



**Felipe Philadelpho Azevedo**

**Jogos de Opções em Oligopólios Assimétricos  
sob Ameaça de Preempção: Uma Aplicação no Setor de  
Latas de Alumínio**

**Dissertação de Mestrado**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção do Departamento de Engenharia Industrial da PUC-Rio.

Orientador: Prof. José Paulo Teixeira

Rio de Janeiro  
Agosto de 2013



**Felipe Philadelpho Azevedo**

**Jogos de Opções em Oligopólios Assimétricos  
sob Ameaça de Preempção: Uma Aplicação no Setor de  
Latas de Alumínio**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia de Produção da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

**Prof. José Paulo Teixeira**

Orientador

Departamento de Engenharia Industrial - PUC-Rio

**Prof. Letícia de Almeida Costa**

Departamento de Engenharia Industrial - PUC-Rio

**Prof. Fabio Rodrigo Siqueira Batista**

Centro de Pesquisas de Energia Elétrica - CEPEL

**Prof. José Eugenio Leal**

Coordenador Setorial do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 20 de Agosto de 2013

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, da autora e do orientador.

### **Felipe Philadelpho Azevedo**

Graduou-se em Engenharia de Produção na PUC-Rio e em Engenharia Industrial na École Centrale Paris, finalizando o programa de duplo diploma em dezembro de 2010.

#### Ficha Catalográfica

Azevedo, Felipe Philadelpho

Jogos de opções em oligopólios assimétricos sob ameaça de Preempção: uma aplicação no setor de latas de alumínio / Felipe Philadelpho Azevedo; orientador: José Paulo Teixeira. – 2013.

117 f. : il. (color.) ; 30 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Industrial, 2013.

Inclui bibliografia

1. Engenharia industrial – Teses. 2. Opções reais. 3. Teoria dos jogos. 4. Jogos de opções reais 5. Preempção 6. Jogos de momento ótimo 7. Oligopólio Assimétrico 8. Investimento sob incerteza. I. Teixeira, José Paulo. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Industrial. III. Título.

CDD: 658.5

## Agradecimentos

Aos meus pais, Maria de Jesus e Philadelpho, pelo cuidado, dedicação e presença durante toda minha vida; pelo amor incondicional; pelo apoio em todos os caminhos traçados e pelo carinho especial. Sem vocês nada disso teria sido possível, obrigado por tudo.

À minha irmã, Natalia, pelo apoio completo, capacidade de acreditar em mim, pela motivação que sempre me fortaleceu. Com muita admiração eu agradeço por você fazer parte de minha vida.

À minha namorada, Carla, pessoa que admiro, que tenho imenso orgulho e com quem amo estar ao lado. Obrigado pelo carinho, pela ajuda, paciência e por toda preocupação em me fazer feliz.

Ao meu orientador, José Paulo, que me ajudou antes mesmo do mestrado, me apoiou e acreditou sempre em mim. Obrigado pelas aulas maravilhosas, pela ajuda, conselhos e palavras de carinho.

À CAPES e à PUC-Rio pela ajuda financeira e material de pesquisa sem os quais o trabalho não poderia ter sido realizado.

Ao professor Marco Antonio Dias, por todas as excelentes aulas, pelo incentivo, pelos conselhos e por toda a ajuda durante esta dissertação.

Aos meus amigos, pelas alegrias, risadas, conversas e pela confiança com a qual sempre acreditaram em mim. Com vocês, as pausas entre um parágrafo e outro trouxeram dedicação e novas inspirações para minha produção.

À Claudia Teti, sempre muito gentil e atenciosa, me ajudou e fez com que esse percurso da pós-graduação fosse muito mais conchegativo.

À minha família, tios e tias, primos e primas, obrigado pelo apoio, pelo carinho e pelo amor.

A todos os professores da PUC-Rio de graduação e pós-graduação, assim como meus professores da École Centrale Paris.

## Resumo

Azevedo, Felipe Philadelpho; Teixeira, José Paulo (Orientador). **Jogos de Opções em Oligopólios Assimétricos sob Ameaça de Preempção: Uma Aplicação no Setor de Latas de Alumínio**. Rio de Janeiro, 2013. 117p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

O presente trabalho busca estudar o impacto da preempção em jogos de momento ótimo em um oligopólio assimétrico, aplicando-o no mercado brasileiro de latas de alumínio. Uma primeira análise de um mercado monopolista ajuda a compreender a estrutura do modelo e os principais pontos que influenciam o valor da firma. Em seguida, entramos no caso de um oligopólio simétrico. Esta etapa introduz as interações estratégicas e suas consequências nos investimentos das empresas. Nesse momento, é introduzida a noção de preempção e seus efeitos sobre as decisões ótimas a serem tomadas. Entramos, então, no modelo de jogos de opções em um oligopólio assimétrico com preempção, adaptado para o caso com três empresas atuando no mercado, representando a indústria de latas de alumínio no Brasil. Primeiro uma solução analítica é encontrada, seguida por uma aplicação numérica. Um dos principais resultados é que as empresas precisam antecipar seus investimentos quando existe a ameaça de preempção no mercado, o que as impede de investir no momento em que maximizariam seus valores.

## Palavras-chave

Opções reais; teoria dos jogos; jogos de opções reais; preempção; jogos de momento ótimo; oligopólio assimétrico; investimento sob incerteza.

## Abstract

Azevedo, Felipe Philadelpho; Teixeira, José Paulo (Advisor). **Oligopoly Games under Asymmetric costs and Preemption: An Application to the Aluminum Can Industry**. Rio de Janeiro, 2013. 117p. MSc. Dissertation - Departamento de Engenharia Industrial, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

This study aims to analyze the impact of preemption in investment-timing games under asymmetric oligopolies. The model developed in the dissertation is, then, applied to the Brazilian aluminum can industry. A first analysis of a monopolist market helps understand the foundations of the model and the key aspects that influence the firm's value. Then, we deal with a case involving competition with symmetric firms, taking into account the strategic interactions and its consequences to the investment-timing. At this point, it is introduced the notion of preemption and its effects on the optimal timing decisions. Finally, we study the oligopoly games under asymmetric cost and preemption for the case with three firms in the market, representing the Brazilian aluminum can industry. First an analytical solution is found, followed by a numerical application. One of the main results is that the presence of rivals lowers the threshold that triggers investment, so investment occurs sooner, preventing firms to invest in the time that would maximize their values.

## Keywords

Real options; game theory; game options; preemption; timing games; asymmetric oligopoly; investment under uncertainty.

