

# 1

## Introdução

Os fenômenos físicos com os quais o ser humano se defronta na realidade são variados e possuem graus diferentes de complexidade. Historicamente, os modelos matemáticos são as melhores ferramentas intelectuais desenvolvidas pelo homem para compreender, antecipar os resultados e aumentar o seu grau de controle sobre a natureza. A presente dissertação irá investigar a aplicação da técnica de Caos Polinomial em modelos de reservatórios de petróleo (modelos tradicionalmente complexos) para redução do custo computacional. Tal redução será medida em termos do número de simulações utilizadas. Em particular, este trabalho tem como principais objetivos fazer um levantamento da técnica.

Existem dois entraves para modelar fenômenos físicos com um alto grau de complexidade: menor exatidão das respostas do modelo e maior tempo necessário para calcular as respostas do mesmo. Em especial, uma modelagem da extração de petróleo eficiente é aquela que concilia as informações físicas com critérios de vantagens econômicas para auxiliar na tomada de decisão. No contexto da tomada de decisão sobre investimento em petróleo, uma forma eficiente de proceder seria implementar computacionalmente a melhor modelagem física da geologia e do comportamento do fluido naquela região, para usar estas informações na decisão de viabilidade econômica da exploração. Em outras palavras, dadas as informações físicas específicas de um campo, um modelo implementado, poderia gerar como resposta um número que representaria o “potencial econômico” do campo (por exemplo, o Valor Presente Líquido, VPL).

A sua vez, um modelo é dito determinístico se para um conjunto conhecido de dados de entrada realizam-se cálculos que produzem respostas conforme descrito no parágrafo anterior. Porém, nem sempre a implementação do modelo determinístico é acessível para os tomadores de decisão. Portanto, vamos considerar o problema de estimar a resposta de um simulador cujas entradas são incertas. Neste texto o simulador será entendido como uma função do tipo “caixa preta”, isto é, um sistema de equações parciais cujo código computacional é desconhecido pelo usuário, que gera saídas mediante

entradas de tipos previamente estabelecidos. Resumindo, podemos caracterizar as etapas de um modelo da seguinte maneira:

**dados de entrada** → “caixa preta” → **dados de saída**

Além das limitações interpretativas que toda modelagem possui, existe também a dificuldade de estabelecer os valores reais dos parâmetros físicos que serão utilizados como parâmetros de entrada. Consequentemente, os dados de saída são também incertos. Uma maneira de capturar a noção de incerteza deste processo é assumir que os dados de entrada e de saída são variáveis aleatórias. No contexto de modelagem com variáveis aleatórias, o processo de decisão não se fundamenta mais na avaliação pontual da “caixa preta” a uma entrada particular, mas sim na esperança e variância da variável aleatória de saída, isto é, no seu primeiro e segundo momentos.

A inexatidão dos dados de saída podem comprometer o processo de tomada de decisão. Um dos maiores problemas, conforme ficará mais claro no decorrer desta dissertação, é a quantidade de chamadas à “caixa preta” necessárias para calcular o primeiro e segundo momentos da saída (ou seja, o número de simulações necessárias para o cálculo do valor esperado e da variância). De fato, a complexidade do problema faz com que o modelo que caracteriza o fenômeno seja igualmente complexo. Consequentemente, cada simulação tem um custo computacional maior.

Os parágrafos acima descrevem o panorama geral de como os modelos de decisão de investimento no setor de petróleo se estruturam, e os principais problemas associados à sua implementação. Agora, particularmente para este trabalho, nosso interesse são os parâmetros de entrada do tipo geológicas (por exemplo: porosidade e permeabilidade), e como possível resposta a produção acumulada de óleo, a produção acumulada de gás ou até o VPL.

O enfoque tomado é apenas na relação entre a saída aleatória para diferentes comportamentos nas variáveis aleatórias de entrada. Na literatura este campo é genericamente denominado de *propagação de incertezas*. Atualmente, a propagação de incertezas tem ganhado muito destaque na literatura (Blatman, 1992; Hosder et al., 2006; Ramamurthy, 2005). Em particular, na área de Petróleo<sup>1</sup> a propagação de incertezas permite avaliar com mais confiança o risco de investimentos em atividades de exploração e produção, por meio da Quantificação de Incerteza (QI). A QI é uma ferramenta cujo objetivo consiste em determinar o efeito na resposta do modelo mediante a uma variável aleatória

<sup>1</sup>Diversos trabalhos tem sido desenvolvidos, como por exemplo: Barzagan & Christie (2012); Costa (2003); Lira et al. (2011); Sarma (2011)

de entrada. Por sua vez, esta avaliação é de extrema importância para a gestão econômica deste setor, pois previsões erradas geram perdas substantivas.

