Referências Bibliográficas

ASKEY, R.; WILSON, J. *Some Basic Hypergeometric Polynomial that Generalize Jacobi Polynomial*, Memoirs of the American Mathematical Society, v. 54, p. 1-55, 1985.

AUGUSTO, F. *Mapas de Amplitude Sísmica para Incidência Normal no Reservatório Namorado, Bacia de Campos*. Rio de Janeiro, 2009. 116 f. Dissertação- Ministério da Ciência e Tecnologia, Observatório Nacional, Brasil.

BAZARGAN, H.; CHRISTIE, M. *Efficient Polynomial Chaos Proxy-based History Matching and Uncertainty Quantification for Complex Geological Structures*. In: SPE Kuwait International Petroleum Conference and Exhibition held in Kuwait City, Kuwait, SPE 163282, 2012.

BELMAM, R. *Dynamic Programming*. Princeton New Jersey: Princeton University Press, 1957.

BREIMAN, L. *Probability*. University of California, Berkeley: SIAM, Philadelphia, 1992.

BREXIS, H. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. New York: Springer New York, 2011.

BLATMAN, G. *Adaptative Sparse Polynomial Chaos Expansions for Uncertainty Propagation and Sensitivity Analysis*. Clermont-Ferrand, 2009. 238 p. Tese (Especialização em mecânica)- Institut Français de Mécanique Avancée et Université Blaise Pascal.

Boyd, J.P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. 2 ed. University of Michigan: DOVER Publications, Inc., New York , 2000.

CAMERON, R.H.; MARTIN, W.T. *The orthogonal Development of Non-Linear Functionals in Series of Fourier-Hermite Functionals*. Annals of Mathematics, Second Series, Vol 48, Abril, 1947, p. 385-392. Disponível em: <<http://www.jstor.org/stable/1969178>>. Acesso em: 14 dezembro, 2013.

CHIHARA, T.S. *An introduction to Orthogonal Polynomials*. Purdue University, Calumet Campus: Gordon and Breach Science Publishers, 1978.

COSTA, A. P. *Quantificação do Impacto de Incertezas e Análise de Risco no Desenvolvimento de Campos de Petróleo*. Brasil, 2003. 264 p. Tese de Doutorado (Especialização em Engenharia de Petróleo)- Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Estadual de Campinas.

DEBUSSCHERE, B. et al. *Numerical Challenges in the Use of Polynomial Chaos Representations for Stochastic Processes*. SIAM Journal of Scientific Computation, Sandia National Labs, v. 26, 2004, p. 698-719. Disponível em: <<http://www.siam.org/journals/sisc/26-2/42774.html>>.

DEVROYE, L. *Non-Uniform Random Variate Generation*. New York: Springer-Verlag New York Inc., 1986.

DURRET, R. *Probability: Theory and Examples*. 4 .ed. New York: Cambridge University Press, 2010.

ERNST, O. et al. *On the Convergence of Generalized Polynomial Chaos Expansions*. ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, v. 46, p. 317-339, 1999.

FISHMAN, G. *Monte Carlo: Concepts, Algorithms and Applications*. New York: Springer-Verlag, 1996.

GAUTSCHI, W. *Orthogonal Polynomials: Computation and Approximation*. Oxford: Numerical Mathematics and Scientific Computation, Oxford University Press, 2004.

GENTLE, J. *Elements of Computational Statistics*. New York: Springer-Verlag, 2002.

GHANEM, R.; SPANOS, P.D. *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*, New York: Springer-Verlag, 1991.

HAGAN, A. *Polynomial Chaos: A Tutorial and Critique from a Statistician's Perspective*. Lecture Note, University of Sheffield- UK, 2013.

HOFFMANN, J.; BRITO, R. *Propagação de Incertezas em Reservatórios de Petróleo usando o Método de Colocação Probabilística*, In: Congresso Brasileiro de PeD em Petróleo e Gás, n.5, 2004, Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, Brasil.

