2
Transmissão e recepção de sinais em blocos

Neste capitulo são apresentados os modelos matemáticos para a técnica de transmissão de sinais em blocos com uma única portadora SC (*Single Carrier*) e para a técnica de transmissão em blocos com múltiplas portadoras OFDM (*Ortogonal Frequency Division Multiplexing*). Este capítulo serve para estabelecer modelos, notação e apresentar resultados que serão utilizados nos capítulos subsequentes. A Seção 2.1 descreve a modulação utilizada e a inserção de faixa de guarda nos blocos, pelas técnicas ZP (*Zero-Padding*) e CP (*Cyclic-Prefix*). A Seção 2.2 descreve a recepção dos sinais transmitidos e a caracterização estatística do ruído. Em seguida, a Seção 2.3 apresenta as características do canal considerado neste estudo. A Seção 2.4 descreve o estágio do equalizador no domínio da frequência. Os equalizadores ZF (*Zero Forcing*) e MMSE(*Minimum Mean Square Erro*) são considerados nesta Seção.

2.1
Transmissão de sinais em portadora única (Single Carrier) e OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing).

A transmissão de sinais SC (*Single Carrier*) será considerada sob o ponto de vista de transmissão em blocos utilizando o modelo discreto dos sinais [22]. Assim cada bloco $\mathbf{b}$ é composto por N símbolos de informação de duração T_s, $\mathbf{b} = [b(0), b(1), \ldots, b(N-1)]^{\mathcal{T}}$. Os símbolos aleatórios $b(i)$ são extraídos de uma constelação complexa de sinais, cada um com média nula e energia média unitária. Para permitir a supressão da interferência entre blocos sucessivos (IEB) uma faixa de guarda de comprimento L é inserida no bloco de símbolos, originando o bloco a ser transmitido $\mathbf{d}$ de tamanho M=N+L, e portanto de duração MT_s.

O sistema OFDM (*Orthogonal Frequency Division Multiplexing*) [9], como será visto nas seções posteriores, admite uma descrição análoga ao sistema de portadora única SC. A transmissão OFDM baseia-se na multiplexação por divisão de frequências ortogonais do bloco de informação $\mathbf{b}$. A transmissão OFDM trabalha com toda a faixa do espectro disponível, já que, como

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1021506/CA

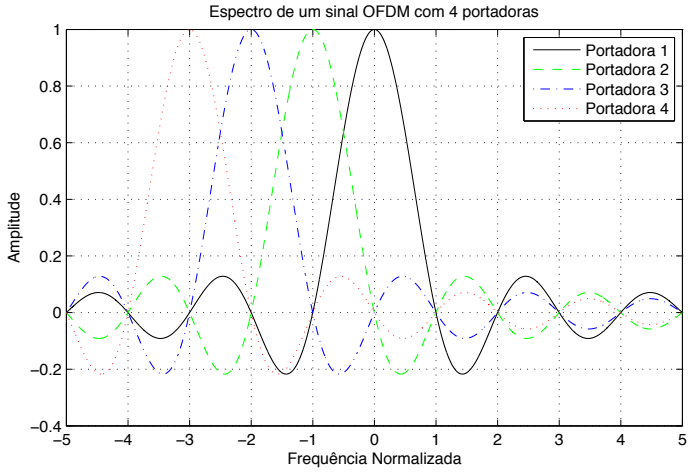

Figura 2.1: Espectro de um sinal OFDM com 4 portadoras.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1021506/CA

é possível perceber na Figura 2.1, faz uso de uma superposição espectral particular, onde cada subportadora é ortogonal às demais, diferentemente do sistema SC, onde os símbolos são enviados de forma sequencial, através de uma única portadora e o espectro desta única portadora ocupa toda banda disponível. Em OFDM as transmissões dos dados são feitas paralelamente em diversas subportadoras com taxas de transmissão menores do que a portadora única do caso SC. Esta redução na taxa de símbolos, ou seja, um aumento na duração do simbolo em cada subportadora, resulta em um estreitamento do pulso no domínio da frequência.

Na transmissão OFDM uma IDFT (Transformada Inversa Discreta de Fourier) é aplicada no bloco $\mathbf{b}$, para projetar $\mathbf{b}$ em N sub-espaços ortogonais. Assim o bloco OFDM a ser transmitido é dado por

$$\tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{W}_N^{\mathcal{H}}\mathbf{b}, \tag{2-1}$$

onde $\mathbf{W}_N^{\mathcal{H}}$ representa a Hermitiana (e inversa) da matriz DFT (Transformada Discreta de Fourier) de dimensão $N \times N$, que será definida nas seções posteriores. Ocorre então, a transmissão da transformada do bloco $\mathbf{b}$ aqui representado por $\tilde{\mathbf{s}}$, e não o bloco em si, como é no caso do sistema SC. De maneira análoga à transmissão SC, em OFDM uma faixa de guarda de tamanho L é inserida no bloco $\tilde{\mathbf{s}}$ resultando no bloco transmitido OFDM $\mathbf{d}$ de tamanho M=N+L. Neste trabalho são considerados dois tipos de intervalos de guarda: ZP (*Zero Padding*)e CP (*Cyclic Prefix*) [23, 24] que serão descritos nas subsecções seguintes.

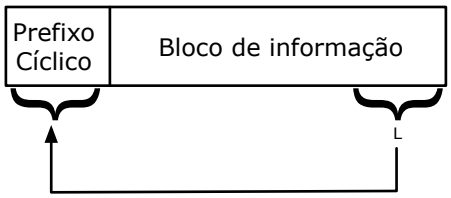

Figura 2.2: Faixa de Guarda com Prefixo Cíclico.

