\mathbf{R}^{2n}, \sum_{j=1}^n dq_j \wedge dp_j)$ , pelo teorema de Darboux 3.3. Nessas coordenadas,  $X_H = \sum_{i=1}^n \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i} \right)$  e a equação (3-2) é equivalente ao sistema de equações de Hamilton :

$$\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{cases} \text{ para } 1 \leq i \leq n \quad (3-3)$$

Um sistema hamiltoniano  $(M, \omega, H)$  admite um par de Lax se o sistema de equações de Hamilton (3-3) é equivalente à equação de Lax

$$\frac{dL}{dt} + [L, P] = 0,$$

onde  $L, P$  são um par de Lax.

**Exemplo 3.4** (Oscilador Harmônico). Consideremos o sistema hamiltoniano  $(\mathbf{R}^2, dq \wedge dp, H)$ , onde  $H(p, q) = \frac{1}{2}(p^2 + w^2q^2)$ . Seja  $X_H$  tal que  $dH(\cdot) = dq \wedge dp(X_H, \cdot)$ . Se  $X_H = a \frac{\partial}{\partial q} + b \frac{\partial}{\partial p}$ ,

$$\begin{aligned} dq \wedge dp(X_H, \cdot) &= \frac{\partial H}{\partial q} dq + \frac{\partial H}{\partial p} dp \\ dq \wedge dp\left(a \frac{\partial}{\partial q} + b \frac{\partial}{\partial p}, \cdot\right) &= w^2q dq + pdp \\ adp - bdq &= pdp + w^2q dq. \end{aligned}$$

$$\text{Assim } a = p \text{ e } b = -w^2q \text{ e } X_H = p \frac{\partial}{\partial q} - w^2q \frac{\partial}{\partial p}.$$

As funções

$$L, P : (\mathbf{R}^2, dq \wedge dp) \longrightarrow \mathfrak{gl}(2, \mathbf{R}),$$

definidas por  $L(q, p) = \begin{pmatrix} p & wq \\ wq & -p \end{pmatrix}$  e  $P(q, p) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -w \\ w & 0 \end{pmatrix}$  são um par de Lax para  $(\mathbf{R}^2, dq \wedge dp, H)$ . De fato,

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} + [L, P] &= \begin{pmatrix} \frac{dp}{dt} & w \frac{dq}{dt} \\ w \frac{dp}{dt} & -\frac{dp}{dt} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} w^2q & -wp \\ -wp & -w^2q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -w^2q & wp \\ wp & w^2q \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} \frac{dp}{dt} & w \frac{dq}{dt} \\ w \frac{dp}{dt} & -\frac{dp}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w^2q & -wp \\ -wp & -w^2q \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

e então  $\frac{dL}{dt} + [L, P] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  se e só se  $\begin{cases} \frac{dq_i}{dt} = p_i \\ \frac{dp_i}{dt} = -w^2q \end{cases}$  para  $1 \leq i \leq n$

A solução da equação de Lax

$$\begin{cases} \frac{dL}{dt} + [L, P] = 0 \\ L(0) = L_0 \end{cases}$$

tem a forma  $L(t) = g(t)L_0g(t)^{-1}$ , onde  $g : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow GL(r, \mathbf{R})$  é determinada pelo problema de valor inicial

$$\begin{cases} \frac{dg}{dt} = P(t)g(t) \\ g(0) = 1 \end{cases}.$$

De fato, para  $L(t) = g(t)L_0g(t)^{-1}$ ,

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{dg}{dt}L_0g(t)^{-1} + g(t)L_0\frac{dg^{-1}}{dt} \\ &= \frac{dg}{dt}g(t)^{-1}L(t) + L(t)g(t)\frac{dg^{-1}}{dt}, \end{aligned}$$

e usando o fato que  $g(t)g(t)^{-1} = 1$  (e então  $\frac{dg}{dt}g(t)^{-1} + g(t)\frac{dg^{-1}}{dt} = 0$ ) obtemos

$$\frac{dL}{dt} = \frac{dg}{dt}g(t)^{-1}L(t) - L(t)\frac{dg}{dt}g(t)^{-1} = [P, L],$$

onde  $P(t) = \frac{dg}{dt}g(t)^{-1}$  com  $g(0) = 1$ .

### 3.1.2.0

#### Importância dos pares de Lax

Seja  $(L, P)$  um par de Lax para um sistema hamiltoniano  $(M, \omega, H)$  e uma função  $F : \mathfrak{gl}(r, \mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$  invariante pela ação adjunta,  $F(gXg^{-1}) = F(X)$  para cada  $g \in GL(r, \mathbf{R})$  e  $X \in \mathfrak{gl}(r, \mathbf{R})$ . Composto  $I := F \circ L \in C^\infty(M)$ , obtemos

$$I(t) = F(L(t)) = F(g(t)L_0g(t)^{-1}) = F(L_0) = \text{constante.}$$

Então

$$\{H, I\} = \omega(X_H, X_I) = dI(X_H) = 0. \quad (3-4)$$

Usamos pares de Lax para obter funções candidatas para compor um sistema integrável (elas não determinam um sistema integrável, uma vez que não temos controle sobre o número de tais funções): se  $L$  é diagonalizável,  $L = UDU^{-1}$  onde  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  e  $(L, P) : (M, \omega) \rightarrow \mathfrak{gl}(r, \mathbf{R})$  são um par de Lax.

Da equação (3-4), as funções autovalores de  $L$  são quantidades conservadas por  $H$ , i.e.  $\{H, \lambda_k\} = 0$ , para cada  $k = 1, \dots, r$ . O polinômio característico de  $L$  é determinado por funções polinomiais da forma

$$L \rightarrow \text{Tr}(L^i),$$

onde  $i = 1, \dots, r$ , pois

$$\det(tId_r - L) = \sum_{j=1}^r a_j(L)t^j,$$

com

$$a_{k-j} = \frac{(-1)^j}{j!} \begin{pmatrix} \text{Tr}(L) & j-1 & 0 & \cdots & 0 \\ \text{Tr}(L^2) & \text{Tr}(L) & j-2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \text{Tr}(L^j) & \text{Tr}(L^{j-1}) & \text{Tr}(L^{j-2}) & \cdots & \text{Tr}(L) \end{pmatrix},$$

para cada  $j = 0, \dots, r$ .

## 3.2

### De grupos de Lie para a geometria simplética

Seja  $\mathcal{O}_u$  a orbita da ação coadjunta  $G \curvearrowright \mathfrak{g}^*$  para  $u \in \mathfrak{g}^*$  fixo. Existe uma 2-forma  $\omega$   $G$ -invariante fechada tal que

$$\omega_v(ad_A^*v, ad_B^*v) := \langle v, [A, B] \rangle,$$

para todo  $v \in \mathcal{O}_u$ ,  $A, B \in \mathfrak{g}$ , onde  $ad^*$  é a representação da álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  em  $\mathfrak{g}^*$  induzida pela representação coadjunta do grupo de Lie  $G$ , i.e.,  $\langle ad_A^* u, B \rangle := \langle u, -ad_A B \rangle = \langle u, [A, B] \rangle$ , para  $A, B \in \mathfrak{g}$ ,  $u \in \mathfrak{g}^*$ . A forma é a 2-forma de Kirillov–Kostant–Souriau (ou simplesmente KKS). Ela pode ser definida no espaço todo  $\mathfrak{g}^*$  e é fechada, normalmente degenerada, mas as suas restrições nas órbitas não são degeneradas.

**Observação:** As duas estruturas de álgebra de Poisson no anel de polinômios  $K[\mathfrak{g}^*]$  coincidem: uma é definida usando a proposição 2.10, a outra usando seção 3.1 aplicada à forma simplética de KKS.

**Exemplo 3.5.** Aqui denotamos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Eucl}$  o produto interno que vem da norma euclidiana e o produto vetorial por  $\times$  em  $\mathbf{R}^3$ . Para o grupo de Lie  $SO(3, \mathbf{R})$ , temos o seguinte isomorfismo linear entre espaços vetoriais:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^3 &\longrightarrow \mathfrak{so}(3, \mathbf{R}) \\ p = (x, y, z) &\longmapsto A_p = \begin{pmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Desta identificação de espaços, obtemos a identificação dos produtos  $[A_p, A_q] = A_{p \times q}$  e das formas bilineares  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Killing} = \langle \cdot, \cdot \rangle_{Eucl}$ . Assim  $\omega_{A_p}(ad_{A_q}^* A_p, ad_{A_s}^* A_p) := \langle A_p, [A_q, A_s] \rangle_{Killing} = \langle A_p, A_{q \times s} \rangle_{Killing} \cong \langle p, q \times s \rangle_{Eucl}$ , onde  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Killing}$  é a forma de Killing para  $SO(3, \mathbf{R})$ . Cada esfera  $S^2(r)$  em  $\mathbf{R}^3$  é uma variedade simplética com forma área dada por  $rdh \wedge d\theta$  em coordenadas polares .

### 3.2.1

#### Mapa momento

Uma ação  $\psi$  do grupo de Lie  $G$  sobre uma variedade simplética  $M$  é hamiltoniana se existe uma função

$$\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$

que satisfaz as seguintes condições.

1. Seja  $X \in \mathfrak{g}$ . Defina

- a componente de  $\mu$  em  $X$ ,  $\mu^X : M \longrightarrow \mathbf{R}$ ,  $p \mapsto \langle \mu(p), X \rangle$ .
- o campo vetorial  $X^\#$  sobre  $M$  gerado pelo subgrupo a um parâmetro  $\{\exp tX : t \in \mathbf{R} \subseteq G\}$ .

Então  $d\mu^X = i_{X^\#}\omega$ , onde  $i_{X^\#}\omega(\cdot) := \omega(X^\#, \cdot)$ .

2.  $\mu \circ \psi_g = Ad_g^* \circ \mu$  para todo  $g \in G$ .

A função  $\mu$  é o *mapa momento*.

**Exemplo 3.6.** Consideremos a variedade simplética  $(\mathbf{C}^n, \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j)$  e a ação  $U(1) \curvearrowright \mathbf{C}^n$ ,  $e^{i\theta} \cdot (z_1, \dots, z_n) = (e^{i\theta} z_1, \dots, e^{i\theta} z_n)$ . A álgebra de Lie de  $U(1)$  é isomorfa à álgebra  $i\mathbf{R}$ . Para  $a \in i\mathbf{R}$ , vemos que  $a_{(z_1, \dots, z_n)}^\# = \frac{d}{dt}|_{t=0} e^{iat} \cdot (z_1, \dots, z_n) = \frac{d}{dt}|_{t=0} (e^{iat} z_1, \dots, e^{iat} z_n) = (iaz_1, \dots, iaz_n)$ , ou, em coordenadas complexas,  $a^\# = \sum_{j=1}^n iaz_j \frac{\partial}{\partial z_j} - ia\bar{z}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$ . Assim,

$$\begin{aligned} i_{a^\#} \omega &= \omega(a^\#, \cdot) \\ &= \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j(a^\#, \cdot) \\ &= \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n iaz_j d\bar{z}_j + ia\bar{z}_j dz_j \\ &= -\frac{a}{2} \sum_{j=1}^n \bar{z}_j dz_j + z_j d\bar{z}_j \\ &= d\left(-\frac{a}{2} \sum_{j=1}^n |z_j|^2\right). \end{aligned}$$

Concluimos que  $\mu(z_1, \dots, z_n) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |z_j|^2 + \text{constante}$ .

**Exemplo 3.7.** Como no exemplo anterior, tomamos  $(\mathbf{C}^n, \frac{i}{2} \sum_{j=1}^n dz_j \wedge d\bar{z}_j)$  mas agora consideramos a ação  $\mathbf{T}^n \curvearrowright \mathbf{C}^n$  dada por

$$(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) \cdot (z_1, \dots, z_n) = (e^{i\theta_1} z_1, \dots, e^{i\theta_n} z_n).$$

Analogamente às contas feitas no exemplo anterior, o mapa momento é dado por  $\mu(z_1, \dots, z_n) = -\frac{1}{2} (|z_1|^2, \dots, |z_n|^2) + \text{constante}$ .

**Teorema 3.8.** O mapa momento para a ação coadjunta é a identidade.

*Demonstração.* Para  $X \in \mathfrak{g}^*$ , denotamos por  $\mathcal{O}^*(X)$  sua órbita coadjunta. Então o mapa momento associado é  $\mu : \mathcal{O}^*(X) \rightarrow \mathfrak{g}^*$  tal que

$$\begin{aligned} \langle d\mu(Z), Y \rangle &= d\langle \mu(Z), Y \rangle = i_{Y^\#} \omega([X, Z], \cdot) \\ &= i_{Y^\#} \omega(X^\#(Z), \cdot) \\ &= \omega(Y^\#Z, X^\#Z) \\ &= \langle Z, -[X, Y] \rangle \\ &= \langle -[Z, X], Y \rangle, \end{aligned}$$

onde  $\omega$  é a 2-forma simplética de Kirillov–Kostant–Souriau. Assim  $d\mu(Z) = -[Z, X] = [X, Z]$  e  $d\mu(Z) = X^\#(Z)$  e  $\mu(Z) = Z$ ,

□

### 3.2.2

#### Redução simplética

Nesta subseção enunciamos um resultado que obtém uma nova variedade simplética a partir de uma variedade simplética dotada de uma ação de um grupo de Lie e um mapa momento que cumpre certas propriedades.

**Teorema 3.9** (Redução simplética, Marsden–Weinstein [MW1974]). *Seja  $(M, \omega)$  uma variedade simplética com uma ação hamiltoniana de um grupo de Lie  $G$  e mapa momento  $\mu : M \rightarrow \mathfrak{g}^*$ . Se  $\varepsilon$  é valor regular de  $\mu$  com estabilizador  $G_\varepsilon$  da ação coadjunta  $G \curvearrowright \mathfrak{g}^*$ , que age livremente em  $\mu^{-1}(\varepsilon)$ . Então o espaço  $\mu^{-1}(\varepsilon)/G_\varepsilon$  é uma variedade simplética cuja forma simplética  $\omega_\varepsilon$  satisfaz  $i^*\omega = \pi^*\omega_\varepsilon$ , onde  $\pi : \mu^{-1}(\varepsilon) \rightarrow M_{red}$  é o mapa quociente e  $i : \mu^{-1}(0) \rightarrow M$  é a inclusão.*

Denotamos essa variedade por  $M_{red} = M //_{\varepsilon} G_\varepsilon$ .

**Exemplo 3.10.** *Consideremos a ação  $U(1) \curvearrowright \mathbf{C}^n \cong \mathbf{R}^{2n}$  com mapa momento*

$$\begin{aligned} \mu : \mathbf{C}^n &\longrightarrow \mathbf{R} \\ z &\longmapsto -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |z_j|^2, \end{aligned}$$

*apresentada no exemplo 3.6. Então  $-\frac{1}{2}$  é valor regular,  $\mu^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = S^{2n-1}$  e o estabilizador de  $-\frac{1}{2}$  é o próprio  $U(1)$ . Pelo teorema 3.9,  $\mathbf{CP}^{n-1} = \frac{S^{2n-1}}{U(1)}$  é uma variedade simplética.*

**Exemplo 3.11.** *[A Grassmanniana como quociente simplético, [HK1997]] A Grassmanniana  $Gr(2, n)$  é o conjunto dos subespaços de dimensão 2 no espaço  $n$ -dimensional complexo,*

$$Gr(2, n) := \frac{Hom(\mathbf{C}^2, \mathbf{C}^n)}{Aut(\mathbf{C}^2)}$$

*O grupo das matrizes unitárias  $U(2)$  age no conjunto das matrizes complexas  $n \times 2$  por multiplicação à direita. A ação tem mapa momento*

$$\begin{aligned} \mu_{U(2)} : M_{2 \times n}(\mathbf{C}) &\longrightarrow \mathfrak{u}(2)^* \\ A &\longmapsto \sqrt{-1}A^*A, \end{aligned}$$

*onde  $A^*$  é a transposta conjugada de  $A$ .*

Considere a variedade de Stiefel

$$V_2(n) := \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} \in M_{n \times 2}(\mathbf{C}) : \sum_{i=1}^n |a_i|^2 = 1, \sum_{i=1}^n |b_i|^2 = 1, \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i = 0 \right\}.$$

Então  $\mu_{U(2)}^{-1}(\sqrt{-1}Id_2) = V_2(n)$ , onde  $Id_2$  é a matriz identidade  $2 \times 2$ .

Seja  $p : V_2(n) \rightarrow Gr(2, n)$ , a função sobrejetiva que leva cada  $(a, b) \in V_2(n)$  ao plano gerado por  $a$  e  $b$  (base ortonormal). Então

$$Gr(2, n) = \frac{V_2(n)}{U(2)} = \frac{\mu_{U(2)}^{-1}(\sqrt{-1}Id_2)}{U(2)} = M_{2 \times n}(\mathbf{C}) //_{\sqrt{-1}Id_2} U(2).$$

### 3.2.2.1

#### Redução por etapas

Sejam  $(M, \omega)$  uma variedade simplética,  $H$  e  $K$  dois grupos de Lie, uma ação hamiltoniana do grupo de Lie  $G := H \times K$  sobre  $(M, \omega)$  com mapa momento  $\mu : M \rightarrow \mathfrak{h}^* \oplus \mathfrak{k}^*$  e  $\mu_H : M \rightarrow \mathfrak{h}^*$  e  $\mu_K : M \rightarrow \mathfrak{k}^*$  as funções componentes de  $\mu$ . Se  $\varepsilon_1$  é um valor regular de  $\mu_H$ ,  $\varepsilon_2$  é um valor regular de  $\mu_K$  e o estabilizador  $H_{\varepsilon_1}$  age livremente em  $\mu_H^{-1}(\varepsilon_1)$ , então o estabilizador  $K_{\varepsilon_2}$  age livremente em  $\mu_H^{-1}(\varepsilon_1)/H_{\varepsilon_1}$  com mapa momento  $\widetilde{\mu}_K : \mu_H^{-1}(\varepsilon_1)/H_{\varepsilon_1} \rightarrow \mathfrak{k}^*$ . Além disso, se  $K_{\varepsilon_2}$  age livremente sobre  $\widetilde{\mu}_K^{-1}(\varepsilon_2)$ , existe um difeomorfismo simplético  $\widetilde{\mu}_K^{-1}(\varepsilon_2)/K_{\varepsilon_2} \rightarrow \mu^{-1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)/G_\varepsilon$ . Denotamos a variedade  $\mu^{-1}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)/G_\varepsilon$  por  $M //_{(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} G$ .

## 4

### Espaço de polígonos e espaços de módulos relacionados

#### 4.1

##### Espaço de polígonos euclidianos

Um  $n$ -ágono (polígono com  $n$  lados) fechado no espaço euclidiano  $\mathbf{R}^3$  pode ser descrito como uma função  $p : \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}^3$ , i.e. uma  $n$ -upla  $(p_1, \dots, p_n)$  de pontos em  $\mathbf{R}^3$  (vértices). Os *lados orientados* são os vetores  $\{e_j := p_j - p_{j-1}\}_{j \in \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}}$ . O fato do polígono ser fechado ( $p(n+k) = p(k)$ ) corresponde à equação

$$\sum_{j=1}^n e_j = 0. \quad (4-1)$$

Identificaremos dois  $n$ -ágonos  $P = (p_1, \dots, p_n)$  e  $Q = (q_1, \dots, q_n)$  se é só se existe uma isometria  $I$  de  $\mathbf{R}^3$  preservando orientação tal que  $I(p_j) = q_j$  para todo  $j = 1, \dots, n$ . A existência da isometria é equivalente à existência de uma rotação  $A \in \text{SO}(3, \mathbf{R})$  tal que  $A(p_j - p_{j-1}) = q_j - q_{j-1}$ , para todo  $j = 2, \dots, n+1$ . Os comprimentos dos lados

$$r_j := d(p_j, p_{j-1}) = \sqrt{(e_j, e_j)}$$

são invariantes e definem  $n$  funções contínuas no espaço-quociente  $M = (\mathbf{R}^3)^n / \text{SO}(3, \mathbf{R})$  de módulos (classes de isomorfismo) de polígonos euclidianos espaciais:

$$(r_1, \dots, r_n) : M \rightarrow \mathbf{R}_{\geq 0}^n.$$

Na continuação, identificaremos o espaço de  $n$ -ágonos fechados de comprimentos de lados fixos  $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbf{R}^{n+}$  com o quociente do conjunto de elementos  $(e_1, \dots, e_n)$  no produto de esferas  $\prod_{j=1}^n S_{r_j}^2$  (aqui  $S_{r_j}^2$  é o conjunto de vetores em  $\mathbf{R}^3$  de comprimento  $r_j$ ) tal que  $\sum_{i=1}^n e_i = 0$  pela ação de  $\text{SO}(3, \mathbf{R})$ .

Seja  $M(r)$ ,  $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbf{R}^{n+}$ , o conjunto de classes de isometrias orientadas de polígonos fechados com  $n$  lados no espaço euclidiano  $\mathbf{R}^3$  onde o  $i$ -ésimo lado tem comprimento fixo  $r_i$  (chamado *espaço de polígonos*). Então

$$M(r) = \{(e_1, \dots, e_n) \in \prod_{i=1}^n S_{r_i}^2 : e_1 + \dots + e_n = 0\} / \text{SO}(3, \mathbf{R}).$$

Vamos ver que  $M(r)$  é uma variedade simplética de dimensão  $2(n-3)$ .

Utilizamos o grupo de Lie  $SU(2)$ ,  $\mathfrak{su}(2)$  é isomorfo a  $\mathfrak{so}(3, \mathbf{R})$ , para simplificar as contas.

Vamos aplicar a seção 2.2.2 no caso  $G = SU(2)$ . Seja  $SU(2) \curvearrowright \mathfrak{su}(2)^*$  a ação coadjunta e  $A \in \mathfrak{su}(2)^*$ . Da equação (2-1),  $\mathcal{O}^*(A) = \mathcal{O}(Y_A) = S_\lambda^2$  onde  $S_\lambda^2$  é a esfera de raio  $\lambda > 0$  e  $i\lambda$  é um autovalor de  $Y_A = \begin{pmatrix} ix & -w + iz \\ w + iz & -ix \end{pmatrix}$  com  $x, w, z \in \mathbf{R}$ .

Consideramos a ação coadjunta restrita à órbita  $SU(2) \curvearrowright S_\lambda^2, \forall \lambda > 0$  e a ação diagonal  $SU(2) \curvearrowright \prod_{i=1}^n S_{r_i}^2$ , com  $r_i > 0$  para cada  $i$ , onde cada esfera  $S_{r_i}^2$  é uma variedade simplética com a 2-forma área dada no exemplo 3.5. Pelo teorema 3.8, a ação tem mapa momento

$$\begin{aligned} \mu : \prod_{i=1}^n S_{r_i}^2 &\hookrightarrow \mathfrak{su}(2)^* \simeq \mathbf{R}^3 \\ (e_1, \dots, e_n) &\mapsto e_1 + \dots + e_n, \end{aligned}$$

e concluímos que

$$M(r) = \prod_{i=1}^n S^2(r_i) // \text{SU}(2) := \mu^{-1}(0) // \text{SU}(2)$$

é uma variedade simplética  $2(n - 3)$ -dimensional.

#### 4.1.1

##### O sistema integrável de Kapovich–Millson

Em [KM1996], foi provada a existência de um sistema integrável  $\{f_1, f_2, \dots, f_{n-3}\}$  para um subconjunto aberto denso na variedade simplética  $M(r)$  chamado de *Bending System*. Os fluxos dos campos hamiltonianos associados às funções  $f_k$  induzem uma ação do toro  $\mathbf{T}^{n-3}$ . Na próxima seção generalizamos estes resultados para órbitas coadjuntas do grupo algébrico complexo  $SL(2, \mathbf{C})$ : a interpretação em termos euclidianos não vale, e em vez de raios será mais conveniente considerar seus quadrados, que formam um sistema integrável complexo de  $n - 3$  funções holomorfas num conjunto aberto denso.

Ainda no caso real, os fluxos das hamiltonianas  $f_k$ 's têm a seguinte interpretação geométrica. Construimos a superfície poliédrica  $S$  limitada pelo polígono  $P = (e_1, \dots, e_n)$  cuja área pode ser dividida pelos triângulos  $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_{n-2}$  onde  $\Delta_k$  tem como lados  $d_k, e_{k+1}$  e  $d_{k+1}$  para  $k \in \{1, \dots, n - 1\}$ ,  $d_k = e_1 + \dots + e_{k+1}$  ( $k$ -ésima diagonal) e  $d_{n-1} = e_n$ . Cada diagonal divide  $S$  em duas peças. O fluxo de  $f_k$  pode ser visto como a rotação da primeira peça ao redor da diagonal com velocidade angular  $f_k(P)$ , fixando

a segunda peça (ver fig. 1.1).

No espaço de polígonos euclidianos, o sistema integrável de Kapovich–Millson é dado pelos comprimentos das diagonais do polígono começando de um determinado vértice. Em outras palavras, seja  $M(r)$  o espaço de polígonos euclidianos onde  $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$  (os comprimentos fixos de seus lados). Um sistema integrável para  $M(r)$  é  $\{l_1, \dots, l_{n-3}\}$ , onde  $l_i(e) = \|e_1 + \dots + e_{i+1}\|$  (aqui a norma é a euclidiana), para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $\vec{e} = (e_1, \dots, e_n) \in M(r)$ .

A seguir, estudamos a imagem da função

$$L : M(r) \longrightarrow \mathbf{R}^{n-3}$$

$$\vec{e} \longmapsto (l_1, \dots, l_{n-3}),$$

que é o polígono convexo sólido descrito pelas desigualdades triangulares (ver [HK1997] ou [NU2014]):

$$\begin{aligned} r_{i+1} &\leq l_i + l_{i+1} \\ l_i &\leq r_{i+1} + l_{i+1} \\ l_{i+1} &\leq l_i + r_{i+1} \end{aligned} \tag{4-2}$$

**CASO n=5:**  $r = (r_1, r_2, r_3, r_4, r_5)$

- Se todos os  $r_i$ 's são iguais ( $r_i = a$ ), a imagem de  $L$  é um pentágono sólido (ver figura 4.1).

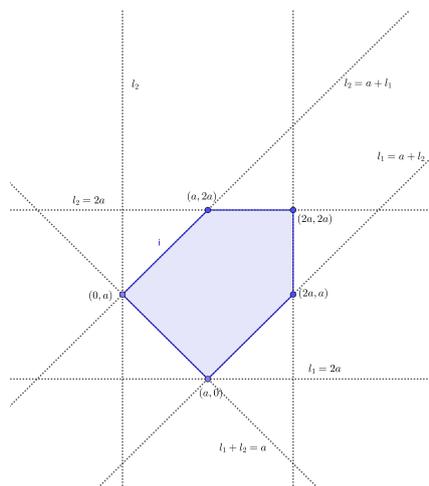


Figura 4.1: Imagem de  $L$  quando  $r_i = a$  para todo  $i$

- Se os  $r_i$ 's são distintos mas próximos um dos outros (ver [HK1997, (6.2)] e [NU2014, exemplo 3.3]), a imagem de  $L$  é um heptágono sólido (ver figura 4.2).