## Sumário

1. Introdução	17
1.1. Objetivo e Motivação	17
1.2. Importância do Tema	17
1.3. Estrutura do Trabalho	19
2. Revisão de Literatura	20
2.1. Fluxo de Caixa Descontado	20
2.2. Opções Reais	23
2.3. Teoria dos Jogos	27
2.4. Jogos de Opções	29
2.4.1. Momento Ótimo de Investimento	30
2.4.2. Flexibilidade ou Compromisso	30
2.4.3. Conceito Básico por trás dos Jogos de Opções	31
2.4.4. Literatura de Jogos de Opções Reais	33
3. Indústria de Latas de Alumínio	34
3.1. História da Lata de Alumínio no Brasil	34
3.2. Empresas do Setor	35
3.3. Uso das Latas de Alumínio	36
3.4. Tendências Globais no Consumo de Latas de Alumínio	37
3.5. Evolução do Consumo no Brasil	38
3.6. Perspectivas para o Mercado Brasileiro	40
4. O Modelo de Jogos de Opções	42
4.1. Monopólio	42
4.1.1. Opção de Expansão	42
4.1.2. Investimento em Capacidade	43
4.1.3. Valor do Monopolista	45
4.2. Duopólio	47

4.2.1. Preempção	47
4.2.2. Preempção em um Duopólio: Firms Simétricas	48
4.2.3. Preempção em um Duopólio: Firms Assimétricas	51
4.2.3.1. Grande Vantagem em Custo	52
4.2.3.2. Pequena Vantagem em Custo	53
4.3. Oligopólio Assimétrico	56
4.3.1. Modelo em um Mercado Existente: Opção de Expansão	56
4.3.2. Líder ( <i>L</i> ), Primeira Seguidora ( <i>F</i> ) e Segunda Seguidora ( <i>FF</i> )	58
4.3.3. Solução do Problema	59
4.3.3.1. Firma Segunda Seguidora	59
4.3.3.1.1. Gatilho <i>XFF</i>	61
4.3.3.2. Firma Primeira Seguidora	62
4.3.3.2.1. Gatilho <i>XF</i>	63
4.3.3.3. Firma Líder	65
4.3.3.3.1. Gatilho <i>XL</i>	66
4.3.4. Competição de Cournot	67
5. Aplicação do Modelo	70
5.1. Estimação das Variáveis	70
5.1.1. Taxa livre de Risco ( <i>r</i> )	70
5.1.2. Prêmio de Risco ( <i>PR</i> ) da indústria de latas de alumínio	71
5.1.3. Movimento Geométrico Browniano	71
5.1.3.1. Tendência ( <i>α</i> )	72
5.1.3.2. Volatilidade ( <i>σ</i> )	73
5.1.4. Variáveis da função de demanda inversa [ <i>PQT = a - b · QT</i> ]	75
5.1.5. Investimento ( <i>I</i> )	76
5.1.6. Custo de Produção ( <i>ci</i> )	77
5.1.6.1. Antes da Expansão	77
5.1.6.2. Depois da Expansão	78
5.1.7. Lucro das Firms ( <i>πi</i> )	78
5.2. Estudo de Caso	81
5.2.1. Gatilho Segunda Seguidora	81
5.2.2. Gatilho Primeira Seguidora	81
5.2.3. Gatilho Líder	87



5.2.4. Estrutura da Indústria	93
5.3. Análise de Sensibilidade	96
5.3.1. Taxa livre de Risco ( $r$ )	97
5.3.2. Prêmio de Risco ( $PR$ ) da indústria de latas de alumínio	97
5.3.3. Tendência ( $\alpha$ )	98
5.3.4. Volatilidade ( $\sigma$ )	99
5.3.5. Variável da função de demanda inversa ( $a$ )	99
5.3.6. Variável da função de demanda inversa ( $b$ ) e Investimento ( $I$ )	100
5.3.7. Custo de Produção ( $ci$ )	101
5.3.8. Resultado	102
6. Conclusão	105
6.1. Sugestões para Trabalhos Futuros	109
6.1.1. Indústria de latas de alumínio	109
6.1.1.1. Investimento	109
6.1.1.2. Produção	109
6.1.2. Modelo de Oligopólio Assimétrico	110
6.1.2.1. Valor Inicial do Choque Estocástico	110
7. Bibliografia	111
8. Apêndice	116
8.1. Valor Esperado do Fator de Desconto Estocástico	116
8.2. Método Integral	116

## Lista de Figuras

Figura 1 – Assimetria na Opção de Compra	24
Figura 2 – Estrutura de um Jogo de Opções Envolvendo Incertezas de Mercado (Demanda) e Estratégica (Rivalidade)	32
Figura 3 – Participação de Bebidas no uso de Latas de Alumínio	37
Figura 4 – Capacidade Instalada e Produção de Latas de Alumínio para Bebidas no Brasil – 1997 à 2011 (em milhões de unidades)	39
Figura 5 - Utilização da Capacidade Instalada de Latas de Alumínio	39
Figura 6 – Caso de Preempção em um Duopólio Simétrico	48
Figura 7 – Valores e gatilhos do líder e seguidor em um novo mercado	50
Figura 8 – Evolução da Estrutura do Mercado	51
Figura 9 – Caso de Preempção com Grande Vantagem em Custo	52
Figura 10 – Caso de Preempção com Pequena Vantagem em Custo	55
Figura 11 – Caso de Preempção em um Duopólio Assimétrico com Pequena Vantagem em Custo	56
Figura 12 – Lucro da Indústria em Função do Momento Ótimo de Investimento	94
Figura 13 – Gatilhos de Preempção e Monopolísticos das Firms	95
Figura 14 – Análise de Sensibilidade do Gatilho Monopolístico <b>XLIM</b>	103
Figura 15 – Análise de Sensibilidade do Gatilho de Preempção <b>XLIP</b>	104
Figura 16 – Evolução do Lucro das Empresas em Função do Choque Estocástico sob Ameaça de Preempção	105
Figura 17 – Evolução do Lucro das Empresas em Função do Choque Estocástico sem Ameaça de Preempção	106
Figura 18 – Impacto da Preempção no Momento Ótimo de Investimento da Firma Líder de Baixo Custo ( <b>LI</b> )	107
Figura 19 – Impacto da Preempção no Momento Ótimo de Investimento da Firma Primeira Seguidora de Custo Intermediário ( <b>Fint</b> )	107

Figura 20 – Impacto da Preempção no Momento Ótimo de Investimento da Firma Segunda Seguidora de Alto Custo (***FFh***) 108

## Lista de Tabelas

Tabela 1 – Fluxo de Caixa Descontado	21
Tabela 2 – Opções Reais	25
Tabela 3 – Comparação das Vantagens e Desvantagens de Metodologias	29
Tabela 4 – Margem Operacional das Empresas do Setor	36
Tabela 5 – Megatendências Globais do Mercado de Latas de Alumínio	38
Tabela 6 – Participação das Latinhas nos Mercado de Cerveja e Refrigerantes	41
Tabela 7 – Lucro da Firma em dois Estágios	43
Tabela 8 – Lucro do Oligopólio em Quatro Estágios de Desenvolvimento	59
Tabela 9 – Vendas Anuais de latas de Alumínio no Brasil	74
Tabela 10 – Produção Anual de Latas de Alumínio no Brasil em Bilhões de Unidades	75
Tabela 11 – Receita Anual das Empresas no Brasil em Milhões de Dólares	76
Tabela 12 – Margem Operacional das Empresas do Setor	77
Tabela 13 – Custo Operacional Unitário das Empresas do Setor	77
Tabela 14 – Lucro das Empresas no Primeiro Caso	79
Tabela 15 – Lucro das Empresas no Segundo Caso	79
Tabela 16 – Lucro das Empresas no Terceiro Caso	80
Tabela 17 – Lucro das Empresas no Quarto Caso	80
Tabela 18 – Lucro das Empresas no Primeiro Caso e considerando Firma de Alto Custo como Primeira Seguidora	84
Tabela 19 – Lucro das Empresas no Segundo Caso e considerando Firma de Alto Custo como Primeira Seguidora	84
Tabela 20 – Lucro das Empresas no Terceiro Caso e considerando Firma de Alto Custo como Primeira Seguidora	85