2.1.1
SC com Faixa de guarda CP

A faixa de guarda CP (*Prefixo Cíclico*) é obtida inserindo-se, no início do bloco a ser transmitido, uma cópia das últimas L amostras deste bloco, Figura 2.2. Cria-se assim uma extensão cíclica no bloco transmitido, uma vez que os últimos L símbolos do bloco estão no inicio do mesmo bloco.

$$d(\beta) = d(\beta + N); \forall \beta \in (0, L-1). \tag{2-2}$$

Utilizando-se notação matricial, a matriz $\mathbf{G}_{cp}$ que operando no bloco de informação $\mathbf{b}$ insere a faixa de guarda CP é dada por

$$\mathbf{G}_{cp} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{CP}^{\mathcal{T}} \\ \dots \\ \mathbf{I}_{N} \end{bmatrix}, \tag{2-3}$$

onde a matriz $\mathbf{I}_{CP}$ contém as últimas L colunas da matriz identidade $\mathbf{I}_N$. Assim o bloco, de dimensão $N + L$, $\mathbf{d}_{CP}$ a ser transmitido é

$$\mathbf{d}_{CP} = \mathbf{G}_{cp}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{CP}^{\mathcal{T}} \\ \dots \\ \mathbf{I}_{N} \end{bmatrix} \mathbf{b}, \tag{2-4}$$

que pode ser expresso na forma

$$\mathbf{d}_{CP} = \underbrace{[\underbrace{b(N-L), \dots, b(N-1)}_{Prefixo\,Ciclico}, \underbrace{b(0), b(1), \dots, b(N-1)}_{Bloco\,de\,informacão}]^{\mathcal{T}}}_{Bloco\,SC-CP}. \tag{2-5}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1021506/CA

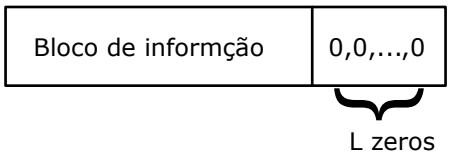

Figura 2.3: Faiza de Guarda com Zero Padding.

2.1.2 SC com Faixa de guarda ZP

Na faixa de guarda ZP (Zero Padding), o bloco a ser transmitido de tamanho N é aumentado de tamanho com L zeros ao final do bloco, Figura 2.3. A matriz $\mathbf{G}_{zp}$ que operando no bloco de informação $\mathbf{b}$ gera o bloco $\mathbf{d}$ com a faixa de guarda ZP de tamanho L é neste caso

$$\mathbf{G}_{zp} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N \\ \dots \\ \mathbf{0}_{L\times N} \end{bmatrix}, \tag{2-6}$$

onde $\mathbf{I}_N$ é uma matriz identidade de dimensão $N \times N$ e $\mathbf{0}_{L\times N}$ e um vetor de zeros de dimensão $L \times N$. Assim o bloco $\mathbf{d}$ a ser enviado é dado por

$$\mathbf{d}_{ZP} = \mathbf{G}_{zp}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_N \\ \dots \\ \mathbf{0}_{L\times N} \end{bmatrix} \mathbf{b}, \tag{2-7}$$

ou ainda

$$\mathbf{d}_{ZP} = \underbrace{[\underbrace{b(0), b(1), \dots, b(N-1)}_{Bloco\,de\,informacão}, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{L\,zeros}]^{\mathcal{T}}}_{Bloco\,SC-CP}. \tag{2-8}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1021506/CA

2.1.3
OFDM com Faixa de guarda CP

De maneira análoga ao SC, o bloco OFDM-CP é obtido por meio da pré-multiplicação do sinal $\tilde{\mathbf{s}}$ em (2-1), pela matriz $\mathbf{G}_{cp}$ em (2-3)

$$\mathbf{d}_{_{CP}} = \mathbf{G}_{cp}\,\tilde{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{_{CP}}^{\mathcal{T}} \\ \dots \\ \mathbf{I}_{_N} \end{bmatrix} \mathbf{W}_N^{\mathcal{H}}\mathbf{b}, \tag{2-9}$$

o bloco OFDM após inserção da faixa de guarda CP é então

$$\mathbf{d}_{_{CP}} = \underbrace{[\underbrace{\tilde{s}(N-L),\dots,\tilde{s}(N-1)}_{Prefixo\,Ciclico},\underbrace{\tilde{s}(0),\tilde{s}(1),\dots,\tilde{s}(N-1)}_{Bloco\,depois\,da\,IDFT}]^{\mathcal{T}}}_{Bloco\,OFDM-CP}. \tag{2-10}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1021506/CA

2.1.4
OFDM com Faixa de guarda ZP

De maneira análoga, o bloco com preenchimento de zeros para OFDM e obtido por meio da pré-multiplicação do sinal (2-1), pela matriz $\mathbf{G}_{zp}$ em (2-6). Assim

$$\mathbf{d}_{_{ZP}} = \mathbf{G}_{zp}\tilde{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{_N} \\ \dots \\ \mathbf{0}_{L\times N} \end{bmatrix} \mathbf{W}_N^{\mathcal{H}}\mathbf{b}, \tag{2-11}$$

ou ainda

$$\mathbf{d}_{_{ZP}} = \underbrace{[\underbrace{\tilde{s}(0),\tilde{s}(1),\dots,\tilde{s}(N-1)}_{Bloco\,depois\,da\,IDFT},\underbrace{0,0,\dots,0}_{L\,zeros}]^{\mathcal{T}}}_{Bloco\,OFDM-ZP}. \tag{2-12}$$

2.2
Recepção de sinais em portadora única (Single Carrier) e OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing).

Após a inserção da faixa de guarda de tamanho L ao i-ésimo bloco de informação $\mathbf{b}(i)$ de comprimento N, no caso SC, ou no bloco $\tilde{\mathbf{s}}(i)$, no caso OFDM, o novo bloco $\mathbf{d}(i)$ de tamanho $M = N + L$ é transmitido, sendo $\mathbf{d}(i) = \mathbf{G}\mathbf{b}(i)$ se o sistema for SC e $\mathbf{d}(i) = \mathbf{G}\,\tilde{\mathbf{s}}(i) = \mathbf{G}\mathbf{W}_N^{\mathcal{H}}\mathbf{b}(i)$ se o sistema for OFDM.
As transmissões são feitas através de um canal multipercurso $\mathbf{h}(i)$ de comprimento P. A i-ésima transmissão através do canal pode ser representada por uma matriz de convolução Toeplitz triangular inferior $\mathbf{H}(i)$ de dimensão