Como os parâmetros de entrada são considerados aleatórios, então os métodos estocásticos são os mais utilizados. Tais métodos são o foco desta dissertação, cuja implementação nos permitirá calcular as estatísticas das saídas do modelo físico baseados em especificações de distribuições de probabilidade das entradas. Nesse universo, os métodos mais eficientes serão aqueles que requerem um número menor de iterações para convergir, isto é, métodos cujo resultado reduza o tempo computacional.

Segundo Liu (2001) o método mais popular para calcular os momentos da variável de saída é o método Monte Carlo (MC). Esta metodologia apresenta grandes vantagens por sua simplicidade e fácil implementação. O método de Monte Carlo tradicional consiste em extrair um conjunto de amostras independentes e identicamente distribuídas de uma população e simulá-las. Em seguida, construir um histograma a partir dos resultados e, assim, calcular as estatísticas desejadas. Porém, como o MC é baseado no Teorema do Limite Central (Fishman, 1996), este tem como desvantagem - bastante conhecida na literatura - a grande quantidade de chamadas da função “caixa preta”. Em particular, esta é uma das principais limitações na maioria das aplicações práticas na área de simulação de reservatórios (Li, et al., 2011, pp.429-439). Deste modo, precisamos outra técnica que se mostre mais favorável.

Expansão de Caos Polinomial (ECP) é uma técnica usada para modelar e propagar incertezas em simulações computacionais estocásticas. Este conceito foi originalmente introduzido por Wiener (1938) e é uma extensão do trabalho de Volterra em uma generalização de séries de Taylor para funcionais. Apesar disso, sua aplicação veio somente no final do século XX com o trabalho pioneiro de Ghanem & Spanos (1991). Eles aplicaram a expansão de ECP em problemas que apareciam no campo de mecânica sólida usando uma discretização de Elementos Finitos no espaço de variáveis. A partir de Ghanem & Spanos (1991), a técnica foi aplicada nas mais diversas áreas, dentre elas petróleo. Para maiores detalhes, ver: Barzagan (2012); Costa (2003); Hoffmann (2010); Hosder et al. (2006); Li et al. (2011) ; Sarma (2011).

Existem duas abordagens distintas do método ECP. A primeira é o método intrusivo, que requer a modificação do código do simulador numérico (“caixa preta”); o qual pode ser difícil e custosa. Devido a que estamos supondo que não temos acesso ao código fonte do simulador, esta abordagem não pode ser utilizada neste trabalho. Em contraposição ao método intrusivo, a literatura classifica a segunda abordagem como método não-intrusivo. As formulações de

Caos Polinomial pelos métodos não-intrusivos são utilizadas neste trabalho. Estes métodos observam a relação entre a variável aleatória de saída com as variáveis aleatórias de entrada, e buscam alguma estrutura particular, propriedades ou características, que permita calcular os momentos da variável de saída por meio de expressões simples que utilizam apenas os coeficientes dos polinômios da representação. Resultados mostram que os momentos podem ser calculados de forma eficiente por meio de poucas simulações (isto é, poucas chamadas à “caixa preta”). Consequentemente, o custo computacional para o cálculo dos momentos é reduzido.

No método não-intrusivo do ECP o cálculo dos coeficientes da expansão para a resposta das estatísticas de interesse é baseado em um conjunto de avaliações das respostas simuladas. Particularmente, para calcular estes coeficientes, utilizaremos o método de Projeção Espectral (ProjEsp). O método ProjEsp calcula os coeficientes da ECP através da ortonormalidade da base desta expansão. Daí, que a eficácia da técnica é diretamente proporcional à qualidade do método usado para estimar os coeficientes. Em particular, o método ProjEsp pode ser abordado por duas categorias de técnicas: técnicas de quadratura e técnicas de simulação.

As técnicas de quadratura são extremamente eficientes para dimensões baixas. Esta técnica será nossa proposta para este trabalho, uma vez que na atualidade a maioria de trabalhos utiliza esta técnica para propagar 3 ou 4 variáveis aleatórias. Além disso, os resultados para um conjunto pequeno de variáveis aleatórias de entrada, como as duas consideradas no nosso modelo (porosidade e permeabilidade), são melhores do ponto de vista computacional do que o tradicional Monte Carlo, o que representa um ganho sobre o que vinha-se fazendo.

