

**Karen Patricia Guevara Ramos**

**Propagação de Incertezas via Expansão por  
Caos Polinomial em Simulação de  
Reservatórios de Petróleo**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada ao Programa de Pos-graduação em Engenharia Elétrica da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Marco Aurélio Cavalcanti Pacheco

Rio de Janeiro  
Março de 2014



**Karen Patricia Guevara Ramos**

**Propagação de Incertezas via Expansão por Caos Polinomial  
em Simulação de Reservatórios de Petróleo**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica do Departamento de Engenharia Elétrica do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. Marco Aurélio Cavalcanti Pacheco**

Orientador

Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

**Prof. Carlos Kubrusly**

Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

**Dr. Alexandre Anozé Emerick**

Petróleo Brasileiro – Rio de Janeiro - Matriz

**Prof. Douglas Mota Dias**

Departamento de Engenharia Elétrica – PUC-Rio

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador Setorial do Centro  
Técnico Científico

Rio de Janeiro, 13 de março de 2014

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, da autora e do orientador.

### **Karen Patricia Guevara Ramos**

Graduou-se em Ciências Atuariais pela Universidade de Costa Rica (UCR) em 2010.

#### Ficha Catalográfica

Ramos, Karen Patricia Guevara

Propagação de incertezas via expansão por caos polinomial na simulação de reservatórios de petróleo / Karen Patricia Guevara Ramos; orientador: Marco Aurélio Cavalcanti Pacheco. –2014.

113 f.: il. (color.) ; 30 cm

Dissertação (mestrado)– Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Elétrica, 2014.

Inclui bibliografia.

1. Engenharia Elétrica – Teses. 2. Caos polinomial; . 3. propagação de incertezas; . 4. simulação de reservatórios; . 5. redução do custo computacional; . 6. polinômios ortogonais.. I. Pacheco, Marco Aurélio Cavalcanti. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Elétrica. III. Título.

CDD: 621.3

## Agradecimentos

A Deus por tudo, em particular por me ajudar nos momentos que mais precisava.

Ao meu orientador Prof. Marco Aurélio, pelo apoio e oportunidade de ser parte da equipe do Laboratório ICA.

Aos meus pais, Carolina e Santos, pela educação, carinho e apoio em cada etapa da minha vida e que, mesmo distante, sempre se mostraram presentes.

Ao meu namorado Liev, por toda sua ajuda incondicional desde o início desta etapa, mas, sobretudo, pela paciência que sempre teve comigo nos meus momentos de irritação e desânimo.

Aos meus irmãos e segunda família Ferreira Maribondo; que de uma forma ou de outra me estimularam e me ajudaram.

A João, por seu apoio incondicional nos momentos bons e não tanto, e por acreditar sempre em mim. Também aos meus colegas de equipe Iuri e Pedro, pelos ensinamentos e disposição em me ajudar neste trabalho.

Aos professores Kubrusly (PUC) e William, Alexander e Roldán (UCR) que sempre me incentivaram e me brindaram todo seu apoio.

Aos professores que participaram da Comissão examinadora.

A CAPES, à PUC-Rio, e à Petrobrás, pelos auxílios concedidos, sem os quais este trabalho não poderia ter sido realizado.

## Resumo

Ramos, Karen Patricia Guevara; Pacheco, Marco Aurélio Cavalcanti. **Propagação de Incertezas via Expansão por Caos Polinomial em Simulação de Reservatórios de Petróleo**. Rio de Janeiro, 2014. 113 p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Este trabalho tem por objetivo investigar a redução do custo computacional associado ao cálculo das principais estatísticas das saídas dos modelos de propagação de incertezas. Para tal, apresentamos uma implementação alternativa ao método tradicional de Monte Carlo, chamado Caos Polinomial; que é adequado a problemas onde o número de variáveis de incerteza não é muito alto. No método Caos Polinomial, o valor esperado e a variância das saídas do simulador são diretamente estimados, como funções de distribuições de probabilidade de variáveis de incerteza na entrada do simulador. A principal vantagem do método de Caos Polinomial é que o número de pontos necessários para uma boa estimativa das estatísticas da saída de um simulador, comparado com Monte Carlo, é menor. Aplicações de Caos Polinomial em reservatórios de petróleo serão apresentadas para a propagação de até quatro variáveis, apesar do método poder ser aplicado a problemas de dimensões maiores. Nossos principais resultados são aplicados a dois modelos de reservatórios de petróleo sintéticos.