$M \times M$, na qual a primeira coluna é a resposta ao impulso do canal concatenado com $M - P$ zeros, ou seja $\mathbf{h}(i) = [h_0(i) \ldots h_{P-1}(i), 0 \ldots 0]^{\mathcal{T}}$, com $\|\mathbf{h}\|^2 = 1$, assim:

$$\mathbf{H}(i) = \begin{bmatrix} h_0(i) & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ h_1(i) & h_0(i) & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ h_2(i) & h_1(i) & h_0(i) & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & h_0(i) & \vdots & \ldots & 0 \\ h_{P-1}(i) & h_{P-2}(i) & h_{P-3}(i) & \ldots & \ddots & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & h_{P-1}(i) & \ldots & h_0(i) \end{bmatrix}. \quad (2\text{-}13)$$

No receptor, o sinal é corrompido por um vetor de ruído gaussiano branco $\mathbf{n}(i)$ representado por :

$$\mathbf{n}(i) = [n_0(i), n_1(i), n_2(i), \ldots, n_{M-1}(i)]^{\mathcal{T}}, \quad (2\text{-}14)$$

onde $\mathbf{n}(i)$ possui vetor média nulo e matriz covariância $\mathbf{K_n} = \sigma^2 \mathbf{I}_M$. Além do ruído o sinal sofre a adição das parcelas da interferência entre blocos sucessivos dada pela matriz Toeplitz triangular superior $\mathbf{H}_{IEB}(i)$ de dimensão $M \times M$ e contém na primeira linha $[0 \ldots h_{P-1}(i) \ldots h_1(i)]$, ou seja:

$$\mathbf{H}_{IEB}(i) = \begin{bmatrix} 0 & \ldots & h_{P-1}(i) & \ldots & h_1(i) \\ \vdots & \ddots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \ddots & \ldots & h_{P-1}(i) \\ \vdots & \ddots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \quad (2\text{-}15)$$

dessa forma, o sinal recebido $\mathbf{r}(i)$ é dado por:

$$\mathbf{r}(i) = \mathbf{H}(i)\mathbf{d}(i) + \mathbf{H}_{IEB}\mathbf{d}(i - 1) + \mathbf{n}(i). \quad (2\text{-}16)$$

Como será verificado nas Seções seguintes a supressão total da IEB pode ser realizada contanto que a faixa de guarda utilizada tenha no mínimo tamanho igual a ordem da resposta ao impulso do canal. Assim ao longo desta trabalho admite-se que $L \geq P - 1$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1021506/CA

2.2.1 Bloco recebido SC-CP

Para o caso de adição de intervalo de guarda com prefixo cíclico CP, define-se a matriz $\mathbf{T}_L$ que remove a faixa de guarda

$$\mathbf{T}_L = \Big[\mathbf{0}_{N\times L}\vdots \mathbf{I}_{N\times N}\Big], \tag{2-17}$$

onde $\mathbf{0}_{N\times L}$ representa uma matriz de zeros de dimensão $N\times L$. O vetor recebido definido em (2-16) para o caso de sinais com faixa de guarda CP fica então

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{CP}(i) &= \mathbf{T}_L\,\mathbf{r}(i) \\ &= \mathbf{T}_L\mathbf{H}(i)\mathbf{d}(i) + \underbrace{\mathbf{T}_L\mathbf{H}_{IEB}(i)}_{\mathbf{0}_{N\times M}}\mathbf{d}(i-1) + \mathbf{T}_L\mathbf{n}_N(i), \end{aligned} \tag{2-18}$$

onde $\boldsymbol{r}_{CP}(i)$ é um vetor de dimensão $N\times 1$. O primeiro termo do sinal recebido SC-CP em (2-18) pode ainda ser rescrito na forma

$$\mathbf{T}_L\mathbf{H}(i)\mathbf{G}_{cp}\mathbf{b}(i) = \mathbf{H}_c(i)\mathbf{b}(i), \tag{2-19}$$

onde $\mathbf{H}_c(i)$ é uma matriz circulante de dimensão $N\times N$ com a primeira linha $[h_0(i), \mathbf{0}_{(1,N-P)}, \ldots, h_1(i)]$ e a primeira coluna $[h_0(i), h_1(i), \ldots, h_{P-1}(i), \mathbf{0}_{(1,N-P)}]^{\mathcal{T}}$, ou seja:

$$\mathbf{H}_c(i) = \begin{bmatrix} h_0(i) & 0 & \ldots & \ldots & h_1(i) \\ \vdots & h_0(i) & 0 & \ldots & \vdots \\ h_{P-1}(i) & \vdots & h_0(i) & \ldots & h_{P-1}(i) \\ 0 & h_{P-1}(i) & \vdots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & h_0(i) \end{bmatrix}, \tag{2-20}$$

cada coluna de $\mathbf{H}_c(i)$ é um deslocamento cíclico para baixo em relação à coluna anterior. O segundo termo de (2-18), $\mathbf{0}_{N\times 1}$ indica que não há IEB já que os primeiros L símbolos correspondentes a faixa de guarda são retirados. O último termo de (2-18) corresponde as últimas N componentes do vetor do ruido $\mathbf{n}(i)$. Assim, o bloco recebido para SC-CP é então

$$\boldsymbol{r}_{CP}(i) = \mathbf{H}_c(i)\mathbf{b}(i) + \mathbf{n}_N(i), \tag{2-21}$$

onde $\mathbf{n}_N(i) = T_L\mathbf{n}_N(i)$.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1021506/CA

2.2.2
Bloco recebido SC-ZP

No caso de faixa de guarda ZP (Zero Padding), percebe-se de (2-8), que os últimos L símbolos do bloco transmitido $(i-1)$ contém apenas zeros, então, considerando-se (2-16), verifica-se que o segundo termo da equação (2-16) corresponde à um vetor de zeros de dimensão $M \times 1$, o vetor recebido SC-ZP fica então

$$\boldsymbol{r}_{ZP}(i) = \mathbf{H}(i)\mathbf{d}_{ZP}(i) + \mathbf{n}_M(i), \tag{2-22}$$

que ainda, substituindo $\mathbf{d}_{ZP}$ da equação (2-7) obtêm-se

$$\boldsymbol{r}_{ZP}(i) = \mathbf{H}(i)\mathbf{G}_{zp}\mathbf{b}(i) + \mathbf{n}_M(i). \tag{2-23}$$