HOFFMANN, J.; BRITO, R. *Propagação de Incertezas em Reservatórios de Petróleo Usando o Método de Colocação Probabilística em Múltiplas Variáveis*, In: CONEM- Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, n. 5, 2010, Campina Grande, Paraíba, Brasil.

HOFFMAN, K.; KUNZE, R. *Linear Algebra*. Upper Saddle River: Prentice-Hall, 1961.

HOSDER, S.; WALTERS, R.; PEREZ, R. *A Non-Intrusive Polynomial Chaos Method for Uncertainty Propagation in CFD Simulations*. In: AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, n. 44, 2006, Reno, Nevada.

JANSON, S. *Gaussian Hilbert Spaces*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.

KHOSHNEVISAN, D. *Probability (Graduate Studies in Mathematics)*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 2007.

KOEKOEK, R.; SWARTTOU, R.F. *The Akey-Scheme of Hypergeometric Orthogonal Polynomial and its q -Analogue*. Technical Report 98-17, Department of technical Mathematics and Informatics, Delf University of Technology, Netherlands, 1996.

KRYLOV, V.I. *Approximate Calculation of Integrals*. Mineola, New York: Dover Publications, Inc., 1962.

KUBRUSLY, C.S. *Measure Theory: A First Course*. Massachusetts: Elsevier

Academic Press, 2007.

KUBRUSLY, C.S. *The Elements of Operator Theory*. 2. ed. New York: Birkhäuser, 2011.

LE MAITRE, O.P.; KNIO, O.M. *Spectral Methods for Uncertainty Quantification: With Applications to Computational Fluid Dynamics*. Ne York: Springer, 2010.

LI, H.; SARMA, P.; ZHANG, D. *Comparative Study of the Probabilistic Collocation and Experimental-Design Methods for Petroleum- Reservoir Uncertainty Quantification*. SPE Journal, v. 16, p.429-439, 2011.

LIRA, J.; WILLMERSDORF, R.; HOROWITZ, B. *Propagação de Incertezas em Reservatórios de Petróleo Usando a Expansão de Karhumem-Loèv no Ambiente DAKOTA*. In: CONEM- Congresso Nacional de Engenharia Mecânica, n. VI, 2010, Campina Grande- Paraíba, Brasil.

LIU, J. S. *Monte Carlo Strategies in Scientific Computing*. New York: Springer-Verlag, 2001.

MCKAY, M.; BECKMAN, R.; CONOVER, W. *A Comparison of Three Methods for Selecting Values of Input Variables in the Analysis of Output from a Computer Code*. Technometrics, v. 22, n.1, p. 55-61, 2000.

MONAHAM, J. *Numerical Methods of Statistic*. 2. ed. New York: Cambridge University Press, 2011.

MOROKOFF, W.; CAFLISCH, R. *Quasi-Monte Carlo Integration*. Journal of Computational Physics, Vol. 122, p. 218-230, 1995.

NIEDERREITER, H. *Quasi-Monte Carlo Methods and Pseudo-Random Numbers*. Bulletin of the American Mathematical Society, v. 84n. 6, p. 957-1041, novembro, 1978.

NIEDERREITER, H. *Random Numbbber Generation and Quasi-Monte Carlo Methods*. Philadelphia, Pennsylvania: SIAM, 1992.

NOVAK, E.; RITTER, K. *The Curse of Dimension and a Universal Method for Numerical Integration*. Multivariate Approximation and Splines, Birkhauser, p. 177-188, 1997.

OBERKAMPF, W. L. ; Helton, J. C.; SENTZ, K. *Mathematical representation of uncertainty*. AIAA Non-Deterministic Approaches Forum, p. 2001-1645, 2001.

RAMAMURTHY, D. *Smart Simulations Techniques for the Evaluation of Parametric Uncertainties in Black Box Systems*. Washington, 2005. 105 p. Master of Science in Computer Science- School of Electrical Engineering and Computer Science, Washington State University.