Tabela 21 – Lucro das Empresas no Quarto Caso e considerando Firma de Alto Custo como Primeira Seguidora	85
Tabela 22 – Lucro das Empresas no Primeiro Caso e considerando Firma de Custo Intermediário como Líder	90
Tabela 23 – Lucro das Empresas no Segundo Caso e considerando Firma de Custo Intermediário como Líder	90
Tabela 24 – Lucro das Empresas no Terceiro Caso e considerando Firma de Custo Intermediário como Líder	90
Tabela 25 – Lucro das Empresas no Quarto Caso e considerando Firma de Custo Intermediário como Líder	91
Tabela 26 – Gatilho das Empresas	96
Tabela 27 – Análise de Sensibilidade da Taxa Livre de Risco ( $r$ )	97
Tabela 28 – Análise de Sensibilidade do Prêmio de Risco da Indústria de Latas de Alumínio ( $PR$ )	98
Tabela 29 – Análise de Sensibilidade da Tendência ( $\alpha$ )	98
Tabela 30 – Análise de Sensibilidade da Volatilidade ( $\sigma$ )	99
Tabela 31 – Análise de Sensibilidade da Variável da Função de Demanda Inversa ( $a$ )	100
Tabela 32 – Análise de Sensibilidade do Investimento ( $I$ ) e da Variável da Função de Demanda Inversa ( $b$ )	101
Tabela 33 – Análise de Sensibilidade do Custo de Produção ( $ci$ )	102
Tabela 34 – Valor do Gatilho Monopolístico ( $XLIM$ ) em relação a Mudanças nas Variáveis	103
Tabela 35 – Valor do Gatilho de Preempção ( $XLIP$ ) em relação a Mudanças nas Variáveis	104

## Símbolos, Abreviaturas e Siglas

VPL	Valor Presente Líquido
FCD	Fluxo de Caixa Descontado
MGB	Movimento Geométrico Browniano
$V$	Valor do Projeto
$i, j$	Firmas Competindo
$-i$	Todas as Outras Firmas Exceto a Firma $i$
$n$	Número de Firmas
$\bar{\pi}$	Lucro Determinístico
$\tilde{\pi}$	Lucro Estocástico
$P(\cdot)$	Função de Demanda Inversa
$a, b$	Parâmetros Constantes Conhecidos da Função de Demanda Inversa
$q_i$	Quantidade Produzida pela Firma $i$
$Q_T$	Quantidade Total Produzida por Todas as Firmas na Indústria
$c_i$	Custo Variável Unitário da Firma $i$
$r$	Taxa Livre de Risco
$\alpha$	Tendência do MGB
$\sigma$	Volatilidade do MGB
$\delta$	Taxa de Conveniência
$PR$	Prêmio de Risco
$I$	Investimento
$z_t$	Processo de Wiener
$B_t(\tilde{T})$	Valor Esperado do Fator de Desconto Estocástico no tempo- $t$
$E[\cdot]$	Valor Esperado Baseado em Probabilidades Reais
$\hat{E}[\cdot]$	Valor Esperado Baseado em Probabilidades Neutras ao Risco
$t_0$	Tempo Inicial
$t$	Tempo Presente
$\tilde{T}$	Tempo Randômico no qual o Gatilho é Primeiramente Atingido

$X_0$	Valor Estocástico no tempo-0 no caso de um MGB
$\tilde{X}_t$	Valor Estocástico no tempo-t no caso de um MGB
$M$	Firma Monopolista
$L$	Firma Líder
$F$	Firma Primeira Seguidora
$FF$	Firma Segunda Seguidora
$C$	Valor da Empresa Investindo em um Duopólio de Cournot
$*$	(Sobrescrito) Denota o Valor Ótimo ou do Equilíbrio
$^{\wedge}$	(Sobrescrito) Denota o Valor Neutro ao Risco
$\equiv$	Significa “É definido como”
e.g.	Por Exemplo
$US\$$	Dólar

*“Every day, think as you wake up, today I am fortunate to be alive, I have a precious human life, I am not going to waste it. I am going to use all my energies to develop myself, to expand my heart out to others; to achieve enlightenment for the benefit of all beings. I am going to have kind thoughts towards others, I am not going to get angry or think badly about others. I am going to benefit others as much as I can.”*

*Dalai Lama XIV*



# 1. Introdução

## 1.1. Objetivo e Motivação

O objetivo dessa dissertação é estudar o impacto da preempção (vantagem de primeiro lance – *first move advantage* – com consequente existência de externalidades negativas para os competidores) em jogos de momento ótimo em um oligopólio assimétrico. O modelo desenvolvido para tal análise será aplicado no mercado brasileiro de latas de alumínio. A escolha do tema baseou-se, em grande parte, na relevância que o mesmo possui no contexto brasileiro. Isso porque estudos envolvendo jogos de opções e jogos com preempção ainda são pouco aplicados no país, mas ganham cada vez mais atenção por modelarem variáveis não contabilizadas em outras teorias. Além disso, sua aplicação foi escolhida de modo a abordar uma estrutura mercadológica muito presente nos setores mundiais.

## 1.2. Importância do Tema

O ambiente econômico das empresas é, em grande maioria, caracterizado por incertezas tanto estratégicas quanto de mercado. A liberalização comercial fez com que um número muito restrito de indústrias se mantivesse protegido, aumentando pressões competitivas na maioria dos negócios.

Ao mesmo tempo, setores econômicos que, tradicionalmente, englobavam muitas companhias, passaram por significantes consolidações, o que resultou na formação de oligopólios. A recente crise econômica amplificou ainda mais essa tendência. É o caso do mercado de sistemas operacionais em *smartphones*, onde as companhias mais importantes são a Apple, com o iOS, e a Google com o Android. A indústria farmacêutica vem se tornando um oligopólio devido aos crescentes custos de desenvolver novas drogas e ao número de patentes que protegem produtos dos competidores. Ocorreram, também, inúmeras fusões e aquisições em uma série de outros setores, como os de mineração, automotivo e

aéreo. Nesse contexto, alguns modelos simplificados estão sendo revisados por não serem mais capazes de descrever a atual realidade econômica.

A metodologia mais conhecida em orçamentação de capital é o Fluxo de Caixa Descontado (FCD) ou Valor Presente Líquido (VPL). Esta teoria consiste em avaliar o valor de um projeto com base nos fluxos de caixa esperados do futuro. No entanto, existe uma série de desvantagens que torna inapropriado o seu uso em alguns casos. Primeiramente, o VPL enxerga oportunidades de investimentos como decisões de “agora ou nunca” sob uma gerência passiva. Isso porque tal metodologia assume uma obrigação de uma futura realização de atividades. Além disso, a adoção de uma taxa de desconto constante para tempos no futuro é pouco realista. Finalmente, a análise pelo VPL ignora as consequências de ações competitivas.

Com os mercados, tecnologias e competições se tornando mais dinâmicos dia após dia, o valor da flexibilidade, agora, é maior do que nunca. Com a necessidade de traduzir a flexibilidade gerencial em estratégia, surge a Análise por Opções Reais, uma versão refinada da análise por VPL que leva em consideração a natureza dinâmica e as relações envolvidas na tomada de decisão. Tal metodologia também possibilita o uso da taxa de desconto livre de risco para determinar a estratégia ótima. Apesar de superar muitas desvantagens do VPL, essa análise ignora alguns aspectos. Seria interessante, ao fazer uso das Opções Reais, determinar a possibilidade da empresa reter todos os benefícios da opção (opções monopolistas – *monopolist* – ou proprietárias – *proprietary option*), ou de compartilhá-los com rivais (opções compartilhadas – *shared option*). Entretanto, as análises de opções reais são, geralmente, aplicadas de maneira ingênua, assumindo uma opção proprietária ao invés de uma compartilhada. Dessa forma, ao formular decisões de investimento isoladamente, não se leva em conta possíveis interações competitivas (de maneira endógena).