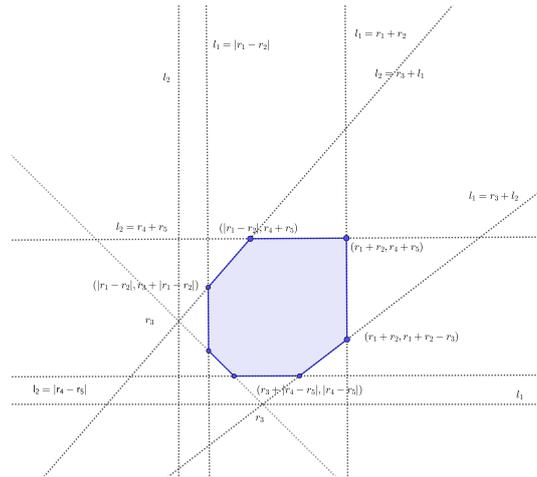


Figura 4.2: Imagem de  $L$  quando  $r_i$ 's são distintos mas próximos

Além disso, Kapovich e Millson provam em [KM1996] que, para o ângulo diedral  $\theta_k \in \mathbf{R}/2\pi$  entre dois triângulos adjacentes ao  $d_k$ , descrito pelo fluxo hamiltoniano  $H_{l_k}$  que induz o dobramento do polígono ao redor  $d_k$ , temos que  $(l_1, \dots, l_{n-3}, \theta_1, \dots, \theta_{n-3})$  são coordenadas ação-ângulo para  $M(r)$ , i.e.  $\omega = \sum_{i=1}^{n-3} dl_i \wedge d\theta_i$  e  $H_{l_k} = \frac{\partial}{\partial \theta_k}$ .

#### 4.1.2

#### Espaço de polígonos como quociente de Grassmanniana

Enunciamos a caracterização, dada por Hausmann e Knutson ([HK1997]), do espaço de polígonos como uma redução simplética da Grassmanniana  $Gr(2, n)$ .

No exemplo 3.11 caracterizamos  $Gr(2, n)$  como  $M_{2 \times n}(\mathbf{C}) //_{\sqrt{-1}Id_2} U(2)$ .

Com isso em mente, consideremos a ação de  $U(1)^n$  dada por

$$U(1)^n \times Gr(2, n) \longrightarrow Gr(2, n)$$

$$\left( (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n), \left\langle \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_n & b_n \end{pmatrix} \right\rangle \right) \longmapsto \left\langle \begin{pmatrix} \lambda_1 a_1 & \lambda_1 b_1 \\ \lambda_2 a_2 & \lambda_2 b_2 \\ \vdots & \vdots \\ \lambda_n a_n & \lambda_n b_n \end{pmatrix} \right\rangle,$$

que não é efetiva, mas passa a ser restringindo a  $U(1)^n/U(1) \curvearrowright Gr(2, n)$  e tem por mapa momento a função

$$\mu_{U(1)^n} : Gr(2, n) \longrightarrow \mathbf{R}^n$$

$$\langle a, b \rangle \longmapsto \frac{1}{2}(|a_1|^2 + |b_1|^2, |a_2|^2 + |b_2|^2, \dots, |a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Aqui consideramos  $(a, b)$  na variedade de Stiefel, definida no exemplo 3.11. Sua imagem é o politopo

$$\mu_{U(1)^n}(Gr(2, n)) = \left\{ (r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mathbf{R}^n : 0 \leq r_i \leq 1, \sum_{i=1}^n r_i = 2 \right\} .$$

Um elemento  $(r_1, r_2, \dots, r_n) \in \mu_{U(1)^n}(Gr(2, n))$  é ponto crítico se

1.  $r_j = 0$  para algum  $j = 1, \dots, n$ , ou
2.  $r_j = 1$  para algum  $j = 1, \dots, n$ , ou
3.  $\sum_{j=1}^n \varepsilon_j r_j = 0$ , com  $\varepsilon_j = \pm 1$  e pelo menos dois  $\varepsilon_j \neq 0$  para cada sinal.

Os pontos que verificam a condição do item 1 ou do item 2 formam o bordo do politopo e os pontos que verificam o item 3 são os muros interiores do politopo (hiperplanos que dividem o interior do politopo). Um exemplo da utilidade de estes muros interiores, e o artigo [M2014] no qual descreve  $M(r)$  de acordo do lado de que muro está  $r$ .

Voltando à caracterização do espaço de polígonos usando a Grassmanniano, temos o seguinte resultado:

**Teorema 4.1.** ([HK1997, (3.9)]) *O espaço de polígonos  $M(r)$  é isomorfo ao quociente simplético  $Gr(2, n)/U(1)^n/U(1)$ .*

## 4.2

### Polígonos como representações de aljavas (*quivers*)

Uma *aljava estrelada* (star-shaped quiver)  $Q$  é um grafo dirigido  $(V, E)$  com vértices  $V = \{v_0, v_1, \dots, v_n\}$  e arestas  $E = \{\overrightarrow{v_i v_0} : i \in \{1, \dots, n\}\}$ . Uma representação duma *aljava* (quiver) atribui

- um espaço vetorial para cada vértice
- e um mapa linear para cada aresta.

Considere a representação de  $Q$  obtida tomando os espaços vetoriais  $v_0 = \mathbf{C}^2$  e  $v_i = \mathbf{C}$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$ , dada por:

$$Rep(Q) := \bigoplus_{i=1}^n Hom(\mathbf{C}, \mathbf{C}^2) = \mathbf{C}^{2n}$$

e a ação  $U(2) \times U(1)^n \curvearrowright \mathbf{C}^{2n}$  por conjugação,

$$(A, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \cdot (q_1, \dots, q_n) = (A^{-1}q_1\lambda_1, \dots, A^{-1}\lambda_n q_n) .$$

Ela não é efetiva, mas  $K := U(2) \times U(1)^n / \Delta \curvearrowright \mathbf{C}^{2n}$  age efetivamente, para  $\Delta = \left\{ \left( \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{pmatrix}, e^{i\theta}, \dots, e^{i\theta} \right) : \theta \in [0, 2\pi] \right\} \cong U(1)$ . Seu mapa momento é

$$\begin{aligned} \mu : (\mathbf{C}^2, \frac{i}{2} \sum_{j=1}^{2n} dz_j \wedge \bar{d}z_j) &\longrightarrow \mathfrak{u}(2)^* \times \mathfrak{u}(1)^{n*} \\ (q_1, \dots, q_n) &\longmapsto \left( \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{i=1}^n (q_i q_i^*)_0, \frac{1}{2} |q_1|^2, \dots, \frac{1}{2} |q_n|^2 \right), \end{aligned}$$

onde  $q_i^*$  é a transposta conjugada de  $q_i$  vista como matriz e  $(\cdot)_0$  denota a projeção da matriz para as matrizes sem traço, i.e.  $(M)_0 = M - \frac{\text{Tr}(M)}{2} Id_2$ .

Note que  $(q_1, \dots, q_n) \in \mu^{-1}(0, r)$  se e só se  $\sum_{i=1}^n (q_i q_i^*)_0 = 0$ . Para  $q_i = (a_i, b_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} &= \sum_{i=1}^n \left( q_i q_i^* - \frac{|q_i|^2}{2} Id_2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left( \begin{pmatrix} |a_i|^2 & a_i \bar{b}_i \\ \bar{a}_i b_i & |b_i|^2 \end{pmatrix} - \frac{|a_i|^2 + |b_i|^2}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{|a_i|^2 - |b_i|^2}{2} & \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i \\ \sum_{i=1}^n \bar{a}_i b_i & \sum_{i=1}^n \frac{|b_i|^2 - |a_i|^2}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De forma equivalente,

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n |a_i|^2 - |b_i|^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^n a_i \bar{b}_i = 0 \quad \text{para } 1 \leq i \leq n \end{cases}.$$

Para

$$e_i := \begin{pmatrix} \frac{|a_i|^2 - |b_i|^2}{2} & a_i \bar{b}_i \\ \bar{a}_i b_i & \frac{|b_i|^2 - |a_i|^2}{2} \end{pmatrix},$$

obtemos  $\sum_{i=1}^n e_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , o que é a condição para que o polígono  $e_1 + \dots + e_n$  seja fechado em  $\mathbf{R}^3 \cong \mathfrak{su}(2)$ .

Além disso,

$$\begin{aligned} |e_i|^2 &= \left( \frac{|a_i|^2 - |b_i|^2}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} |\bar{a}_i|^2 |b_i|^2 + \frac{1}{2} |a_i|^2 |\bar{b}_i|^2 \\ &= \frac{(|a_i|^2 + |b_i|^2)^2}{4} \\ &= \left( \frac{|q_i|^2}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

e assim  $|e_i| = \frac{1}{2} |q_i|^2 = r_i$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Sejam  $\mu_{U(2)}$  e  $\mu_{U(1)^n}$  as funções componentes do mapa momento  $\mu$ . Então  $\mu_{U(1)^n}^{-1}(r)/U(1)^n \cong \prod_{i=1}^n S_{r_i}^2$ . Como  $U(2)/U(1) \sim \text{SO}(3)$  e age em

$\mu_{U(1)^n}^{-1}(r)/U(1)^n \cong \prod_{i=1}^n S_{r_i}^2$ , aplicamos a redução simplética por etapas obtendo

$$\mu^{-1}(0, r)/K \cong \left\{ (e_1, \dots, e_n) \in \prod_{i=1}^n S_{r_i}^2 : e_1 + \dots + e_n = 0 \right\} / \text{SO}(3). \quad (4-3)$$

A prova da equação (4-3) está na seção (3.9) de [HK1997].

### 4.3

#### Espaço de hiperpolígonos

Nesta seção, consideramos a variedade estrela  $Q'$  que é um grafo dirigido com vértices  $V = \{v_0, \dots, v_n\}$  e arestas em sentidos opostos  $E = \{\overrightarrow{v_i v_0}, \overrightarrow{v_0 v_i} : i \in \{1, \dots, n\}\}$ .

Como antes, definimos a representação de  $Q'$  fazendo  $v_0 = \mathbf{C}^2$  e  $v_i = \mathbf{C}$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ :

$$\text{Rep}(Q') := \bigoplus_{i=1}^n \left( \text{Hom}(\mathbf{C}, \mathbf{C}^2) \oplus \text{Hom}(\mathbf{C}^2, \mathbf{C}) \right) \cong T^*\mathbf{C}^{2n}.$$

O espaço cotangente  $T^*\mathbf{C}^{2n} = \mathbf{H}^{2n}$  tem uma estrutura hiperkähler natural. Um elemento dos quatérnios pode ser escrito como  $A + Bi_1 + Ci_2 + Di_3$ , e em  $\mathbf{H}^{2n}$  temos as formas simpléticas  $\omega_1 = \sum_{i=1}^{2n} dA_i \wedge dB_i + dC_i \wedge dD_i$ ,  $\omega_2 = \sum_{i=1}^{2n} dA_i \wedge dC_i - dB_i \wedge dD_i$  e  $\omega_3 = \sum_{i=1}^{2n} dA_i \wedge dD_i + dB_i \wedge dC_i$ .

Denotando  $z_{2j-1} = A_j + \sqrt{-1}B_j$  e  $z_{2j} = C_j + \sqrt{-1}D_j$  para  $j \in \{1, \dots, 2n\}$ , temos as formas simpléticas  $\omega_{\mathbf{R}} := \omega_1 = \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{i=1}^{4n} dz_j \wedge d\bar{z}_j$  e  $w_{\mathbf{C}} := \omega_2 + \sqrt{-1}\omega_3 = \sum_{j=1}^{2n} dz_{2j-1} \wedge dz_{2j}$  sobre  $\mathbf{C}^{4n}$ .

Por outro lado temos a ação hiperhamiltoniana  $K \curvearrowright T^*\mathbf{C}^{2n}$  (para  $K$  definido na seção anterior) dada por:

$$(A, \lambda_1, \dots, \lambda_n)(p, q) = (\lambda_1^{-1}p_1A, \dots, \lambda_n^{-1}p_nA, A^{-1}q_1\lambda_1, \dots, A^{-1}q_n\lambda_n),$$

onde  $p = (p_1, \dots, p_n) : \mathbf{C}^2 \rightarrow \mathbf{C}$  e  $q = (q_1, \dots, q_n) : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^2$ .

Essas ações têm mapas momento

$$\mu_{\mathbf{R}}(p, q) = \left( \frac{\sqrt{-1}}{2} \sum_{i=1}^n (q_i q_i^* - p_i p_i^*)_0, \frac{1}{2}(|q_1|^2 - |p_1|^2), \dots, \frac{1}{2}(|q_n|^2 - |p_n|^2) \right)$$

e  $\mu_{\mathbf{C}}(p, q) = (\sum_{i=1}^n (q_i p_i)_0, p_1 q_1, \dots, p_n q_n)$  para  $\omega_{\mathbf{R}}$  e  $\omega_{\mathbf{C}}$ , respectivamente.

Para  $r \in \mathbf{R}_+^n$ , o espaço de hiperpolígonos é

$$X(r) = T^*\mathbf{C}^{2n} \underset{(0,r),(0,0)}{////} K := \left( \mu_{\mathbf{R}}^{-1}(0, r) \cap \mu_{\mathbf{C}}^{-1}(0, 0) \right) / K .$$

Uma  $n$ -upla  $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbf{R}^{n+}$  é *genérica* se e só se, para todo  $I \subset \{1, \dots, n\}$ ,  $\epsilon_I(r) := \sum_{i \in I} r_i - \sum_{j \notin I} r_j \neq 0$ . Para  $r$  genérica,  $S \subset \{1, \dots, n\}$  é *curta* se e só se  $\epsilon_S(r) < 0$ . Dados  $(p, q) \in T^*\mathbf{C}^{2n}$  e um subconjunto  $S \subset \{1, \dots, n\}$ ,  $S$  está *em linha reta* em  $(p, q)$  se  $q_i$  é proporcional com  $q_j$  para todo  $i, j \in S$ .

**Observação:**  $X(r)$  é uma variedade hiperkähler diferenciável de dimensão real  $4(n - 3)$  se e só se  $r$  é genérica. Podemos identificar o espaço de polígonos  $M(r)$  com a subvariedade de  $X(r)$  dada por  $\{[(p, q)] \in X(r) : p = 0\}$ .

A seguir enunciamos um resultado dado por Konno que caracteriza a estabilidade (no sentido de Nakajima [N1998]) para o espaço de hiperpolígonos.

**Teorema 4.2.** ([K2002]) *Seja  $r = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbf{R}^{n+}$  genérica. Um elemento  $(p, q) \in T^*\mathbf{C}^{2n}$  é  $r$ -estável se e só se cumpre as seguintes condições.*

1.  $q_i \neq 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .
2. Se  $S \subset \{1, \dots, n\}$  está em linha reta em  $(p, q)$  e  $p_j = 0$  para todo  $j \notin S$ , então  $S$  é curto.

## 5

### Espaço de $SL(n, \mathbf{C})$ -polígonos

Descrevemos o espaço de polígonos primeiro em  $G = SL(2, \mathbf{C})$  para depois generalizar para  $G = SL(n, \mathbf{C})$ ,  $n \geq 2$ .

#### 5.1

##### As órbitas coadjuntas de $SL(2, \mathbf{C})$

Para descrever as órbitas coadjuntas de  $SL(2, \mathbf{C})$  utilizamos o Teorema de Jordan. Sabemos que

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}) = \{X \in M_{2 \times 2}(\mathbf{C}) : \text{Tr}(X) = 0\},$$

Assim,  $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  se e só se  $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$  para  $a, b, c \in \mathbf{C}$ , e seu polinômio característico é necessariamente da forma  $(t - \lambda)(t + \lambda)$ ,  $\lambda \in \mathbf{C}$ .

**CASO 1** :  $\lambda \neq 0$ : então o polinômio mínimo e o característico são diferentes,  $X$  é diagonalizável e é semelhante a  $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}$ .

**CASO 2**:  $\lambda = 0$ : o polinômio mínimo é  $t$  ou  $t^2$ .

a) Se é  $t$ ,  $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

b) Se é  $t^2$ ,  $X$  é semelhante a  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Vamos considerar por um instante a ação por conjugação mais geral  $GL_2(\mathbf{C}) \curvearrowright \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ . Nesse caso, as órbitas têm a forma  $\mathcal{O}_X = GL_2(\mathbf{C}) \cdot X = \{AXA^{-1} : A \in GL_2(\mathbf{C})\}$ , para  $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ . Como  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ , para matrizes  $A$  e  $B$ , temos  $\text{Tr}(AXA^{-1}) = \text{Tr}(A^{-1}AX) = \text{Tr}(X) = 0$ ,  $\forall X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ : a ação por conjugação está bem definida.

Dado  $\lambda \in \mathbf{C} - \{0\}$ , defina  $\mathcal{O}_\lambda := \mathcal{O}_{\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{pmatrix}}$ . Como  $\mathcal{O}_{\lambda_i} = \mathcal{O}_{-\lambda_i}$ , introduzimos um novo parâmetro  $\rho_i := \lambda_i^2$  e definimos  $\mathcal{O}_{\rho_i} := \mathcal{O}_{\lambda_i} = \mathcal{O}_{-\lambda_i}$  (denotaremos por  $\lambda$  os autovalores e  $\rho$  seus quadrados). Então  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}) = \dot{\bigcup}_{\rho=\lambda^2 \in \mathbf{C}} \mathcal{O}_\rho \dot{\bigcup} \mathcal{O}_{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$ .

**Observação:** As classes das ações por conjugação  $GL_2(\mathbf{C}) \curvearrowright \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  e  $SL_2(\mathbf{C}) \curvearrowright \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  coincidem, pois  $A \cdot X \cdot A^{-1} = \frac{A}{\sqrt{\det A}} \cdot X \cdot \left(\frac{A}{\sqrt{\det A}}\right)^{-1}$ , para  $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  e  $A \in GL_2(\mathbf{C})$  ( $\det\left(\frac{A}{\sqrt{\det A}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{\det A}}\right)^2 \det A = 1$ ).

Usando os casos anteriores, a observação de acima e o fato que  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ , a equação que caracteriza a órbita coadjunta para  $0 \neq \rho \in \mathbf{C}$  qualquer é

$$\mathcal{O}_\rho = \{(a, b, c) \in \mathbf{C}^3 - 0 : a^2 + bc = \rho\}$$

## 5.2

### As órbitas coadjuntas de $SL(n, \mathbf{C})$

Lembremos que  $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C}) = \{X \in M_{n \times n}(\mathbf{C}) : \text{Tr}(X) = 0\}$ . Uma matriz

$$X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C}) \text{ é semelhante a uma matriz da forma } \begin{pmatrix} M_{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{\lambda_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{\lambda_s} \end{pmatrix} \in$$

$\mathcal{O}_X^*$ , onde  $M_{\lambda_i}$  é matriz na forma de Jordan e  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s\} \subset \mathbf{C}$  é o conjunto de autovalores de  $X$  (distintos).

Seja  $r_i := \text{posto de } M_i$ , para cada  $i \in \{1, \dots, s\}$  tal que  $1 \leq r_1 \leq r_2 \leq \dots \leq r_s$ .

Da condição  $\text{Tr } X = 0$ , vemos que necessariamente

$$\sum_{i=1}^s r_i \lambda_i = 0. \tag{5-1}$$

Além disso  $1 \leq s \leq n$  (fixo, só depende de  $X$ ) e  $\sum_{i=1}^s r_i = n$ . Portanto, dada  $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ , a órbita coadjunta  $\mathcal{O}_X$  é caracterizada por  $\mathcal{O}_X = \{(\lambda_i, r_i)\}_{i=1}^s$ , onde  $\lambda_i$  e  $r_i$  verificam a equação (5-1).

## 5.3

### Dimensão da órbita coadjunta de $SL(n, \mathbf{C})$

Cada órbita coadjunta é uma variedade simplética (com forma simplética descrita a seguir), logo tem dimensão par. Nesta subseção encontraremos a dimensão da órbita coadjunta de  $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ .

Como no caso  $SL(2, \mathbf{C})$ , as classes das ações por conjugação  $GL_n(\mathbf{C}) \curvearrowright \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$  e  $SL_n(\mathbf{C}) \curvearrowright \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$  coincidem pois  $A \cdot X \cdot A^{-1} = \frac{A}{\sqrt{\det A}} \cdot X \cdot \left(\frac{A}{\sqrt{\det A}}\right)^{-1}$ , para todo  $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$  e todo  $A \in GL_n(\mathbf{C})$  ( $\det\left(\frac{A}{\sqrt{\det A}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{\det A}}\right)^n \det A = 1$ ). Portanto  $\mathcal{O}_{GL_n \times n(\mathbf{C})}^* = \mathcal{O}_{SL_n \times n(\mathbf{C})}^*$ .

Seja  $J_X$  a forma canônica de Jordan de  $X \in M_{n \times n}(\mathbf{C})$ . Para

$$\begin{aligned} C_X : GL_{n \times n}(\mathbf{C}) &\longrightarrow GL_{n \times n}(\mathbf{C}) \\ A &\longmapsto AJ_X A^{-1}, \end{aligned}$$

vale

$$\begin{aligned} \text{Ker}(T) &= \{B \in GL_{n \times n}(\mathbf{C}) : BJ_X = J_X B\} \\ &= C(J_X) \cap GL_{n \times n}(\mathbf{C}), \end{aligned}$$

onde  $C(J_X)$  denota o centralizador de  $J_X$ .

Pela fórmula de Frobenius ([OCV2011, pg. 99, Prop. 3.1.3.]):

$$\dim(C(J_X)) = m_1 + 3m_2 + 5m_3 + \cdots + (2s - 1)m_s, \quad (5-2)$$

onde  $(m_1, m_2, \dots, m_s)$  é a estrutura de Jordan de  $N_X$  ( $N_X$  é a única matriz nilpotente tal que  $J_X = D_X + N_X$  com  $D_X$  diagonal).

Seja  $J$  uma matriz complexa na forma de Jordan ([OCV2011, pg. 39]) e  $\lambda_0$  um de seus autovalores. A *estrutura de Jordan de  $J$  com respeito a  $\lambda_0$*  é a coordenada  $(m_1, m_2, \dots, m_s) \in \mathbf{R}^s$  que faz uma ordenação decrescente dos tamanhos dos blocos de Jordan de  $J$  correspondentes a  $\lambda_0$ , i.e.,  $m_1 \geq m_2 \geq \cdots \geq m_s$  e  $m_i$  é o tamanho do  $i$ -ésimo bloco de Jordan de  $J$  (em ordem decrescente) correspondente ao seu autovalor  $\lambda_0$ . Seja  $J = D + N$  sua decomposição em soma de uma matriz diagonal e outra nilpotente. Então os autovalores de  $N$  são iguais a zero, e definimos a *estrutura diagonal de  $N$*  como a estrutura de Jordan de  $N$  com respeito a 0.

Então

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{O}_{SL_{n \times n}(\mathbf{C})}^*(X)) &= \dim(\mathcal{O}_{GL_{n \times n}(\mathbf{C})}^*(J_X)) \\ &= \dim(\text{im}(C_X)) \\ &= \dim(GL_{n \times n}(\mathbf{C})) - \dim(C(J_X)) \\ &= n^2 - (m_1 + 3m_2 + 5m_3 + \cdots + (2s - 1)m_s). \end{aligned}$$

## 6

### Fluxos de Kapovich–Millson para $SL(2, \mathbf{C})$ e outros grupos

Neste capítulo são apresentados e provados resultados do espaço de polígonos que caracterizam as *hamiltonianas de dobramento* de Kapovich – Millson no caso  $G = SL(2, \mathbf{C})$ . As provas são análogas às dadas por Kapovich e Millson em [KM1996] no caso  $G = SU(2)$ . As mesmas funções definem um sistema de funções em involução para outros grupos de Lie como  $SL(n, \mathbf{C})$ , mas este sistema não é integrável.

Do capítulo anterior vimos que as órbitas coadjuntas de  $SL(2, \mathbf{C})$  são da forma

$$\mathcal{O}_\rho = \left\{ (a, b, c) \in \mathbf{C}^3 \simeq \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})^* : a^2 + bc = \lambda^2 \right\}, \quad (6-1)$$

onde  $\lambda, -\lambda \in \mathbf{C}$  são autovalores de  $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})^*$  e  $\rho := \lambda^2$ .

A ação coadjunta  $SL(2, \mathbf{C}) \curvearrowright \mathcal{O}_\rho$  é equivalente à adjunta (equação (2-1)),

$$\left( A, \begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix} \right) \mapsto A \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix} \cdot A^{-1},$$

que de fato está bem definida, pois se  $Y = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{c} \\ \tilde{b} & -\tilde{a} \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix} \cdot A^{-1}$ ,

então  $\tilde{a}^2 + \tilde{b}\tilde{c} = \det(Y) = a^2 + bc = \rho$ .

**i) Dimensão de  $\mathcal{O}_\rho$ :** Seja

$$\begin{aligned} T : \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})^* \cong \mathbf{R}^3 &\longrightarrow \mathbf{C} \\ (e, f, g) &\longmapsto e^2 + fg. \end{aligned}$$

Então  $dT(e, f, g) = 2ede + gdf + fdg$  e  $dT(e, f, g) \neq 0$  para  $(e, f, g) \neq (0, 0, 0)$ . Assim, para  $\rho \neq 0$ ,  $\rho \in \mathbf{C}$  é um valor regular de  $T$ ,  $\mathcal{O}_\rho$  é uma variedade diferenciável e  $\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_\rho = 3 - 1 = 2$ .

**ii) Forma simplética em  $\mathcal{O}_\rho$ :**

Lembra que para um grupo de Lie  $G$  com uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , o colchete de Lie  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  define o colchete de Lie–Poisson  $\{\cdot, \cdot\}$  sobre os anéis de polinômios e funções  $S(\mathfrak{g}) = \mathbf{C}[\mathfrak{g}^*] \subset C^\infty(\mathfrak{g}^*, \mathbf{C})$ ,  $\{X, Y\} := [X, Y]$  onde  $X, Y \in \mathfrak{g}$  são considerados como polinômios lineares sobre  $\mathfrak{g}^*$ . A ação coadjunta  $G : \mathfrak{g}^*$  é de Poisson com mapa momento igual à identidade (teorema 3.8). As órbitas  $(\mathcal{O}_\rho, \omega_\rho)$  são simpléticas com a forma simplética de K.K.S. (seção 3.2)

dada pela fórmula mágica de Kirillov

$$\omega_\rho(ad_X^* R, ad_Y^* R) := \langle R, [X, Y] \rangle$$

para  $X, Y \in \mathfrak{g}$ ,  $R \in \mathfrak{g}^*$ .

Considere invariantes  $P := (\rho_1, \dots, \rho_n)$ . Para  $S_P := \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{\rho_i}$ , definimos a forma simplética  $\omega := \sum_{j=1}^n pr_j^* \omega_{\rho_j}$ , onde  $pr_j$  é a projeção de  $S_P$  em sua  $j$ -ésima componente  $\mathcal{O}_{\rho_j}$ . Denotamos por  $\mu$  a ação diagonal  $G$  em  $(S_P, \omega)$ ,

O espaço de  $\mathfrak{g}$ -polígonos é

$$\begin{aligned} M(P) &:= \mu^{-1}(0)/G \\ &= \{\vec{e} \in S_P : e_1 + e_2 + \dots + e_n = 0\}/G, \end{aligned}$$

uma variedade simplética.