## Palavras-chave

Caos polinomial; propagação de incertezas; simulação de reservatórios; redução do custo computacional; polinômios ortogonais.

## Abstract

Ramos, Karen Patricia Guevara; Pacheco, Marco Aurélio Cavalcanti (Advisor). **Uncertainty Propagation using Polynomial Chaos Expansion in Oil Reservoir Models**. Rio de Janeiro, 2014. 114p. MSc. Dissertation - Departamento de Engenharia Elétrica, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

In this work we investigate the reduction of the computational cost of the calculus of statistical moments of simulator's output in uncertainties propagation's models. For do that, we present an alternative's implementation to the traditional Monte Carlo's Method, called Polynomial Chaos; that is adequate to problems where the number of uncertain variables is not so high. In the Polynomial Chaos method, the expectation and the variance of the simulator's output are directly estimated, as functions of the probability distribution of the uncertain variables in simulator input. The great advantage of Polynomial Chaos is that number of points necessary for a good estimation of the output statistics have smaller magnitude, compared to the Monte Carlo Method. Applications of Polynomial Chaos on oil reservoir simulations will be presented. As it is just a preliminar implementation, we just treat propagation's problems with at most four uncertainties variables, despite of the method being applicable to problems with more dimensions. Our main results are applied to two models of synthetic oil reservoirs.

## Keywords

Polynomial chaos; propagation of uncertainties; reservoir simulation; reduction of computational cost; orthogonal polynomials.

## Sumário

|     |  |            |
|-----|--|------------|
| 1   | Introdução                                   | <b>10</b>  |
| 2   | Conceitos de Teoria da Probabilidade         | <b>16</b>  |
| 2.1 | Espaços de Probabilidade                     | 16         |
| 2.2 | Funções Mensuráveis                          | 18         |
| 2.3 | Operador Integração                          | 23         |
| 2.4 | Espaço $L^2$                                 | 25         |
| 3   | Polinômios Ortogonais e Quadratura Gaussiana | <b>29</b>  |
| 3.1 | Polinômios Ortogonais                        | 30         |
| 3.2 | Polinômios Ortogonais Clássicos              | 35         |
| 3.3 | Quadraturas Gaussianas                       | 40         |
| 3.4 | Alguns exemplos de quadraturas Gaussianas    | 44         |
| 4   | Expansão de Caos Polinomial                  | <b>51</b>  |
| 4.1 | Caos Polinomial Homogêneo                    | 52         |
| 4.2 | Caos Polinomial Generalizado                 | 63         |
| 5   | Propagação de Incertezas                     | <b>67</b>  |
| 5.1 | Formulação Matemática                        | 68         |
| 5.2 | Método Monte Carlo                           | 70         |
| 5.3 | Método da Quadratura                         | 72         |
| 5.4 | Maldição da dimensionalidade                 | 77         |
| 6   | Estudo de Caso                               | <b>81</b>  |
| 6.1 | Modelagem                                    | 81         |
| 6.2 | Estudo de Caso 1                             | 83         |
| 6.3 | Estudo de Caso 2                             | 86         |
| 6.4 | Problema da Maldição da Dimensionalidade     | 96         |
| 7   | Conclusões e Trabalhos Futuros               | <b>98</b>  |
| 8   | Referências Bibliográficas                   | <b>101</b> |
| 9   | Apêndice - Espaços de Hilbert                | <b>107</b> |
| 9.1 | Ortogonalidade                               | 109        |
| 9.2 | Bases Ortonormais                            | 109        |
| 9.3 | Processo de Ortogonalização de Gram- Schmidt | 111        |
| 9.4 | Teorema das Series de Fourier                | 113        |