Uma terceira metodologia, a Teoria dos Jogos, tem por objetivo – quando aplicada em finanças/economia – descrever e antecipar comportamentos racionais em ambientes nos quais os indivíduos são independentes e interagem entre si. Nesta situação, as ações de uma empresa afetam aquelas dos rivais, e estas, por sua vez, impactam na dela própria. Quando é possível ser indiferente às interações estratégicas, por essas serem inconsequentes (competição perfeita), ou quando é viável negligenciar as ações das outras partes (monopólio), técnicas de otimização

tradicional são suficientes. Porém, quando a análise é aplicada em um contexto de competição imperfeita, como em oligopólios, um número limitado de empresas com interesses colidentes interagem de tal forma que as ações de cada uma podem influenciar lucros e valores individuais das outras. Embora, nessa metodologia, os efeitos da competição e oportunidade de cooperação sejam modelados de forma endógena, a teoria dos jogos não explica porque as firmas devem ter incentivos de permanecerem flexíveis para reagir às incertezas do mercado.

Os Jogos de Opções é, então, a solução integrada utilizada para superar as deficiências de cada metodologia abordada anteriormente. O método foi desenvolvido para captar a dinâmica das interações estratégicas em um ambiente estocástico. Atualmente, representa uma poderosa ferramenta estratégica capaz de guiar decisões gerenciais em um contexto competitivo. Ela possibilita uma quantificação mais completa das oportunidades de mercado, uma vez que avalia a sensibilidade de decisões estratégicas a variáveis exógenas (e.g., volatilidade na demanda, custos) e considera interações competitivas.

### **1.3. Estrutura do Trabalho**

Nesta introdução, além da explicação sobre a estrutura da dissertação, faz-se uma caracterização da importância do tema estudado. No segundo capítulo, trata-se especificamente de uma revisão de literatura. No terceiro, consta um pequeno resumo da história da indústria de latas de alumínio, setor no qual o modelo será aplicado, e de algumas perspectivas para o desenvolvimento do mesmo. No quinto capítulo, apresentamos o modelo e a solução analítica para o caso estudado. O quinto traz a aplicação do modelo na indústria de latas de alumínio, bem como uma análise de sensibilidade. Por fim, no último capítulo, são mostradas as principais conclusões do estudo.

## 2. Revisão de Literatura

Essa seção irá fazer uma descrição dos seguintes modelos de análise econômica: fluxo de caixa descontado, opções reais e teoria dos jogos. Serão apresentadas algumas limitações e imperfeições de cada um dos métodos quando utilizados isoladamente.

Em seguida, será introduzido o conceito de jogos de opções, modelo que será aplicado no estudo de caso desta dissertação. Trata-se de uma abordagem integrada que consegue capturar as interações estratégicas em um ambiente estocástico.

### 2.1. Fluxo de Caixa Descontado

O estudo da viabilidade de projetos de investimento utiliza uma abordagem com base em lucros. Essa metodologia procura quantificar, prever e descontar, no tempo, os lucros ou fluxos de caixa livres. Os custos de implementação, aquisição e desenvolvimento dos ativos são deduzidos do valor presente do fluxo de caixa, chegando-se ao valor presente líquido. Geralmente, os fluxos de caixa são descontados a uma taxa específica para a firma. O custo médio ponderado de capital pode ser calculado através de projetos específicos, pelo histórico da firma, ou pelo risco do negócio, sendo, em seguida, ajustado de acordo com o risco.

Há várias vantagens na utilização do fluxo de caixa descontado. Ele é claro e consistente com os critérios de decisão de todos os projetos, apresenta os mesmos resultados independentemente das preferências de risco dos investidores, possui um nível satisfatório de precisão, é economicamente racional, não é vulnerável a convenções contábeis, leva em conta o dinheiro no tempo e as estruturas de risco, é relativamente simples, mundialmente ensinado, aceito e fácil de ser compreendido pela gerência.

No entanto, esse método tradicional não captura alguns atributos intrínsecos às oportunidades de investimento. Ele assume que os investimentos são

estratégias de “agora ou nunca” e não contabiliza as flexibilidades gerenciais que existem.

Há vários problemas potenciais ao se fazer o uso do fluxo de caixa descontado em opções estratégicas. Esses problemas incluem: a subavaliação de projetos que produzem pouco ou nenhum fluxo de caixa, a natureza não constante do custo médio ponderado de capital, a estimação da vida econômica do ativo, erros de previsão na estimação de fluxos de caixa futuros e a insuficiência de testes para a verificação da validade dos resultados finais.

O fluxo de caixa descontado não irá fornecer uma visão completa do valor do investimento. Há uma série de problemas que os analistas devem estar cientes ao fazer uso desse modelo, como mostrado na tabela abaixo.

**Tabela 1 – Fluxo de Caixa Descontado**

Premissas FCD	Realidade
Decisões são tomadas agora, e os recebimentos de fluxos de caixa futuros são fixos.	Incerteza e variabilidade em recebimentos futuros. Nem todas as decisões são feitas hoje, algumas podem ser adiadas para quando a incerteza for resolvida.
Projetos são como “pequenas empresas”, podendo ser avaliados de forma isolada.	A diversificação, sinergia e interdependência faz com que as firmas sejam portfólios de projetos. Algumas vezes os projetos não podem ser avaliados isoladamente.
Uma vez lançado, todos os projetos são gerenciados de forma passiva.	Os projetos são normalmente gerenciados ativamente durante seu ciclo de vida.
Recebimentos de fluxos de caixa futuro são altamente previsíveis e determinísticos.	Pode ser difícil estimar fluxos de caixa futuro por eles normalmente serem estocásticos e possuírem risco.

A taxa de desconto usada é o custo de oportunidade do capital, que é proporcional ao risco não diversificável.	Um negócio possui inúmeras fontes de risco com características distintas, sendo algumas diversificáveis através do projeto ou do tempo.
Todos os riscos são completamente contabilizados pela taxa de desconto.	O risco do projeto e da empresa pode mudar durante o rumo do projeto.
Todos os fatores que poderiam afetar o resultado do projeto e o valor para os investidores estão refletidos no FCD modelado pelo VPL.	Devido às complexidades do projeto e externalidades, pode ser difícil ou impossível quantificar todos os fatores em tempos de fluxo de caixa incremental.
Fatores desconhecidos, intangíveis ou imensuráveis possuem valor zero.	Muitos dos benefícios são ativos intangíveis ou posições estratégicas qualitativas.

Além disso, o FCD divide o valor da empresa em valor presente do fluxo de caixa durante o período de previsão explícita e durante a perpetuidade. No primeiro período, a firma possui algumas vantagens competitivas e oportunidades de crescimento, que a possibilitam crescer e criar valor. A partir do momento no qual não existem mais vantagens e a empresa entrou em uma fase de lucros estáveis, a metodologia utiliza uma perpetuidade para calcular o valor da firma, chamado de valor na continuidade. Um ponto que preocupa na utilização do modelo de fluxo de caixa descontado é a determinação deste valor terminal (valor de continuidade). Existem vários métodos para calculá-lo, sendo o mais utilizado o Modelo de Gordon<sup>1</sup>, que assume um crescimento constante no fluxo de caixa durante a perpetuidade. O valor terminal acaba sendo muito sensível a essa taxa de crescimento constante, e, por isso, acaba perdendo credibilidade.