Observe-se agora que a matriz $\mathbf{H}(i)$ pode ser particionada na forma

$$\mathbf{H}(i) = \Big[\mathbf{H}_0(i) \vdots \mathbf{H}_{zp}(i)\Big], \tag{2-24}$$

onde $\mathbf{H}_0(i)$ é uma matriz Toeplitz (truncada) de dimensão $M \times N$, que contém as primeiras N colunas de (2-13) e $\mathbf{H}_{zp}(i)$ as últimas L colunas de (2-13). Considerando-se a multiplicação de (2-24) pela matriz $\mathbf{G}_{zp}$ dada em (2-6) resulta que o vetor recebido para o caso ZP para SC pose ser expresso na forma

$$\boldsymbol{r}_{ZP}(i) = \mathbf{H}_0(i)\mathbf{b}(i) + \mathbf{n}_M(i). \tag{2-25}$$

2.2.3
Bloco recebido OFDM-CP

Para obter o bloco recebido no caso de transmissão OFDM com faixa de guarda CP, basta substituir o sinal SC $\mathbf{b}(i)$ pelo sinal OFDM $\tilde{\mathbf{s}}(i)$ na equação (2-21), Assim o bloco OFDM-CP fica então

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{CP}(i) &= \mathbf{H}_c(i)\tilde{\mathbf{s}}(i) + \mathbf{n}_N(i) \\ &= \mathbf{H}_c(i)\mathbf{W}_N^{\mathcal{H}}\mathbf{b}(i) + \mathbf{n}_N(i), \end{aligned} \tag{2-26}$$

onde, $\mathbf{H}_c(i)$ é uma matriz circulante de dimensão $N \times N$ definida em (2-20) e $\mathbf{n}_N(i) = \mathbf{T}_L\mathbf{n}(i)$ representa o vetor do ruido após a retirada da faixa de guarda na recepção.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1021506/CA

2.2.4 Bloco recebido OFDM-ZP

No caso de transmissão de sinais em OFDM o bloco recebido pode ser obtido, de forma similar ao bloco recebido SC-ZP, substituindo na equação (2-23), o sinal $\mathbf{b}(i)$ SC pelo sinal OFDM $\tilde{\mathbf{s}}(i)$ definido em (2-1), o bloco recebido OFDM-ZP fica então

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_{ZP} &= \mathbf{H}(i)\mathbf{G}_{zp}\tilde{\mathbf{s}}(i) + \mathbf{n}_M(i) \\ &= \mathbf{H}(i)\mathbf{G}_{zp}\mathbf{W}_N^{\mathcal{H}}\mathbf{b}(i) + \mathbf{n}_M(i). \end{aligned} \tag{2-27}$$

2.3 Modelo do canal

O canal considerado neste trabalho é do tipo fixo no tempo, porém aleatório (fixo aleatório) sendo modelado por um filtro FIR (*Finite-duration Impulse Response*) de duração finita, com P coeficientes. O vetor de coeficientes do canal é dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{h}(i) &= [h_1(i)\,, h_2(i)\,\ldots\,h_P(i)\,]^{\mathcal{T}} \\ &= [p_1\alpha_1\,, p_2\alpha_2\,\ldots\,p_P\alpha_P\,]^{\mathcal{T}}, \end{aligned} \tag{2-28}$$

onde α_k é uma variável aleatória complexa gaussiana de média nula e $\mathbf{E}[|\alpha_k|^2] = 1$ e os pesos p_k que representam o perfil de potência dos retardos ou *power delay profile* são fixos e satisfazem a $\sum_{k=1}^{P}|p_k|^2 = 1$. Numa transmissão sem-fio, o canal com interface aérea se apresenta com múltiplos percursos entre origem e destino, a antena receptora recebe uma mesma informação mais de uma vez, pois esta percorre caminhos diferentes e por conta disso, leva tempos diferentes entre a transmissão e a recepção da mesma. Estes diversos percursos são representados pelos pesos p_k.

2.4 Equalização no domínio da frequência FDE

Este trabalho considera que a equalização é feita no domínio da frequência, onde uma DFT (Discrete Fourier Transform) é aplicada no bloco recebido, para transformar o bloco $\boldsymbol{r}(i)$ do domínio do tempo para domínio da frequência. A operação DFT é implementada pela matriz

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1021506/CA

$$\mathbf{W}_M = \frac{1}{\sqrt{M}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W_M^1 & W_M^2 & \dots W_M^{M-1} & \\ 1 & W_M^2 & W_M^4 & \dots & W_M^{2(M-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_M^{M-1} & W_M^{2(M-1)} & \vdots & W_M^{(M-1)(M-1)} \end{bmatrix}, \quad (2\text{-}29)$$

onde as componentes $\mathbf{W}_M$ são :

$$[\mathbf{W}_M]_{m,v} = \frac{1}{\sqrt{M}} e^{-j\frac{2\pi}{M}mv} \qquad 0 \leq m, v \leq M-1. \quad (2\text{-}30)$$