SARMA, P; XIE, J. *Efficient and Robust Uncertainty Quantification in Reservoir Simulation with Polynomial Chaos Expansions and Non-intrusive Spectral Projection*. In: SPE Reservoir Simulation Symposium held in The Woodlands, SPE n. 141963, 2011, Texas, USA.

SHEN, J.; TANG, T.; WANG, L.L. *Spectral Methods: Algorithms, Analysis and Applications*. New York: Springer, 2011.

STOER, J.; BULIRSCH, R.; GAUTSCHI, W. *Introduction to Numerical Analysis*. 3. ed. New York: Springer, 2002.

STROUD, A.; SECREST, D. *Gaussian Quadrature Formulas*. London: Prentice-Hall International, 1966.

SZEGO, G. *Orthogonal Polynomials*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1939.

TANTANG, M. *Direct Incorporation of Uncertainty in Chemical and Environmental Engineering Systems*. Massachusetts, 1995. 432 p. PhD thesis (Especialização em filosofia)- Department of Chemical Engineering, Massachusetts Institute of Technology.

WIENER, N. *The Homogeneous Chaos*. American Journal of Mathematics, v. 60, n. 4, p. 897–93, outubro, 1938.

XIU, D. *Numerical Methods for Stochastic Computations: A Spectral Method Approach*. United Kingdom: Princeton University Press, 2010.

XIU, D.; KARNIADAKIS, G.E. *Modeling Uncertainty in Steady State Diffusion Problems via Generalized Polynomial Chaos*. *Computer Methods Applied Mechanics and Engineering*, v. 191, n. 191, p. 4927–4948, junho, 2002.

XIU, D.; KARNIADAKIS, G.E. *The Wiener–Askey Polynomial Chaos for Stochastic Differential Equations*. *SIAM Journal Scientific Computing*, v. 24, p. 619–644, 2002.

XIU, D. et al. *Stochastic Modelling of Flow Structure Interactions Using Generalized Polynomial Chaos* *Journal of Fluids Engineering*, v. 124, p. 51-59, 2002.

XIU, D.; KARNIADAKIS, G.E. *A New Stochastic Approach to Transient Heat Conduction Modeling with Uncertainty* *International Journal of Heat and Mass Transfer*, v. 46, p. 4681–4693, maio, 2003.

Xiu, D. et al. *Generalized Polynomial Chaos Solution for Differential Equations with Random Inputs*. Research Report, n. 2005-1, Seminar for Applied Mathematics, ETH Zurich, Switzerland, p. 1-31, 2005.

ZEIN, S.; COLSON, B.; GLIENEUR, F. *An Efficient Sampling Method for Regression-Based Polynomial Chaos Expansion* *Commun. Comput. Phys.*, v. 10, n. 13, p. 1173-1188, 2013.

Apêndice - Espaços de Hilbert

O material que segue é um levantamento sobre conceitos da teoria em espaços de Hilbert, para fazer tal levantamento foi utilizado o Capítulo 5 do livro Kubrusly (2011).

Um espaço de Hilbert é um espaço produto interno completo. Em outras palavras, ele é um espaço linear equipado com uma estrutura algebraica e topológica. Assim como em espaços lineares de dimensão finita, em espaços de Hilbert podemos caracterizar todos os elementos a partir de uma base. Mais do que isso, agora temos a noção geométrica do $\langle ; \rangle$ que nos permite definir a ortogonalidade entre vetores.