Para definir hamiltonianas no espaço de  $\mathfrak{g}$ -polígonos (como em [KM1996, Seção 3]), consideramos uma forma bilinear invariante  $B \in S^2(\mathfrak{g})$  sobre  $\mathfrak{g}^*$  e  $q(R) = B(R, R)$  a forma quadrática associada: assim, para  $\mathfrak{g}$  semisimples,  $q(X^*) = \text{Tr}(X^2)$  onde  $X^* \in \mathfrak{g}^*$  é definido por  $\langle X^*, Y \rangle = \text{Tr}(XY)$ . Seja

$$\nu := v_1 e_1 + \dots + v_n e_n.$$

Para  $I \subset \{1, \dots, n\}$ , defina  $\nu_I = \sum_{i \in I} e_i$  e  $f_I := q(\nu_I)$ .

Para  $k = 0, \dots, n-1$ , defina  $\nu_k := \nu_{\{1, \dots, k+1\}} = e_1 + \dots + e_{k+1}$  e  $f_k := q(\nu_k)$ .

Uma álgebra de Lie métrica é um par  $(\mathfrak{g}, B)$  onde  $B \in (S^2 \mathfrak{g}^*)^{\mathfrak{g}}$  é uma forma bilinear não degenerada. Usamos  $B$  para identificar  $\mathfrak{g}^*$  com  $\mathfrak{g}$ . Para  $i, j \in 1, \dots, n$  definimos  $a_{ij} \in S^2(\mathfrak{g} \otimes \mathbf{C}^n)^{\mathfrak{g}} \subset \mathbf{C}[\mathfrak{g}^* \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}^*]^{\mathfrak{g}}$  por  $a_{ij}(e_1, \dots, e_n) := B(e_i, e_j) = (f_{\{i,j\}} - f_{\{i\}} - f_{\{j\}})/2$ . As funções  $a_{ij}$  também podem ser consideradas como definidas sobre um produto de órbitas,

$$\begin{aligned} a_{ij} : S_P = \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{\rho_i} &\longrightarrow \mathbf{C} \\ \vec{e} &\longmapsto B(e_i, e_j) \end{aligned}$$

ou sobre o espaço de polígonos (onde  $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 0$ ).

Na seguinte proposição computamos o colchete de Poisson para os polinômios quadráticos  $a_{ij}$  e será de utilidade na prova do lema 6.2 a seguir e nos capítulos 8 e 12.

**Proposição 6.1.** 1. A função

$$\begin{aligned} a_{ij} : S_P := \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{\rho_i} &\longrightarrow \mathbf{C} \\ \vec{e} &\longmapsto B(e_i, e_j), \end{aligned}$$

tem como função hamiltoniana

$$H_{a_{ij}}(\vec{e}) = (0, \dots, 0, [e_j, e_i], 0, \dots, 0, [e_i, e_j], 0, \dots, 0),$$

onde as duas coordenadas não nulas são a  $i$ -ésima e a  $j$ -ésima.

2. Para  $i, j, k, l$  distintos dois a dois,  $\{a_{ij}, a_{kl}\} = 0$ . Em geral,  $\{a_{ij}, a_{il}\} = B(e_i, [e_j, e_l])$ .

*Demonstração.* 1. Dado  $s \in \{1, \dots, n\}$  fixo, consideramos a ação  $G \curvearrowright S_\lambda$  que age diagonalmente tal que na  $s$ -ésima coordenada atua como a ação coadjunta e fixa as outras coordenadas  $(A \cdot (e_1, \dots, e_n)) = (e_1, \dots, e_{s-1}, te_s t^{-1}, e_{s+1}, \dots, e_n)$ . A ação tem mapa momento

$$\mu_{\lambda_s} : S_\lambda \rightarrow \mathbf{C}^m \cong \mathfrak{g}^* \tag{6-2}$$

com  $d\mu_{\lambda_s}^X(\vec{e}) = i_{X^\#(\vec{e})}\omega$  e  $X^\# = (0, \dots, 0, [X, e_s], 0, \dots, 0)$ , onde a coordenada não nula é a  $s$ -ésima. Então  $d\mu_{\lambda_i}^X(\vec{e}) = i_{[X, e_s]}\omega_s$ . Lembre que  $\mu_{\lambda_s}^X$  é

$$\begin{aligned} \mu_{\lambda_s}^X : S_\lambda &\longrightarrow \mathbf{C} \\ \vec{e} &\longmapsto B(\mu_{\lambda_s}(s), X), \end{aligned}$$

para cada  $X \in \mathbf{C}^m$ . Definindo

$$\begin{aligned} T : S_\lambda &\longrightarrow M_{m \times m}(\mathbf{C}) \\ \vec{e} &\longmapsto e_i e_j, \end{aligned}$$

notamos que  $T(\vec{e}) = \mu_{\lambda_i}(\vec{e}) \cdot \mu_{\lambda_j}(\vec{e})$ . Assim, para  $\vec{Y} \in T_{\vec{e}}S_\lambda$ ,

$$\begin{aligned} i_{H_{a_{ij}}(\vec{e})}\omega(\vec{Y}) &= da_{ij}(\vec{e})(\vec{Y}) \\ &= B(d\mu_{\lambda_i}(\vec{e})(\vec{Y}), \mu_{\lambda_j}(\vec{e})) + B(\mu_{\lambda_i}(\vec{e}), d\mu_{\lambda_j}(\vec{e})(\vec{Y})) \\ &= B(d\mu_{\lambda_i}(\vec{e})(\vec{Y}), e_j) + B(e_i, d\mu_{\lambda_j}(\vec{e})(\vec{Y})) \\ &= d\mu_{\lambda_i}^{e_j}(\vec{e})(\vec{Y}) + d\mu_{\lambda_j}^{e_i}(\vec{e})(\vec{Y}) \\ &= i_{[e_j, e_i]}\omega_i(\vec{Y}) + i_{[e_i, e_j]}\omega_j(\vec{Y}) \\ &= i_{(0, \dots, 0, [e_j, e_i], \dots, 0, [e_i, e_j], 0, \dots, 0)}\omega(\vec{Y}) \end{aligned}$$

onde as coordenadas não nulas são a  $i$ -ésima e a  $j$ -ésima.

Assim  $H_{a_{ij}}(\vec{e}) = (0, \dots, 0, [e_j, e_i], \dots, 0, [e_i, e_j], 0, \dots, 0)$ .

2. Para  $i, j, k, l \in \{0, \dots, n\}$  distintos, obtemos

- $\{a_{ij}, a_{jl}\} = \omega_{\vec{e}}(H_{a_{ij}}(\vec{e}), H_{a_{jl}}(\vec{e})) = 0$ .
- $\{a_{ij}, a_{il}\} = \omega_i(H_{a_{ij}}(\vec{e}), H_{a_{il}}(\vec{e})) = B(e_i, [e_j, e_l])$ .

□

**Lema 6.2.** Para  $\nu = v_1 e_1 + \dots + v_n e_n$ , o campo hamiltoniano  $H_{q(\nu)}$  definido em  $S_{\mathbb{P}}$  correspondente à função  $q(\nu)$  é

$$H_{q(\nu)}(\vec{e}) = (v_1[\nu, e_1], \dots, v_n[\nu, e_n]).$$

*Demonstração.* Notamos que

$$q(\nu) = q\left(\sum_{i=1}^n v_i e_i\right) = B\left(\sum_{i=1}^n v_i e_i, \sum_{j=1}^n v_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^n v_i v_j a_{ij}.$$

Assim

$$H_{q(\nu)} = H_{\sum_{i,j=1}^n v_i v_j a_{ij}} = \sum_{i,j=1}^n v_i v_j H_{a_{ij}}.$$

Pela proposição 6.1, obtemos

$$\begin{aligned} H_{q(\nu)} &= \sum_{i,j=1}^n v_i v_j (0, \dots, 0, [e_j, e_i], 0, \dots, 0, [e_i, e_j]) \\ &= (h_1, \dots, h_n) \end{aligned}$$

onde no termo na direita da primeira igualdade as coordenadas não nulas são a  $i$ -ésima e a  $j$ -ésima (nessa ordem) e

$$h_i = \sum_{j=1}^n v_i v_j [e_j, e_i] = v_i \left[ \sum_{j=1}^n v_j e_j, e_i \right] = v_i [\nu, e_i].$$

Concluimos que  $H_{\nu}(\vec{e}) = (v_1[\nu, e_1], \dots, v_n[\nu, e_n])$ , □

**Proposição 6.3.** As funções  $f_k$ ,  $k = 1, \dots, n - 1$  estão em involução, i.e.  $\{f_k, f_l\} = 0$ , para todo  $k, l$ . Também  $\{f_I, f_J\} = 0$ , para todo  $I \subset J$ .

*Demonstração.*

$$\begin{aligned} \{f_k, f_l\} &= \omega(H_{f_k}(\vec{e}), H_{f_l}(\vec{e})) \\ &= \omega(([\nu_k, e_1], [\nu_k, e_2], \dots, [\nu_k, e_{k+1}], 0, \dots, 0), ([\nu_l, e_1], [\nu_l, e_2], \dots, [\nu_l, e_{l+1}], 0, \dots, 0)). \end{aligned}$$

Suponhamos  $k < l$ :

$$\begin{aligned} \{f_k, f_l\} &:= \sum_{i=1}^{k+1} B(e_i, [\nu_k, \nu_l]) \\ &= B(\sum_{i=1}^{k+1} e_i, [\nu_k, \nu_l]) \\ &= B(\nu_k, [\nu_k, \nu_l]) \\ &= B([\nu_k, \nu_k], \nu_l) \\ &= 0, \end{aligned}$$

onde a penúltima igualdade vem da proposição 2.8. Analogamente  $\{f_I, f_J\} = 0$ , para todo  $I \subset J$ .  $\square$

**Observação:** Notamos que as funções  $f_k$ 's,  $f_I$ 's e seus respectivos campos hamiltonianos  $H_{f_k}$ 's,  $H_{f_I}$ 's estão definidas na variedade  $S_P = \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{\rho_i}$ , mas estamos interessados em suas definições na variedade quociente  $S_P //_0 G$ . Para isso, basta notar que as funções são invariantes pela ação coadjunta de  $G$  e assim são bem definidas no quociente. De fato, seja  $g \in G$  tal que  $e'_i = g(e_i)$  e  $\nu'_k = e'_1 + \dots + e'_{k+1}$  para cada  $i = 1, \dots, n$  e  $k = 1, \dots, n-1$ . Então  $\nu'_k = g(\nu_k)$ . Por isso, se  $\vec{e}' := (e'_1, \dots, e'_n)$ ,

$$f_k(\vec{e}') = q(\nu'_k) = q(g(\nu_k)) = q(\nu_k) = f_k(\vec{e}),$$

onde usamos a  $G$ -invariância de  $q$ .

Analogamente,

$$\begin{aligned} H_{f_k}(\vec{e}') &= ([\nu'_k, e'_1], [\nu'_k, e'_2], \dots, [\nu'_k, e'_{k+1}], 0, 0, \dots, 0) \\ &= ([g(\nu_k), g(e_1)], [g(\nu_k), g(e_2)], \dots, [g(\nu_k), g(e_{k+1})], 0, 0, \dots, 0) \\ &= (g[\nu_k, e_1], g[\nu_k, e_2], \dots, g[\nu_k, e_{k+1}], 0, 0, \dots, 0) \\ &= dgH_{f_k}(\vec{e}), \end{aligned}$$

onde usamos a  $G$ -equivariância do colchete de Lie. Pelo teorema 3.9,

$$M(P) := S_P //_0 G$$

é uma variedade simplética com forma diferenciável  $\omega_P$ , onde  $i^*\omega = \pi^*\omega_P$ .

## 6.1

**Fluxo  $\varphi_k^t$  associado a  $f_k$  para o caso  $G = SL(2, \mathbf{C})$**

O fluxo  $\varphi_k^t$  é a solução da E.D.O.

$$(*) \begin{cases} \frac{de_i}{dt} = [\nu_k, e_i] & \text{para } 1 \leq i \leq k+1 \\ \frac{de_i}{dt} = 0 & \text{para } k+2 \leq i \leq n \end{cases}$$

A exponencial  $\exp x$  para  $x \in \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  é bem definida. Seja  $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  e  $w$  uma das duas raízes complexas de  $a^2 + bc$  (i.e.  $w = \pm\sqrt{a^2 + bc}$ ). Então, para  $\operatorname{sinh} w = \frac{\sinh w}{w}$ ,

$$\exp x = \cosh(w)Id + \operatorname{sinh}c(w)x,$$

se  $w \neq 0$  (bem definida, pois as funções  $\cosh$  e  $\sinh$  são par e ímpar respectivamente).

Caso contrario, se  $w = 0$ ,  $\exp x = Id + x$ . Para  $\coshq(t^2) := \cosh(t)$  e  $\sinhq(t^2) := \sinh(t)$  e  $q(x) = \det x = -a^2 - bc$ , se  $q(x) \neq 0$ ,

$$\exp(x) = \exp\left(\sqrt{q(x)} \frac{x}{\sqrt{q(x)}}\right) = \coshq(q(x))Id + \sinhq(q(x))x,$$

que é uma superfície em  $\mathbf{C}^3$  com equação cartesiana  $y^2 - z^2 = 1$ .

Provamos o seguinte resultado.

**Proposição 6.4.** *Seja  $P \in M_\lambda$  e  $e_1$  com arestas  $e_2, \dots, e_n$ . Então  $P(t) := \varphi_k^t(P)$  tem arestas*

$$\begin{cases} e_i(t) = \exp(tad_{\nu_k})e_i & \text{para } 1 \leq i \leq k + 1 \\ e_i(t) = e_i & \text{para } k + 2 \leq i \leq n \end{cases},$$

onde  $ad_v u = [v, u]$ .

*Demonstração.* Temos o seguinte sistema de E.D.O.s,

$$\begin{cases} \frac{de_i}{dt} = [\nu_k, e_i] & \text{para } 1 \leq i \leq k + 1 \\ \frac{de_i}{dt} = 0 & \text{para } k + 2 \leq i \leq n \end{cases}$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{d\nu_k}{dt} &= \frac{de_1}{dt} + \dots + \frac{de_{k+1}}{dt} \\ &= [\nu_k, e_1] + \dots + [\nu_k, e_{k+1}] \\ &= [\nu_k, \nu_k] \\ &= 0, \end{aligned}$$

$\nu_k$  é invariante pelo fluxo. Mas  $\frac{de_i}{dt} = [\nu_k, e_i]$  para cada  $i \in \{1, 2, \dots, k + 1\}$ , e assim obtemos  $e_i(t) = \exp(tad_{\nu_k})e_i$ . □

**Corolário 6.5.**  $P(t) = \varphi_k^t(P)$  é  $\frac{2\pi}{l_k}$ -periódica, onde  $2l_k(\vec{e}) = \sqrt{q(\nu_k)}$ .

**Observação:** Como  $l_k^2(\vec{e}) = 2f_k(\vec{e})$ , temos  $2l_k dl_k = 2df_k$  e  $dl_k = \frac{df_k}{l_k}$ . Lembrando que  $H_{f_k}(e_1 + \dots + e_n) = ([\nu_k, e_1], \dots, [\nu_k, e_{k+1}], 0, \dots, 0)$ ,  $f_k(e_1, \dots, e_n) = \frac{1}{2}q(e_1 + \dots + e_{k+1})$  e  $df_k = i_{H_{f_k}} \omega$ , temos também que  $i_{H_{l_k}} \omega = dl_k = df_k/l_k = \frac{1}{l_k} i_{H_{f_k}} \omega$ , e então  $H_{l_k} = H_{f_k}/l_k$  e o período de  $l_k$  é constante, igual a  $2\pi$ .

## 7

### Compatibilidade com as formas reais

Neste capítulo provamos que a variedade  $M_{\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})}(\lambda)$ , definida no capítulo anterior, pode ser vista como uma generalização das variedades  $M_{\mathrm{SU}(2)}(\lambda)$  e  $M_{\mathrm{PGL}(2,\mathbf{R})}(\lambda)$  (quociente de  $M_{\mathrm{SL}(2,\mathbf{R})}(\lambda)$  pela involução).

Dado  $\alpha = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbf{R}^n$  com  $\lambda_i > 0$ , para todo  $i$ , seja  $A \in \mathcal{O}_\lambda^{\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})} := \{M \in \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}) : q(M) = -\lambda^2\}$ , uma órbita coadjunta de  $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C})$ . Aqui  $q(M) = \det(M)$  vem do produto interno  $\langle A, B \rangle = -\frac{1}{2} \mathrm{Tr}(AB)$  (que é também o produto interno de Minkowski no caso  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ , ver [BFGM2013, pag. 1013]).

a) Se  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R}) \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ , obtemos  $q(A) = -a^2 - bc = -\lambda^2$ , portanto  $\mathcal{O}_\lambda^{\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})} \supset \mathcal{O}_\lambda^{\mathrm{GL}(2,\mathbf{R})}$ .

b) Se  $A = \begin{pmatrix} ix & y + iz \\ -y + iz & -ix \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2) \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ , obtemos  $q(A) = \det(A) = x^2 + y^2 + z^2 = |(x, y, z)|^2$  (norma euclidiana). Então,

$$\{A \in \mathfrak{su}(2) : q(A) = \lambda^2\} \subset \{A \in \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C}) : q(A) = \lambda^2\}$$

e então  $\mathcal{O}_\lambda^{\mathrm{SU}(2)} \subset \mathcal{O}_{i\lambda}^{\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})}$ .

Além disso,

$$\begin{aligned} \mu_{\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})} : \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{\lambda_i}^{\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})} &\longrightarrow \mathbf{C}^3 \simeq \mathbf{R}^6 \\ (e_1, \dots, e_n) &\longmapsto e_1 + \dots + e_n, \end{aligned}$$

é induzida da ação (diagonal) coadjunta:  $\mathrm{SL}(2, \mathbf{C}) \curvearrowright \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})^*$ .

Como  $\prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{\lambda_i}^{\mathrm{GL}(2,\mathbf{R})} \subset \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{\lambda_i}^{\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})}$ , podemos restringir  $\mu_{\mathrm{SL}(2,\mathbf{C})}$  a  $\prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{\lambda_i}^{\mathrm{GL}(2,\mathbf{R})} : \mu|_{\prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{\lambda_i}^{\mathrm{GL}(2,\mathbf{R})}} : \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{\lambda_i}^{\mathrm{GL}(2,\mathbf{R})} \longrightarrow \mathbf{R}^3$ .

Para  $A \in \mu_{\text{GL}(2, \mathbf{R})}^{-1}(0)$ ,

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{\lambda_i}^{\text{GL}(2, \mathbf{R})} //_0 \text{GL}(2, \mathbf{R}) \ni [A]_{\text{GL}(2, \mathbf{R})} \\ & := \{B \in \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})^n : B = \gamma A \gamma^{-1}, \text{ para algum } \gamma \in \text{GL}(2, \mathbf{R})\} \\ & \subseteq \{C \in \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})^n : B = \alpha A \alpha^{-1}, \text{ para algum } \alpha \in \text{SL}(2, \mathbf{C})\} \\ & = [A]_{\text{SL}(2, \mathbf{C})} \in \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{\lambda_i}^{\text{SL}(2, \mathbf{C})} //_0 \text{SL}(2, \mathbf{C}). \end{aligned}$$

O cálculo análogo no caso  $\text{SU}(2)$  é o seguinte. Como  $\prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{\lambda_i}^{\text{SU}(2)} \subset \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{\sqrt{-1}\lambda_i}^{\text{SL}(2, \mathbf{C})}$ , restringimos  $\mu_{\text{SL}(2, \mathbf{C})}$  a  $\prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{\lambda_i}^{\text{SU}(2)}$  tal que  $\mu_{\text{SL}(2, \mathbf{C})}|_{\prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{\lambda_i}^{\text{SU}(2)}} : \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{\lambda_i}^{\text{SU}(2)} \rightarrow \mathbf{R}^3 \subseteq \mathbf{C}^3 \simeq \mathbf{R}^6$ .

Para  $A \in \mu_{\text{SU}(2)}^{-1}(0)$ ,

$$\prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{\lambda_i}^{\text{SU}(2)} //_0 \text{SU}(2) \ni [A]_{\text{SU}(2)} \subseteq [A]_{\text{SL}(2, \mathbf{C})} \in \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{\sqrt{-1}\lambda_i}^{\text{SL}(2, \mathbf{C})} //_0 \text{SL}(2, \mathbf{C}).$$

1 ) Caso  $\text{PGL}(2, \mathbf{R})$ : Para a inclusão  $j$ ,

$$\begin{array}{ccc} \mu_{\mathbf{R}} := \mu_{\text{PGL}(2, \mathbf{R})} : \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{\lambda_i}^{\text{GL}(2, \mathbf{R})} & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ & \downarrow j & \downarrow j \\ \mu_{\mathbf{C}} := \mu_{\text{SL}(2, \mathbf{C})} : \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{\lambda_i}^{\text{SL}(2, \mathbf{C})} & \longrightarrow & \mathbf{C}^3. \end{array}$$

Temos  $\mu_{\mathbf{R}}^{-1}(0) = (j \circ \mu_{\mathbf{R}})^{-1}(0)$ . Vamos provar que  $\mu_{\mathbf{R}}^{-1}(0) \subset \mu_{\mathbf{C}}^{-1}(0)$ . De fato, seja  $A = (A_1, A_2, \dots, A_n) \in \prod_{i=1}^n \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})^*$  e  $-[A] = ([A_1], [A_2], \dots, [A_n]) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{\lambda_i}^{\text{GL}(2, \mathbf{R})} \subset \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{\lambda_i}^{\text{SL}(2, \mathbf{C})}$ . Se  $[A] \in \mu_{\mathbf{R}}^{-1}(0)$ ,  $[A_1] + [A_2] + \dots + [A_n] = 0$ , então  $[A] \in (j \circ \mu_{\mathbf{R}})^{-1}(0) = (\mu_{\mathbf{C}} \circ j)^{-1}(0) = \mu_{\mathbf{C}}^{-1}(0)$ , concluindo que  $[A] \in \mu_{\mathbf{C}}^{-1}(0)$ .

$$\begin{array}{ccc} \mu_{\mathbf{R}}^{-1}(0) & \xrightarrow{j} & \mu_{\mathbf{C}}^{-1}(0) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mu_{\mathbf{R}}^{-1}(0) / \text{PGL}(2, \mathbf{R}) & \xrightarrow{f} & \mu_{\mathbf{C}}^{-1}(0) / \text{SL}(2, \mathbf{C}). \end{array}$$

Vamos provar que  $f$  no diagrama de acima é de fato injetiva: se  $E, G \in \mu_{\mathbf{R}}^{-1}(0) \subset \mu_{\mathbf{C}}^{-1}(0)$  tal que  $[E]_{\text{SL}(2, \mathbf{C})} = [G]_{\text{SL}(2, \mathbf{C})}$ , então  $[E]_{\text{PGL}(2, \mathbf{R})} = [G]_{\text{PGL}(2, \mathbf{R})}$ .

*Demonstração.* Se existe  $T \in \text{SL}(2, \mathbf{C})$  tal que

$$T \cdot E \cdot T^{-1} = G \tag{7-1}$$

com  $E, G \in \mu_{\mathbf{R}}^{-1}(0) \subset \mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})^n$ , então, para  $e_i, g_i, a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbf{R}, \forall i$ ,

$$\begin{aligned} E_i &= \begin{pmatrix} e_i & a_i \\ b_i & -e_i \end{pmatrix}, \text{ com } |E_i|^2 = -(e_i^2 + a_i b_i) = -\lambda_i^2, \\ G_i &= \begin{pmatrix} g_i & c_i \\ d_i & -g_i \end{pmatrix}, \text{ com } |G_i|^2 = -(g_i^2 + c_i d_i) = -\lambda_i^2. \end{aligned}$$

Assim  $\begin{pmatrix} t_1 & t_3 \\ t_4 & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_i & a_i \\ b_i & -e_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_i & c_i \\ d_i & -g_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & t_3 \\ t_4 & t_2 \end{pmatrix}$ , com  $t_1 t_2 - t_3 t_4 = 1$  e  $t_i \in \mathbf{C}, \forall i$ .

Portanto, para todo  $i$  vale também

$$\bar{T} \cdot E_i = G_i \cdot \bar{T} \quad (7-2)$$

e além disso  $\det(\bar{T}) = 1$ . Das equações (7-1) e (7-2) obtemos

$$(\alpha T + \bar{\alpha} \bar{T}) \cdot E = G \cdot (\alpha T + \bar{\alpha} \bar{T})$$

para  $\alpha \in \mathbf{C}$ . Nosso objetivo é encontrar  $\alpha$  para o qual  $\det(\alpha T + \bar{\alpha} \bar{T}) \neq 0$ .

Temos que

$$\begin{aligned} \det(\alpha T + \bar{\alpha} \bar{T}) &= \left| \begin{pmatrix} \alpha t_1 + \bar{\alpha} \bar{t}_1 & \alpha t_3 + \bar{\alpha} \bar{t}_3 \\ \alpha t_4 + \bar{\alpha} \bar{t}_4 & \alpha t_2 + \bar{\alpha} \bar{t}_2 \end{pmatrix} \right| \\ &= \alpha^2 \det(T) + \bar{\alpha}^2 \det(\bar{T}) + |\alpha|^2 (t_1 \bar{t}_2 + \bar{t}_1 t_2 - t_3 \bar{t}_4 - \bar{t}_3 t_4) \\ &= \alpha^2 + \bar{\alpha}^2 + |\alpha|^2 (t_1 \bar{t}_2 + \bar{t}_1 t_2 - t_3 \bar{t}_4 - \bar{t}_3 t_4) \end{aligned}$$

Seja  $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ ,  $C := t_1 \bar{t}_2 + \bar{t}_1 t_2 - t_3 \bar{t}_4 - \bar{t}_3 t_4$ . Estudamos em separado os casos  $C = 0$ ,  $C > 0$  e  $C < 0$ .

$C = 0$  :

$$\det(\alpha T + \bar{\alpha} \bar{T}) = \alpha^2 + \bar{\alpha}^2 = 2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2)$$

e basta ter  $\alpha_1^2 > \alpha_2^2$  para que  $\det(\alpha T + \bar{\alpha} \bar{T}) > 0$ .

$C > 0$  :

$$\begin{aligned} \det(\alpha T + \bar{\alpha} \bar{T}) &= \alpha^2 + \bar{\alpha}^2 + |\alpha|^2 C \\ &= 2(\alpha_1^2 - \alpha_2^2) + (\alpha_1^2 + \alpha_2^2) C \end{aligned}$$

Neste caso escolhemos  $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$  tal que  $\alpha_1 = \alpha_2$ .