Todos esses pontos apresentados levam à conclusão que as abordagens tradicionais são mais relevantes para horizontes mais curtos e com aspectos

<sup>1</sup> GITMAN, L. J. Princípios de Administração Financeira. Editora Bookman, 2ª Edição, 2000.

determinísticos. Em períodos mais longos, onde surgem oportunidades estratégicas, seria mais apropriado utilizar metodologias que incorporem mais variáveis, como, por exemplo, as Opções Reais.

## **2.2. Opções Reais**

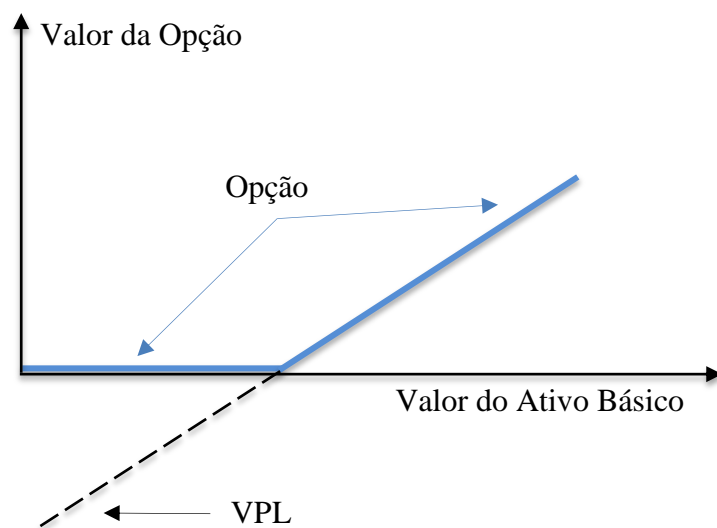
Opções Reais, como o nome indica, usa a teoria de opções para avaliar ativos físicos ou reais, ao invés de ativos financeiros, como títulos e ações. Diferentemente do método tradicional, a abordagem das opções reais considera múltiplas trajetórias para o projeto, consequência da alta incerteza e da flexibilidade estratégica gerencial. Na medida que as informações se tornam disponíveis e a incerteza é resolvida, as melhores estratégias são escolhidas e implementadas. Enquanto a metodologia tradicional assume uma decisão única e estática, a metodologia das opções reais assume uma série dinâmica multidimensional de decisões.

As opções reais proporcionam um julgamento que vai além do método tradicional. Na pior das hipóteses, ela é um teste para os resultados obtidos usando o fluxo de caixa descontado, e na melhor, ela proporciona uma abordagem robusta para a avaliação de projetos quando combinada com a metodologia tradicional.

Existem muitas razões para aplicar a teoria de opções reais. Uma delas é a consideração do valor do projeto em diversos cenários possíveis, o que aumenta o conjunto de informações da análise. Esta maior quantidade de dados pode gerar um impacto em inúmeras variáveis do estudo, como, por exemplo, a opção de investir no futuro, o momento ótimo do investimento, a taxa de retorno, a taxa de juros etc. Por ser uma análise bastante flexível, ela ainda pode ser aplicada a diferentes tipos de projetos.

A teoria das opções reais utiliza técnicas derivadas do modelo de precificação de opções financeiras para ressaltar a importância da flexibilidade da espera. Segundo esta, a gerência deve esperar que grande parte da incerteza seja resolvida para que o projeto seja claramente benéfico, requisitando um prêmio a um projeto com valor presente líquido nulo. Durante a postergação, novas informações possíveis de afetar o projeto podem ser reveladas, dando mais embasamento nas decisões a serem tomadas. Há uma nova visão dos efeitos da incerteza no valor das oportunidades de investimento. As decisões da gerência são

assimetricamente posicionada em relação ao cenário positivo e negativo, de forma que a incerteza possa aumentar o valor da opção. Dessa maneira, ganhos podem ser feitos em mercados muito voláteis e incertos por causa do ganho potencial excepcional e perda limitada, uma vez que a gerência pode desistir dos investimentos planejados ou simplesmente não prosseguir com o próximo estágio. Essa assimetria está representada na figura abaixo, através de uma opção de compra.



**Figura 1 – Assimetria na Opção de Compra**

A curva azul do gráfico representa o valor de uma opção de compra no momento do exercício, dada pelo máximo entre zero e o valor do ativo básico subtraído pelo preço de exercício. Já o valor presente líquido equivale somente à diferença entre o valor do ativo básico e o preço de exercício. Dessa forma, o valor da opção equivale ao máximo entre zero e o valor presente líquido.

Os gerentes podem se beneficiar de diferentes tipos de opções reais. Algumas delas foram resumidas na tabela abaixo:



**Tabela 2 – Opções Reais**

Tipo de Opção	Descrição	Industria Relevantes
Opção de Adiar ou de Espera	Uma empresa pode esperar a decisão de investimento para ver como o mercado se desenvolve.	Indústrias de capital intensivo, indústrias de extração de recursos naturais, setor imobiliário.
Opção de Desistir durante a Construção	Normalmente grandes projetos de construção não são regulares. Se as condições de mercado se deteriorarem, a firma pode revisar a decisão inicial de investir e renunciar qualquer desembolso de capital futuro planejado.	Indústria baseadas em tecnologias, indústrias intensivas em capital e de longa maturação, companhias <i>startups</i> .
Opção de Expansão ou Extensão	Se o projeto for melhor do que esperado, a empresa pode decidir investir mais para expandir a escala do projeto ou estender sua vida útil.	Indústrias de extração de recursos naturais, setor imobiliário.
Opção de Contrair ou Abandonar	Se as perspectivas do mercado estiverem piores do que esperadas, é possível contrair ou abandonar o projeto para se obter seu valor residual.	Indústrias de capital intensivo, introdução de novos produtos.

Opção de Troca de Uso ( <i>input</i> ou <i>output</i> )	A empresa pode selecionar a melhor alternativa, como por exemplo de <i>inputs</i> , <i>outputs</i> ou localização, sob as condições do mercado.	Firmas Multinacionais, indústrias com flexibilidade de <i>input</i> (e.g. energia) ou <i>output</i> (e.g. cana-de-açúcar) na sua produção.
Opção de Crescimento Combinada	Caso os investimentos ocorram em estágios, os primeiros projetos podem ser avaliados considerando as opções futuras de crescimento por ele criado.	Alta tecnologia, indústrias baseadas em tecnologia, indústrias com múltiplos produtos, aquisições estratégicas.

O dois modelos de precificação de opção mais conhecidos são os de **Black e Scholes (1973)** e de **Cox, Ross e Rubinstein (1979)**. O primeiro envolve matemática avançada e noções de teoria financeira em tempo contínuo, enquanto o segundo oferece uma explicação mais intuitiva da precificação de opções em tempo discreto. Esses modelos foram desenvolvidos para precificar opções financeiras, porém, seu uso foi ampliado para a valoração de opções reais.

Os modelos em tempo contínuo e discreto oferecem caminhos alternativos para se avaliar um projeto. Normalmente, os modelos em tempo discreto são mais adequados para problemas práticos ou de avaliações mais complexas. Eles são mais fáceis de serem implementados. Mas os modelos em tempo contínuo também tem suas vantagens, pois, quando o problema é estruturado, se torna mais simples e intuitivo compreender os princípios básicos do investimento, identificar quais são os geradores de valor e examinar os *trade-offs* do projeto. As abordagens em tempo discreto e contínuo não competem entre si, elas enxergam o mesmo problema sob perspectivas matemáticas diferentes.