## Lista de figuras

|            |  |    |
|------------|--|----|
| Figura 2.1 | Densidade de Probabilidade Lognormal                   | 21 |
| Figura 3.1 | Polinômios de Legendre                                 | 36 |
| Figura 3.2 | Polinômios de Laguerre                                 | 37 |
| Figura 3.3 | Polinômios de Hermite probabilísticos                  | 39 |
| Figura 3.4 | Esquema Askey  | 40 |
| Figura 4.1 | Polinômios de Hermite Ordem 0, 1, 2.                   | 60 |
| Figura 4.2 | Polinômios de Hermite Ordem 3.                         | 62 |
| Figura 5.1 | Propagação de Incertezas                               | 70 |
| Figura 5.2 | Conjunto de amostras aleatórias no quadrado unitário   | 79 |
| Figura 6.1 | Campo Tutorial   | 83 |
| Figura 6.2 | Estudo Paramétrico: VPL vs POR                         | 84 |
| Figura 6.3 | Estudo Paramétrico: VPL vs PERMI                       | 84 |
| Figura 6.4 | Campo PUNQ-S3  | 86 |
| Figura 6.5 | Estudo Paramétrico: Óleo Acumulado vs Porosidade       | 87 |
| Figura 6.6 | Estudo Paramétrico: Óleo Acumulado vs Permeabilidade i | 88 |
| Figura 6.7 | Estudo Paramétrico: Óleo Acumulado vs Permeabilidade j | 88 |
| Figura 6.8 | Estudo Paramétrico: Óleo Acumulado vs Permeabilidade k | 88 |



## Lista de tabelas

|             |  |    |
|-------------|--|----|
| Tabela 3.1  | Zeros e pesos para quadratura de Gauss-Legendre                | 46 |
| Tabela 3.2  | Zeros e pesos para quadratura de Gauss-Laguerre                | 47 |
| Tabela 3.3  | Zeros e pesos para quadratura de Gauss-Hermite Físicos         | 48 |
| Tabela 3.4  | Zeros e pesos para quadratura de Gauss-Hermite Probabilísticos | 49 |
| Tabela 4.1  | Exemplo do multi-índice de dimensão 4                          | 58 |
| Tabela 4.2  | Polinômios de Hermite de Duas Dimensões                        | 59 |
| Tabela 4.3  | Polinômios de Hermite de Três Dimensões                        | 61 |
| Tabela 4.4  | Dependência do número de termos com $N$ e $p$ .                | 63 |
| Tabela 4.5  | Tabela Askey   | 65 |
| Tabela 6.1  | Momentos do VPL via Monte Carlo                                | 85 |
| Tabela 6.2  | Momentos do VPL via Quadratura                                 | 85 |
| Tabela 6.3  | Monte Carlo - Porosidade                                       | 89 |
| Tabela 6.4  | Quadratura - Porosidade  | 90 |
| Tabela 6.5  | Sobol - Porosidade   | 90 |
| Tabela 6.6  | Monte Carlo - Permeabilidade $i$                               | 91 |
| Tabela 6.7  | Quadratura - Permeabilidade $i$                                | 91 |
| Tabela 6.8  | Sobol - Permeabilidade $i$                                     | 91 |
| Tabela 6.9  | Monte Carlo - Permeabilidade $j$                               | 92 |
| Tabela 6.10 | Quadratura - Permeabilidade $j$                                | 92 |
| Tabela 6.11 | Sobol - Permeabilidade $j$                                     | 92 |
| Tabela 6.12 | Amostras - Permeabilidade $k$                                  | 92 |
| Tabela 6.13 | Quadratura - Permeabilidade $k$                                | 92 |
| Tabela 6.14 | Sobol - Permeabilidade $k$                                     | 93 |
| Tabela 6.15 | Monte Carlo - Permeabilidade $i, j$                            | 93 |
| Tabela 6.16 | Quadratura - Permeabilidade $i, j$                             | 93 |
| Tabela 6.17 | Sobol - Permeabilidade $i, j$                                  | 94 |
| Tabela 6.18 | Monte Carlo - Permeabilidade $i, j, k$                         | 94 |
| Tabela 6.19 | Quadratura - Permeabilidade $i, j, k$                          | 95 |
| Tabela 6.20 | Sobol - Permeabilidade $i, j, k$                               | 95 |
| Tabela 6.21 | Monte Carlo - Porosidade, Permeabilidade $i, j, k$             | 95 |
| Tabela 6.22 | Quadratura - Porosidade, Permeabilidade $i, j, k$              | 96 |
| Tabela 6.23 | Sobol - Porosidade, Permeabilidade $i, j, k$                   | 96 |
| Tabela 6.24 | Caso teste 1   | 97 |