A matriz DFT $\mathbf{W}_M$ é uma matriz unitária e, portanto,

$$\mathbf{W}_M^{\mathcal{H}} \mathbf{W}_M = \mathbf{I}_M. \quad (2\text{-}31)$$

A seguinte propriedade de diagonalização de uma matriz circulante é básica para os desenvolvimentos a seguir. Considere-se aqui a transformação da forma $\mathbf{W}_M \mathbf{H}_c \mathbf{W}_M^{\mathcal{H}}$ onde $\mathbf{H}_c$ é uma matriz circulante de dimensão $M \times M$. Esta transformação gera uma matriz diagonal $\tilde{\mathbf{H}}_d$ de dimensão $M \times M$, contendo os autovalores de $\mathbf{H}_c$ na sua diagonal. Estes autovalores representam a resposta em frequência do canal. A operação inversa $\mathbf{W}_M^{\mathcal{H}} \tilde{\mathbf{H}}_d \mathbf{W}_M$, gera uma matriz circulante $\mathbf{H}_c$, contendo em sua primeira coluna a IDFT da diagonal principal de $\tilde{\mathbf{H}}_d$. tem-se assim que

$$\tilde{\mathbf{H}}_d = \mathbf{W}_M \mathbf{H}_c \mathbf{W}_M^{\mathcal{H}}. \quad (2\text{-}32)$$

$$\mathbf{H}_c = \mathbf{W}_M^{\mathcal{H}} \tilde{\mathbf{H}}_d \mathbf{W}_M. \quad (2\text{-}33)$$

Ao longo deste trabalho serão considerados dois tipos de equalizadores ZF (Zero Forcing) e MMSE (Minimum Mean Square Error), ambos supõem conhecimento das componentes da resposta em frequência do canal e a equalização é feita no domínio da frequência FDE (Frequency Domain Equalization).

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1021506/CA

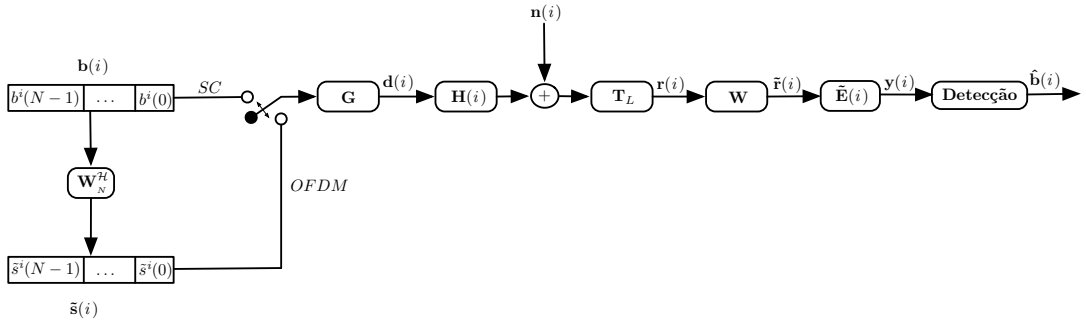

Figura 2.4: Modelo conjunto dos sistemas SC e OFDM com equalização no domínio da frequência.

2.4.1 SC-CP com FDE

O vetor recebido $\mathbf{r}_{CP}(i)$ no caso SC-CP definido em (2-21), é transformado para o domínio da frequência por uma DFT de N pontos ($\mathbf{W}_N$) assim:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{r}}_{CP}(i) &= \mathbf{W}_N\mathbf{r}_{CP}(i) \\ &= \mathbf{W}_N\mathbf{H}_c(i)\mathbf{b}(i) + \underbrace{\mathbf{W}_N\mathbf{n}_N(i)}_{\tilde{\mathbf{n}}_N(i)},\end{aligned} \tag{2-34}$$

onde $\tilde{\mathbf{n}}_N(i)$ possui a mesma caracterização estatística de $\mathbf{n}_N(i)$ pois $\mathbf{W}_N$ é normalizada e representa uma transformação ortogonal. Observando a decomposição em (2-32), podemos fazer:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{r}}_{CP}(i) &= \underbrace{\mathbf{W}_N\mathbf{H}_c(i)\mathbf{W}_N^{\mathcal{H}}}_{\tilde{\mathbf{H}}_d(i)}(i)\mathbf{W}_N\mathbf{b}(i) + \tilde{\mathbf{n}}_N(i) \\ &= \tilde{\mathbf{H}}_d(i)\mathbf{W}_N\mathbf{b}(i) + \tilde{\mathbf{n}}_N(i).\end{aligned} \tag{2-35}$$

As componentes de matriz diagonal $\tilde{\mathbf{H}}_d(i)$ são a transformada discreta de N pontos do canal equivalente $\mathbf{h}(i)$ ou seja:

$$\tilde{\mathbf{H}}_d = diag[\tilde{\mathbf{h}}(i)] = diag[\sqrt{N}\mathbf{W}_{NP}\mathbf{h}(i)], \tag{2-36}$$

onde $\mathbf{W}_{NP}$ é uma matriz que contém as primeiras P colunas de $\mathbf{W}_N$. O bloco equalizado $\boldsymbol{y}(i)$ a ser entregue ao decisor, veja a Figura 2.4, no caso de transmissões com faixa de guarda CP é definido assim

$$\boldsymbol{y}(i) = \tilde{\mathbf{E}}(i)\tilde{\mathbf{r}}_{CP}(i), \tag{2-37}$$

onde a matriz $\tilde{\mathbf{E}}(i)$ realiza a equalização no domínio da frequência.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1021506/CA

FDE-ZF

O equalizador ZF no domínio da frequência $\tilde{\mathbf{E}}_{zf,cp}(i)$, calcula a inversa da matriz que premultiplica os dados $\mathbf{b}(i)$ no vetor recebido $\tilde{\mathbf{r}}_{CP}(i)$ em (2-35), retirando apenas os efeitos do canal sem levar em conta a interferência do ruído no sinal. Assim, invertendo a matriz que premultiplica os dados, temos

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_{zf,cp}(i) &= [\tilde{\mathbf{H}}_d(i)\mathbf{W}_N]^{-1} \\ &= \mathbf{W}_N^{-1}\tilde{\mathbf{H}}_d^{-1}(i) \\ &= \mathbf{W}_N^{\mathcal{H}}\tilde{\mathbf{H}}_d^{-1}(i). \end{aligned} \tag{2-38}$$

O bloco $\boldsymbol{y}(i)$ em (2-37) a ser entregue ao decisor, para SC-CP e equalização ZF, fica