Apesar de apresentar uma visão muito mais realística do que a metodologia tradicional, a análise pelas opções reais também possui suas limitações. Uma de suas premissas é o caráter exógeno da competição: a gerência possui um problema de otimização no qual precisa incorporar e se antecipar ao impacto erosivo da competição, porém pode ignorar quaisquer efeitos recíprocos dessa decisão nas

ações dos competidores. A competição exógena seria um caso especial da competição endógena quando as ações da competição só podem ser analisadas em um sentido. A teoria das opções reais não consegue modelar problemas nos quais as decisões dos competidores dependem das ações dos outros.

### 2.3. Teoria dos Jogos

A teoria dos jogos é um estudo de estratégias de tomada de decisão. Ela analisa as situações nas quais a decisão de um jogador afeta as decisões dos rivais e vice versa. O objetivo da teoria dos jogos é modelar esses casos para determinar a estratégia ótima de cada agente, prever o equilíbrio de jogo e descobrir como atingir uma condição ideal. As técnicas de otimização tradicionais serão suficientes quando os jogadores puderem negligenciar as interações estratégicas. Esses são os casos de uma competição perfeita e de um monopólio. No primeiro, a decisão de uma única empresa não afeta significativamente as outras, e, no segundo, a empresa poderia tomar decisões erradas e sofrer apenas uma pequena consequência adversa.

Na realidade, raramente as indústrias serão puramente monopolísticas ou perfeitamente competitivas. O mercado, na maioria dos setores, está mais próximo de um oligopólio, no qual um número limitado de empresas com interesses conflitantes interagem entre si de tal forma que suas ações podem influenciar os lucros e valores individuais das outras.

Para analisar as interações dos processos de decisão, a teoria dos jogos construiu a noção de equilíbrio para qual essas complexas combinações poderiam convergir, o **Equilíbrio de Nash**. Nesse equilíbrio, todas as estratégias seriam mutualmente consistentes, pois cada um estaria escolhendo sua melhor resposta em relação às escolhas dos outros.

Para realizar uma análise estratégica através da teoria dos jogos, é preciso reduzir o complexo problema envolvendo vários jogadores a uma estrutura analítica mais simples, que capture a essência do conflito estudado. Algumas definições necessárias dessa estrutura são:

- i. Identificar os jogadores<sup>2</sup>;
- ii. Descrever as estratégias<sup>3</sup> disponíveis a serem escolhidas;
- iii. Especificar a estrutura de informação do jogo<sup>4</sup>;
- iv. Determinar os valores do recebimento para cada possível estratégia escolhida;
- v. Especificar a ordem ou a sequência do jogo.

A teoria dos jogos pode ser útil para analisar as decisões estratégicas de investimento por várias razões. Primeiro, é possível reduzir um complexo problema estratégico em uma estrutura analítica simples de poucas dimensões. Segundo, o conceito de sua solução ajuda a compreender e prever o comportamento dos competidores, além de fornecer um equilíbrio estratégico e valores para as decisões. Esses equilíbrios muitas vezes podem ser contra intuitivos, o que seria muito difícil descobrir com modelos tradicionais. Finalmente, essa teoria ajuda a formalizar uma linguagem comum que possibilita pesquisadores e gerentes comparar resultados e refinar modelos.

No entanto, quando aplicada de forma isolada, a teoria dos jogos tradicional não consegue explicar, por exemplo, quais os incentivos de uma firma em se manter flexível para reagir a acontecimentos inesperados. Em situações sob incerteza, a teoria dos jogos tradicional se torna inadequada.

A tabela abaixo resume os principais pontos vistos de cada uma das metodologias quando utilizadas de forma isolada.

---

<sup>2</sup> São os tomadores de decisão.

<sup>3</sup> Regras de decisão que descrevem as ações a serem tomadas em cada possível evolução do jogo.

<sup>4</sup> São as informações disponíveis para o jogador. São com base nelas que as decisões são tomadas. Aqui trataremos de jogos de informação perfeita, onde os jogadores conhecem todas as decisões anteriores de todos os jogadores, e de informação completa, onde toda a estrutura do jogo, incluindo as ações dos outros jogadores e possíveis resultados, são de conhecimento comum.

**Tabela 3 – Comparação das Vantagens e Desvantagens de Metodologias**

Abordagem	Vantagens	Desvantagens
VPL tradicional	Fácil de usar, lógica convincente, utilizado mundialmente, fácil de comunicar.	Assume comprometimento para um devido plano de ação, geralmente tratando investimento como uma decisão única no tempo (“agora ou nunca”), ignora flexibilidade para se adaptar a desenvolvimentos inesperados do mercado e de interações estratégicas.
Opções Reais	Incorpora incerteza do mercado e flexibilidade gerencial, reconhece que decisões de investimento podem ser postergadas, feitas em estágios ou ajustadas.	Normalmente aplicada na avaliação de um monopolista ou opção proprietária, ignora interações competitivas (endógena).
Teoria dos Jogos	Incorpora reações competitivas endogenamente, considera diferentes recebimentos dos jogadores.	Normalmente ignora as incertezas do mercado cujas modelações envolvem variáveis estocásticas.

## 2.4. Jogos de Opções

A teoria dos jogos tradicional ainda não modela a dinâmica estocástica. A análise por opções reais, apesar de superar muitas desvantagens do método de caixa descontado, frequentemente usa uma premissa simplificada, na qual as interações estratégicas não afetam, materialmente, decisões de investimentos ou o valor de projetos. A melhor maneira de superar essas deficiências é através da

utilização de uma metodologia integrativa, que combine as ferramentas e ideias desses dois modelos. Assim surgiu os jogos de opções, posicionado na intersecção entre a teoria de investimentos sobre incerteza e a teoria dos jogos sobre investimentos estratégicos.

Primeiro, será discutido como os jogos de opções podem ajudar na compreensão de duas complexas decisões estratégicas: o momento ótimo de investimento e o trade-off entre flexibilidade e compromisso<sup>5</sup>. Finalmente, um caso simples de jogos de opções ajudará a ilustrar o modelo integrado de maneira prática.

### **2.4.1. Momento Ótimo de Investimento**

O momento ótimo de investimento está relacionado à escolha do momento ideal para se incorrer em um investimento. Como decidir entre investir agora, mais tarde ou abandonar o projeto? Se o mercado se desenvolver favoravelmente, o investimento terá sido a melhor opção, mas se o mercado despencar, o investimento prematuro terá sido um erro. Para se proteger da evolução do mercado, uma firma que possui flexibilidade de esperar irá exigir uma postergação do investimento até que o mercado esteja maduro o suficiente, de forma que o risco seja minimizado.

Uma empresa inserida em um ambiente competitivo pode ter uma política de investimento ótimo completamente diferente de uma firma monopolista. Como existe a possibilidade de os competidores se anteciparem ao rival, o incentivo de postergar investimentos é deteriorado. Há também casos em que a competição irá fazer uma guerra de atrito, induzindo o rival a desistir mais cedo. Nessas situações, a indústria precisa encontrar um equilíbrio. Geralmente, a presença de competidores leva as firmas a investirem mais cedo do que o monopolista.

### **2.4.2. Flexibilidade ou Compromisso**

Em um ambiente competitivo sob incerteza, as empresas de capital intensivo precisam decidir se a melhor estratégia é investir mais cedo e adquirir

---

<sup>5</sup> Esses dois conceitos estão ligados. O momento ótimo de investimento é a escolha ideal do tempo de se realizar um investimento, sendo, assim, uma forma de compromisso. Ao fazer isso, a firma destrói sua opção de postergar investimentos, perdendo flexibilidade.

uma vantagem competitiva sobre os rivais, ou postergar os investimentos para adquirir mais informação e mitigar as eventuais consequências da incerteza no mercado. A incerteza exógena, na forma de demanda flutuante, preços ou custo de produção, pode impedir a firma de se comprometer a investir. Por outro lado, na presença de pressões ou ameaças de firmas rivais, ela pode estar melhor criando uma vantagem competitiva de primeiro lance. Esse *trade-off* pode ser estudado pela combinação da teoria dos jogos com opções reais.