Se  $C = 0$  ou  $C > 0$ ,  $M := \frac{1}{\sqrt{\det(\alpha T + \bar{\alpha} \bar{T})}} (\alpha T + \bar{\alpha} \bar{T}) \in \text{SL}(2, \mathbf{R})$  satisfaz  $MEM^{-1} = G$  e então  $\det(\alpha T + \bar{\alpha} \bar{T}) = 2\alpha_1^2 C > 0$ .

$C < 0$  : só podemos garantir a existência de  $\alpha$  tal que  $\det(\alpha T + \bar{\alpha} \bar{T}) = 1$  ou  $-1$ : existe  $U \in \text{PGL}(2, \mathbf{R})$  com  $UEU^{-1} = G$

Em geral,  $[E]_{\text{PGL}(2, \mathbf{R})} = [G]_{\text{PGL}(2, \mathbf{R})}$ .

Ao contrário do caso complexo, onde  $\text{PGL}(2, \mathbf{C}) = \text{PSL}(2, \mathbf{C})$ , no caso real  $\text{PGL}(2, \mathbf{R}) \neq \text{PSL}(2, \mathbf{R})$ :  $\text{PGL}(2, \mathbf{R})$  tem duas componentes conexas e  $\mu_{\mathbf{R}}^{-1}(0)/\text{PSL}(2, \mathbf{R}) \rightarrow \mu_{\mathbf{R}}^{-1}(0)/\text{PGL}(2, \mathbf{R})$  é um recobrimento duplo.  $\square$

**2 )** Caso  $\text{SU}(2)$ : De novo, para a inclusão  $j$ ,

$$\begin{array}{ccc} \mu_{\text{SU}} := \mu_{\text{SU}(2)} : \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{\lambda_i}^{\text{SU}(2)} & \longrightarrow & \mathbf{R}^3 \\ j \downarrow & & j \downarrow \\ \mu_{\mathbf{C}} := \mu_{\text{SL}(2,\mathbf{C})} : \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{\sqrt{-1}\lambda_i}^{\text{SL}(2,\mathbf{C})} & \longrightarrow & \mathbf{C}^3. \end{array}$$

Usamos  $\mu_{\text{SU}}^{-1}(0) = (j \circ \mu_{\text{SU}})^{-1}(0)$  para provar  $\mu_{\text{SU}}^{-1}(0) \subset \mu_{\mathbf{C}}^{-1}(0)$ . De fato, seja  $A = (A_1, A_2, \dots, A_n) \in \prod_{i=1}^n \text{SU}(2)^*$  e  $[A] = ([A_1], [A_2], \dots, [A_n]) \in \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{\lambda_i}^{\text{SU}(2)} \subset \prod_{i=1}^n \mathcal{O}_{i\lambda_i}^{\text{SL}(2,\mathbf{C})}$ . Se  $[A] \in \mu_0^{-1}(0)$ ,  $[A_1] + [A_2] + \dots + [A_n] = 0$ , então  $[A] \in (j \circ \mu_{\text{SU}})^{-1}(0) = (\mu_{\mathbf{C}} \circ j)^{-1}(0) = \mu_{\mathbf{C}}^{-1}(0)$  e então  $[A] \in \mu_{\mathbf{C}}^{-1}(0)$ . Vamos agora ver que  $g$  é bem definida no diagrama.

$$\begin{array}{ccc} \mu_{\text{SU}}^{-1}(0) & \xrightarrow{j} & \mu_{\mathbf{C}}^{-1}(0) \\ \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\ \mu_{\text{SU}}^{-1}(0)/\text{SU}(2) & \xrightarrow{g} & \mu_{\mathbf{C}}^{-1}(0)/\text{SL}(2,\mathbf{C}), \end{array}$$

Dado  $E, G \in \mu_0^{-1}(0)$ , temos que provar que  $[E]_{\text{SU}(2)} = [G]_{\text{SL}(2,\mathbf{C})}$ :

$$A \in \text{SU}(2) \leftrightarrow \det A = 1, A\bar{A} = 1 \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix} \leftrightarrow A \in S^3 \leftrightarrow A \in$$

$\text{SL}(2,\mathbf{C})$ , onde  $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$  tal que  $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$  e se escrevemos  $\alpha = a + b\sqrt{-1}$  e  $\beta = c + d\sqrt{-1}$ , obtemos  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$ . Voltando a nosso objetivo, sabemos que existe  $A \in \text{SU}(2) \subset \text{SL}(2,\mathbf{C})$  tal que  $G = A \cdot E$  então  $[E]_{\text{SL}(2,\mathbf{C})} = [G]_{\text{SL}(2,\mathbf{C})}$ .

Agora provamos que  $g$  é injetiva: se  $E, G \in \mu_{\text{SU}}^{-1}(0) \subset \mu_{\mathbf{C}}^{-1}(0)$  satisfazem  $[E]_{\text{SL}(2,\mathbf{C})} = [G]_{\text{SL}(2,\mathbf{C})}$ , então  $[E]_{\text{SU}(2)} = [G]_{\text{SU}(2)}$ .

*Demonstração.* Existe  $T \in \text{SL}(2,\mathbf{C})$  tal que

$$T \cdot E \cdot T^{-1} = G \tag{7-3}$$

Como  $E, G \in \mu_{\text{SU}}^{-1}(0) \subset \text{SU}(2)^n$  temos, para  $e_j, g_j, a_j, b_j, c_j, d_j \in \mathbf{R}, \forall j$ ,

$$E_j = \begin{pmatrix} ie_j & -a_j + ib_j \\ a_j + ib_j & -ie_j \end{pmatrix}, \text{ com } |E_j|^2 = e_j^2 + a_j^2 + b_j^2 = \lambda_j^2,$$

$$G_j = \begin{pmatrix} ig_j & -c_j + id_j \\ c_j + id_j & -ig_j \end{pmatrix}, \text{ com } |G_j|^2 = g_j^2 + c_j^2 + d_j^2 = \lambda_j^2.$$

$$\text{Assim } \begin{pmatrix} t_1 & t_3 \\ t_4 & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ie_j & a_j + ib_j \\ -a_j + ib_j & -ie_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ig_j & c_j + id_j \\ -c_j + id_j & -ig_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 & t_3 \\ t_4 & t_2 \end{pmatrix},$$

com  $t_1 t_2 - t_3 t_4 = 1$  e  $t_j \in \mathbf{C}$ , para todo  $j$ .

A equação (7-3) é equivalente ao sistema

$$t_1(ie_i - ig_i) + t_3(-a_j + ib_j) = t_4(c_j + id_j) \tag{7-4}$$

$$t_1(c_j - id_j) = -t_4(ie_j + ig_j) + t_2(a_i - ib_i) \tag{7-5}$$

$$t_1(a_j + ib_j) - t_3(ie_j + ig_j) = t_2(c_j + id_j) \tag{7-6}$$

$$t_3(c_j - id_j) = -t_4(a_j + ib_j) - t_2(-ie_j + ig_j) \tag{7-7}$$

Tomando a conjugada de ambos lados das equações (7-4) - (7-7), notamos que a matriz  $M := \begin{pmatrix} \bar{t}_2 & -\bar{t}_4 \\ -\bar{t}_3 & \bar{t}_1 \end{pmatrix}$ , com  $\bar{t}_1\bar{t}_2 - \bar{t}_3\bar{t}_4 = 1$  satisfaz

$$M \cdot E \cdot \bar{M}^{-1} = G \quad (7-8)$$

e assim

$$T + M = \begin{pmatrix} t_1 + \bar{t}_2 & t_3 - \bar{t}_4 \\ t_4 - \bar{t}_3 & t_2 + \bar{t}_1 \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix},$$

com

$$\begin{aligned} \det(T + M) &= (t_1 + \bar{t}_2)(t_2 + \bar{t}_1) - (t_3 - \bar{t}_4)(t_4 - \bar{t}_3) \\ &= \det(T) + \det(M) + t_1\bar{t}_1 + \bar{t}_2t_2 + t_3\bar{t}_3 + \bar{t}_4t_4 \\ &= 2 + |t_1|^2 + |t_2|^2 + |t_3|^2 + |t_4|^2 \\ &> 2 \end{aligned}$$

Assim,  $\frac{1}{\sqrt{\det(T+M)}}(T + M) \in \text{SU}(2)$  com  $(T + M)E_i(T + M)^{-1} = G_i, \forall i$  (das equações (7-3) e (7-8)), o que implica  $[E]_{\text{SU}(2)} = [G]_{\text{SU}(2)}$ .  $\square$

Dos casos 1) e 2) concluímos que os espaços de polígonos associados aos grupos  $\text{SU}(2)$  e  $\text{PGL}(2, \mathbf{R})$  se encontram imersos no espaço de polígonos associado a  $\text{SL}(2, \mathbf{C})$ .

## 8.1

## Dos fluxos de Kapovich–Millson para a álgebra de Kohno–Drinfeld

Em nossas considerações sobre os espaços de polígonos, definimos as funções quadráticas  $a_{ij} = B(e_i, e_j)$  simétricas com respeito a  $i, j$  ( $a_{ij} = a_{ji}$ ), as funções cúbicas  $v_{ijk} := B([e_i, e_j], e_k)$  antissimétricas com respeito a  $i, j, k$  ( $v_{ijk} = -v_{jik} = -v_{ikj}$ ), e obtivemos para colchetes de Poisson

$$\{a_{ij}, a_{kl}\} = 0, \quad (8-1)$$

$$\{a_{ij}, a_{ik}\} = v_{ijk}. \quad (8-2)$$

Usando antissimetricidade, podemos eliminar  $v_{ijk}$  e escrever um sistema de relações usando só os colchetes de Poisson entre as  $a'_{ij}$ s:

$$\{a_{ij}, a_{kl}\} = 0, \quad (8-3)$$

$$\{a_{ij}, a_{ik}\} = \{a_{jk}, a_{ji}\} = \{a_{ki}, a_{kj}\} \quad (8-4)$$

onde a última relação também pode ser escrita como  $\{a_{ij}, a_{jk} + a_{ki}\} = 0$  ou  $\{a_{ij}, a_{ij} + a_{ik} + a_{jk}\} = 0$ .

No caso do espaço de polígonos temos algumas relações lineares entre  $a_{ij}$ . Por exemplo, usando  $e_1 + \dots + e_n = 0$  obtemos  $a_{i1} + \dots + a_{in} = 0$  e similarmente  $v_{ij1} + \dots + v_{ijn} = 0$ . Mas o que é importante, é que as equações acima não dependem da escolha de um grupo de Lie, só dependem de  $n$ . Se estamos interessados em sistema de funções em involução, basta construir este sistema no espaço vetorial abstrato gerado pelos símbolos  $a_{ij}$  ( $a_{ji} = a_{ij}$ ) munido de uma forma antissimétrica com valores em um espaço vetorial que satisfaça equação (8-1).

Estas relações aparecem em trabalhos de Kohno [K1985] e Drinfeld [D1991] sobre a monodromia da conexão de Knizhnik–Zamolodchikov, associados e grupos quânticos.

Dado um número natural  $n$ , a álgebra de Kohno–Drinfeld é definida pelos

geradores  $t_{ij} = t_{ji}$ , para  $1 \leq i \neq j \leq n$  e pelas relações

$$[t_{ij}, t_{kl}] = 0 \tag{8-5}$$

$$[t_{ij}, t_{ij} + t_{jk} + t_{ki}] = 0 \tag{8-6}$$

para  $i, j, k, l$  distintos. Denotamos a álgebra associativa por  $T_n$  e a sua álgebra de Lie por  $\mathfrak{t}_n = \text{lie}T_n$ .

A álgebra de Kohno–Drinfeld é graduada, com graus de  $t_{ij}$  iguais a 1. Da definição e das relações, obtemos

**Proposição 8.1.** *Seja  $\mathfrak{g}$  uma álgebra de Lie munida de uma forma invariante não degenerada  $B$ . Existe um único homomorfismo de álgebras de Lie*

$$G_{\mathfrak{g}} : (\mathfrak{t}_n, [,]) \longrightarrow (\mathbf{C}[\mathfrak{g}^*]^{\otimes n}, \{, \})$$

tal que  $G_{\mathfrak{g}}(t_{ij}) = a_{ij}$ , onde  $a_{ij} = B(e_i, e_j)$  são as funções definidas na proposição 6.1,  $\mathfrak{t}_n$  é a álgebra de Kohno–Drinfeld, e no lado direito consideramos a álgebra de polinômios munidos com o colchete de Poisson dado para geradores lineares por  $\{X, Y\} = [X, Y]$ .

**Corolário 8.2.** *Sejam  $y_1, \dots, y_N$  elementos em  $\mathfrak{t}_n$  que comutam entre si. Então  $G_{\mathfrak{g}}y_1, \dots, G_{\mathfrak{g}}y_N$  é um sistema de polinômios em involução em  $\mathfrak{g}^* \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}^*$ .*

## 8.2

### O grupo simétrico e o morfismo de Gaudin

Gaudin [G1976] explica como construir sistemas de polinômios quadráticos em involução baseado nos sistemas de elementos comutantes em anel do grupo simétrico. Em linguagem moderna, podemos interpretar o método de Gaudin como a construção de um morfismo entre a álgebra de Kohno–Drinfeld e o anel do grupo simétrico, tal que restrito aos elementos de grau pequeno ele seja um isomorfismo.

Seja  $S_n$  o grupo simétrico,  $i, j, k, l \in \{1, \dots, n\}$  índices distintos,  $(ij) = (ji)$  uma transposição e  $(ijk) = (jki) = (kij)$  um 3-ciclo (também  $(ikj) = (kji) = (jik) = (ijk)^{-1}$ ). No grupo simétrico temos as relações

$$(ij)(kl) = (kl)(ij), \tag{8-7}$$

$$(ij)(ik) = (ikj). \tag{8-8}$$

Então no anel do grupo simétrico temos

$$[(ij), (kl)] = 0, \tag{8-9}$$

$$[(ij), (ik)] = (ikj) - (ijk). \tag{8-10}$$

As equações (8-9) e (8-10) são parecidas com as equações (8-1) e (8-2), mas com elementos antissimétricos  $(ikj) - (ijk)$  em vez de volumes  $v_{ijk}$ . Da mesma forma, podemos eliminar estes elementos e deduzir das equações (8-9) e (8-10) as relações

$$[(ij), (kl)] = 0, \quad (8-11)$$

$$[(ij), (ik)] = [(jk), (ji)]. \quad (8-12)$$

**Proposição 8.3** (Morfismo de Gaudin). *Seja  $S_n$  o grupo simétrico,  $\mathbf{C}[S_n]$  seu anel de grupo e sua álgebra de Lie  $\mathfrak{s}_n := \text{lie}(\mathbf{C}[S_n])$ . Existe um único morfismo de álgebras associativas (resp. de álgebras de Lie)*

$$G : T_n \longrightarrow \mathbf{C}[S_n]$$

$$G : \mathfrak{t}_n \longrightarrow \mathfrak{s}_n$$

tal que  $G(t_{ij}) = (ij)$ , onde  $(ij)$  é o vetor da base que representa a transposição  $(ij) \in S_n$ . Chamamos  $G$  o morfismo de Gaudin ou a representação de Gaudin.

**Corolário 8.4.** *Sejam  $y_1, \dots, y_N \in \mathfrak{t}_n$  elementos que comutam entre si. Então  $Gy_1, \dots, Gy_N \in \mathbf{C}[S_n]$  (resp.  $\mathfrak{s}_n$ ) que também comutam entre si.*

**Proposição 8.5.** *O morfismo de Gaudin  $G : \mathfrak{t}_n \rightarrow \mathfrak{s}_n$  restrito às componentes graduadas de graus 1 e 2 é um isomorfismo sobre sua imagem:*

$$G : \mathfrak{t}_n^{(1)} \oplus \mathfrak{t}_n^{(2)} \simeq \bigoplus_{i < j} \mathbf{C}(ij) \bigoplus \bigoplus_{i < j < k} \mathbf{C}((ikj) - (ijk)) \quad (8-13)$$

*Demonstração.* Por sua definição, a álgebra de Lie  $\mathfrak{t}_n$  é graduada, gerada pelos elementos de grau 1 com as relações de grau 2 tais que  $t_{ij}$  ( $i < j$ ) é uma base de  $\mathfrak{t}_n^{(1)}$  e  $[t_{ij}, t_{ik}]$  ( $i < j < k$ ) é uma base de  $\mathfrak{t}_n^{(2)}$ . Pela definição do morfismo de Gaudin,  $G(t_{ij}) = (ij)$  e  $G([t_{ij}, t_{ik}]) = (ikj) - (ijk)$ .  $\square$

Usando a proposição 8.5, podemos inverter parcialmente o corolário 8.4 no caso de combinações de transposições, resp. elementos de grau 1 (resp. funções quadráticas).

**Corolário 8.6** (Método de Gaudin). *Sejam  $\sigma_1, \dots, \sigma_N, C_k^{ij} \in \mathbf{C}$  e*

$$\sigma_k = \sum_{i < j} C_k^{ij} \in \mathfrak{s}_n \quad (8-14)$$

um sistema de combinações lineares de transposições que comutam entre si,

$$[\sigma_k, \sigma_l] = 0.$$

Então o sistema de elementos de grau 1 na álgebra de Kohn–Drinfeld

$$\tau_k = "G^{-1}\sigma_l'' := \sum_{i < j} C_k^{ij} t_{ij} \in \mathfrak{t}_n \tag{8-15}$$

é um sistema de elementos que comutam entre si.

Os corolários 8.2 e 8.6 implicam

**Corolário 8.7.** *Sejam  $C_k^{ij}$  como no corolário 8.6 e  $\mathfrak{g}, B$  como no corolário 8.2. Então  $\sum_{i < j} C_k^{ij} B(e_i, e_j)$  é um sistema de polinômios quadráticos  $G$ -invariantes em  $\mathfrak{g}^* \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}^*$  em involução com respeito ao colchete de Poisson.*

Pelos resultados desta seção, os problemas de construir sistemas integráveis (ou sistemas de elementos que comutam) no espaço de combinações lineares de  $a_{ij} = B(e_i, e_j) \in S(\mathfrak{g})^{\otimes n}$  ou  $t_{ij} \in \mathfrak{t}_n$  ou  $(ij) \in \mathfrak{s}_n$ ,  $(ij) \in \mathbf{C}[S_n]$  são equivalentes.

### 8.3

#### Os elementos de Gaudin e o modelo de Gaudin

A cada  $n$ -tupla  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{C}^n$  de números distintos associamos o conjunto de elementos da forma

$$H_k(x) = \sum_{l \neq k}^n \frac{t_{kl}}{x_k - x_l} \in T_n \text{ ou } \mathfrak{t}_n, \tag{8-16}$$

os os elementos de Gaudin. Analogamente, consideramos suas imagens

$$GH_k(x) = \sum_{l \neq k}^n \frac{(kj)}{x_k - x_l}, \tag{8-17}$$

em  $\mathbf{C}[S_n]$  (ou  $\mathfrak{s}_n$ ) com respeito ao morfismo de Gaudin.

**Observação:** ([ER1996]) Para  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2)$ , a definição de elementos de Gaudin remonta a Garnier ([G1919]).

**Lema 8.8** ([G1976]). *Para  $x$  fixo, os elementos  $H_k(x)$  comutam entre si,  $[H_i, H_j] = 0$  para  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ .*

Lema 8.8 e corolários 8.2 e 8.6 implicam

**Corolário 8.9.** *Para qualquer par  $\mathfrak{g}, B$  de uma álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  e uma forma invariante não degenerada  $B$  em  $\mathfrak{g}$ , as funções  $\sum_{l \neq k}^n \frac{B(e_k, e_l)}{x_k - x_l}$  formam um sistema de funções em involução no espaço de  $\mathfrak{g}$ -polígonos.*

## 8.4

## Os elementos de Young–Jucys–Murphy

Referências para essa seção são [J1971, J1974, M1981] e [OV2005].

Definimos os *elementos de Young–Jucys–Murphy* em  $\mathbf{C}[S_n]$  (ou  $\mathfrak{s}_n$ ) por

$$J_k := \sum_{i=1}^{k-1} (ik). \quad (8-18)$$

**Teorema 8.10** (Young, Jucys, Murphy [J1971, M1981]). *Os  $J_k$ 's comutam, i.e.  $[J_k, J_l] = 0$  para todo  $k, l$ .*

A subálgebra comutativa em  $\mathbf{C}[S_n]$  gerada pelos elementos de Young–Jucys–Murphy também é conhecida como *subálgebra de Gelfand–Cetlin* (veja [OV2005]). Teorema 8.10 e corolário 8.6 implicam

**Corolário 8.11.** *Os elementos da álgebra de Kohno–Drinfeld*

$${}^{\prime\prime}G^{-1}J_k = t_{1k} + t_{2k} + t_{3k} + \cdots + t_{(k-1)k}$$

*comutam entre si.*

Usando o fato que  $G_{\mathfrak{g}}^B G^{-1}J_k = f_{k-1}$  e o corolário 8.2 obtemos uma demonstração independente de que as hamiltonianas de Kapovich–Millson estão em involução. O argumento usa somente o teorema de Jucys [J1971] e o método de Gaudin [G1976].

Ainda usaremos “Kapovich–Millson” para denotar estes sistemas de Young–Jucys–Murphy–Kapovich–Millson–Ballestreros–Corsetti–Ragnisco–Karimipour.

## 9.1

## Fibrados parabólicos

Começamos introduzindo o conceito de *fibrados parabólicos* introduzido por Mehta e Seshadri em [MS1980].

Fixamos um subconjunto  $\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbf{CP}^1$  de  $n$  pontos distintos aos quais associamos um divisor  $D = x_1 + \dots + x_n$ . Seja  $E$  um fibrado holomorfo sobre  $\mathbf{CP}^1$  de posto 2. Uma estrutura parabólica em  $D$  sobre  $E$  é uma família de bandeiras

$$E_{x_i} = E_{x_i,1} \supset E_{x_i,2} \supset \{0\}$$

e valores

$$\beta_1, \beta_2$$

chamados *pesos parabólicos* tal que  $0 < \beta_1(x_i) < \beta_2(x_i) < 1$ , para todo  $x_i \in D$ .

Um sub-fibrado parabólico  $E'$  de  $E$  (fibrado parabólico) é um fibrado com estrutura parabólica no mesmo divisor  $D = D'$ , que é um sub-fibrado de  $E$  e onde para cada  $x \in D$  e  $j = 1, 2$  temos que  $\beta'_i(x) = \beta_j(x)$  quando  $i$  é o maior inteiro tal que  $E'_{x_i,j} \subset E_{x_i}$ .

O grau  $pdeg(E)$  e a *inclinação* (slope)  $\mu(E)$  parabólicos do fibrado  $E$  são definidos por

$$pdeg(E) := deg(E) + \sum_{i=1}^n (\beta_1(x_i) + \beta_2(x_i))$$

e

$$\mu(E) := \frac{pdeg(E)}{rank(E)}.$$

Um fibrado parabólico  $E$  sobre  $\mathbf{CP}^1$  é estável (semi-estável) se  $\mu(L) < \mu(E)$  ( $\mu(L) \leq \mu(E)$ ) para todo  $L$  sub-fibrado parabólico de  $E$ . Definimos

$$\mathcal{M}(\beta) = \mathcal{M}(\beta; (\mathbf{CP}^1, D))$$

:= espaço de módulos de fibrados parabólicos estáveis sobre  $\mathbf{CP}^1$  com posto 2 e grau 0, e tais que  $E \simeq \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}$  é holomorficamente trivial

$\mathcal{M}(\beta)$  é *diferenciável* se e só se, as condições de estabilidade e de semi-

estabilidade são equivalentes. A diferenciabilidade de  $\mathcal{M}$  é equivalente ao fato que

$$\sum_{i \in I} (\beta_2(x_i) - \beta_1(x_i)) - \sum_{j \notin I} (\beta_2(x_j) - \beta_1(x_j)) \neq 0, \quad (9-1)$$

para todo  $I \subset \{1, \dots, n\}$ .

### 9.1.1

#### Campos de Higgs parabólicos

Seja  $E$  um fibrado parabólico. O *fibrado de endomorfismos fortemente parabólicos* de  $E$ ,  $SPEnd(E)$ , é o subfibrado de  $End(E)$  cujas seções são

$$SPEnd(E) := \left\{ f : E \rightarrow E \text{ morfismo} : f(E_{x_i,j}) \subseteq E_{x_{i,j+1}}, \right\}.$$

O *fibrado log-canônico*  $\Omega_{\mathbf{CP}^1(D)}$  é aquele cujas seções são as *formas logarítmicas*, i.e. as 1-formas meromorfas  $f(x)dx$ , que são holomorfas fora de  $D$  e tendo no máximo polos simples em  $D$ .

Um *campo de Higgs* para um fibrado parabólico  $E$  é uma seção  $\phi \in H^0(\mathbf{CP}^1, SPEnd(E) \otimes \Omega_{\mathbf{CP}^1(D)})$ .

Às vezes é mais conveniente interpretar o campo de Higgs como uma matriz com valores em formas logarítmicas, às vezes pensamos em ele como uma forma logarítmica com valor em matrizes.

Um *fibrado parabólico de Higgs* é um par  $(E, \phi)$  consistindo de um fibrado parabólico  $E$  e um campo de Higgs  $\phi$  para  $E$ . Seja

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\beta) &= \mathcal{H}(\beta; (\mathbf{CP}^1, D)) \\ &:= \text{espaço de módulos de fibrados parabólicos de Higgs } \beta\text{-estáveis} \\ &\quad \text{sobre } (\mathbf{CP}^1, D) \text{ com posto 2, grau 0, } E \text{ holomorficamente} \\ &\quad \text{trivial, } \text{Tr } \phi = 0 \text{ e } \det \text{Res}_{x_i} \phi \text{ fixos.} \end{aligned}$$

**Observação:** Se o fibrado parabólico  $E$  é (semi)estável, o par  $(E, \phi)$  será (semi)estável para qualquer campo de Higgs  $\phi$ . O espaço  $\mathcal{H}(\beta)$  é uma compactificação parcial do espaço cotangente  $T^*\mathcal{M}(\beta)$ .

Nas subseções seguintes damos uma breve descrição (que pode ser encontrada no artigo de Hitchin [H1987-2] e no livro [BBT2003]) da construção do espaço de campos de Higgs usando redução simplética com respeito ao grupo de calibração, empregada para definir o sistema integrável de Hitchin. Vamos ver que o sistema integrável de Gaudin é um exemplo do sistema de Hitchin.

### 9.1.2

#### Redução simplética do espaço de conexões

Como antes, seja  $C$  uma superfície de Riemann fechada de gênero  $g$ ,  $\{x_1, \dots, x_n\} \in C$  e  $G$  um grupo de Lie semisimples com álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ .

Para cada  $x_k$ , associamos um elemento  $u_k \in \mathfrak{g} \equiv \mathfrak{g}^*$ . Definimos o conjunto  $\mathcal{A}$  das *conexões holomorfas* no fibrado vetorial com grupo estrutural  $G$  que localmente são da forma  $A = A_{\bar{z}}(z, \bar{z})d\bar{z}$ . Definimos também o *grupo de calibrações* como o conjunto de funções de  $C$  em  $G$  da forma  $h(z, \bar{z})$ .