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(i) &= \tilde{\mathbf{E}}_{zf,cp}(i)\tilde{\mathbf{r}}_{CP}(i) \\ &= \mathbf{b}(i) + \mathbf{W}_N^{\mathcal{H}}\tilde{\mathbf{H}}_d^{-1}(i)\tilde{\mathbf{n}}_N(i). \end{aligned} \tag{2-39}$$

A estimativa do bloco de dados $\mathbf{b}(i)$ é então obtida pelo decisor

$$\hat{\mathbf{b}}_{ZF}(i) = DISC[\boldsymbol{y}(i)] = DISC[\mathbf{b}(i) + \mathbf{W}_N^{\mathcal{H}}\tilde{\mathbf{H}}_d^{-1}(i)\tilde{\mathbf{n}}_N(i)], \tag{2-40}$$

onde o operador $DISC[x]$ retorna o ponto da constelação de sinais da modulação utilizada mais próximo de x. Um dos problemas do equalizador ZF é a amplificação do ruido caso as componentes da resposta de frequência do canal tenham valores muito pequenos ou a não inversibilidade da matriz que premultiplica os dados $\mathbf{b}(i)$ caso esta resposta contenha nulos.

FDE-MMSE

O equalizador MMSE para CP no domínio da frequência $\tilde{\mathbf{E}}_{mmse,cp}(i)$ é obtido minimizando-se a função custo

$$\mathbf{J} = \mathbb{E}[\| \mathbf{b}(i) - \tilde{\mathbf{E}}_{mmse,cp}(i)\tilde{\mathbf{r}}_{CP}(i) \|^2], \tag{2-41}$$

onde $\tilde{\mathbf{r}}_{CP}(i)$ representa o bloco recebido no domínio da frequência, com faixa de guarda CP dado por (2-35). A solução para o equalizador MMSE-FDE para o sistema SC-CP fica

$$\tilde{\mathbf{E}}_{mmse,cp}(i) = \mathbf{W}_N^{\mathcal{H}}\tilde{\mathbf{H}}_d^{\mathcal{H}}(i)[\tilde{\mathbf{H}}_d(i)\tilde{\mathbf{H}}_d^{\mathcal{H}}(i) + \sigma^2\mathbf{I}_N]^{-1}. \tag{2-42}$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1021506/CA

O equalizador MMSE para SC-CP requer o conhecimento do parâmetro σ^2 e a inversão de uma matriz diagonal. O bloco equalizado a ser entregue ao decisor é obtido de (2-37), fazendo-se

$$\boldsymbol{y}(i) = \tilde{\mathbf{E}}_{mmse,cp}(i)\tilde{\mathbf{r}}_{CP}(i). \tag{2-43}$$

2.4.2 SC-ZP com FDE

A partir do bloco recebido ZP em (2-23), o sinal é transformado para o domínio da frequência, por meio de uma DFT de tamanho M

$$\tilde{\boldsymbol{r}}_{ZP}(i) = \mathbf{W}_M\mathbf{H}(i)\mathbf{d}_{ZP}(i) + \mathbf{W}_M\mathbf{n}_M(i). \tag{2-44}$$

Para o caso de transmissão de sinais em portadora única SC, $\mathbf{d}_{ZP}(i) = \mathbf{G}_{zp}\mathbf{b}(i)$ é substituído em (2-44), resultando em

$$\tilde{\boldsymbol{r}}_{ZP}(i) = \mathbf{W}_M\mathbf{H}(i)\underbrace{\mathbf{G}_{zp}\mathbf{b}(i)}_{\mathbf{d}_{ZP}(i)} + \underbrace{\mathbf{W}_M\mathbf{n}_M(i)}_{\tilde{\mathbf{n}}_M(i)}, \tag{2-45}$$

onde $\tilde{\mathbf{n}}_M(i)$ possui a mesma caracterização estatística de $\mathbf{n}_M(i)$ pois $\mathbf{W}_M$ é normalizada e representa uma transformação unitária.
Como as últimas L colunas de $\mathbf{H}(i)$ são multiplicadas pelos zeros de $\mathbf{G}_{zp}$, estas colunas podem ser substituidas convenientemente de forma a tornar $\mathbf{H}(i)$ uma matriz circulante $\mathbf{H}_c(i)$, de dimensão $M \times M$, mantendo o resultado do produto.

$$\begin{aligned}\tilde{\boldsymbol{r}}_{ZP}(i) &= \underbrace{\mathbf{W}_M\mathbf{H}_c(i)\mathbf{W}_M^{\mathcal{H}}}_{\tilde{\mathbf{H}}_d(i)}\underbrace{\mathbf{W}_M\mathbf{G}_{zp}}_{\mathbf{W}_{MN}}\mathbf{b}(i) + \tilde{\mathbf{n}}_M(i) \\ &= \tilde{\mathbf{H}}_d(i)\mathbf{W}_{MN}\mathbf{b}(i) + \tilde{\mathbf{n}}_M(i),\end{aligned} \tag{2-46}$$

onde $\tilde{\mathbf{H}}_d(i) = diag[\tilde{\mathbf{h}}(i)]$, em que $\tilde{\mathbf{h}}(i) = \sqrt{M}\mathbf{W}_{MP}\mathbf{h}(i)$ e $\mathbf{W}_{MP}$ contem as primeiras P colunas de $\mathbf{W}_M$. O bloco $\boldsymbol{y}(i)$ a ser entregue ao decisor no caso SC-ZP, é definido assim

$$\boldsymbol{y}(i) = \tilde{\mathbf{E}}(i)\tilde{\mathbf{r}}_{ZP}(i), \tag{2-47}$$

onde $\tilde{\mathbf{E}}(i)$ representa a matriz de equalização no domínio da frequência.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1021506/CA

FDE-ZF

O equalizador ZF no domínio da frequência para SC-ZP é a pseudo-inversa das matrizes de dimensão $M \times N$ que pré-multiplica o bloco de informação $\mathbf{b}(i)$ em (2-46). Calculando a pseudo-inversa das matrizes que pre-multiplica o bloco de informação, temos