### 2.4.3. Conceito Básico por trás dos Jogos de Opções

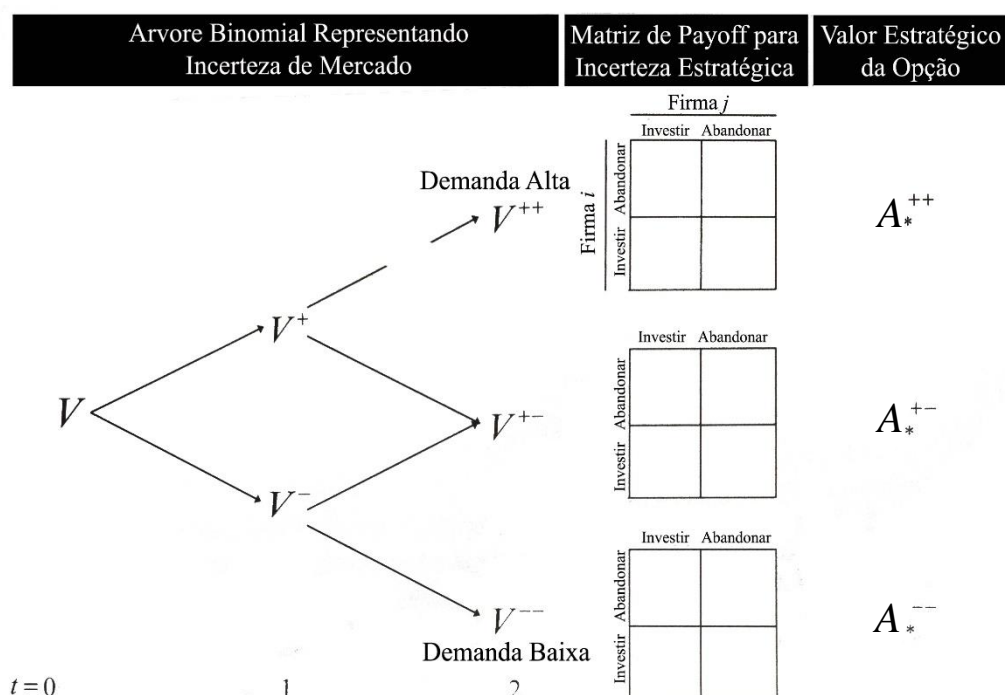
Os jogos de opções no tempo discreto são mais adequados para ajudar a explicar, intuitivamente, os conceitos básicos e a lógica por trás do momento e das interações de investimentos reais. Iremos, através de um exemplo, compreender os principais conceitos desta teoria.

Em tempo discreto, um jogo de opção é uma expansão de uma árvore binomial até uma matriz de recebimentos (*payoff*).

Assim como na teoria das opções reais, a árvore binomial é usada para modelar a evolução estocástica do projeto de valor  $V$ . No caso da figura 2, a evolução do projeto ocorre em dois períodos. No primeiro, a evolução pode ser positiva para  $V^+$  ou negativa para  $V^-$ , enquanto, no segundo, há três possibilidades: duas evoluções positivas  $V^{++}$ , duas negativas  $V^{--}$  ou uma positiva e uma negativa  $V^{+-}$ . Cada um dos cenários apresenta uma probabilidade positiva.

Ao invés de, em cada nó final, existir o *payoff* de uma empresa, há matrizes que capturam as interações competitivas entre os jogadores, resumindo todos os possíveis resultados do jogo. As matrizes são muito utilizadas na teoria dos jogos. No caso da figura abaixo, cada um dos dois jogadores possui duas estratégias. Assim, uma matriz dois-por-dois consegue representar todas essas combinações. Os quadrantes da matriz informam o recebimento de todos os jogadores naquela específica combinação de resultados.

A última coluna da figura, “valor estratégico da opção”, equivale ao recebimento dos jogadores no equilíbrio (\*). Esse valor é o resultado mais provável de ocorrer, ele pode ser encontrado utilizando-se o conceito de equilíbrio de Nash.



**Figura 2 – Estrutura de um Jogo de Opções Envolvendo Incertezas de Mercado (Demanda) e Estratégica (Rivalidade)<sup>6</sup>**

Na Figura 2, considerando um duopólio formado por duas empresas  $i$  e  $j$  que dividem uma opção europeia<sup>7</sup> de investir em um mercado em até dois anos. Ambas podem investir agora, esperar e investir depois (na maturidade, ou seja, no ano 2) ou deixar a opção expirar. A árvore binomial representa a evolução de potenciais cenários da demanda até a maturidade (ano 2) e, em cada nó final, uma matriz de recebimentos dois-por-dois retrata a interação estratégica resultante. Analisando-se a matriz, é possível derivar o resultado de equilíbrio (\*) mais provável de ocorrer (combinação de estratégias, e.g. firma  $i$  investir e firma  $j$  abandonar). Uma vez que o valor estratégico da opção no equilíbrio (\*) é obtido em cada estado ( $A_*^{++}$ ,  $A_*^{+-}$ ,  $A_*^{--}$ ), esses passam a ser o valor ao final de cada nó, tomando o lugar da matriz de *payoff*. Em seguida, é possível obter, por retro

<sup>6</sup> CHEVALIER-ROIGNANT, B.; TRIGEORGIS, L. **Competitive Strategy**. p. 202.

<sup>7</sup> Lembrando que o comprador de uma opção de compra europeia pode exercê-la somente na data do seu vencimento, enquanto o investidor que adquiriu uma opção de compra americana tem o direito de exercê-la até a data de vencimento, ou seja, em qualquer período de tempo compreendido entre a compra da opção e o prazo de vencimento.



indução<sup>8</sup> (*backward induction*), o valor das estratégias e, assim, o valor da opção de investir das empresas em um ambiente competitivo.

A análise revela os benefícios de seguir cada estratégia e possibilita à gerência determinar como ela será impactada se algumas variáveis chave, como crescimento e volatilidade, alterarem. Além disso, cada jogador consegue enxergar como ocorre o *trade-off* entre flexibilidade e compromisso.

#### 2.4.4. Literatura de Jogos de Opções Reais

O surgimento da literatura dos jogos de opções<sup>9</sup> reais em tempo contínuo, Smets (1993), ocorreu devido à demanda de modelos de opções reais que considerasse também a interação estratégia racional entre jogadores (firmas), ou seja, naqueles em que o exercício da opção de um jogador altera os valores das opções reais de outros jogadores. Já a literatura dos jogos de OR em tempo discreto começou com Smit & Ankum (1993), com uma abordagem intuitiva para importantes modelos de jogos de opções; e com Smit & Trigeorgis, também em 1993, que analisaram outros aspectos.

Huisman (2001), o primeiro livro texto dedicado só a jogos de opções reais, focou em importantes modelos teóricos de jogos de OR em tempo contínuo. Antes, Grenadier (2000a) editou uma série de artigos de jogos de opções. Outros livros dedicados a jogos de OR são: o livro texto de Smit & Trigeorgis (2004), que foca principalmente modelos em tempo discreto, com vários exemplos práticos, e o livro de Thijssen (2004), que estuda aplicações de adoção de tecnologia. Um livro mais recente completa a lista de livros dedicados somente aos jogos de opções, o livro de Chevalier-Roignant & Trigeorgis (2011), que fez a primeira cobertura sistemática do assunto, preenchendo um lacuna significativa na literatura.