A ação do grupo das calibrações  $\mathcal{G}$  no espaço de conexões  $\mathcal{A}$  é dada por  $h \cdot A := h^{-1}Ah + h^{-1}\bar{\partial}h$ , e assim o espaço  $\mathcal{N} := \mathcal{A}/\mathcal{G}$  é o espaço de módulos das conexões holomorfas.

Se  $\phi$  é um vector cotangente em  $A \in \mathcal{A}$ , então  $\phi = \phi_z(z, \bar{z})dz$ , pois um ponto no espaço tangente de  $A$  é da forma  $X = X_{\bar{z}}(z, \bar{z})d\bar{z}$ . A forma bilinear

$$(A(z, \bar{z})dz, B(z, \bar{z})d\bar{z}) := \int_C \text{Tr}(A(z, \bar{z})B(z, \bar{z}))dzd\bar{z}$$

é não degenerada: para  $\alpha = A(z, \bar{z})dz$ , existe  $\bar{\alpha} = \overline{A(z, \bar{z})}d\bar{z}$  tal que  $(\alpha, \bar{\alpha}) = \int_C |A(z, \bar{z})|^2 dzd\bar{z} \geq 0$  e é  $> 0$  se existe algum  $z \in C$  tal que  $A(z, \bar{z}) \neq 0$ .

Então dita forma bilinear induz uma estrutura simplética sobre o espaço total do fibrado cotangente  $T^*\mathcal{A}$  mediante a 2-forma simplética  $\omega = \int_S \text{Tr}(\delta\phi_z \wedge \delta A_{\bar{z}})dzd\bar{z}$ . Para  $(A, \phi) \in T^*\mathcal{A}$ , definamos a ação de  $\mathcal{G}$  sobre o espaço cotangente por  $h \cdot \phi := h^{-1}\phi h$ . A variedade simplética com a ação hamiltoniana  $\mathcal{G} \curvearrowright T^*\mathcal{A}$  tem por mapa momento

$$\mu(A, \phi) = \bar{\partial}_A \phi \equiv \bar{\partial}\phi + A \wedge \phi + \phi \wedge A = 2i\pi \sum_k u_k \delta_{x_k},$$

onde  $\delta_{x_k}$  é a medida de Dirac em  $x_k$  (representada localmente por  $\delta(z - x_k)dzd\bar{z}$ ). O estabilizador de  $2i\pi \sum_k u_k \delta_{x_k}$  é o subgrupo  $\mathcal{G}_{z,u} = \{g \in \mathcal{G} : h(x_k) \in G_k\}$ , onde  $G_k$  é o estabilizador de  $u_k$ . Assim obtemos a variedade quociente

$$\mathcal{P}_{z,u} := \mu^{-1}(2i\pi \sum_k u_k \delta_{x_k})/\mathcal{G}_{z,u}.$$

A equação  $\bar{\partial}_A \phi = 2i\pi \sum_k u_k \delta_{x_k}$  descreve o comportamento de  $\phi$  ao redor dos pontos  $x_k$ . Portanto numa vizinhança de  $x_k$  temos que  $\bar{\partial}(g_k \phi g_k^{-1}) = 2i\pi \delta_{x_k}$ , e na mesma vizinhança  $g_k \phi g_k^{-1} = \frac{u_k}{z - x_k}$ .

## 9.2

### O sistema integrável de Hitchin

Dada uma superfície de Riemann fechada  $C$  e grupo de Lie complexo  $G$ , Hitchin [H1987-2] definiu a aplicação holomorfa (polinomial), chamada *mapa de Hitchin*, do espaço de módulos de fibrados de Higgs para um espaço vetorial (a *base de Hitchin*). Ao par  $(E, \phi)$ , ele associa o polinômio característico da matriz  $\phi$ ,<sup>1</sup> considerado como uma seção da soma dos *fibrados pluricanônicos* que são potências do fibrado log-canônico: cada polinômio invariante de grau  $d$  avaliado em  $\phi$  é uma seção do fibrado  $\Omega_C^{\otimes d}$ .

No caso especial de  $G = \text{SL}(2)$  ([H1987-1] para  $\text{deg } E$  ímpar) temos  $\det(t - \phi) = t^2 + \det \phi$ , e os polinômios invariantes têm só um gerador, que pode ser escolhido como  $\det \phi$  ou  $\text{Tr } \phi^2$ , e a base de Hitchin é o espaço vetorial  $\Gamma(C, \Omega_C^{\otimes 2})$  dos diferenciais quadráticos, i.e., seções holomorfas do *fibrado bicanônico* definido como  $\Omega_C^{\otimes 2}$ , que são dados por  $f(z)(dz)^{\otimes 2}$  em coordenada local  $z$  da  $C$ .

Também podemos considerar o mesmo mapa dado pelo polinômio característico para fibrados de Higgs parabólicos ([ER1996, HSW2013, BBT2003]). O especial neste caso é que os polos de ordem maximal se cancelam e a base de Hitchin é  $\Gamma(C, \Omega^d((d-1)D))$ .

Se  $(E, \phi)$  é o fibrado de Higgs parabólico de posto 2 sobre  $(C = \mathbf{CP}^1, D = x_1 + \dots + x_n)$ , o *mapa de Hitchin* é dado por

$$H : (E, \phi) \mapsto \det \phi \in \Gamma(\mathbf{CP}^1, \Omega^{\otimes 2}(D)).$$

Neste caso a base de Hitchin pode ser identificada com o espaço de polinômios de grau no máximo  $n - 4$ , de dimensão  $n - 3$ .

Mais geralmente, dado um polinômio invariante  $P$  de grau  $m$  sobre  $\mathfrak{g}$ , i.e  $P(h^{-1}Xh) = P(X)$ , e.g.  $P(X) = \text{Tr } X^m$ , o conjunto desses polinômios é gerado livremente por polinômios homogêneos  $P_i$ ,  $i = 1, \dots, \text{rank}(G)$ . Assim podemos escrever  $P(\phi) = \sum_j H_{P,j}(\phi)\omega_j^{(m)}$ , onde  $\omega_j^{(m)}$  é uma seção da forma  $\omega(z, \bar{z})dz^{\otimes m}$ .

As funções  $H_{P_m,j}$  associadas aos polinômios primitivos  $P_m$ ,  $m = 1, \dots, \text{rank}(G)$  (que geram o anel de polinômios invariantes) definem um sistema integrável sobre  $\mathcal{P}_{z,u}$ , o *sistema integrável de Hitchin*.

**Teorema 9.1** (Sistema integrável de Hitchin [H1987-2]). ([HSW2013, ER1996, BBT2003, FR2015]) *O mapa de Hitchin é um sistema integrável algébrico. Para quaisquer duas funções holomorfas  $f_i, f_j$  na base de Hitchin, as*

<sup>1</sup>Para subgrupos distintos de GL e SL precisamos considerar uma base no anel dos polinômios invariantes.

composições  $f_i \circ H$  e  $f_j \circ H$  são funções holomorfas no  $\mathcal{H}(\beta)$  em involução. A aplicação para a base é sobrejetiva, e a dimensão da base é metade da dimensão do espaço.

### 9.2.1

#### O sistema de Gaudin é o sistema de Hitchin sobre a esfera de Riemann

Como caso particular de um sistema integrável de Hitchin, obtemos o sistema integrável de Gaudin, ao considerar a esfera de Riemann com  $n$  pontos  $\{x_1, \dots, x_n\}$  escolhidos na esfera. A forma  $A = h^{-1}\bar{\partial}H$  e  $h(z, \bar{z})$  é uma seção global. A condição  $\bar{\partial}_A\phi = 2i\pi \sum_k u_k \delta_{x_k}$  implica que  $h\phi h^{-1}$  tem um polo simples em  $z = x_k$  com resíduo  $h(x_k)u_k h^{-1}(x_k)$ . Assim  $\tilde{\phi} := h\phi h^{-1} = \sum_k \frac{\tilde{u}_k dz}{z-x_k}$ , com  $\tilde{u}_k = h(x_k)u_k h^{-1}(x_k)$ , onde também devemos ter que a soma dos resíduos é  $\sum_k \tilde{u}_k = 0$ .

Seja  $G$  a ação coadjunta e  $\mathcal{O}_k$  a órbita de  $\bar{u}_k$ , para todo  $k$ . Defina  $P_{z,u} = \{(\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_n) \in \prod_k \mathcal{O}_k : \sum_k \bar{u}_k = 0\}/G$ . Para o polinômio invariante  $P(\phi) = \text{Tr}(\phi^2)$ , obtemos

$$P(\phi) = \sum_{k,l} \frac{\text{Tr}(\bar{u}_k \bar{u}_l)}{(z-x_k)(z-x_l)} = \sum_k \frac{\text{Tr}(\bar{u}_k^2)}{(z-x_k)^2} + \frac{H_k}{z-x_k}, \quad (9-2)$$

com

$$H_k = \sum_{l \neq k} \frac{\text{Tr}(\tilde{u}_k \tilde{u}_l)}{x_k - x_l}. \quad (9-3)$$

As hamiltonianas de Gaudin  $H_k$  estão em involução. A construção original foi descrita no capítulo 8.

### 9.3

#### (Hiper-)polígonos e fibrados parabólicos (de Higgs)

O teorema de Godinho–Mandini estabelece um isomorfismo entre o espaço de hiperpolígonos com  $n$  lados definido na seção 4.3 e um subconjunto Zariski-aberto no espaço de módulos de fibrados parabólicos de Higgs sobre esfera de Riemann  $\mathbf{CP}^1$  cujas classes dos resíduos são fixas e nilpotentes. Em contraste com o caso  $\mathfrak{su}(2)$  em  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ , há uma órbita não nula nilpotente: temos um espaço não trivial de polígonos complexos com “comprimentos” de todas as arestas igual ao 0.

**Teorema 9.2** (Th. 3.1, [GM2013]). *Dado um divisor  $D = \{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathbf{CP}^1$  com respeito a  $\mathcal{H}(\beta)$ . O espaço de hiperpolígonos  $X(r)$  é isomorfo ao espaço de módulos de fibrados parabólicos de Higgs  $\beta$ -estáveis  $\mathcal{H}(\beta)$  sempre que  $r_i = \beta_2(x_i) - \beta_1(x_i)$ , para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .*

*Demonstração.* (Esboço) Começamos definindo

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : \quad X(r) &\longrightarrow \mathcal{H}(\beta) \\ [(p, q)]_{r \text{ estável}} &\longmapsto [(E_{(p,q)}, \phi_{(p,q)})], \end{aligned}$$

onde  $E_{(p,q)} = \mathbf{CP}^1 \times \mathbf{C}^2$  tem estrutura parabólica  $\mathbf{C}^2 \supset \langle q_i \rangle \supset \{0\}$  e  $0 \leq \beta_1(x_i) < \beta_2(x_i) < 1$ , para todo  $x_i \in D$  e

$$\phi_{(p,q)} \in H^0(\mathbf{CP}^1, SP\text{End}(E_{(p,q)}) \otimes \Omega_{\mathbf{CP}^1}(D))$$

é o campo de Higgs unicamente determinado por

$$\text{Res}_{x_i} \phi := q_i p_i = \begin{pmatrix} c_i \\ d_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_i & b_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_i c_i & b_i c_i \\ a_i d_i & b_i d_i \end{pmatrix}.$$

A prova se faz em passos. Antes, prova-se que  $\mathcal{J}$  está bem definida, i.e.,

- $\phi_{(p,q)}$  está definido unicamente.
- $E_{(p,q)}$  é um fibrado parabólico de Higgs. E,
- $\mathcal{J}$  é independente da escolha do representante  $[(p, q)]_{r \text{ estável}}$ .

Para

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \quad \mathcal{H}(\beta) &\longrightarrow X(r) \\ [(E, \phi)] &\longmapsto [(p, q)]_{r \text{ estável}}, \end{aligned}$$

tal que para cada  $x_i \in D$ , sejam  $q_i = (c_i, d_i)^t$  um gerador da bandeira  $E_{x_i,2}$  e  $p_i = (a_i, b_i) := \frac{r_{12}^i - r_{21}^i}{c_i^2 + d_i^2} (-d_i, c_i)$  onde  $\text{Res}_{x_i} \phi := q_i p_i = \begin{pmatrix} r_{11}^i & r_{12}^i \\ r_{21}^i & r_{22}^i \end{pmatrix}$ . Prova-se então que

- $\mathcal{F}$  está bem definida e  $[(p, q)]$  é  $r$ -estável.
- $\mathcal{F}$  não depende da escolha de geradores da bandeira  $E_{x_i,2}$  nem do representante da classes  $(E, \phi)$ .
- $\mathcal{F} = \mathcal{J}^{-1}$

□

**Observação:** Outra construção do espaço de polígonos como o espaço de módulos de representações de uma aljava (quiver) é [FR2015].

### 9.3.1

#### O mapa de Hitchin em termos de hiperpolígonos

Na prova do teorema 9.2, associamos ao hiperpolígono  $[p, q]_{r \text{ estável}} \in X(r)$  o campo parabólico de Higgs sobre  $(\mathbf{CP}^1, D = x_1 + \cdots + x_n)$  dado por

$$\phi(z) = \sum_{i=1}^n \frac{\phi_i dz}{z - x_i},$$

onde  $\phi_i = p_i q_i$ .

O mapa de Hitchin em termos de  $p_i, q_i$  é dado por

$$[p, q] \mapsto \text{Tr} \left( \sum_{i=1}^n \frac{p_i q_i}{z - x_i} \right)^2. \quad (9-4)$$

**Corolário 9.3** (Sistema de Hitchin no espaço de hiperpolígonos, [FR2015]).

*A aplicação dada na equação (9-4) é um sistema integrável no  $X(r)$ .*

Guillemin e Sternberg [GS1983] introduziram o sistema integrável no espaço de bandeiras parciais que eles chamam *o sistema de Gelfand–Cetlin*. O nome se deve ao fato que a base das funções do sistema para bandeiras completas está em correspondência 1-1 com os elementos da base de Gelfand–Cetlin da representação de álgebra de Lie de  $U(n)$  [GC1950]. Uma demonstração moderna da integrabilidade do sistema de Gelfand–Cetlin se encontra em [PY2020], e uma reformulação usando pares de Lax em [CL2021].

Para construir o sistema de Gelfand–Cetlin, escolhamos uma cadeia de subálgebras associada a uma bandeira

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}(n) \supset \mathfrak{u}(n-1) \supset \cdots \supset \mathfrak{u}(1)$$

e consideremos a subálgebra de  $U(\mathfrak{g})$  gerada por todos os centros  $Z(U(\mathfrak{u}(k)))$ , que é uma subálgebra comutativa em  $U(\mathfrak{u}(n))$ . Então o sistema de Gelfand–Cetlin é dado por um base (de Gelfand–Cetlin) da sua álgebra graduada associada em  $S(\mathfrak{g}) = \mathbf{C}[\mathfrak{g}^*]$ .

Hausmann e Knutson [HK1997] provaram que a redução simplética do sistema de Gelfand–Cetlin na Grassmanniana de planos  $Gr(2, n)$  induz o sistema de Kapovich–Millson para a triangulação leque (grafo dual lagarta). Nohara e Ueda [NU2014] generalizam o sistema de Gelfand–Cetlin para qualquer triangulação e provam o análogo do isomorfismo de Hausmann–Knutson. Aqui damos uma ideia da construção dada por Nohara e Ueda:

Fixamos uma triangulação de um  $n$ -ágono em  $\mathbf{R}^3$  com lados  $e_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), i. e. fixamos diagonais  $d_\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, n-3$ ) que não se cruzam.

A cada diagonal  $d_\alpha = \sum_{i \in I_\alpha \subset \{1, \dots, n\}} e_i$ , associamos o subgrupo unitário  $U_\alpha := U(|I_\alpha|) \subset U(n)$ . Considere as ações  $U(1) \curvearrowright Gr(2, n)$  (ver seção 4.1.2) e  $U_\alpha \curvearrowright Gr(2, n)$  (que é a restrição para  $U_\alpha$  da ação produto pela esquerda de  $U(n)$  sobre  $Gr(2, n)$ ), com mapas momentos

$$\begin{aligned} \psi_{e_i} : Gr(2, n) &\longrightarrow \mathbf{R} \\ (z, w) &\longmapsto \frac{|z_i|^2 + |w_i|^2}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mu_{U_\alpha} : Gr(2, n) &\longrightarrow \sqrt{-1}\mathfrak{u}(I_\alpha) \\ (z, w) &\longmapsto \left( \frac{z_i \bar{z}_j + w_i \bar{w}_j}{2} \right)_{i, j \in I_\alpha}, \end{aligned}$$

onde o posto da matriz  $\mu_{U_\alpha}(z, w)$  é  $\leq 2$ . Sejam  $\lambda_{\alpha,1}(z, w) \geq \lambda_{\alpha,2}(z, w) \geq 0$  os autovalores de  $\mu_{U_\alpha}(z, w)$ .

Nohara e Ueda provam que as funções  $\{\lambda_{\alpha,j}, \psi_{e_i}\}_{i \in \{1, \dots, n\}, \alpha \in \{1, \dots, n-3\}, j=1,2}$  estão em involução. Este conjunto tem cardinalidade  $3n - 6$  e não formam um sistema integrável para  $Gr(2, n)$ , já que  $\frac{1}{2} \dim(Gr(2, n)) = 2n - 4$ .

Defina  $\psi_{d_\alpha} := \lambda_{\alpha,2}$ .

**Proposição 10.1.** ([NU2014, Prop 4.6.]) *As funções  $\psi_{d_1}, \psi_{d_2}, \dots, \psi_{d_{n-3}}$  induzem o sistema integrável de Kapovich–Millson sobre o espaço de polígonos através da redução simplética do Teorema 4.1.*

*Demonstração.* Os autovalores não nulos dos produtos  $AB$  e  $BA$  de duas matrizes são iguais. Assim, os autovalores  $\lambda_{\alpha,1}$  e  $\lambda_{\alpha,2}$  de

$$\mu_{U_\alpha}(z, w) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} z_i & w_i \end{pmatrix}_{i \in I_\alpha} \begin{pmatrix} \bar{z}_j \\ \bar{w}_j \end{pmatrix}_{j \in I_\alpha} \in \sqrt{-1}\mathfrak{u}(|I_\alpha|)$$

coincidem com os autovalores de

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{z}_i \\ \bar{w}_i \end{pmatrix}_{i \in I_\alpha} \begin{pmatrix} z_i & w_i \end{pmatrix}_{i \in I_\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{i \in I_\alpha} \begin{pmatrix} |z_i|^2 & \bar{z}_i w_i \\ z_i \bar{w}_i & |w_i|^2 \end{pmatrix} \in \sqrt{-1}\mathfrak{su}(2).$$

A ação produto de  $SU(2) \curvearrowright \mathbf{C}^2$  tem mapa momento

$$\mu_{SU(2)}(z, w) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} |z|^2 - |w|^2 & 2\bar{z}w \\ z\bar{w} & |w|^2 - |z|^2 \end{pmatrix} \in \sqrt{-1}\mathfrak{su}(2).$$

Mediante a identificação de  $\mathfrak{su}(2)$  com  $\mathbf{R}^3$ , obtemos que  $\mu_{SU(2)}(z_i, w_i) = e_i$ , o  $i$ -ésimo lado do polígono, para cada  $i = 1, \dots, n$ .

Assim

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \bar{z}_i \\ \bar{w}_i \end{pmatrix}_{i \in I_\alpha} \begin{pmatrix} z_i & w_i \end{pmatrix}_{i \in I_\alpha} = \sum_{i \in I_\alpha} \mu_{SU(2)}(z_i, w_i) + \frac{1}{4} \sum_{i \in I_\alpha} \begin{pmatrix} |z_i|^2 + |w_i|^2 & 0 \\ 0 & |z_i|^2 + |w_i|^2 \end{pmatrix},$$

onde o segundo termo é constante igual a  $\sum_{i \in I_\alpha} \text{diag}(r_i, r_i)$  ( $r_i$  é o comprimento do  $i$ -ésimo lado do polígono  $e_i$ ), e o primeiro termo é igual a  $\alpha$ -ésima diagonal e seus autovalores são  $l_\alpha$  e  $-l_\alpha$  onde  $l_\alpha$  é o comprimento da diagonal  $d_\alpha$ , i.e.  $l_\alpha$  é a integral do sistema de Kapovich–Millson.  $\square$



## 11

### Degenerações tóricas

Aqui apresentamos uma ideia geral de Nishinou–Nohara–Ueda [NNU2012] (desenvolvida em Harada–Kaveh [HK2015]) de como construir sistemas integráveis mediante degenerações tóricas, e a sua aplicação para variedades de bandeiras [NNU2010], as Grassmannianas de planos e os espaços de polígonos [NU2014], e os espaços de módulos de fibrados de posto 2 [BGM2020].

(Transporte simplético paralelo, [MS1998, pg. 266]) Seja  $\pi : M \rightarrow B$  uma fibração simplética com fibra  $(F, \omega_F)$ . Para cada  $x \in M$ , denotamos por  $Vert_x := \ker d\pi(x) = T_x F_{\pi(x)}$  a componente vertical do espaço tangente da fibra. Uma *conexão*  $\Gamma$  sobre  $\pi$  é um campo de subespaços horizontais  $Hor_x \subset T_x M$  tal que  $TM = Vert \oplus Hor$ . Assim, cada caminho  $\gamma : [0, 1] \rightarrow B$  determina um difeomorfismo  $\Phi_\gamma^t : F_{\gamma(0)} \rightarrow F_{\gamma(t)}$  que leva  $x_0 \in F_{\gamma(0)}$  para o ponto final  $x_t = \tilde{\gamma}(t) \in F_{\gamma(t)}$  do levantamento horizontal  $\tilde{\gamma} : [0, 1] \rightarrow M$  do caminho  $\gamma$  ( $\tilde{\gamma}'(t) \in Hor_{\tilde{\gamma}(t)}$ ) que começa em  $\tilde{\gamma}(0) = x_0$ . A coleção de difeomorfismos  $\{\Phi_\gamma^t\}_{t \in [0, 1]}$  é chamado um *transporte paralelo*. Um transporte paralelo é *simplético* se  $\Phi_\gamma^* \omega_{\gamma(t)} = \omega_{\gamma(0)}$  para cada  $t \in [0, 1]$ .

Seja  $(M, \omega)$  uma variedade simplética munida de uma estrutura complexa  $J$  compatível com  $\omega$  (i.e.  $\omega(v, Jv) > 0$  para todos os vetores tangenciais  $v \neq 0$ ) e uma função holomorfa  $\pi : M \rightarrow C$ , onde  $C$  é uma superfície de Riemann.

Consideramos as fibras  $M_t := \pi^{-1}(t)$  para cada  $t \in C$ . A restrição de  $J$  para  $M_t$  é uma estrutura complexa pois  $\pi$  é holomorfa.

Um ponto  $p \in M$  é um *ponto singular* da sua fibra  $M_{\pi(p)}$  se e só se  $p$  é um ponto crítico da função  $\pi$ .

**Proposição 11.1.** *A restrição de  $\omega$  para  $M_t$  é não degenerada em qualquer ponto de  $M_t$  que não é singular.*

*Demonstração.* O espaço tangente da fibra  $T_p M_t$  é um subespaço vetorial complexo no espaço tangente  $T_p M$  de  $M$ , i.e. se  $v \in T_p M_t$  então também  $Jv \in T_p M_t$ .

Dado um vetor  $v \in T_p M_t \setminus \{0\}$ , temos que  $Jv \in T_p M_t \setminus \{0\}$  tal que  $\omega(v, Jv) > 0$ . Assim  $\omega$  restrita para  $T_p M_t$  é não degenerada.  $\square$

O fato que  $\omega$  restrita para  $M_t$  é fechada é óbvio: o diferencial de De Rham  $d$  comuta com imagens inversas (pullbacks).

Assim, dado  $(M, \omega, J, \pi)$ , podemos definir uma família de variedades simpléticas  $(M_t, \omega_t, J_t)$  onde  $\omega_t$  e  $J_t$  são restrições.

O número de valores críticos tais que  $M_t$  é singular é finito. Denotamos esse conjunto finito como  $SingM_t$ . O conjunto de pontos regulares de  $M_t$  é  $M_t^{reg} := M_t \setminus SingM_t$ .

Tome um caminho  $\gamma : [0, 1] \rightarrow C$  tal que  $\gamma(u)$  não é um valor crítico para  $u \neq 1$ . Então cada fibra  $M_{\gamma(u)}$  não é singular. Denotemos a pré-imagem  $M_\gamma := \pi^{-1}(\gamma([0, 1]))$ . Se  $M$  tem dimensão real  $2n$ , então  $M_t$  tem dimensão  $2(n - 1)$ , mas  $M_\gamma$  tem dimensão  $2n - 1$ , que é ímpar, o que implica que a restrição  $\omega_\gamma$  de  $\omega$  para  $M_\gamma$  tem que ser degenerada, i.e. existe um vetor não nulo no núcleo  $L := \text{Ker}(\omega_\gamma)$ .

A interseção de  $\text{Ker}(\omega_\gamma)$  com  $T_p M_{\pi(p)}$  tem codimensão real 1 em  $\text{Ker}(\omega_\gamma)$  porque  $T_p M_{\pi(p)}$  tem codimensão real 1 em  $T_p M_\gamma$ . Assim, em cada ponto de  $M_\gamma$  que não é ponto crítico de  $\pi$ , o núcleo  $L$  não pode ter dimensão maior do que 1: qualquer elemento dessa interseção é um elemento do núcleo de  $\omega_t$  e já provamos que  $\omega_t$  é não degenerada em qualquer ponto não crítico.

Para o subconjunto aberto denso suave  $M'_\gamma \subset M_\gamma$  composto de todos os pontos que não são pontos críticos de  $\pi$  (equivalentemente, pontos não singulares das fibras), neste subconjunto temos um sub-fibrado  $L$  de posto real 1 no fibrado tangente. A restrição de  $d\pi$  com a inclusão de  $L$  é um isomorfismo  $d\pi \circ i : L_p \rightarrow T_{\pi(p)}C$ . Assim  $L$  é uma conexão para o fibrado  $M'_\gamma \rightarrow [0, 1]$ , e podemos considerar o transporte paralelo com respeito a ela.

Equivalentemente, podemos escolher o campo vetorial  $\frac{\partial}{\partial u}$  em  $[0, 1]$  e considerar o campo vetorial  $X_\gamma$ , a pré-imagem de  $\frac{\partial}{\partial u}$  com respeito aos isomorfismos entre  $L_p$  e  $T_{\pi(p)}C$ . O transporte simplético paralelo é o fluxo deste campo vetorial e gera simplectomorfismos entre os  $(M_t, \omega_t)$  quando os  $M_t$  são suaves.

Ele também gera simplectomorfismos com a parte não singular de  $M_1$ , i.e.  $M_1^{reg}$  e um conjunto aberto denso de cada  $M_t$ . O complemento deste conjunto é conhecido como *ciclo de desaparecimento* (vanishing cycle).