9.0.1

Espaços com Produto Interno

Definição 9.1 *Um espaço linear (ou espaço vetorial) sobre um corpo $\mathbb{F}$ é um conjunto $\mathcal{X}$ com duas operações binárias: $\mathcal{X} \times \mathcal{X} \xrightarrow{+} \mathcal{X}$ (soma) e $\mathbb{F} \times \mathcal{X} \xrightarrow{\cdot} \mathcal{X}$ (multiplicação escalar) tal que as seguintes propriedades sejam satisfeitas:*

- (a)(a.1) $y + x \in \mathcal{X}, \forall y, x \in \mathcal{X}$;
- (a.2) *Comutativa: $y + x = x + y$ para todo $y, x \in \mathcal{X}$;*
- (a.3) *Associativa: $y + (x + z) = (y + x) + z$ para todo $y, x, z \in \mathcal{X}$;*
- (a.4) *Elemento neutro: existe um elemento $0 \in \mathcal{X}$, tal que $y + 0 = y$ para todo $y \in \mathcal{X}$;*
- (a.5) *Elemento inverso: para todo $x \in \mathcal{X}$ existe um elemento $(-x) \in \mathcal{X}$ tal que $(-x) + x = 0$;*
- (b)(b.1) $\alpha \cdot x \in \mathcal{X}$ para todo $x \in \mathcal{X}, \alpha \in \mathbb{F}$;
- (b.2) $\alpha \cdot (y + x) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$ para todo $y, x \in \mathcal{X}, \alpha \in \mathbb{F}$;
- (b.3) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$ para todo $x \in \mathcal{X}, \alpha, \beta \in \mathbb{F}$;
- (b.4) $\alpha \cdot (\beta x) = (\alpha\beta) \cdot x$ para todo $x \in \mathcal{X}, \alpha, \beta \in \mathbb{F}$;
- (b.5) *Existe um elemento $1 \in \mathbb{F}$, tal que $1 \cdot x = x$ para todo $x \in \mathcal{X}$;*

Daqui por diante, vamos denotar a multiplicação escalar, $\alpha \cdot x$ apenas por $\alpha x, \forall \alpha \in \mathbb{F}, x \in \mathcal{X}$. Em particular, se $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, então $\mathcal{X}$ é chamado de espaço linear real. Por outro lado, se $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, então $\mathcal{X}$ é chamado de espaço linear

complexo. Logo, a cada elemento x do espaço linear é chamado de vetor e o elemento α de $\mathbb{F}$ é chamado de escalar.

Definição 9.2 *Seja $\mathcal{X}$ um espaço linear sobre o corpo $\mathbb{F}$. Um produto interno sobre $\mathcal{X}$ é um mapa*

$$\langle \cdot; \cdot \rangle : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{F}$$

para o qual se verificam as seguintes condições, $\forall x, y, z \in \mathcal{X}$ e todo escalar $\alpha \in \mathbb{F}$:

- (a) *Homogeneidade:* $\langle \alpha x; y \rangle = \alpha \langle x; y \rangle$.
- (b) *Aditividade:* $\langle \alpha x + y; z \rangle = \langle \alpha x; z \rangle + \langle y; z \rangle$.
- (c) *Simetria Hermitiana:* $\langle \alpha x; y \rangle = \overline{\langle \alpha y; x \rangle}$.
- (d) *Não-negativa:* $\langle \alpha x; x \rangle \geq 0$.
- (e) *Positividade:* $\langle \alpha x; x \rangle = 0$ solo se $x = 0$.

Definição 9.3 *Seja $\mathcal{X}$ um espaço linear sobre $\mathbb{F}$. A norma de um elemento $x \in \mathcal{X}$ é um número real não negativo representado por $\|x\|$, associado com x , que satisfaz os seguintes axiomas $\forall x, y \in \mathcal{X}$ e $\alpha \in \mathbb{F}$:*

- (i) *Não-negativa:* $\|x\| \geq 0$ e $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- (ii) *Desigualdade triangular:* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
- (iii) *Homogeneidade:* $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$.