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_{zf,zp}(i) &= [\tilde{\mathbf{H}}_d(i)\mathbf{W}_{MN}]^{\dagger} \\ &= [\mathbf{W}_{MN}^{\mathcal{H}}\tilde{\mathbf{H}}_d^{\mathcal{H}}(i)\tilde{\mathbf{H}}_d(i)\mathbf{W}_{MN}]^{-1}\mathbf{W}_{MN}^{\mathcal{H}}\tilde{\mathbf{H}}_d^{\mathcal{H}}(i). \qquad (2\text{-}48)\end{aligned}$$

Assim o sinal equalizado $\boldsymbol{y}(i)$ ZF em (2-47) a ser entregue ao decisor fica:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}(i) &= \tilde{\mathbf{E}}_{zf,zp}(i)\tilde{\mathbf{r}}_{ZP}(i) \\ &= \mathbf{b}(i) + \tilde{\mathbf{E}}_{zf,zp}(i)\tilde{\mathbf{n}}_M(i), \qquad (2\text{-}49)\end{aligned}$$

A estimativa Zero-Forcing do i-ésimo bloco transmitido é

$$\hat{\mathbf{b}}(i) = DISC[\mathbf{b}(i) + [\mathbf{W}_{MN}^{\mathcal{H}}\tilde{\mathbf{H}}_d^{\mathcal{H}}(i)\tilde{\mathbf{H}}_d(i)\mathbf{W}_{MN}]^{-1}\mathbf{W}_{MN}^{\mathcal{H}}\tilde{\mathbf{H}}_d^{\mathcal{H}}(i)\tilde{\mathbf{n}}_M(i)]. \quad (2\text{-}50)$$

FDE-MMSE

O equalizador MMSE para ZP $\tilde{\mathbf{E}}_{mmse,zp}(i)$ é obtido minimizando a função custo

$$\mathbf{J} = \mathbb{E}[\| \mathbf{b}(i) - \tilde{\mathbf{E}}_{mmse,zp}(i)\tilde{\mathbf{r}}_{ZP}(i) \|^2], \qquad (2\text{-}51)$$

onde a bloco $\tilde{\mathbf{r}}_{ZP}(i)$, de dimensão M, é dado por (2-46), e a matriz $\tilde{\mathbf{E}}_{mmse,zp}(i)$ é de dimensão $N \times M$. Obtém-se assim a solução FDE-MMSE para o sistema SC-ZP

$$\tilde{\mathbf{E}}_{mmse,zp} = \mathbf{W}_{MN}^{\mathcal{H}}\tilde{\mathbf{H}}_d^{\mathcal{H}}(i)[\tilde{\mathbf{H}}_d(i)\mathbf{W}_{MN}\mathbf{W}_{MN}^{\mathcal{H}}\tilde{\mathbf{H}}_d^{\mathcal{H}}(i) + \sigma^2\mathbf{I}_M]^{-1}, \qquad (2\text{-}52)$$

para diminuir a complexidade do equalizador $\tilde{\mathbf{E}}_{mmse,zp}(i)$ considera-se também uma simplificação do tipo, $\mathbf{W}_{MN}\mathbf{W}_{MN}^{\mathcal{H}} = \frac{N}{M}\mathbf{I}_M$ [22], assim o equalizador aproximado fica

$$\tilde{\mathbf{E}}_{mmse,zp} = \mathbf{W}_{MN}^{\mathcal{H}}\tilde{\mathbf{H}}_d^{\mathcal{H}}(i)[\frac{N}{M}\tilde{\mathbf{H}}_d(i)\tilde{\mathbf{H}}_d^{\mathcal{H}}(i) + \sigma^2\mathbf{I}_M]^{-1}. \qquad (2\text{-}53)$$

O bloco equalizado MMSE a ser entregue ao decisor para SC-ZP é obtido de (2-47), fazendo-se

$$\boldsymbol{y}(i) = \tilde{\mathbf{E}}_{mmse,zp}(i)\mathbf{r}_{ZP}(i). \qquad (2\text{-}54)$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1021506/CA

2.4.3 OFDM-CP com FDE

De forma análoga ao descrito para SC-CP, o vetor recebido OFDM-CP definido em (2-26) é transformado para o domínio da frequência, por meio de uma DFT de N pontos ($\mathbf{W}_N$), assim o bloco recebido no domínio da frequência é obtido substituindo-se o sinal SC $\mathbf{b}(i)$ pelo sinal OFDM $\tilde{\mathbf{s}}(i)$ na equação (2-35), obtem-se assim

$$\tilde{\mathbf{r}}_{CP}(i) = \tilde{\mathbf{H}}_d(i)\mathbf{b}(i) + \tilde{\mathbf{n}}_N(i). \tag{2-55}$$

O bloco $\boldsymbol{y}(i)$ a ser entregue ao decisor, veja a Figura 2.4, é calculado substituindo o sinal recebido no domínio da frequência OFDM-CP (2-55) em (2-37).

FDE-ZF

O equalizador ZF é a inversa da matriz que pré-multiplica o vetor de dados $\mathbf{b}(i)$ em (2-55), assim

$$\tilde{\mathbf{E}}_{zf,cp}(i) = \tilde{\mathbf{H}}_d^{-1}(i). \tag{2-56}$$

O bloco a ser entregue ao decisor $\mathbf{y}(i)$ que pode ser obtido, de forma análoga com (2-39), o bloco $\mathbf{y}(i)$, que produzirá a estimativa para o bloco OFDM-CP do equalizador ZF é

$$\boldsymbol{y}(i) \;\; = \;\; \mathbf{b}(i) + \tilde{\mathbf{H}}_d^{-1}(i)\tilde{\mathbf{n}}_N(i), \tag{2-57}$$

A estimativa OFDM para equalizador ZF para o bloco $\mathbf{y}(i)$ fica:

$$\hat{\mathbf{b}}_{ZF}(i) = DISC[\mathbf{b}(i) + \tilde{\mathbf{H}}_d^{-1}(i)\tilde{\mathbf{n}}_N(i)]. \tag{2-58}$$

Note-se a simplicidade do equalizador ZF para o sistema OFDM-CP onde é necessário apenas a inversão de uma matriz diagonal $N \times N$.