Temos um simplectomorfismo  $f_u$  entre  $M_u \setminus f_u^{-1}(SingM_1)$  e  $M_1 \setminus SingM_1$ . Assim, dado um sistema integrável  $g : M_1 \rightarrow \mathbf{R}^k$  e a restrição de  $f_u$  para o conjunto aberto denso  $M_u - f_u^{-1}(SingM_1)$ , podemos considerar a composição  $f_u \circ g : M_u \rightarrow \mathbf{R}^k$  que é um sistema integrável (ver fig. 11.1).

A vantagem desta construção é que, a partir de um sistema integrável em uma variedade degenerada, podemos deformar a variedade obtendo variedades suaves e sistemas integráveis para essas variedades.

Esta ideia de Nishinou–Nohara–Ueda [NNU2012] foi usada por eles mesmos em [NNU2010], por Nohara–Ueda em [NU2014] e por Belmans–Galkin–Mukhopadhyay em [BGM2020] para construir sistemas integráveis

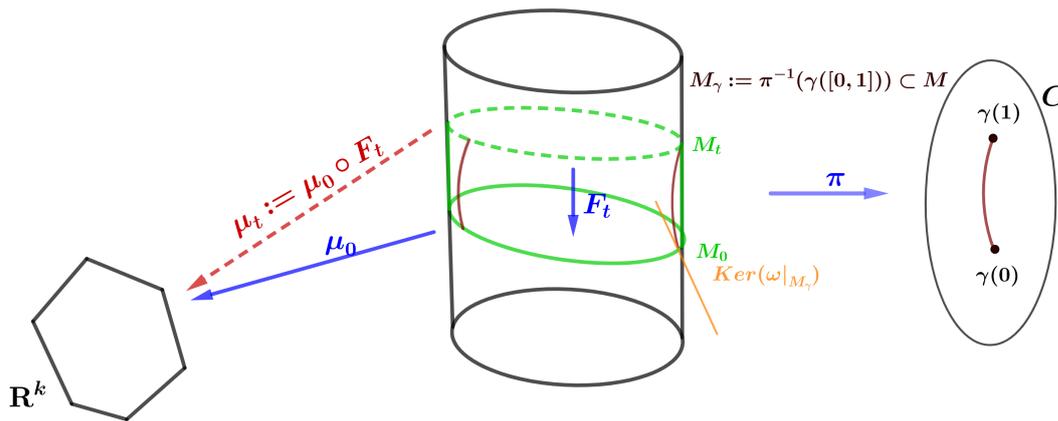


Figura 11.1: Interpretação geométrica da construção de um sistema integrável a partir de uma degeneração tórica

na variedade de bandeiras completas, Grassmannianas de planos, polígonos euclidianos, na variedade de módulos de fibrados parabólicos de posto 2 e em superfícies de Riemann (a variedade de polígonos esféricos, no caso de gênero 0), respectivamente.

Nishinou–Nohara–Ueda [NNU2010] constroem uma degeneração do sistema de Gelfand–Cetlin. Nohara–Ueda [NU2014] usam o fato que o espaço de polígonos é isomorfo à redução simplética da Grassmanniana  $Gr(2, n)/U(1)^n$  e que o sistema de Kapovich–Millson pode ser obtida como a redução simplética do sistema de Gelfand–Cetlin na Grassmanniana  $Gr(2, n)$ . Eles consideram degenerações tóricas da Grassmanniana construídas por Speyer e Sturmfels [SS2004], uma degeneração para cada triangulação de polígono e mostram que a degeneração da Grassmanniana pode ser feita de maneira equivariante com respeito a  $U(1)^n$ . As degenerações tóricas dos sistemas de Gelfand–Cetlin generalizadas induzem as degenerações tóricas dos sistemas de Kapovich–Millson.

Belmans, Galkin e Mukhopadhyay usam as degenerações tóricas das variedades de módulos de fibrados semiestáveis, construídas por Manon [M2012] usando a teoria de blocos conformes em teoria de campo conforme de Wess–Zumino–Novikov–Witten para o grupo  $SU(2)$ .

Esses sistemas integrais têm as mesmas imagens que os sistemas de Kapovich–Millson e Jeffrey–Weitsman respectivamente, mas não são isomorfos a eles.

Ao contrário do caso de sistemas de Nohara–Ueda, que são degenerações tóricas dos sistemas de Kapovich–Millson, ainda não sabemos se os sistemas considerados por Belmans–Galkin–Mukhopadhyay são degenerações tóricas dos sistemas de Jeffrey–Weitsman.

Também não sabemos se para comprimentos pequenos os sistemas de Nohara–Ueda e de Belmans–Galkin–Mukhopadhyay são isomorfos um ao

outro.

Mais recentemente Nohara–Ueda [NU2020] definiram as transformações biracionais que trocam os polinômios de Laurent que eles obtiveram como potenciais de Floer. Analogamente, Belmans–Galkin–Mukhopadhyay [BGM2020] definem as transformações biracionais que trocam seus potenciais de grafos. Além disso, em [BGM2020] mostra-se que as transformações de Nohara–Ueda podem ser obtidas usando um limite das transformações de Belmans–Galkin–Mukhopadhyay. As *tropicalizações* dessas transformações são homeomorfismos lineares por partes entre os politopos, as imagens dos sistemas integráveis. Independentemente e com outra motivação, Rybnikov [R2018] definiu os homeomorfismos lineares por partes entre os politópos de Gelfand–Cetlin. Suas restrições parecem coincidir com as transformações de Nohara–Ueda <sup>1</sup>. Dadas as relações já descritas entre os sistemas de Gelfand–Cetlin, Kapovich–Millson, Jeffrey–Weitsman, Nishinou–Nohara–Ueda, Nohara–Ueda e Belmans–Galkin–Mukhopadhyay, esperamos que os sistemas de Nohara–Ueda/Speyer–Sturmfelds possam ser isomorfos a casos particulares dos sistemas de Belmans–Galkin–Mukhopadhyay/Manon, e que os sistemas de BGM sejam as degenerações tóricas dos sistemas de Jeffrey–Weitsman.

<sup>1</sup>Em [NU2020] Nohara–Ueda definiram as transformações um pouco diferente do antigo trabalho deles para as identificar com as transformações cluster para o Grassmanniano.

Flaschka e Millson provam em [FM2005] que as Hamiltonianas de Kapovich–Millson não são Hamiltonianas de Hitchin. Neste capítulo provamos que as Hamiltonianas de Kapovich–Millson são obtidas como limite das Hamiltonianas de Hitchin.

**Observação:** Usando o formalismo de Gaudin descrito no capítulo 8, este resultado é equivalente a um resultado de [CFR2010]: os elementos de Gaudin  $H_k(x) = \sum_{l \neq k}^n \frac{(kl)}{x_k - x_l}$  convergem para os elementos de Young–Jucys–Murphy  $J_k = \sum_{i=1}^{k-1} (ik)$ , quando algumas das  $x_i$ 's colapsam.

Sejam  $e_1, \dots, e_n$  os lados de um polígono  $P$  no espaço de polígonos com respeito à ação coadjunta de  $\mathrm{SL}(r, \mathbf{C})$ . O produto de órbitas da ação tem a forma bilinear  $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(AB)$ .

Para  $K := \mathbf{Q}(x_1, \dots, x_n)$ , o corpo das funções racionais nas variáveis livres  $x_i$ , definamos

1. o espaço vetorial  $\tilde{\mathcal{U}}$  com uma base  $\{a_{ij} : i < j, i, j \in \{1, \dots, n\}\}$ ,
2. os vetores  $a_{ji} := a_{ij} \in \tilde{\mathcal{U}}$  para  $i < j$ ,
3. os vetores  $a_{ii} := -\sum_{j \neq i} a_{ij} \in \tilde{\mathcal{U}}$ ,
4. o subespaço  $\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{U}}$  gerado pelos  $\{a_{ii} : i \in \{1, \dots, n\}\}$ ,
5. os vetores  $H_j = \sum_{i \neq j} \frac{a_{ij}}{x_i - x_j}$ ,
6. o subespaço  $\tilde{\mathcal{H}} \subset \tilde{\mathcal{U}}$  gerado pelo  $\mathcal{A}$  e  $\{H_i : i \in \{1, \dots, n\}\}$ .

A interpretação:  $a_{ij} = B(e_i, e_j)$ ,  $H_j$  representam as hamiltonianas de Hitchin, as definições  $a_{ji} = a_{ij}$  e  $a_{ii} = -\sum_{k \neq i} a_{ik}$  vem do fato que  $B$  é simétrica, bilinear e  $\sum e_i = 0$ .

Assim,  $K^n \cong \mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{H}} \subset \tilde{\mathcal{U}} \cong K^{\frac{n(n-1)}{2}}$ .

Tomando o quociente por  $\mathcal{A}$  na última relação de inclusão, obtemos  $\{0\} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{U}$ , onde  $\mathcal{H} = \tilde{\mathcal{H}}/\mathcal{A}$  e  $\mathcal{U} = \tilde{\mathcal{U}}/\mathcal{A} \cong K^{\frac{n(n-3)}{2}}$ .

A seguir vamos caracterizar  $\mathcal{H}$  como subespaço de  $\mathcal{U}$ , encontrando sua dimensão e uma base, nos casos  $n = 4$  e  $n = 5$ . Antes de tratar esses caso

particulares, notamos que em geral

$$\sum_{i=1}^n H_i = \sum_{i < j} \frac{a_{ij} - a_{ji}}{x_i - x_j} = 0.$$

Daí  $\dim(\mathcal{H}) \leq n - 1$ .

Para simplificar notação, vamos denotar  $x_i - x_j =: ij$ .

Em  $\mathcal{U}$ ,  $a_{ii} = 0$ ,  $a_{ji} = a_{ij}$  e  $\sum_{j \neq i} a_{ij} = 0$ . Vamos obter um sistema de equações em termos de  $a_{ij}$ 's, a partir das quais vamos identificar uma base para  $\mathcal{U}$ :

## 12.1

### O caso de quadrângulos

$$\begin{cases} a_{12} + a_{13} + a_{14} = 0 \\ a_{12} + a_{23} + a_{24} = 0 \\ a_{13} + a_{23} + a_{34} = 0 \\ a_{14} + a_{24} + a_{34} = 0 \end{cases}$$

Tomando  $a_{14}$ ,  $a_{24}$  como vetores formando uma base de  $\mathcal{U} \cong K^2$ , reduzimos o sistema para

$$\begin{cases} a_{12} + a_{13} = -a_{14} \\ a_{12} + a_{23} = -a_{24} \\ a_{13} + a_{23} = -a_{34} = a_{14} + a_{24} \end{cases}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{14} \\ -a_{24} \\ a_{14} + a_{24} \end{pmatrix}.$$

Então

$$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_{14} \\ -a_{24} \\ a_{14} + a_{24} \end{pmatrix},$$

e

$$\begin{aligned} a_{12} &= -a_{14} - a_{24} \\ a_{13} &= a_{24} \\ a_{23} &= a_{14} \end{aligned}.$$

Vamos escrever os  $H_i$ 's em termos da base  $\{a_{14}, a_{24}\}$ :

$$H_1 = \frac{a_{12}}{12} + \frac{a_{13}}{13} + \frac{a_{14}}{14} = \frac{a_{14}}{21} + \frac{a_{24}}{21} + \frac{a_{24}}{13} + \frac{a_{14}}{14} = \binom{24}{21 \ 14} a_{14} + \binom{23}{21 \ 13} a_{24},$$

$$H_2 = \frac{a_{12}}{21} + \frac{a_{23}}{23} + \frac{a_{24}}{24} = \frac{a_{14}}{12} + \frac{a_{24}}{12} + \frac{a_{14}}{23} + \frac{a_{24}}{24} = \binom{13}{12 \ 23} a_{14} + \binom{14}{12 \ 24} a_{24},$$

$$H_3 = \frac{a_{13}}{31} + \frac{a_{23}}{32} + \frac{a_{34}}{34} = \frac{a_{24}}{31} + \frac{a_{14}}{32} + \frac{a_{14}}{43} + \frac{a_{24}}{43} = \binom{42}{43 \ 32} a_{14} + \binom{41}{43 \ 31} a_{24},$$

$$H_4 = \frac{a_{14}}{41} + \frac{a_{24}}{42} + \frac{a_{34}}{43} = \frac{a_{14}}{41} + \frac{a_{24}}{42} + \frac{a_{14}}{34} + \frac{a_{24}}{34} = \binom{31}{34 \ 41} a_{14} + \binom{32}{34 \ 42} a_{24}.$$

Como  $\{H_1, H_2\} \subset \mathcal{U} = \langle a_{14}, a_{24} \rangle$ , temos

$$\dim(\langle H_1, H_2, H_3, H_4 \rangle) \leq 2.$$

Para verificar que  $\dim \mathcal{H} = 1$ , basta provar que os  $H_i$ 's são linearmente dependentes dois a dois (além disso, basta verificar esse fato para 3  $H_i$ 's pois  $H_1 + H_2 + H_3 + H_4 = 0$ ):

- **Para  $H_1$  e  $H_2$ :**  $\{H_1, H_2\}$  é l.i. se e só se  $\det \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix} = 0$ . o que acontece efetivamente, pois  $\binom{24}{21 \ 14} \binom{14}{12 \ 24} = \binom{23}{21 \ 13} \binom{13}{12 \ 23}$ .
- **Para  $H_1$  e  $H_3$ :** Analogamente  $\det \begin{pmatrix} H_1 \\ H_3 \end{pmatrix} = 0$ .

Concluimos que, dados  $x_1, x_2, x_3$  e  $x_4$  tal que  $x_i \neq x_j$  para todo  $i \neq j$ , o subespaço  $\mathcal{H}$  tem dimensão 1, com base  $\{H_1\}$ , no espaço  $K$ -vetorial  $\mathcal{U}$  de dimensão 2.

## 12.2

### O caso de pentágonos

Novamente,

$$\begin{cases} a_{12} + a_{13} + a_{14} + a_{15} = 0 \\ a_{12} + a_{23} + a_{24} + a_{25} = 0 \\ a_{13} + a_{23} + a_{34} + a_{35} = 0 \\ a_{14} + a_{24} + a_{34} + a_{45} = 0 \\ a_{15} + a_{25} + a_{35} + a_{45} = 0 \end{cases}$$

Tomando  $a_{14}, a_{24}, a_{15}, a_{25}, a_{35}$  como vetores numa base de  $\mathcal{U} \cong K^5$  e notando que  $a_{34} = a_{15} + a_{25} + a_{35} - a_{14} - a_{24}, a_{45} = -a_{15} - a_{25} - a_{35}$ , reduzimos o sistema para

$$\begin{cases} a_{12} + a_{13} = -a_{14} - a_{15} \\ a_{12} + a_{23} = -a_{24} - a_{25} \\ a_{13} + a_{23} = a_{14} + a_{24} - a_{15} - a_{25} - 2a_{35} \end{cases}$$

ou equivalentemente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{14} - a_{15} \\ -a_{24} - a_{25} \\ a_{14} + a_{24} - a_{15} - a_{25} - 2a_{35} \end{pmatrix}.$$

Então

$$\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{13} \\ a_{23} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_{14} - a_{15} \\ -a_{24} - a_{25} \\ a_{14} + a_{24} - a_{15} - a_{25} - 2a_{35} \end{pmatrix},$$

e então

$$\begin{aligned} a_{12} &= a_{35} - a_{14} - a_{24} \\ a_{13} &= a_{24} - a_{15} - a_{35} \\ a_{23} &= a_{14} - a_{25} - a_{35} \end{aligned}.$$

Vamos escrever as  $H_i$ 's em termos da base

$$\{a_{14}, a_{24}, a_{15}, a_{25}, a_{35}\}$$

(do fato que  $\sum_{i=1}^5 H_i = 0$  só vamos precisar de 4  $H_i$ 's):

$$H_1 = \begin{pmatrix} 24 \\ 21 \ 14 \end{pmatrix} a_{14} + \begin{pmatrix} 23 \\ 21 \ 13 \end{pmatrix} a_{24} + \begin{pmatrix} 35 \\ 31 \ 15 \end{pmatrix} a_{15} + 0a_{25} + \begin{pmatrix} 32 \\ 31 \ 12 \end{pmatrix} a_{35},$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 13 \\ 12 \ 23 \end{pmatrix} a_{14} + \begin{pmatrix} 14 \\ 12 \ 24 \end{pmatrix} a_{24} + 0a_{31} + \begin{pmatrix} 35 \\ 32 \ 25 \end{pmatrix} a_{25} + \begin{pmatrix} 31 \\ 32 \ 21 \end{pmatrix} a_{35},$$

$$H_4 = \begin{pmatrix} 31 \\ 34 \ 41 \end{pmatrix} a_{14} + \begin{pmatrix} 32 \\ 34 \ 42 \end{pmatrix} a_{24} + \begin{pmatrix} 53 \\ 54 \ 43 \end{pmatrix} a_{15} + \begin{pmatrix} 53 \\ 54 \ 43 \end{pmatrix} a_{25} + \begin{pmatrix} 53 \\ 54 \ 43 \end{pmatrix} a_{35},$$

$$H_5 = 0a_{14} + 0a_{24} + \begin{pmatrix} 41 \\ 45 \ 51 \end{pmatrix} a_{15} + \begin{pmatrix} 42 \\ 45 \ 52 \end{pmatrix} a_{25} + \begin{pmatrix} 43 \\ 45 \ 53 \end{pmatrix} a_{35}.$$

As Hamiltonianas  $H_1$  e  $H_4$  são combinações lineares (com coeficientes em  $K$ ) de  $H_2$  e  $H_5$ :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 23 & 24 \\ 13 & 41 \end{pmatrix} H_2 + \begin{pmatrix} 35 & 45 \\ 13 & 41 \end{pmatrix} H_5 = H_1 \\ \begin{pmatrix} 12 & 23 \\ 34 & 14 \end{pmatrix} H_2 + \begin{pmatrix} 35 & 15 \\ 14 & 34 \end{pmatrix} H_5 = H_4 \end{cases}$$

Assim, dados  $x_1, x_2, x_3, x_4$  e  $x_5$  tais que  $x_i \neq x_j$  para  $i \neq j$ , o subespaço  $\mathcal{H}$  tem dimensão 2, tem base  $\{H_2, H_5\}$ , no espaço  $K$ -vetorial  $\mathcal{U}$  de dimensão 5.

Agora vamos provar que as Hamiltonianas de Hitchin  $H_i$ 's induzem as Hamiltonianas de Kapovich–Millson quando os  $x_i$ 's convergem para certos valores:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \widetilde{H_1} \\ \widetilde{H_4} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 12 & 13 \\ 23 & 34 \end{pmatrix} H_1 \\ \begin{pmatrix} 34 & 45 \\ 35 & 35 \end{pmatrix} H_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13}{23} & \frac{24}{14} & -1 & \frac{12}{15} & \frac{35}{23} & 0 & 1 \\ \frac{13}{14} & \frac{45}{24} & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{14} \\ a_{24} \\ a_{15} \\ a_{25} \\ a_{35} \end{pmatrix} \quad (12-1)$$

Fazendo  $x_3 \rightarrow \infty$ ,

$$\Delta = \begin{pmatrix} -\frac{24}{14} & -1 & -\frac{12}{15} & 0 & 1 \\ -\frac{45}{14} & -\frac{45}{24} & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Se além disso,  $x_1 \rightarrow x_2$  e  $x_4 \rightarrow x_5$ , obtemos

$$\Delta = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{45} \end{pmatrix}. \quad (12-2)$$

onde  $a_{12}$  e  $a_{45}$  são as Hamiltonianas de Kapovich–Millson associadas às diagonais  $e_1 + e_2$  e  $e_1 + e_2 + e_3$ , respectivamente.

Escolhendo outra base  $\{a_{15}, a_{12}, a_{23}, a_{34}, a_{45}\}$  de  $\mathcal{U} \cong K^5$ , vemos que

$$\begin{cases} a_{13} + a_{14} = -a_{12} - a_{15} \\ a_{24} + a_{25} = -a_{12} - a_{23} \\ a_{13} + a_{35} = -a_{23} - a_{34} \\ a_{14} + a_{24} = -a_{34} - a_{45} \\ a_{25} + a_{35} = -a_{15} - a_{45} \end{cases}$$

ou equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{14} \\ a_{24} \\ a_{25} \\ a_{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a_{12} - a_{15} \\ -a_{12} - a_{23} \\ -a_{23} - a_{34} \\ -a_{34} - a_{45} \\ -a_{15} - a_{45} \end{pmatrix}.$$

e

$$\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{14} \\ a_{24} \\ a_{25} \\ a_{35} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_{12} - a_{15} \\ -a_{12} - a_{23} \\ -a_{23} - a_{34} \\ -a_{34} - a_{45} \\ -a_{15} - a_{45} \end{pmatrix},$$

e então

$$\begin{aligned} a_{13} &= a_{45} - a_{12} - a_{23} \\ a_{14} &= a_{23} - a_{15} - a_{45} \\ a_{24} &= a_{15} - a_{23} - a_{34} \\ a_{25} &= a_{34} - a_{12} - a_{15} \\ a_{35} &= a_{12} - a_{34} - a_{45} \end{aligned}$$

As  $H_i$ 's em termos da base

$$\{a_{15}, a_{12}, a_{23}, a_{34}, a_{45}\}$$

são

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{54}{51\ 14}a_{15} + \frac{23}{21\ 13}a_{12} + \frac{43}{41\ 13}a_{23} + 0a_{34} + \frac{34}{31\ 14}a_{45}, \\ H_2 &= \frac{45}{42\ 25}a_{15} + \frac{15}{12\ 25}a_{12} + \frac{34}{32\ 24}a_{23} + \frac{34}{31\ 14}a_{34} + 0a_{45}, \\ H_3 &= 0a_{15} + \frac{51}{53\ 31}a_{12} + \frac{21}{23\ 31}a_{23} + \frac{45}{43\ 35}a_{34} + \frac{15}{13\ 35}a_{45}, \\ H_4 &= \frac{21}{24\ 41}a_{15} + 0a_{12} + \frac{12}{14\ 42}a_{23} + \frac{32}{34\ 42}a_{34} + \frac{51}{54\ 41}a_{45}, \\ H_5 &= \frac{12}{15\ 52}a_{15} + \frac{32}{35\ 52}a_{12} + 0a_{23} + \frac{23}{25\ 53}a_{34} + \frac{43}{45\ 53}a_{45}. \end{aligned}$$

Matricialmente,

$$\Delta = \begin{pmatrix} \widetilde{H}_1 \\ \widetilde{H}_2 \\ \widetilde{H}_3 \\ \widetilde{H}_4 \\ \widetilde{H}_5 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \frac{14\ 13}{43} H_1 \\ \frac{24\ 25}{45} H_2 \\ \frac{53\ 31}{51} H_3 \\ \frac{24\ 41}{21} H_4 \\ \frac{35\ 52}{32} H_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{13\ 45}{15\ 34} & \frac{23\ 14}{21\ 43} & -1 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{15\ 24}{12\ 45} & -\frac{25\ 34}{45\ 23} & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{53\ 21}{51\ 23} & -\frac{31\ 45}{51\ 43} & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -\frac{41\ 32}{21\ 34} & \frac{24\ 51}{21\ 54} \\ \frac{35\ 12}{32\ 15} & 1 & 0 & -1 & -\frac{52\ 43}{32\ 45} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{15} \\ a_{12} \\ a_{23} \\ a_{34} \\ a_{45} \end{pmatrix}.$$

Vamos considerar os coeficientes de  $\widetilde{H}_1$  e  $\widetilde{H}_2$ :

$$A := \begin{pmatrix} -\frac{13\ 45}{15\ 34} & \frac{23\ 14}{12\ 34} & -1 & 0 & 1 \\ -1 & \frac{15\ 24}{12\ 45} & -\frac{25\ 34}{45\ 23} & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que

$$\begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{14} \\ a_{24} \\ a_{25} \\ a_{35} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{15} \\ a_{12} \\ a_{23} \\ a_{34} \\ a_{45} \end{pmatrix}.$$

Tomando  $x_4 \rightarrow \infty$  em  $A$ ,

$$A = \begin{pmatrix} \frac{13}{15} & \frac{23}{12} & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -\frac{15}{12} & \frac{25}{23} & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se além disso  $x_1 \rightarrow x_3$  e  $x_2 \rightarrow x_5$ ,

$$A \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{25} \end{pmatrix}.$$

### 12.2.1

#### Deformação do sistema de Kapovich–Millson (construção das $x_i(t)$ )

Seja

$$\begin{aligned} T : \Delta^0 &\longrightarrow \text{Conf}(5, \mathbf{CP}^1) \\ t &\longmapsto (x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t), x_5(t)), \end{aligned}$$

onde  $\Delta^0 := \{t \in \mathbf{R} : 0 < |t| < 1\}$  e  $\text{Conf}(5, \mathbf{CP}^1) := \{(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in \mathbf{CP}^1 : a_i \neq a_j \forall i \neq j\}$ .

Vamos construir uma aplicação

$$F : \Delta^0 \times M(r_1, r_2, r_3, r_4, r_5) \rightarrow \mathbf{R}^2$$

tal que  $F(0, P) = (a_{12}, a_{45})$  onde  $a_{12}$  e  $a_{45}$  são as Hamiltonianas associadas ao polígono  $P$  escritas na base  $\{a_{14}, a_{24}, a_{15}, a_{25}, a_{35}\}$  na matriz (12-2). Definimos

$$\begin{aligned} F(t, P) &:= (\widetilde{H}_1, \widetilde{H}_4) \\ &= \left( -\frac{13}{23} \frac{24}{14} a_{14} - a_{24} + \frac{12}{15} \frac{35}{23} a_{15} + 0a_{25} + a_{35}, \text{ onde } \widetilde{H}_1 \text{ e } \widetilde{H}_4 \text{ são} \right. \\ &\quad \left. \frac{13}{14} \frac{45}{35} a_{14} + \frac{23}{35} \frac{45}{24} a_{24} - a_{15} - a_{25} - a_{35} \right) \end{aligned}$$

$$x_1(t) = 1 - t$$

$$x_2(t) = 1 - t^2$$

introduzidos na equação (12-1) e  $ij$  denota  $x_i - x_j$ .  $x_3(t) = t^{-1}$  e vemos

$$x_4(t) = -1 - t$$

$$x_5(t) = -1 + t^2$$

que  $x_i \neq x_j, \forall i, j$ , e  $t \in \Delta^0$ . Além disso, quando  $t \rightarrow 0$ ,  $x_1(t), x_2(t) \rightarrow 1$ ,

$x_4(t), x_5(t) \rightarrow -1$  e  $x_3(t) \rightarrow \infty$ . Portanto  $F$  está bem definida e  $F(0, P) = (a_{12}, a_{45})$ .

### 12.3

#### O caso de hexágonos

Para  $n = 6$ , quando a triangulação do polígono não é leque (grafo dual não lagarta), vamos dar um argumento mais simples que também implica o caso  $n = 5$ .