Por outro lado, será visto que o ponto fraco do ECP via quadratura é exatamente a quantidade de variáveis de entrada (ou incertezas) que se deseja modelar. Isto pois, a quantidade de chamadas à caixa preta cresce exponencialmente com o número de variáveis e rapidamente esta se torna menos eficiente do que Monte Carlo. Este é um problema em aberto chamado “maldição da dimensionalidade”<sup>2</sup>. Particularmente na área de petróleo é possível ver que o número de incertezas (ou variáveis aleatórias) que se deseja propagar é grande. Assim, o tratamento da dimensionalidade se torna fundamental para a resolução de vários problemas aplicados.

Devido a que o número de simulações cresce exponencialmente o custo computacional vê-se afetado diretamente, pelo que surgem os métodos Quasi-

<sup>2</sup> Melhor conhecido no idioma inglês como “curse of dimensionality”.

Monte Carlo (QMC). Os métodos QMC são técnicas de simulação tipicamente mais eficientes para estimar integrais. Segundo Blatmam (2009) e Sarma & Xie (2011) os métodos QMC são mais eficientes que Monte-Carlo e que Hipercubo Latino na estimação numérica de integrais. Particularmente, usaremos as sequências de Sobol, propostas por Sarma & Xie (2011), como alternativa ante este problema da dimensionalidade. Para isto, são feitos alguns testes num reservatório fictício e também em funções determinísticas que nos ajudaram a medir o desempenho dos métodos QMC.

Portanto, neste trabalho apresentamos um levantamento da técnica de Expansão de Caos Polinomial aplicada na propagação de incertezas de até 4 variáveis aleatórias em modelos de reservatórios de petróleo fictícios. Especificamente, são comparadas as estimativas dos momentos (valor esperado e variância) da saída aleatória do modelo aproximadas pelo método de Projeção Espectral, com as estimativas aproximadas pelo método tradicional de Monte Carlo. Em especial, no método de ProjEsp calcula-se os momentos por meio de integração numérica dos coeficientes da ECP utilizando-se quadraturas gaussianas. De maneira paralela e com fins experimentais, como uma tentativa para mitigar o problema da “maldição da dimensionalidade” no cálculo numérico das integrais, acrescentamos a nossa análise o método QMC na propagação de incertezas. Reiterando que este é apresentado para mostrar os possíveis alcances desta técnica.

A presente dissertação está dividida em seis capítulos. Nos primeiros dois capítulos, enunciaremos alguns resultados tidos como básicos para a leitura deste texto. Entendemos por básicos, aqueles teoremas e noções fundamentais já consolidados na literatura que serão utilizados ao longo do texto. Vale a ressalva de que as proposições e teoremas enunciados neste capítulo não serão demonstrados, pois este não é o objetivo do capítulo, mas serão todos referenciados da literatura pertinente. Dividimos esta resenha em duas partes: no Capítulo 2 apresentamos algumas noções da teoria de probabilidade que serão utilizados ao longo do texto, e no Capítulo 3 apresentamos a caracterização dos polinômios ortogonais que serão usadas na ECP, e as quadratura Gaussianas associadas a estes polinômios.

No Capítulo 4 apresentamos a técnica de Caos Polinomial. Inicialmente, definimos alguns conceitos para conseguirmos estabelecer a noção de Caos Polinomial Homogêneo e, em seguida, o Caos Polinomial Generalizado.

Logo, no Capítulo 5 abordamos o problema de propagação de incertezas por meio do cálculo das estatísticas da resposta do modelo em questão. Definimos formalmente os métodos de Monte Carlo e Projeção Espectral por

meio da quadratura, respectivamente. Por fim, destacamos o problema em aberto da “maldição da dimensionalidade”.

No Capítulo 6 apresentamos os resultados obtidos na propagação de incertezas aplicados a dois modelos de reservatórios sintéticos, onde são comparados os métodos: Monte-Carlo e Projeção Espectral por meio da quadratura. Também acrescentamos os resultados obtidos pelo método QMC (Sobol). Além disso, são inseridos os resultados de testes à funções simples com até 15 variáveis aleatórias usando essas sequências de Sobol.

Finalmente, no Capítulo 7 são apresentadas as conclusões e possíveis trabalhos futuros.

Encerramos este trabalho com um apêndice baseado no levantamento de resultados de análise funcional que são usados ao longo do texto.