

3. Otimização sob Incerteza

Os problemas de otimização tentam resolver, de forma eficiente, situações do mundo real por meio de modelos matemáticos que utilizam parâmetros incertos. Pode-se encontrar na literatura, diferentes abordagens para lidar com estas incertezas, dentre as quais a programação estocástica.

3.1. Programação Estocástica

A programação estocástica é definida como um modelo de otimização que apresenta um ou mais parâmetros estocásticos, também conhecidos como fatores de risco. O objetivo é encontrar uma solução ótima, dadas todas as possíveis realizações desses parâmetros. Pode ser dividida em:

- Modelos de recurso: Esta abordagem foi proposta originalmente por Dantzig e Beale, ambos em 1955, para problemas de programação estocástica com dois estágios. Nele uma decisão de primeiro estágio é tomada sem o conhecimento dos valores futuros dos parâmetros estocásticos e, em seguida, uma decisão de recurso é efetuada dependendo da realização obtida. Apesar de ter sido proposto para solução de modelos de programação estocástica de dois estágios, pode ser estendido para modelos multi-estágio.
- Modelos probabilísticos: Esta abordagem foi apresentada por Charnes e Cooper (1959) e permite que algumas restrições de segundo estágio sejam expressas em termos de declarações probabilísticas sobre as decisões de primeiro estágio. Modelos probabilísticos são úteis quando os custos e benefícios associados às decisões de segundo estágio são difíceis de serem avaliados (Ribas 2008).

De acordo com Valladão (2008), a classe de modelos de programação estocástica mais importante dentro do ALM são os modelos de recurso. Utilizando uma abordagem linear multi-estágio, muitos autores desenvolveram modelos de ALM com programação estocástica, principalmente para fundos de pensão.

Modelo de Programação Linear Estocástica com Dois Estágios

O modelo de programação estocástica mais conhecido é o de programação linear de dois estágios (Shapiro e Philpott, 2012). Esse modelo divide as variáveis de decisão em dois estágios, como o nome sugere. As variáveis do primeiro estágio devem ser decididas antes da realização das incertezas e as variáveis de segundo estágio são usadas como medidas de correção contra qualquer inviabilidade que tenha surgido, após a realização das incertezas. Esse modelo pode ser formulado da seguinte maneira:

Modelo 3.1: Modelo de Programação Estocástica com Dois Estágios

$$\text{Minimizar} \quad c^T x + E[Q(x, \xi)] \quad (3.1)$$

sujeito a

$$Ax \leq b \quad (3.2)$$

$$x \geq 0 \quad (3.3)$$

Onde $Q(x, \xi)$ é o valor ótimo do problema de segundo estágio representado abaixo:

$$\text{Minimizar} \quad q^T y \quad (3.4)$$

sujeito a

$$Wy \leq h - Tx \quad (3.5)$$

$$y \geq 0 \quad (3.6)$$

Nesta formulação, x é o vetor das variáveis de decisão de primeiro estágio; c , A e b são os dados associados ao problema de primeiro estágio; y é o vetor das

variáveis de decisão de segundo estágio; e $\xi = (q, T, W, h)$ contém os dados para o problema de segundo estágio, que podem ser representados por variáveis aleatórias com distribuição de probabilidade conhecidas. Ressalta-se que as variáveis q, T, W, h são as variáveis de decisão do segundo estágio.

A decisão de primeiro estágio x depende apenas da informação disponível até aquele momento e , dessa forma, independe das realizações do segundo estágio. Isto é, no primeiro estágio, deve-se tomar a decisão do tipo “aqui e agora” do vetor de x , antes da realização das incertezas ξ . No segundo estágio, as informações incertas ξ já estão disponíveis, e é tomada a decisão sobre o valor do vetor y .

Modelo de Programação Linear Estocástica Multi-estágios

No caso da programação estocástica multi-estágio, os acontecimentos futuros θ são revelados progressivamente, de forma que haja um vetor de ajuste para cada novo estágio do problema.

$$\begin{aligned}\xi &= \{\xi_1, \dots, \xi_{e-1}\} \\ y(\xi) &= \{y(\xi_1), \dots, y(\xi_{e-1})\}\end{aligned}$$

Onde e é o número de estágios do problema.

A solução desse problema de otimização representa uma decisão sob incerteza, estruturada em uma árvore de possibilidades que representa, por sua vez, o futuro. Dessa maneira, a tomada de decisão é condicionada a cada nó da árvore, levando em consideração a informação até aquele ponto e o futuro relativo às suas ramificações, ou seja aos seus nós dependentes.

3.2. Otimização de Cenários

Modelos baseados em cenários correspondem a uma metodologia útil para lidar com incertezas. Em tais modelos utiliza-se uma árvore de possibilidades, que

traduzem as diferentes configurações de cenários possíveis, representando uma possível sequência de realizações sobre um horizonte de planejamento.

Nesta seção serão desenvolvidos modelos que utilizam a média e a variância, obtidas através de cenários, como o Modelo do Desvio Absoluto Médio (MAD), desenvolvido por Konno e Yamazaki (1991) e o Modelo de Maximização da Utilidade Esperada.