As Hamiltonianas de Hitchin são dadas por

$$H_j = \sum_{i \neq j} \frac{a_{ij}}{x_i - x_j}, \quad j \in \{1, \dots, 6\}.$$

Se  $k \neq j$  e  $x_k \rightarrow x_j$ , então  $(x_k - x_j)H_j \rightarrow a_{kj}$ . Assim  $(x_2 - x_1)H_1 \rightarrow a_{12}$ ,  $(x_4 - x_3)H_3 \rightarrow a_{34}$  e  $(x_6 - x_5)H_5 \rightarrow a_{56}$  quando  $x_6 \rightarrow x_5$ ,  $x_2 \rightarrow x_1$  e  $x_4 \rightarrow x_3$ .

**Observação:** No caso não lagarta  $n = 6$ , também podemos fazer um análise mais computacional como no caso  $n = 5$  e vice-versa.

### 12.4

#### Caso geral para triangulação leque (grafo dual lagarta)

Lembremos que  $H_j(x) = \sum_{i \neq j} \frac{a_{ij}}{x_i - x_j}$ . Escolhemos  $x_j$  em progressão geométrica:

$$x_j(t) = t^j \tag{12-3}$$

onde  $t$  é um parâmetro (real ou complexo; ou  $t$  é um elemento em corpo não arquimediano com valoração positiva). Então

$$\lim_{t \rightarrow 0} x_j H_j = \sum_{i \neq j} \left( \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^j}{t^i - t^j} \right) a_{ij},$$

e como

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^j}{t^i - t^j} = \begin{cases} -1 & \text{para } i > j \\ 0 & \text{para } i < j \end{cases},$$

obtemos

$$\lim_{t \rightarrow 0} x_j H_j = - \sum_{i > j} a_{ij}.$$

Além disso,  $x_j(t)H_j(x(t))$  é holomorfa em  $t = 0$ . Por outro lado,

$$q(e_k + \dots + e_n) = \sum_{i, j \geq k} B(e_i, e_j)$$

logo

$$q(e_j + \dots + e_n) - q(e_{j+1} + \dots + e_n) - q(e_j) = 2 \sum_{i>j} a_{ij} = -2 \lim_{t \rightarrow 0} x_j(t) H_j$$

e, calculando uma soma telescópica,

$$\begin{aligned} q(e_k + \dots + e_n) - q(e_k) - \dots - q(e_n) &= \sum_{j \geq k} q(e_j + \dots + e_n) - \\ &\quad - q(e_{j+1} + \dots + e_n) - q(e_j) \\ &= -2 \lim_{t \rightarrow 0} \sum_{j \geq k} x_j(t) H_j \end{aligned}$$

Mais geralmente, a mesma computação mostra o seguinte

**Proposição 12.1.** *Suponha que a procedura de limite  $\lim$  é bem definida e os limites  $\lim \frac{x_i}{x_j} = 0$  são 0 para todos  $i < j$ . Então as funções de Kapovich–Millson  $\frac{q(e_k + \dots + e_n)}{2}$  são iguais aos limites  $\lim \sum_{j \geq k} (\frac{q(e_j)}{2} + x_j H_j)$ .*

**Observação 12.2.** *A forma de limite sugira que ele é mais naturalmente pode ser escrito como o limite do integral  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \text{Tr}(\frac{\phi^2}{2})/d \log z$ , onde  $\gamma_k$  é um ciclo na esfera de Riemann que separa os pontos  $x_1, \dots, x_{k-1}$  dos pontos  $x_k, \dots, x_n$ .*

*Demonstração.* O diferencial  $\text{Tr}(\frac{\phi^2}{2})/dz$  decompõe como  $\sum_i (\frac{a_{ii}/2}{(z-x_i)^2} + \frac{H_i}{z-x_i}) dz$ . Então  $\text{Res}_{x_j} \text{Tr}(\frac{\phi^2}{2})/d \log z = (\frac{a_{jj}}{2} \text{Res}_{x_j} \frac{z}{(z-x_j)^2}) + x_j H_j$ . Usando  $\frac{z}{(z-x_j)^2} = \frac{(z-x_j)+x_j}{(z-x_j)^2} = \frac{1}{z-x_j} + \frac{x_j}{(z-x_j)^2}$  obtemos  $\text{Res}_{x_j} \frac{z dz}{(z-x_j)^2} = 1$ , logo  $\text{Res}_{x_j} \text{Tr}(\frac{\phi^2}{2})/d \log z = \frac{a_{jj}}{2} + x_j H_j$  e  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \text{Tr}(\frac{\phi^2}{2})/d \log z = \sum_{j \geq k} \text{Res}_{x_j} \text{Tr}(\frac{\phi^2}{2})/d \log z = \sum_{j \geq k} \frac{a_{jj}}{2} + x_j H_j$ .  $\square$

Assim, as Hamiltonianas de Kapovich–Millson  $f_k$  podem ser obtidas como limites de somas lineares (com coeficientes dependentes de pontos marcados) das Hamiltonianas de Garnier–Gaudin–Hitchin  $H_i$ .

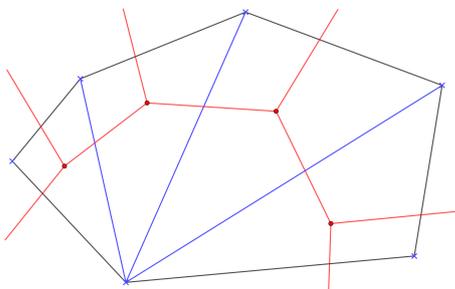


Figura 12.1: Triangulação e grafo correspondente ao hexágono no caso lagarta

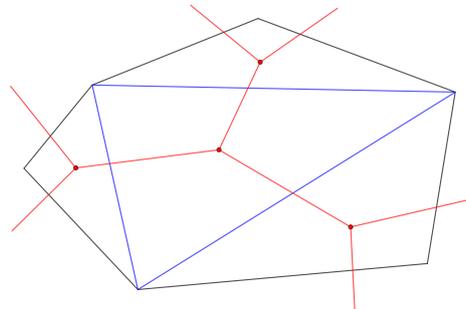


Figura 12.2: Triangulação e grafo correspondente ao hexágono no caso não lagarta

## 12.5

### Trabalhos atuais e futuros

#### 12.5.1

##### Fórmulas explícitas para árvores gerais

O que segue nesta subseção é trabalho em andamento.

Nosso objetivo é combinar nosso método (via limites) com os trabalhos de Chervov–Falqui–Rybnikov ([CFR2009], [CFR2010]) e Aguirre–Felder–Veselov ([AFV2011]) para obter fórmulas explícitas

$$f_{I(e)} = \lim \sum c_k(e)H_k(x),$$

onde  $e$  é uma aresta de árvore e  $c_k(e)$  são funções explícitas de  $x$  parametrizadas pelas arestas. A estrutura complexa sobre  $(\mathbf{CP}^1, \{x_1, \dots, x_n\})$  é invariante com respeito de ação de um grupo  $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{C})$  das transformações de Möbius. Isso sugira que os coeficientes  $c_k(e)(x)$  naturais são as funções racionais homogêneas de  $x$  de grau 1.

Nosso objetivo mais simples é escrever algumas parametrizações  $x_i(t)$  e  $c_k(e)(t)$  tais que o limite converge para as Hamiltonianas de Kapovich–Millson para outros grafos duais distintos dos lagartas.

A seguir, definimos funções mais gerais  $f_I$  e  $H_I$  que se adaptam melhor a nosso objetivo. Para  $I \subset \{1, \dots, n\}$  definimos as funções  $f_I := q(\nu_I) = \sum_{i \in I, j \notin I} a_{ij}$  e  $H_I := \sum_{i \in I, j \notin I} \frac{a_{ij}}{x_i - x_j}$  que de fato é igual a  $\sum_{i \in I} H_i = -\sum_{j \notin I} H_j = \int_{\gamma_I} \mathrm{Tr}(H(z)^2) dz$ . Às vezes podemos obter  $f_I$  como o limite de reescalonamentos  $H_I$ . Mais geralmente, precisamos considerar limites  $\lim H_{I(e)}$  para todas as arestas  $e \in G$  e suas combinações lineares baseadas na combinatória da árvore determinada pelo comportamento assintótico das  $x_i$ 's.

Vamos considerar a estrutura indutiva do espaços de polígonos dada pela árvore associada a sua triangulação. Para cada par de folhas  $i \neq j$ ,

$$\lim_{x_i \rightarrow x_j} (x_i - x_j)H_i = \lim_{x_i \rightarrow x_j} (x_j - x_i)H_j = a_{ij}$$

é uma Hamiltoniana de Kapovich–Millson (depois de reescalar por 2 e somar a constante  $q(e_i) + q(e_j)$ ), e

$$\lim_{x_i \rightarrow x_j} H_{\{i,j\}} = 2 \sum_{k \neq i,j} \frac{a_{ik} + a_{jk}}{x_j - x_k}. \quad (12-4)$$

Como  $a_{ik} + a_{jk} = B(e_i + e_j, e_k)$ , o lado direito da equação (12-4) pode ser interpretado como as Hamiltonianas de Gaudin–Hitchin para o  $(n - 1)$ -ágono com lados  $e_i + e_j$  e  $e_k$ ,  $k \neq i, j$ . Para  $k \neq i, j$ , os limites  $\lim_{x_i \rightarrow x_j} H_k$  são as outras

$(n-2)$  Hamiltonianas de Gaudin–Hitchin para  $H(z)/dz = \frac{e_i+e_j}{z-x_j} + \sum_{k \notin \{i,j\}} \frac{e_k}{z-x_k}$ . Assim obtemos um limite do estrato genérico do espaço de módulos de Deligne–Mumford  $\overline{M}_{0,n}$  ao estrato genérico de seu componente divisor de fronteira isomorfo com  $M_{0,n-1}$ . Cada árvore trivalente tem um vértice com duas folhas. Assim, aplicamos este passo indutivo para obter todos os sistemas integráveis intermediários e, depois de  $(n-3)$  passos, o sistema de Kapovich–Millson associado à árvore dada.

Mas, como construir um limite explícito ao longo de uma curva irreduzível? A ideia é que para cada árvore filogenética (da evolução de  $n$  espécies),

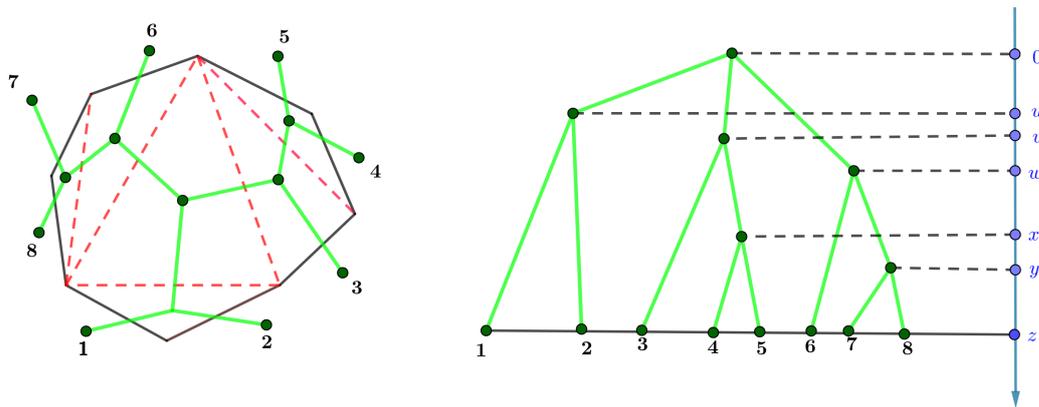


Figura 12.3: Triangulação não leque e árvore dual filogenética não lagarta

definimos uma função geradora  $x_i(t) = \sum_{a \in \text{antecessores}(i)} \text{evol}(i; T_a) \cdot t^{T_a}$  para a evolução de espécies  $i$  no relógio molecular  $T$  (ver fig. 12.3). Árvores e ultramétricas são usadas na tropicalização de  $\overline{M}_{0,n}$  (Mikhalkin–Rau [MR2018]),  $Gr(2, n)$  (Speyer–Sturmfels [SS2004]), e por Nohara–Ueda em [NU2020].

### 12.5.2

#### Mais trabalhos em andamento e problemas relacionados

- 1) Deformar as coordenadas ação-ângulo de Kapovich–Millson para coordenadas ação-ângulo para outros sistemas integráveis aqui estudados.
- 2) Descrever as imagens destes sistemas em coordenadas ação (interpolando as desigualdades triangulares).
- 3) É possível obter o sistema integrável de Jeffrey–Weitsman como limite, da mesma maneira que o sistema integrável de Garnier converge para o sistema de Kapovich–Millson? (e de que sistema ele é limite?)

As diapositivas (em inglês) usadas na defesa da tese podem ser encontradas no seguinte enlace Slides’s thesis.

## A

### Formas bilineares e bases ortonormais

Ballestreros–Corsetti–Ragnisco [BCR1996] e Karimipour [K1998] independentemente de Kapovich–Millson [KM1996] dão essencialmente as mesmas integrais  $f_k$ 's definidas no capítulo 6. Para uma  $N$ -tupla de matrizes  $A_1, \dots, A_N$  e  $k + 1 \leq N$  definamos as integrais

$$I_k(\vec{e}) = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} \left( \left( \sum_{i=1}^{k+1} A_i \right)^2 \right). \quad (\text{A-1})$$

Integrais da Equação (A-1) são consideradas em Falqui–Musso [FM2003, eq. (1.6)] onde elas são chamadas “contrapartidas clássicas das integrais de Gaudin”. Como vimos no Capítulo 12, os sistemas “clássicos” (de Kapovich–Millson–Ballestreros–Corsetti–Ragnisco–Karimipour) podem ser obtidos como os limites dos sistemas “quânticos” (de Gaudin), que o parcialmente confirma o uso dos adjetivos “quântico/clássico”.

Se na Equação (A-1) as matrizes  $A_i \in \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})^*$  correspondem aos vetores  $e_i \in \mathbf{C}^3$  mediante um isomorfismo linear  $\phi : \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})^* \rightarrow \mathbf{C}^3$ , as funções  $I_k$  de (A-1) se transformam nas hamiltonianas de Kapovich–Millson se o morfismo  $\phi$  identifica a forma bilinear  $(A, B) \mapsto \operatorname{Tr} AB$  com a forma euclidiana.

Duas formas bilineares não degeneradas, associativas e simétricas de uma álgebra de Lie simples de dimensão finita nos complexos sempre são proporcionais (ver [KBK1997, pg. 169]). Assim, os resultados seguintes do Teorema A.3 e o Corolário A.4 não são novos mas a sua prova sim, além de ser construtiva, pois descrevemos indutivamente a base de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$  na qual a equação (A-10) é verificada.

**Observação:** As matrizes da base construída são matrizes clássicas de Gell-mann generalizadas, descritas por exemplo em [BK2008]. Para  $\mathfrak{su}(2)$ , são as matrizes de Pauli e para  $\mathfrak{su}(3)$ , são as matrizes de Gell-mann próprias.

Do ponto de vista matemático a consideração das bases não é necessária, e os sistemas integráveis que discutimos podem ser escritos em notação invariante. Mas sistemas integráveis e a geometria simplética se baseiam na física, e na literatura física é mais comum ter funções escritas em bases convenientes (como as matrizes de Pauli e Gell-mann). Neste capítulo discutimos as bases ortonormais para as álgebras de matrizes  $\mathfrak{su}(2)$ ,  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ ,  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  no

Apêndice A.1 e  $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$  no Apêndice A.2.

## A.1

### Posto 2

Nesta seção vamos estudar a relação entre as integrais de movimento do capítulo 6 e as integrais (A-1).

Para  $f_{k+1}$  definida em 6, para  $\vec{e} \in (\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})^*)^n$  e  $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ ,

$$f_{k+1}(\vec{e}) = I_{k+1}(\vec{e}), \quad (\text{A-2})$$

Além disso, para  $A_i = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ ,

$$q(A_i) = \left\| \left( -x, -\frac{1}{2}(y+z), \frac{1}{2}(y-z) \right) \right\|_{2,1}^2, \quad (\text{A-3})$$

onde  $\|\cdot\|_{2,1}$ , a função de Lorentz, é definida a partir do produto interno

$$\langle (v_1, v_2, v_3), (w_1, w_2, w_3) \rangle_{2,1} := v_1 w_1 + v_2 w_2 - v_3 w_3.$$

Vamos ver que a equação (A-3) também se cumpre nos casos  $\mathfrak{su}(2)$  e  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ , e que de fato o conteúdo até o momento desta tese para  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$  é uma generalização do que acontece nesses casos.

Identificamos  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})^* \sim \mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ , e usamos a base

$$\beta = \left\{ -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

CASO  $\mathfrak{su}(2)$ : Concretamente,

$$A \in \mathfrak{su}(2) \leftrightarrow A = \begin{pmatrix} ix & a+ib \\ -a+ib & -ix \end{pmatrix}$$

com  $a, b, c \in \mathbf{R}$ . Então

$$A \in \mathfrak{su}(2) \leftrightarrow \vec{e} = (-2xi, -a+ib+a+ib, a+ib+a-ib) \in \mathbf{C}^3,$$

onde as coordenadas de  $\vec{e}$  são as componentes de  $A$  na base  $\beta$  de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ .

Portanto

$$\begin{aligned} \|\vec{e}\|_{2,1}^2 &= |-4x^2 + (-2ib)^2 - (2a)^2| \\ &= |-4x^2 - 4b^2 - 4a^2| = 4|x^2 + b^2 + a^2| \\ &= \|(2x, 2a, 2b)\|_{euclid}^2, \end{aligned}$$

onde  $(2x, 2a, 2b) \in \mathbf{R}^3$

CASO  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$ : Neste caso tomamos a mesma base  $\beta$  de  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{C})$ , só que para  $\mathfrak{sl}(2, \mathbf{R})$  consideramos só os coeficientes reais. As contas para provar que A-3 vale no caso  $SL(2, \mathbf{R})$  são as mesmas que no caso  $SL(2, \mathbf{C})$ .

## A.2

### Posto superior

Nessa seção generalizamos a equação (A-3) para  $G = SL(n, \mathbf{C})$ . Temos que encontrar uma base de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ :

$$\Upsilon = \left\{ A_i = \begin{pmatrix} a_i^1 & * & * & * & & * \\ * & a_i^2 & * & * & & * \\ * & * & \ddots & * & & * \\ * & * & * & a_i^{n-1} & & * \\ * & * & * & * & -(a_i^1 + a_i^2 + \dots + a_i^{n-1}) & * \end{pmatrix} \right\}_{i=1}^{n^2-1}$$

tal que, para  $X = [x_{ij}]_{i,j=1}^n \in \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$  arbitrário,

$$\frac{1}{2} \text{Tr}(X^2) = q((e_1, e_2, \dots, e_{n^2-1})),$$

onde cada  $e_i$  é a coordenada de  $X$  correspondente ao  $A_i$  na base  $\Upsilon$ , e  $q$  é uma seminorma em  $\mathbf{C}^{n^2-1}$  a definir. Na notação empregada,

$$\text{Tr}(X^2) = 2 \left( \sum_{i=1}^{n-1} x_{ii}^2 \right) + \sum_{j=1}^n \sum_{i=1, i \neq j}^n x_{ij} x_{ji} + \sum_{i,j=1, i \neq j}^{n-1} x_{ii} x_{jj}. \quad (\text{A-4})$$

Suponhamos que a base  $\Upsilon$  existe. Fixemos  $X$  e vamos considerar seus coeficientes  $e_i$  na base  $\Upsilon$ . Vamos supor a existência de elementos  $B_{sr} = [b_{ij}]$  tais que  $b_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow i = s, j = r$  e  $b_{sr} = b_{rs} = 1$ , estão em  $\Upsilon$  para cada  $r, s \in \{1, \dots, n\}$ ,  $r > s$ . E vamos também supor elementos  $C_{sr} = [c_{ij}]$ , tal que  $c_{ij} \neq 0 \Leftrightarrow i = s, j = r$  e  $c_{sr} = 1$  e  $c_{rs} = -1$ , estão em  $\Upsilon$  para cada  $r, s \in \{1, \dots, n\}$ ,  $s < r$ . Assim, temos  $n(n-1)$  elementos da base  $\Upsilon$  e se  $e_{sr}$  e  $f_{sr}$  são os coeficientes de  $X$  nas componentes  $B_{sr}$  e  $C_{sr}$  respectivamente, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} x_{rs} = e_{sr} + f_{sr} \\ x_{sr} = e_{sr} - f_{sr} \end{cases}$$

Daí obtemos os coeficientes  $e_{sr}$ ,  $f_{sr}$  em termos das entradas  $x_{rs}$  e  $x_{sr}$  de  $X$ :  $e_{sr} = \frac{1}{2}(x_{rs} + x_{sr})$  e  $f_{sr} = \frac{1}{2}(x_{rs} - x_{sr})$ , e  $e_{sr}^2 - f_{sr}^2 = x_{rs}x_{sr}$ . Assim,

$$\sum_{i,j=1,j<i}^n (e_{ji}^2 - f_{ij}^2) = \sum_{i,j=1,j<i}^n x_{ij}x_{ji} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1,j \neq i}^n x_{ij}x_{ji},$$

onde a última soma é o segundo termo na soma da equação (A-4). Agora só resta achar outros  $n - 1$  elementos da base  $\Upsilon$  tal que a soma dos quadrados dos coeficientes de  $X$  para esses elementos seja  $\frac{1}{2} \left[ 2 \left( \sum_{i=1}^{n-1} x_{ii}^2 \right) + \sum_{i,j=1,i \neq j}^{n-1} x_{ii}x_{jj} \right]$ , o que leva a escolher elementos da forma

$$A_i = \text{diag} \left( a_i^1, a_i^2, \dots, a_i^{n-1}, -(a_i^1 + a_i^2 + \dots + a_i^{n-1}) \right),$$

tal que existem  $R_i$ 's com os quais se verifica o sistema

$$\begin{cases} x_{ii} = R_1 a_1^i + R_2 a_2^i + \dots + R_{n-1} a_{n-1}^i & \text{para } 1 \leq i \leq n-1 \\ \sum_{j=1}^{n-1} R_j^2 = \sum_{j=1}^{n-1} x_{jj}^2 + \sum_{i,j=1,j<i}^{n-1} x_{ii}x_{jj} \end{cases} \quad (\text{A-5})$$

Para encontrar os  $R_i$ 's, vamos enunciar e provar o seguinte resultado mais geral.

**Lema A.1.** Para  $m \in \mathbf{N}$  e  $r = 1, \dots, m$ , os polinômios com coeficientes racionais  $A_r := \frac{r+1}{2r} \left( Y_r + \frac{1}{r+1} Y_{r+1} + \frac{1}{r+1} Y_{r+2} + \dots + \frac{1}{r+1} Y_m \right)^2 \in \mathbf{Q}[Y_1, \dots, Y_m]$ ,  $\forall r \in \{1, \dots, m\}$  satisfazem a seguinte igualdade

$$Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_m^2 + \sum_{i,j=1,i<j} Y_i Y_j = A_1 + A_2 + \dots + A_m \quad (\text{A-6})$$

*Demonstração.* Para  $m = 2$ :  $Y_1^2 + Y_2^2 + Y_1 Y_2 = \left( Y_1 + \frac{1}{2} Y_2 \right)^2 + \frac{3}{4} Y_2^2$  Para  $m = 3$ :

$$Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_1 Y_2 + Y_1 Y_3 + Y_2 Y_3 = \left( Y_1 + \frac{1}{2} Y_2 + \frac{1}{2} Y_3 \right)^2 + \frac{3}{4} \left( Y_2 + \frac{1}{3} Y_3 \right)^2 + \frac{4}{6} Y_3^2.$$

A identidade a seguir vai ser empregada no caso geral: para  $k \in \mathbf{N}$ ,

$$\sum_{r=1}^{k-1} \frac{1}{r(r+1)} = \sum_{r=1}^{k-1} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r+1} \right) = 1 - \frac{1}{k}.$$

Provar a equação (A-6) é equivalente a provar que os coeficientes em ambos lados da equação coincidem, o que faremos estudando os coeficientes do termo  $Y_s Y_t$  no polinômio  $A_1 + A_2 + \dots + A_m$ .

– **Caso  $s < t$ :** O coeficiente do termo  $Y_s Y_t$  em  $A_r$  é

- Se  $s = r$ ,  $\frac{s+1}{2s} \frac{2}{s+1} = \frac{1}{s}$ .
- Se  $r < s < t \leq n$ ,  $\frac{1}{r(r+1)} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}$ .
- Se  $r > s$ , 0.

Então o coeficiente de  $Y_s Y_t$  em  $A_1 + A_2 + \dots + A_m$  é  $\frac{1}{s} + \sum_{r=s+1}^m \frac{1}{r(r+1)}$ , e a equação (A-6) é equivalente à identidade acima  $\sum_{r=1}^{k-1} \frac{1}{r(r+1)} + \frac{1}{k} = 1$ .

– **Caso**  $s = t$ : O coeficiente do termo  $Y_s^2$  em  $A_r$  é

- Se  $r = s$ ,  $\frac{s+1}{2s}$ .
- Se  $r < s$ ,  $\frac{r+1}{2r} \left(\frac{1}{r+1}\right)^2 = \frac{1}{2r(r+1)}$ .
- Se  $r > s$ , 0.

O coeficiente de  $Y_s^2$  em  $A_1 + A_2 + \dots + A_m$  é  $\frac{s+1}{2s} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{s-1} \frac{1}{r(r+1)}$ . Como antes, basta provar que  $\frac{s+1}{2s} + \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{s-1} \frac{1}{r(r+1)} = 1$ .

□

Como consequência direta do lema A.1 obtemos os coeficientes  $R_i$ 's:

$$R_s = \sqrt{\frac{s+1}{2s}} \left( x_{ss} + \frac{1}{s+1} x_{(s+1)(s+1)} + \dots + \frac{1}{s+1} x_{(n-1)(n-1)} \right), \quad (\text{A-7})$$

para  $s \in \{1, \dots, n\}$ . Agora vamos encontrar os  $a_i^j$  (e assim as matrizes  $A_i$ ) substituindo a equação (A-7) no sistema (A-5):  $x_{11} = \sum_{i=1}^{n-1} R_i a_i^1$ . Então

$$x_{11} = \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{\frac{i+1}{2i}} \left( x_i + \frac{1}{i+1} x_{(i+1)(i+1)} + \dots + \frac{1}{i+1} x_{nn} \right) a_i^1,$$

e  $x_{11} = \sqrt{\frac{2}{2}} x_{11} a_1^1 = a_1^1 x_{11}$ ,  $a_1^1 = 1$ . Assim,

$$\begin{aligned} 0 \cdot x_{22} &= \sqrt{\frac{2+1}{2 \cdot 2}} x_{22} a_2^1 + \sqrt{\frac{1+1}{2 \cdot 1}} \cdot \frac{1}{1+1} x_{22} a_1^1 \\ &= \sqrt{\frac{3}{4}} a_2^1 \\ &= 1 + \frac{1+k^2+2k-(k^2+2k+1)}{2k(k+1)} + \sqrt{\frac{2}{2}} \cdot \frac{1}{2} x_{22} \\ &= \left( \sqrt{\frac{3}{4}} a_2^1 + \frac{1}{2} \right) x_{22} \end{aligned}$$

e  $a_2^1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ . Obtemos então a intuição para afirmar o seguinte enunciado.