Pode-se verificar que a norma $\|\cdot\|$ induzida pelo produto interno em $\mathcal{X}$ é dada por $\|x\|^2 = \langle x; x \rangle$. Por outro lado, seja $(\mathcal{X}, \langle \cdot; \cdot \rangle)$ um espaço produto interno, Considere $\{x_n\}$ uma sequência em $(\mathcal{X}, \langle \cdot; \cdot \rangle)$. Dizemos que $\{x_n\}$ converge para x em $(\mathcal{X}, \langle \cdot; \cdot \rangle)$ se $\forall \epsilon > 0, \exists n_\epsilon \in \mathbb{N}; \|x_n - x\| < \epsilon, \forall n \geq n_\epsilon$, isto é $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| = 0$. Logo, a sequência $\{x_n\}$ é chamada de sequência convergente. Além disso, se $\{x_n\}$ é uma sequência convergente, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty, m \rightarrow \infty} \|x_n - x_m\| = 0. \quad (9-1)$$

Uma sequência de vetores $\{x_n\}$ em $\mathcal{H}$ que satisfaz a Equação 9-1 é chamada de sequência de Cauchy. Logo, um espaço se diz, completo se toda sequência de Cauchy é convergente. Com todas estas noções podemos definir um espaço de Hilbert.

Definição 9.4 *Um espaço $\mathcal{X}$ é um espaço de Hilbert se:*

- $\mathcal{X}$ é um espaço com produto interno.
- $\mathcal{X}$ é um espaço completo.

Mais concisamente, diremos que um espaço de Hilbert é um espaço completo com produto interno.

9.1 Ortogonalidade

Definição 9.5 *Seja $(\mathcal{X}, \langle \cdot ; \cdot \rangle)$ um espaço produto interno. Dizemos que dois vetores $x, y \in \mathcal{X}$, são ortogonais com relação ao produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ se:*

$$\langle x ; y \rangle = 0$$

Definição 9.6 *Um vetor x em $\mathcal{X}$ é ortogonal a um subconjunto A de $\mathcal{X}$, se $\langle x ; y \rangle = 0$ para cada $y \in A$.*

Proposição 9.1 *Seja A um subconjunto de $(\mathcal{X}, \langle \cdot ; \cdot \rangle)$. Se $\langle x, y \rangle = 0, \forall x \neq y$ em $\mathcal{X}$, então A é um conjunto ortogonal em $(\mathcal{X}, \langle \cdot ; \cdot \rangle)$.*

9.2 Bases Ortonormais

Um conjunto ortogonal em um espaço com produto interno $\mathcal{X}$ pode conter a origem de $\mathcal{X}$ ou não, e isto é relevante pois a origem é um vetor ortogonal a todos os outros vetores em $\mathcal{X}$. A seguir apresentaremos a principal propriedade algébrica dos conjuntos ortogonais que não contém a origem.

Definição 9.7 *Seja $\mathcal{X}$ um espaço linear sobre $\mathbb{F}$. Dizemos que x é uma combinação linear de $\{x_i\}_{i=1}^n$ se*

$$x = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n, \quad a_i \in \mathbb{F}, i = 1, \cdots, n.$$

Definição 9.8 *Seja $\mathcal{X}$ um espaço linear sobre $\mathbb{F}$. Dizemos que o conjunto $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ é linearmente independente (l.i.), se a equação*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$$

implica que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$, onde $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathcal{X}$.

No caso que exista algum $a_i \neq 0$ dizemos que $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ é linearmente dependente (l.d.), ou que os vetores são l.d.

Proposição 9.2 *Um conjunto ortogonal $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ em um espaço com produto interno é linearmente independente.*

Um subconjunto A de $\mathcal{X}$ é um conjunto ortonormal se satisfaz as seguintes duas condições:

1. $\langle x, y \rangle = 0$ para cada par de vetores distintos de A .
2. $\langle x, x \rangle = 1$ para cada $x \in A$.

Equivalentemente, $\{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ é uma família ortonormal de vetores em $\mathcal{X}$ se $\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta}$ para cada α e $\beta \in \Gamma$, onde $\delta_{\alpha\beta}$ representa a delta de Kronecker. É importante mencionar que cada conjunto ortogonal de vetores não nulos podem ser normalizados (ver processo de ortogonalização de Gram-Schmidt mais adiante).