FDE-MMSE

O equalizador MMSE para OFDM-CP é a solução da função custo em (2-51) para o bloco recebido $\tilde{\mathbf{r}}_{CP}(i)$ em (2-55), assim

$$\tilde{\mathbf{E}}_{mmse,cp}(i) = \tilde{\mathbf{H}}_d^{\mathcal{H}}(i)[\tilde{\mathbf{H}}_d(i)\tilde{\mathbf{H}}_d^{\mathcal{H}}(i) + \sigma^2\mathbf{I}_N]^{-1}. \tag{2-59}$$

No equalizador MMSE para OFDM-CP é necessário a inversão de uma matriz diagonal. O bloco equalizado entregue ao decisor é obtido fazendo-se

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1021506/CA

$$\boldsymbol{y}(i) = \tilde{\mathbf{E}}_{mmse,cp}(i)\tilde{\mathbf{r}}_{CP}(i). \tag{2-60}$$

2.4.4 OFDM-ZP com FDE

De forma análoga ao caso SC, para o caso OFDM, uma DFT de tamanho M é aplicada ao bloco recebido em (2-27). Assim o bloco OFDM-ZP no domínio da frequência pode ser obtido por analogia da equação (2-46) substituindo o sinal SC $\mathbf{b}(i)$ pelo sinal OFDM $\tilde{\mathbf{s}}(i)$, assim

$$\tilde{\mathbf{r}}_{ZP}(i) = \tilde{\mathbf{H}}_d(i)\mathbf{W}_{MN}\underbrace{\mathbf{W}_N^{\mathcal{H}}\mathbf{b}(i)}_{\tilde{\mathbf{s}}(i)} + \tilde{\mathbf{n}}_M(i), \tag{2-61}$$

O bloco $\boldsymbol{y}(i)$ a ser entregue ao decisor é calculado, substituindo o sinal recebido no domínio da frequência OFDM-ZP (2-61) em (2-47).

FDE-ZF

A matriz equalizadora $\tilde{\mathbf{E}}_{zf,zp}(i)$ de dimensão $N \times M$ para o caso OFDM-ZP, é calculada computando a pseudo-inversa das matrizes que pré-multiplicam o bloco de dados $\mathbf{b}(i)$ em (2-61), assim

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}_{zf,zp}(i) &= [\tilde{\mathbf{H}}_d(i)\mathbf{W}_{MN}\mathbf{W}_N^{\mathcal{H}}]^{\dagger} \\ &= [\mathbf{W}_N\mathbf{W}_{MN}^{\mathcal{H}}\tilde{\mathbf{H}}_d^{\mathcal{H}}(i)\tilde{\mathbf{H}}_d(i)\mathbf{W}_{MN}\mathbf{W}_N^{\mathcal{H}}]^{-1}\mathbf{W}_N\mathbf{W}_{MN}^{\mathcal{H}}\tilde{\mathbf{H}}_d^{\mathcal{H}}(i).\end{aligned} \tag{2-62}$$

O bloco $\mathbf{y}(i)$ a ser entregue ao decisor para OFDM-ZP com FDE-ZF é definido como

$$\boldsymbol{y}(i) = \mathbf{b}(i) + \tilde{\mathbf{E}}_{zf,zp}(i)\tilde{\mathbf{n}}_M(i), \tag{2-63}$$

a estimativa Zero-Forcing do i-ésimo bloco transmitido para OFDM é então

$$\hat{\mathbf{b}}(i) = DISC[\mathbf{b}(i) + \mathbf{W}_N[\mathbf{W}_{MN}^{\mathcal{H}}\tilde{\mathbf{H}}_d^{\mathcal{H}}(i)\tilde{\mathbf{H}}_d(i)\mathbf{W}_{MN}]^{-1}\mathbf{W}_{MN}^{\mathcal{H}}\tilde{\mathbf{H}}_d^{\mathcal{H}}(i)\tilde{\mathbf{n}}_M(i)]. \tag{2-64}$$

Nota-se a desvantagem do equalizador ZF que amplifica o ruído caso haja valores perto de zero no espectro do canal equivalente, por outro lado, tem a vantagem que se tiver um nulo no espectro, não se perde a detectabilidade do símbolo já que há mais equações do que incógnitas na matriz de equalização.

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1021506/CA

FDE-MMSE

A solução FDE-MMSE para o sistema OFDM-ZP, é calculado da função custo em (2-51) aplicada ao bloco recebido no domínio da frequência em (2-61) obtém-se assim a solução, dada por

$$\tilde{\mathbf{E}}_{mmse,zp} = \mathbf{W}_N \mathbf{W}_{MN}^{\mathcal{H}} \tilde{\mathbf{H}}_d^{\mathcal{H}}(i)[\ \tilde{\mathbf{H}}_d(i) \mathbf{W}_{MN} \mathbf{W}_{MN}^{\mathcal{H}} \tilde{\mathbf{H}}_d^{\mathcal{H}}(i) + \sigma^2 \mathbf{I}_M]^{-1}, \quad (2\text{-}65)$$

e utilizando a aproximação feita em conexão com (2-53) obtem-se o equalizador aproximado

$$\tilde{\mathbf{E}}_{mmse,zp} = \frac{M}{N} \mathbf{W}_N \mathbf{W}_{MN}^{\mathcal{H}} \tilde{\mathbf{H}}_d^{\mathcal{H}}(i)[\ \tilde{\mathbf{H}}_d(i) \tilde{\mathbf{H}}_d^{\mathcal{H}}(i) + \frac{M}{N} \sigma^2 \mathbf{I}_M]^{-1}. \quad (2\text{-}66)$$

O bloco equalizado MMSE a ser entregue ao decisor para OFDM-ZP é obtido fazendo-se

$$\boldsymbol{y}(i) = \tilde{\mathbf{E}}_{mmse,zp}(i) \mathbf{r}_{ZP}(i). \quad (2\text{-}67)$$

PUC-Rio - Certificação Digital Nº 1021506/CA