**Lema A.2.**

$$a_i^j = \begin{cases} \sqrt{\frac{2i}{i+1}} & \text{para } i = j \\ -\frac{1}{i} \sqrt{\frac{2i}{i+1}} & \text{para } i > j \\ 0 & \text{para } i < j \end{cases}$$

*Demonstração.* Para  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ , das equações (A-5) e a expressão (A-7),

$$\begin{aligned} x_{jj} &= \sum_{i=1}^{n-1} R_i a_i^j \\ &= \sum_{i=j}^{n-1} R_i a_i^j \text{ (pois } a_i^j = 0 \text{ se } i < j) \\ &= \sum_{i=j}^{n-1} \sqrt{\frac{i+1}{2i}} \left( x_{ii} + \frac{1}{i+1} x_{(i+1)(i+1)} + \dots + \frac{1}{i+1} x_{(n-1)(n-1)} \right) a_i^j. \end{aligned}$$

Comparando coeficientes com o polinômio nas variáveis  $(x_j, \dots, x_{n-1})$  na última igualdade,  $x_{jj} = \sqrt{\frac{j+1}{2j}} x_{jj}$ . Por hipótese,  $a_j^j = \sqrt{\frac{2j}{j+1}}$ : igualdade se

verifica.

Para o resto de termos,

$$\begin{aligned} 0 \cdot x_{(j+1)(j+1)} &= \left( \sqrt{\frac{j+1}{2j}} \frac{1}{j+1} a_j^j + \sqrt{\frac{j+2}{2(j+1)}} a_{j+1}^j \right) x_{(j+1)(j+1)}, \\ 0 \cdot x_{(j+2)(j+2)} &= \left( \sqrt{\frac{j+1}{2j}} \frac{1}{j+1} a_j^j + \sqrt{\frac{j+2}{2(j+1)}} a_{j+1}^j + \frac{1}{j+2} \sqrt{\frac{j+3}{2(j+2)}} a_{j+2}^j \right) x_{(j+2)(j+2)}, \end{aligned}$$

e, em geral,

$$0 \cdot x_{ss} = \left( \sum_{i=j}^{s-1} \sqrt{\frac{i+1}{2i}} \frac{1}{i+1} a_i^j + \sqrt{\frac{s+1}{2s}} a_s^j \right) x_{ss},$$

para  $s \in \{j+1, j+2, \dots, n-1\}$ . Resta verificar que

$$\sum_{i=j}^{s-1} \sqrt{\frac{i+1}{2i}} \frac{1}{i+1} a_i^j + \sqrt{\frac{s+1}{2s}} a_s^j = 0,$$

que provamos por indução. Para  $s = j+1$ ,

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{j+1}{2j}} \frac{1}{j+1} a_j^j + \sqrt{\frac{j+2}{2(j+1)}} a_{j+1}^j \\ &= \sqrt{\frac{j+1}{2j}} \cdot \frac{1}{j+1} \sqrt{\frac{2j}{j+1}} - \frac{1}{j+1} \sqrt{\frac{2(j+1)}{j+2}} \sqrt{\frac{j+2}{2(j+1)}} = 0. \end{aligned}$$

A hipótese de indução é que, para  $s = k \in \{j+1, j+2, \dots, n-1\}$ ,

$$\sum_{i=j}^{k-1} \sqrt{\frac{i+1}{2i}} \frac{1}{i+1} a_i^j + \sqrt{\frac{k+1}{2k}} a_k^j = 0.$$

É só calcular:

$$\begin{aligned} \sum_{i=j}^k \sqrt{\frac{i+1}{2i}} \frac{1}{i+1} a_i^j + \sqrt{\frac{k+2}{2(k+1)}} a_{k+1}^j &= \sum_{i=j}^{k-1} \sqrt{\frac{i+1}{2i}} \frac{1}{i+1} a_i^j + \sqrt{\frac{k+1}{2k}} \cdot \frac{1}{k+1} a_{k+1}^j \\ &+ \sqrt{\frac{k+2}{2(k+1)}} a_{k+1}^j + \sqrt{\frac{k+1}{2k}} a_k^j + \sqrt{\frac{k+1}{2k}} a_k^j \\ &= \sqrt{\frac{k+1}{2k}} \left( \frac{1}{k+1} - 1 \right) a_k^j + \sqrt{\frac{k+2}{2(k+1)}} a_{k+1}^j \\ &= \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} = 0 \end{aligned}$$

□

Deste teorema obtemos que

$$A_j = \text{diag} \left( -\frac{1}{j} \sqrt{\frac{2j}{j+1}}, \dots, -\frac{1}{j} \sqrt{\frac{2j}{j+1}}, \sqrt{\frac{2j}{j+1}}, 0, \dots, 0, -\frac{1}{j} \sqrt{\frac{2j}{j+1}} \right), \quad (\text{A-8})$$

para todo  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ , onde o primeiro bloco  $\text{diag} \left( -\frac{1}{j} \sqrt{\frac{2j}{j+1}}, \dots, -\frac{1}{j} \sqrt{\frac{2j}{j+1}} \right)$  é uma matriz de dimensão  $j-1 \times j-1$ .

Provamos o seguinte teorema.

**Teorema A.3.** *Seja  $n \in \mathbf{N}$  e a base  $\Upsilon$  de  $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ , dada por*

$$\Upsilon = \{A_j, B_{sr}, C_{sr} : j \in \{1, \dots, n-1\}, r, s \in \{1, \dots, n\}, r > s\}$$

onde os  $A_j$  são descritos em (A-8) e os  $B_{sr}$  e  $C_{sr}$  são os elementos definidos na página 91. Para todo  $X \in \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})$ :

$$\text{Tr}(X^2) = \sum_{j=1}^{n-1} a_j^2 + \sum_{r,s=1, r>s}^n b_{sr}^2 - \sum_{r,s=1, r>s}^n c_{sr}^2 \quad (\text{A-9})$$

onde  $a_j, b_{sr}, c_{sr}$  são as coordenadas de  $X$  na base  $\Upsilon$  para os elementos  $A_j, B_{sr}, C_{sr}$  correspondentes.

**Corolário A.4.** *Seja  $\vec{e} = (e_1, e_2, \dots, e_N) \in \prod_{i=1}^N \mathcal{O}_{X_i}^*$  onde cada  $X_i \in \mathfrak{sl}(n, \mathbf{C})^*$ . Então*

$$q_k(\vec{e}) = 2I_k(\vec{e}), \quad \forall k \in \{1, \dots, N-1\} \quad (\text{A-10})$$

onde  $q_k(\vec{e}) = q(e_1 + e_2 + \dots + e_{k+1})$  ( $q$  é a forma quadrática definida pelo lado direito da equação (A-9)) e  $I_k$  foi definida na equação (A-1).

## B

### Grafos e triangulações

Neste apêndice damos as definições referentes a grafos e polígonos usados na tese, como referencias de estes conceitos ver [BM2011] ou [D2010] .

#### B.1

##### Grafos

- Um *grafo* é um par  $G = (E, G)$  onde  $E$  é um conjunto de elementos chamados vértices e  $G$  é um conjunto de pares de ditos vértices chamados arestas.
- Um *caminho num grafo* é uma sequencia finita de arestas que unem uma sequencia de vértices.
- Um *grafo dirigido* é um grafo cujos vértices são conectados por arestas dirigidas.
- Uma *árvore* é um grafo dirigido no qual cada par de vértices é conectado por exatamente um caminho.
- O *grau de um vértice* é o número de arestas que são incidentes em dito vértice.
- Uma *folha* de uma árvore é um vértice de grau 1.
- Um *arvore trivalente* é um arvore onde cada um de seus vértices tem grau 3 ou é uma folha.
- Um *grafo lagarta* é uma árvore no qual removendo as folhas obtemos um caminho.
- Uma *árvore filogenética* é uma árvore mais uma bijeção  $\Phi : X \rightarrow L$  chamada mapa de rotulagem onde  $L$  é o conjunto de folhas da árvore e  $X$  é um conjunto finito.

**Observação:** O conceito de árvore filogenética é usado em áreas como a biologia para descrever as relações evolutivas entre várias espécies ou outras entidades que se acredita terem uma ancestralidade comum.

**B.2****Triangulações**

- Uma *triangulação* de um polígono é a escolha de um conjunto de diagonais (segmentos que unem dois vértices não adjacentes) tal que não se interceptam no interior do polígono e que o conjunto seja maximal com essa propriedade, i.e se adicionamos qualquer diagonal ao conjunto perdemos a condição de que as diagonais não interceptam-se no interior.
- O *grafo dual* de uma triangulação de um polígono é o grafo cujos vértices são os triângulos da triangulação e dois vértices (triângulos) se conectam com uma aresta se e só se eles compartilham uma diagonal.
- Uma triangulação *leque* de um polígono é a triangulação resultante de escolher um vértice no polígono e traçar as diagonais do polígono a partir desse vértice.

## Referências bibliográficas

- [A1947] ADO, I. D.. **The representation of Lie algebras by matrices.** Uspehi Matem. Nauk (N.S.), 2:159–173, 1947.
- [A1978] ARNOLD, V. I.. **Mathematical Methods of Classical Mechanics.** Springer-Verlag New York, Springer Science+Business Media New York, 1 edition, 1978.
- [A1996] AUDIN, M.. **Spinning Tops: A Course on Integrable Systems.** Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 51 edition, 1996.
- [A2004] AUDIN, M.. **Torus Actions on Symplectic Manifolds.** Birkhäuser Basel, Springer Basel AG, 2 edition, 2004.
- [AFV2011] AGUIRRE, L.; FELDER, G. ; VESELOV, A. P.. **Gaudin subalgebras and stable rational curves.** Compositio Mathematica, 147:1463–1478, 2011.
- [AL1945] ARTOBOLEVSKY, I. I.; LEVITSKY, N. I.. **Tchebyshev’s Mechanisms.** P. L. Tchebyshev’s Scientific Heritage, Iss. 2. Theory of mechanisms — Moscow-Leningrad: AS USSR.:53–56, 1945.
- [BBT2003] BABELON, O.; BERNARD, D. ; TALON, M.. **Introduction to Classical Integrable Systems.** Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2003.
- [BCR1996] BALLESTREROS, A.; CORSETTI, M. ; RAGNISCO, O.. **N-dimensional classical integrable systems from Hopf algebras.** Czechoslovak Journal of Physics, 46(12):1153–1163, Dec. 1996.
- [BFGM2013] BISWAS, I.; FLORENTINO, F.; GODINHO, L. ; MANDINI, A.. **Polygons in Minkowski three space and parabolic Higgs bundles of rank 2 on  $\mathbb{CP}^1$ .** Transform. Groups, 18:995–1018, 2013.
- [BGM2020] BELMANS, P.; GALKIN, S. ; MUKHOPADHYAY, S.. **Graph potentials and moduli spaces of rank two bundles on a curve.** arXiv, 2009.05568, Sept. 2020.

- [BK2008] BERTLMANN, R. A.; KRAMMER, P.. **Bloch vectors for qudits.** Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 41(23):235303, May 2008.
- [BM2011] BONDY, A.; MURTY, U.. **Graph Theory.** Graduate Texts in Mathematics. Springer London, 2011.
- [C2008] CANNAS DA SILVA, A.. **Lectures on Symplectic Geometry.** Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Springer-Verlag GmbH Germany, part of Springer Nature, 1 edition, 2008.
- [C2011] (HTTPS://MATHOVERFLOW.NET/USERS/10446/ALEXANDER CHERVOV), A. C.. **Why are Jucys–Murphy elements; eigenvalues whole numbers?** MathOverflow. URL:<https://mathoverflow.net/q/83664> (version: 2011-12-17).
- [CFR2009] CHERVOV, A.; FALQUI, G. ; RYBNIKOV, L.. **Limits of Gaudin Systems: Classical and Quantum Cases.** Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications, 5, Mar. 2009.
- [CFR2010] CHERVOV, A.; FALQUI, G. ; RYBNIKOV, L.. **Limits of Gaudin algebras, quantization of bending flows, Jucys–Murphy elements and Gelfand–Tsetlin bases.** Lett. Math. Phys., 91(2):129–150, 2010.
- [CG2010] CHRISS, N.; GINZBURG, V.. **Representation Theory and Complex Geometry.** Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, 2010.
- [CL2021] CORREA, E. M.; GRAMA, L.. **Lax formalism for Gelfand-Tsetlin integrable systems.** Bull. Sci. Math., 170:Paper No. 102999, 40, 2021.
- [D1991] DRINFEL'D, V. G.. **On quasitriangular quasi-Hopf algebras and a group closely connected with  $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ .** Leningr. Math. J., 2(4):829–860, 1991.
- [D1996] DIXMIER, J.; SOCIETY, A. M.. **Enveloping Algebras.** Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 1996.
- [D2010] DIESTEL, R.. **Graph Theory,** volumen 173 de Graduate Texts in Mathematics. Springer, Heidelberg; New York, fourth edition, 2010.
- [DKN1985] DUBROVIN, B. A.; KRICHEVER, I. M. ; NOVIKOV, S. P.. **Integrable systems. i.** In: DYNAMICAL SYSTEMS. IV. SYMPLECTIC GEOMETRY AND ITS APPLICATIONS. TRANSL. FROM THE RUSSIAN BY G. WASSERMANN, p. 1. Berlin etc.: Springer-Verlag, 1985.

- [ER1996] ENRIQUEZ, B.; RUBTSOV, V.. **Hitchin systems, higher Gaudin operators and  $r$ -matrices**. *Mathematical Research Letters*, 3(3):343–357, 1996.
- [FM2003] FALQUI, G.; MUSSO, F.. **Gaudin models and bending flows: a geometrical point of view**. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 36:11655–11676, 2003.
- [FM2005] FLASCHKA, H.; MILLSON, J.. **Bending Flows for Sums of Rank One Matrices**. *Canadian Journal of Mathematics*, 57(1):114–158, 2005.
- [FR2015] FISHER, J.; RAYAN, S.. **Hyperpolygons and Hitchin systems**. *International Mathematics Research Notices*, 06 2015.
- [G1919] GARNIER, M. R.. **Sur une classe de systemes différentiels abéliens déduits de la théorie des équations linéaires**. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo (1884-1940)*, 43(1):155–191, 1919.
- [G1976] GAUDIN, M.. **Diagonalisation d’une classe d’Hamiltoniens de spin**. *J. Physique*, 37(10):1089–1098, 1976.
- [G1983] GAUDIN, M.. **La fonction d’onde de Bethe**. *Collection du Commissariat a l’Energie Atomique. Serie Scientifique*. Paris etc.: Masson. XVI, 330 p. (1983)., 1983.
- [GC1950] GELFAND, I. M.; CETLIN, M. L.. **Finite-dimensional representations of the group of unimodular matrices**. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 71(5):825–828, 1950.
- [GM2013] GODINHO, L. C.; MANDINI, A.. **Hyperpolygon spaces and moduli spaces of parabolic Higgs bundles**. *Adv. Math.*, 244:465–532, 2013.
- [GS1983] GUILLEMIN, V.; STERNBERG, S.. **The Gelfand-Cetlin system and quantization of the complex flag manifolds**. *J. Funct. Anal.*, 52(1):106–128, 1983.
- [GS1984] GUILLEMIN, V.; STERNBERG, S.. **Symplectic techniques in physics**. *Cambridge University Press, Cambridge*, second edition, 1990.
- [H1987-1] HITCHIN, N. J.. **The self-duality equations on a riemann surface**. *Proceedings of the London Mathematical Society*, s3-55(1):59–126, 1987.

- [H1987-2] HITCHIN, N. J.. **Stable bundles and integrable systems**. Duke Mathematical Journal, 54(1):91 – 114, 1987.
- [HK1997] HAUSMANN, J. C.; KNUTSON, A.. **Polygon spaces and Grassmannians**. Enseign. Math., 43 (2):173–198, 1997.
- [HK2015] HARADA, M.; KAVEH, K.. **Integrable systems, toric degenerations and Okounkov bodies**. Invent. Math., 202(3):927–985, 2015.
- [HSW2013] HITCHIN, N. J.; SEGAL, G. B. ; WARD, R. S.. **Integrable Systems: Twistors, Loop Groups, and Riemann Surfaces**. OUP Oxford, Oxford (UK), volume 4 de oxford graduate texts in mathematics edition, 2013.
- [J1971] JUCYS, A. A.. **Factorization of Young’s projection operators for symmetric groups**. Litovsk. Fiz. Sb., 11:1–10, 1971.
- [J1974] JUCYS, A. A.. **Symmetric polynomials and the center of the symmetric group ring**. Reports on Mathematical Physics, 5(1):107–112, 1974.
- [J1994] JEFFREY, L.. **Extended moduli spaces of flat connections on Riemann surfaces**. Mathematische Annalen, 298:667–692, 1994.
- [JW1992] JEFFREY, L.; WEITSMAN, J.. **Bohr–Sommerfeld orbits in the moduli space of flat connections and the Verlinde dimension formula**. Communications in Mathematical Physics, 150:593–630, 1992.
- [K1985] KOHNO, T.. **Serie de Poincaré–Koszul associée aux groupes de tresses pures**. Inventiones mathematicae, 82:57–76, 1985.
- [K1994] KLYACHKO, A. A.. **Spatial Polygons and Stable Configurations of Points in the Projective Line**, p. 67–84. Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 1994.
- [K1998] KARIMIPOUR, V.. **Integrable structure of the new Calogero models**. Journal of Mathematical Physics, 39:913–920, 1998.
- [K2002] KONNO, H.. **On the cohomology ring of the hyperkähler analogue of the polygon spaces**. Contemporary Mathematics, 309:129–149, 2002.
- [KBK1997] DE KERF, E. A.; BAUERLE, G. ; TEN KROODE, A.. **Lie algebras, Part 2: Finite and infinite dimensional Lie algebras and applications in physics**. Elsevier Science B.V., Amsterdam: North-Holland, 1st edition, 1997.

- [KM1996] KAPOVICH, M.; MILLSON, J. J.. **The symplectic geometry of polygons in Euclidean space.** *Journal of Differential Geometry*, 44:479–513, 1996.
- [M1976] MANAKOV, S. V.. **A remark on the integration of the Eulerian equations of the dynamics of an  $n$ -dimensional rigid body.** *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 10(4):93–94, 1976.
- [M1981] MURPHY, G. E.. **A new construction of Young’s seminormal representation of the symmetric groups.** *J. Algebra*, 69(2):287–297, 1981.
- [M2012] MANON, C.. **The algebra of conformal blocks.** *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 20(11):2685–2715, 2018.
- [M2014] MANDINI, A.. **The Duistermaat–Heckman formula and the cohomology of moduli spaces of polygons.** *Journal of Symplectic Geometry*, 12(1):171 – 213, 2014.
- [MF1981] MIŠČENKO, A. S.; FOMENKO, A. T.. **Integration of Hamiltonian systems with noncommutative symmetries.** *Trudy Sem. Vektor. Tenzor. Anal.*, 20:5–54, 1981.
- [MR2018] MIKHALKIN, G.; RAU, J.. **Tropical Geometry.** Unpublished, 2018.
- [MS1980] MEHTA, V.; SESHADRI, C.. **Moduli of Vector Bundles on Curves with Parabolic Structures.** *Mathematische Annalen*, 248:205–240, 1980.
- [MS1998] MCDUFF, D.; SALAMON, D.. **Introduction to Symplectic Topology.** *Oxford mathematical monographs.* Clarendon Press, 1998.
- [MW1974] MARSDEN, J.; WEINSTEIN, A.. **Reduction of symplectic manifolds with symmetry.** *Reports on Mathematical Physics*, 5(1):121–130, 1974.
- [N1998] NAKAJIMA, H.. **Quiver varieties and Kac–Moody algebras.** *Duke Mathematical Journal*, 91(1):515—560, 1998.
- [NNU2010] NISHINO, T.; NOHARA, Y. ; UEDA, K.. **Toric degenerations of Gelfand-Cetlin systems and potential functions.** *Adv. Math.*, 224(2):648–706, 2010.

- [NNU2012] NISHINOU, T.; NOHARA, Y. ; UEDA, K.. **Potential functions via toric degenerations**. Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences, 88(2):31 – 33, 2012.
- [NU2014] NOHARA, Y.; UEDA, K.. **Toric degenerations of integrable systems on Grassmannians and polygon spaces**. Nagoya Mathematical Journal, 214:125–168, 2014.
- [NU2015] NOHARA, Y.; UEDA, K.. **Goldman systems and bending systems**. *Canad. J. Math.*, 67(5):1109–1143, 2015.
- [NU2020] NOHARA, Y.; UEDA, K.. **Potential functions on Grassmannians of planes and cluster transformations**. *J. Symplectic Geom.*, 18(2):559–612, 2020.
- [OCV2011] O’MEARA, K.; CLARK, J. ; VINSONHALER, C.. **Advanced Topics in Linear Algebra: Weaving Matrix Problems Through the Weyr Form**. Oxford University Press, Oxford (UK), 2011.
- [OV2005] VERSHIK, A.; OKOUNKOV, A.. **A new approach to the representation theory of the symmetric groups. ii**. *Journal of Mathematical Sciences*, 131:5471–5494, 11 2005.
- [PY2020] PANYUSHEV, D. I.; YAKIMOVA, O. S.. **Poisson-commutative subalgebras and complete integrability on non-regular coadjoint orbits and flag varieties**. *Mathematische Zeitschrift*, 295(1):101–127, 2020.
- [R2018] RYBNIKOV, L.. **Cactus group and monodromy of Bethe vectors**. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 1:202–235, 2018.
- [SS2004] SPEYER, D.; STURMFELS, B.. **The tropical Grassmannian**. *Adv. Geom.*, 4(3):389–411, 2004.
- [TW1984] THURSTON, W. P.; WEEKS, J. R.. **The Mathematics of Three-dimensional Manifolds**. *Scientific American*, 251(1):108–121, 1984.
- [V1991] VINBERG, E. B.. **On certain commutative subalgebras of a universal enveloping algebra**. *Mathematics of the USSR-Izvestiya*, 36:1–22, 1991.
- [V2014] VINBERG, E. B.. **Limits of integrable Hamiltonians on semi-simple Lie algebras**. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 48(2):39–50, 2014.

- [VY2019] VINBERG, E. B.; YAKIMOVA, O. S.. **Complete families of commuting functions for coisotropic Hamiltonian actions.** *Adv. Math.*, 348:523–540, 2019.
- [W1985] WALKER, K.. **Configuration Spaces of Linkages.** undergraduate thesis, Princeton University, Princeton, 1985.

## Índice Remissivo

$n$ -ágono, 37, 87

aljava estrelada, 16, 41

representação, 41

anel de polinômios, 21, 33, 67

ação de grupo de Lie, 25

adjunta, 26

coadjunta, 27, 34, 38

conjugada, 26

diferenciável, 25

estabilizador, 26

hamiltoniana, 16, 33

mapa momento, 16, 34

órbita, 26

coadjunta, 16, 45, 46

colchete de Poisson, 17, 24, 25, 29,  
59, 60

conexões holomorfas, 66

coordenadas ação-ângulo, 40, 88

degeneração tórica, 74

Deligne–Mumford, espaço de  
módulos, 18, 88

elementos de

Young–Jucys–Murphy, 11,  
12, 17, 63, 78

espaço de  $\mathfrak{g}$ -polígonos, 49

espaço de hiperpolígonos, 16, 17,  
44

espaço de polígonos, 10, 16, 37

estrutura de Jordan, 47

formula de Frobenius, 47

fibrado cotangente, 12, 21, 28

Gaudin

elementos de, 17, 62, 78

modelo, 17

morfismo, 61

método, 16, 17, 61

grafo, 96

caminho num, 96

dirigido, 96

grau de vértice, 96

lagarta, 85, 96

não lagarta, 85

ultramétrica, 88

árvore, 96

árvore filogenética, 88, 96

árvore trivalente, 88, 96

Grassmanniano, 16, 35, 40, 71

grupo, 21

anel de, 16, 21

de calibrações, 66

de Lie, 25

semisimples, 27

álgebra linear, 26

simétrico, 21

anel do, 11, 60

Hitchin

base, 67

mapa de, 67

Kempf–Ness, teoria, 10

matrizes

- de Gell-mann, 89
- de Gell-mann generalizadas, 89
- de Pauli, 89
- números de Betti, 10
- operadores diferenciais, 14, 20, 21, 24
- parabólico
  - campo de Higgs, 65
  - estrutura, 64
  - fibrado, 64
    - de endomorfismos
      - fortemente, 65
    - de Higgs, 12, 17, 65
    - estável, 64
    - log-canônico, 65
    - semi-estável, 64
  - grau, 64
  - inclinação(slope), 64
  - sub-fibrado, 64
- Poincaré–Birkhoff–Witt
  - isomorfismo de, 25
- sistema integrável, 10, 11, 16, 29
  - de Belmans–Galkin–Mukhopadhyay, 12, 14, 17, 75
  - de Garnier–Gaudin–Hitchin, 12–14, 16, 17, 67, 89
    - Hamiltonianas, 78, 82, 86, 87
    - hamiltonianas, 16, 18
  - de Gelfand–Cetlin, 11, 17, 30
  - de Jeffrey–Weitsman, 12–14, 17, 76, 88
  - de Kapovich–Millson, 12–14, 16–18, 38, 76, 84
    - fluxo hamiltoniano, 11
    - Hamiltonianas de
      - dobramento, 78, 82, 86, 87
      - hamiltonianas de
        - dobramento, 11, 16, 18, 48, 89
        - de Nohara–Ueda, 12, 13, 17, 75
- subálgebra de Gelfand–Cetlin, 63
- teorema de Ado, 23
- teoria de invariantes geométrica, 10
- transporte simplético, 74
- triangulação, 11, 97
  - leque, 19, 85, 97
  - não leque, 85, 88
- variedade hiperkähler, 44
- variedade algébrica complexa
  - projetiva, 10
- variedade simplética, 16, 28
  - colchete de Poisson associado, 29
  - forma simplética, 28
    - forma de
      - Kirillov–Kostant–Souriau, 16, 32, 34, 49
  - holomórfica, 29
  - par de Lax, 16, 30
    - equação de Lax, 30
    - equações de Hamilton, 30
    - matriz auxiliar, 30
    - matriz de Lax, 30
  - redução simplética, 16, 35
    - redução por etapas, 16, 36
- simpletomorfismo, 29
- sistema hamiltoniano, 29
  - admite par de Lax, 30
  - campo hamiltoniano, 29
  - função hamiltoniana, 29
- álgebra, 20
  - associada graduada, 14, 21
  - associativa, 16, 20–22
  - comutativa, 21

- de Drinfeld–Kohno, 17
- de Kohno–Drinfeld, 17, 22, 59
- de Lie, 16, 20, 22
  - colchete de Lie, 48
  - colchete de Lie–Poisson, 48
  - forma de Killing, 23, 24
  - métrica, 49
  - representação, 22, 23
  - representação adjunta, 22
  - semisimples, 23
- de Poisson, 16, 20, 24
- envelopante, 16, 22
- envelopante universal, 24
- filtração na, 16, 20, 21
- forma invariante, 23, 27
- graduada, 21
- graduação na, 16, 20, 21
- morfismo, 22
- quase-comutativa, 16, 24
- simétrica, 21
- tensorial, 21