Uma consequência direta da definição de conjuntos ortonormais, é a proposição abaixo:

Proposição 9.3 *Cada conjunto ortonormal em um espaço com produto interno é linearmente independente.*

Seja O a coleção de todos os conjuntos ortonormais em um espaço produto interno $\mathcal{X}$. Um conjunto $A \in O$ é maximal em O se não existe um conjunto $A' \in O$ tal que $A \subset A'$ (i.e. não existe um conjunto ortonormal A' em $\mathcal{X}$ que inclua A). Se A é maximal em O , então se diz que A é um conjunto maximal ortonormal no espaço com produto interno $\mathcal{X}$.

A proposição a seguir basicamente nos diz que em um espaço com produto interno de dimensão maior que um, existem vários conjuntos ortonormais que são maximais.

Proposição 9.4 *Se A é um conjunto ortonormal em um espaço produto interno $\mathcal{X}$, então existe um conjunto maximal ortonormal B em $\mathcal{X}$ tal que $A \subset B$.*

A Proposição 9.4 nos permite enunciar o seguinte resultado: os conjuntos maximais ortonormais em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ são os conjuntos ortonormais que geram $\mathcal{H}$.

Proposição 9.5 *Seja A um conjunto ortonormal em um espaço produto interno $\mathcal{X}$*

1. *Se $\bigvee A = \mathcal{X}$ então A é um conjunto ortonormal maximal.*

2. Se $\mathcal{X}$ é um espaço de Hilbert e A é um conjunto ortonormal maximal, então $\bigvee A = \mathcal{X}$

Uma base em um espaço produto interno $\mathcal{X}$ é um conjunto ortonormal que gera $\mathcal{X}$ (chamada também base de Hilbert para $\mathcal{X}$). Em outras palavras, um subconjunto A de um espaço com produto interno $\mathcal{X}$ é uma base ortonormal se:

1. A é um conjunto ortonormal.
2. $\bigvee A = \mathcal{X}$.

Como conclusão das proposições anteriores temos que, cada espaço de Hilbert não nulo tem uma base ortonormal. Agora só faltaria ver o que acontece com a cardinalidade de esta base, para isto enunciaremos o seguinte teorema:

Teorema 9.1 *Qualquer base ortonormal de um espaço de Hilbert tem a mesma cardinalidade.*

A dimensão ortogonal do espaço de Hilbert $\mathcal{X}$ é a cardinalidade de sua base ortonormal.

9.3

Processo de Ortogonalização de Gram- Schmidt

Utilizamos este processo para, a partir de um conjunto contável de vetores l.i. de um espaço com produto interno $\mathcal{X}$ sobre um corpo $\mathbb{F}$, construir um conjunto ortonormal.

Consideremos um conjunto $\{z_i\}_{i \geq 1}$ de $\mathcal{X}$, o produto interno $\langle \cdot ; \cdot \rangle$ e $\alpha_{ij} \in \mathbb{F}$, $\forall i, j$. Para construirmos o novo conjunto ortonormal contável $\{y_i\}_{i \geq 1}$, procedemos da seguinte forma:

1. O primeiro vetor do conjunto ortonormal é dado por:

$$y_1 = z_1.$$

2. Para determinarmos o segundo vetor, tomamos

$$y_2 = z_2 + \alpha_{2,1}y_1$$

e determinamos o valor de $\alpha_{2,1}$ de modo que y_1 seja ortonormal a y_2 , isto é,

$$\langle y_1 ; y_2 \rangle = 0.$$

Logo,

$$\langle y_1 ; z_2 + \alpha_{2,1}y_1 \rangle = 0$$

ou,

$$\alpha_{2,1} = -\frac{\langle y_1 ; z_2 \rangle}{\langle y_1 ; y_1 \rangle}.$$

3. Para determinarmos o terceiro valor do conjunto ortonormal, definimos

$$y_3 = z_3 + \alpha_{3,1}y_1 + \alpha_{3,2}y_2,$$

e determinamos o valor de $\alpha_{3,1}$, $\alpha_{3,2}$ de modo que y_1 e y_2 sejam ortogonais a y_3 , isto é:

$$\langle y_1 ; y_3 \rangle = 0 \text{ e } \langle y_2 ; y_3 \rangle = 0.$$

Logo,

$$\langle y_1 ; z_3 + \alpha_{3,1}y_1 + \alpha_{3,2}y_2 \rangle = 0 \text{ e } \langle y_2 ; z_3 + \alpha_{3,1}y_1 + \alpha_{3,2}y_2 \rangle = 0,$$

ou seja,

$$\alpha_{3,1} = -\frac{\langle y_1 ; z_3 \rangle}{\langle y_1 ; y_1 \rangle} \text{ e } \alpha_{3,2} = -\frac{\langle y_2 ; z_3 \rangle}{\langle y_2 ; y_2 \rangle}.$$

4. Procedendo da mesma forma, determinamos o j -ésimo vetor. Assim,

$$y_j = z_j + \alpha_{j,1}y_1 + \alpha_{j,2}y_2 + \alpha_{j,3}y_3 + \cdots + \alpha_{j,j-1}y_{j-1}$$

e determinamos os valores de $\alpha_{j,k}$, $k = 1, 2, \dots, j-1$, de modo que $y_1, y_2, \dots, y_{j-1}$ sejam ortogonais a y_j , isto é,

$$\langle y_k ; y_j \rangle = 0, k = 1, 2, \dots, j-1.$$

Logo,

$$\left\langle y_k ; z_j + \sum_{i=1}^{j-1} \alpha_{j,i}y_i \right\rangle, k = 1, 2, \dots, j-1.$$

Por tanto, para $j = 1, 2, 3, \dots$, o novo conjunto ortonormal é dada, em termos do conjunto l.i. inicial, por

$$y_j = z_j + \alpha_{j,1}y_1 + \alpha_{j,2}y_2 + \cdots + \alpha_{j,j-1}y_{j-1},$$

onde

$$\alpha_{j,k} = -\frac{\langle y_k ; z_j \rangle}{\langle y_k ; y_k \rangle}, k = 1, 2, \dots, j-1.$$

9.4

Teorema das Series de Fourier

O Teorema das Séries de Fourier caracteriza completamente um elemento em um espaço de Hilbert a partir dos elementos da base. Isto, é feito por meio de várias condições suficientes e necessárias para que um conjunto ortonormal seja uma base ortonormal em um espaço de Hilbert. Em particular, este teorema nos garante a existência e unicidade da expansão de qualquer vetor em um espaço de Hilbert em termos de cada base ortonormal.

Teorema 9.2 *Seja $B = \{e_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ um conjunto ortonormal em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) *B é uma base ortonormal para $\mathcal{H}$.*
- (b) *Cada $x \in \mathcal{H}$ tem uma expansão única em B tal que:*

$$x = \sum_{k \in N} \langle x; e_\gamma \rangle e_\gamma.$$

Esta equação é conhecida como a expansão de series de Fourier de x . Os elementos da família de escalares $\{\langle x; e_\gamma \rangle\}_{\gamma \in \Gamma}$ são chamados de coeficientes de Fourier de x com respeito a B .

- (c) *Para cada dois de vetores x, y em $\mathcal{H}$ se tem:*

$$\langle x; y \rangle e_\gamma = \sum_{\gamma \in \Gamma} \langle x, e_\gamma \rangle \overline{\langle y, e_\gamma \rangle}.$$

- (d) *Para cada $x \in \mathcal{H}$,*

$$\|x\|^2 = \sum_{\gamma \in \Gamma} |\langle x, e_\gamma \rangle|^2.$$

A igualdade acima é conhecida como identidade de Parseval.