O Modelo do Desvio Absoluto Médio

Konno e Yamazaki (1991) propuseram um modelo de otimização de portfólio que utiliza como medida de risco o desvio absoluto médio. Tal formulação considera que as incertezas com relação aos retornos dos ativos candidatos a compor o portfólio, são representadas de forma discreta através de cenários.

Modelo 3.2: Modelo Otimização de Portfólio com Desvio Absoluto Médio

$$\text{Minimizar} \quad \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S y^s \quad (3.7)$$

sujeito a

$$y_-^s \geq - \sum_{i=1}^N (\tilde{r}_i^s - \bar{r}_i) x_i \quad (3.8)$$

$$y_+^s \geq \sum_{i=1}^N (\tilde{r}_i^s - \bar{r}_i) x_i \quad (3.9)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i \bar{r}_i = \mu \quad (3.10)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1 \quad (3.11)$$

$$x_i \geq 0 \quad (3.12)$$

$$i = 1, 2, 3 \dots N \text{ e } s = 1, \dots, S$$

Onde:

S = número de cenários utilizados para representar as incertezas com relação aos retornos dos ativos candidatos a compor o portfólio;

y^s = variável auxiliar utilizada na modelagem do desvio absoluto médio associada ao cenário s ;

N = número de ativos candidatos a compor o portfólio;

x_i = fração do capital a ser aplicado no ativo candidato i ;

$\tilde{r}_i^s$ = retorno do ativo i candidato a compor o portfólio;

$\bar{r}_i$ = valor esperado dos retornos do i -ésimo ativo candidato a compor o portfólio;

μ = valor esperado dos retornos do portfólio (dado pelo investidor).

A Função Objetivo de (3.7), em conjunto com os dois primeiros conjuntos de restrições (3.8) e (3.9), modelam o desvio absoluto médio dos retornos do portfólio, que deve ser minimizado. A restrição (3.10) representa o valor esperado do retorno do portfólio, dado a variável μ , que é o valor desejado pelo investidor. A restrição (3.11) garante que todo o capital disponível seja investido, e a última restrição (3.12) assegura que não haverá investimento negativo.

Vale ressaltar que a variável auxiliar y^s pode ser definida como:

$$y^s \geq y_+^s \text{ e } y^s \leq y_-^s$$

As variáveis y_+^s e y_-^s são introduzidas para medir o desvio positivo e negativo, respectivamente, do valor da média do portfólio (Zenios, 2007).

Segundo Manzano (2004), uma medida de risco alternativa, porém equivalente ao desvio absoluto médio, é a empregada por Zenios e Kang (1993), os quais trabalharam apenas com valores absolutos dos desvios negativos em relação à média (semi-desvio absoluto médio). A equivalência de tais métricas está no fato de o desvio absoluto médio ser simétrico em relação à média. Logo, o semi-desvio absoluto médio é igual à metade do desvio absoluto médio.

Otimização da Utilidade Esperada

O modelo de maximização da utilidade esperada, descrito a seguir, é baseado no modelo descrito no livro de Zenios (*Practical Financial Optimization*), de 2007. Entretanto, segundo este autor, esse modelo de otimização foi amplamente abordado por diversos autores, especialmente nos trabalhos de Samuelson (1948 e 1950).

Esse modelo também foi descrito por Sharpe (2006) em um artigo sobre a otimização de portfólios utilizando otimização da utilidade esperada. De acordo com Sharpe, o objetivo do investidor seria maximizar a utilidade esperada do seu *portfolio*. Nesse caso, associado ao retorno do *portfolio*, em cada cenário, está a utilidade que mede o “*nível de felicidade*” do investidor, associado ao retorno total em um determinado cenário. Dessa forma, o modelo de maximização da utilidade esperada pode ser descrito conforme o modelo abaixo:

Modelo 3.3: Maximização da Utilidade Esperada

$$\text{Maximizar} \quad \sum_{s=1}^S p^s \mathcal{U}(R(x; r^s)) \quad (3.13)$$

sujeito a

$$R(x; r^s) = \sum_{i=1}^N r_i^s x_i \quad (3.14)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1 \quad (3.15)$$

$$x_i \geq 0 \quad (3.16)$$

$$i = 1, 2, 3 \dots N \text{ e } s = 1, \dots, S$$

Onde:

N = número de ativos candidatos a compor o portfólio;

x_i = fração do capital a ser aplicado no ativo i ;

S = número de cenários utilizados na representação das incertezas com relação aos retornos dos ativos candidatos a compor o portfólio;

r^s = retorno do portfólio no cenário s ;

r_i^s = retorno do i-ésimo ativo no cenário s;

p^s = probabilidade estatística de ocorrência do cenário s.

A Função Objetivo de (3.13), em conjunto com a primeira restrição (3.14), modela a maximização da utilidade esperada. Ou seja, a Função Objetivo tem como meta maximizar a utilidade esperada do retorno do portfolio em cada cenário s, denotada como $\mathcal{U}(R(x; r^s))$, dado a probabilidade deste cenário ocorrer (p^s). A restrição (3.14) representa o retorno do portfolio no ambiente de cenários. A restrição (3.15) garante que todo o capital disponível seja investido, e a última restrição (3.16) assegura que não haverá investimento negativo.

Assim, a utilidade foi incorporada no modelo de otimização, com a finalidade de obter como resultado uma estrutura do *portfolio* que otimize a preferência do investidor.