---

<sup>8</sup> A retro indução é um processo de raciocínio para trás no tempo, a partir do nó final de um problema ou situação, para se determinar uma sequência ótima de ações. Pelo método, primeiro é preciso encontrar o momento que a última decisão é feita, definindo o que fazer neste caso. Usando essa informação, é possível descobrir o que fazer na penúltima situação. Esse processo continua para trás até que as melhores decisões tenham sido escolhidas em todos os nós.

<sup>9</sup> O termo “option games” apareceu primeiro em Lambrecht & Perraudin (1994).

### **3. Indústria de Latas de Alumínio**

O objetivo deste capítulo é fazer um panorama da indústria de latas de alumínio no Brasil, destacando a evolução e as características do mercado, bem como uma perspectiva de desenvolvimento do setor.

O capítulo se inicia com uma breve história da indústria de latas no Brasil, seguida de uma análise financeira das empresas que hoje estão presentes no setor. A terceira e quarta parte procuram explicar um pouco das características do mercado. A evolução do consumo brasileiro e as perspectivas para o mercado finalizam esta seção.

#### **3.1. História da Lata de Alumínio no Brasil**

Muitas das características deste setor brasileiro podem ser explicadas através do crescimento da indústria no país. Foi em 1889 que a antiga fabricante americana Reynolds Corporate instalou a primeira fábrica brasileira de latas de alumínio em Pouso Alegre (MG), cidade estrategicamente localizada entre os três maiores pólos consumidores: São Paulo (SP), Rio de Janeiro (RJ) e Belo Horizonte (MG).

Antes da introdução da lata de alumínio, a lata era feita de aço (folha de flandres), em três peças (corpo, fundo e tampa). Com o crescimento da produção nacional de bauxita, o alumínio foi sendo utilizado no lugar do aço, e a lata passou a ser fabricada em duas peças (corpo e tampa).

Em 1998, a Reynolds foi comprada pela Alcoa, uma das maiores empresas de alumínio do mundo, criando a Latasa. Em meio às oportunidades de negócios, a empresa rapidamente investiu em sua expansão. Toda a expansão no país foi feita sem nenhum investimento externo, sendo o crescimento inteiramente financiado pelo capital de giro do próprio negócio.

Os números expressivos do setor atraíram grandes empresas com atuação internacional que chegaram simultaneamente ao país. Em dezembro de 1996, a multinacional Crown Embalagens instalou-se em Cabreúva (SP) e, em janeiro de

1997, a American National Can (ANC) inaugurava sua unidade em Extrema (MG). Em fevereiro do mesmo ano, a Latapack-Ball começava a operar em Jacareí (SP).

As empresas sustentavam-se no país graças aos contratos especiais, alguns de exclusividade, que mantinham com grandes fabricantes de bebidas. Elas chegaram ao Brasil com uma condição diferenciada devido ao interesse das indústrias de bebidas em promover a concorrência no fornecimento de embalagens.

Em 2000, a inglesa Rexam adquiriu a ANC e, três anos depois, compraria os ativos da Latasa.

As três empresas instaladas no país – Rexam, Crown e Latapack-Ball – passaram a ampliar a produção ano a ano, fabricando corpo e tampa de latas em todas as regiões. Todo esse cenário competitivo contribuiu para que a indústria de latas de alumínio do Brasil se tornasse uma das mais modernas, com as linhas de produção mais rápidas do mundo. Hoje, segundo a Associação Brasileira dos Fabricantes de Latas de Alta Reciclabilidade, a capacidade de produção nacional está próxima de 25 bilhões de unidades ao ano.

A indústria como um todo é caracterizada por elevadas barreiras de entrada. As economias de escala, proporcionadas pelas inúmeras fábricas, favorecem os grandes produtores. Os custos de frete são substanciais e, por isso, um fator-chave da vantagem competitiva é a proximidade das plantas aos locais de abastecimento dos clientes.

### **3.2. Empresas do Setor**

A tabela abaixo compara as margens operacionais das três empresas no segmento de latas de alumínio. Os dados foram retirados dos relatórios anuais de cada empresa e, por isso, as receitas são apresentadas em moedas diferentes (Rexam em libras; Ball e Crown em dólares). As informações abaixo são relativas a todos os mercados de atuação das empresas (Américas, Europa, África, Oriente Médio e Ásia), mas apenas do segmento de latas de alumínio (a Ball, Crown e Rexam possuem operações em outros setores, como embalagem para comidas). Seria interessante comparar a margem operacional apenas no mercado

brasileiro, porém nenhuma das empresas divulgam essas informações separadamente.

**Tabela 4 – Margem Operacional das Empresas do Setor**

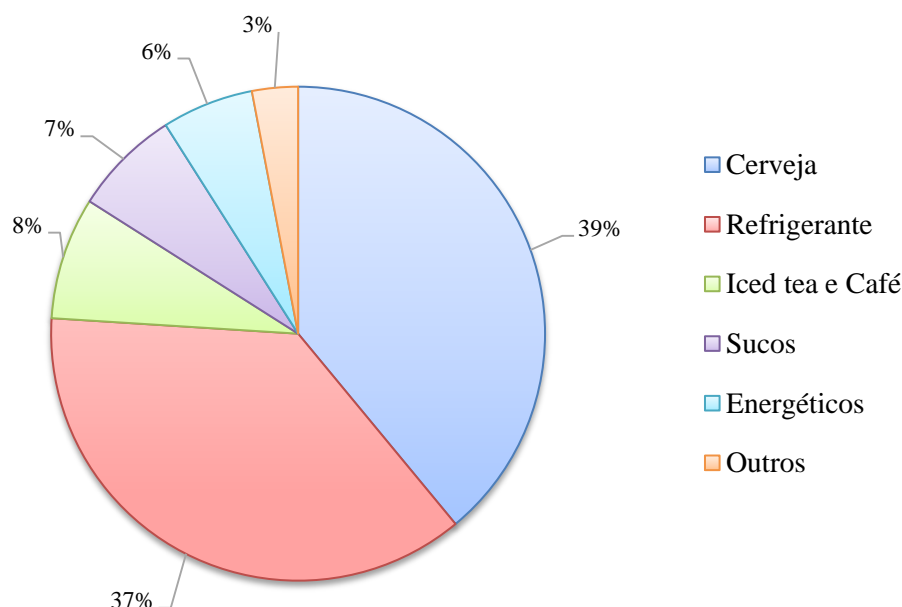
		<b>Receita</b> <b>(em milhões)</b>	<b>Lucro Operacional</b> <b>(em milhões)</b>	<b>Margem</b> <b>Operacional</b>
<b>Rexam</b>	2012	£ 3.885	£ 456	11,7%
	2011	£ 3.786	£ 447	11,8%
<b>Ball</b>	2012	\$ 6.492	\$ 742	11,4%
	2011	\$ 6.434	\$ 725	11,3%
<b>Crown</b>	2012	\$4.906	\$665	13,6%
	2011	\$4.803	\$637	13,3%

O índice calculado mostra qual o lucro operacional obtido pela empresa para cada unidade de venda realizada. A margem operacional é um indicador de lucratividade muito utilizado para comparar empresas de diferentes tamanhos.

### **3.3. Uso das Latas de Alumínio**

As latas de alumínio são usadas para embalar bebidas, tanto alcólicas como não-alcólicas. Como apresentado na Figura 3, os principais produtos que fizeram uso das latinhas são a cerveja e o refrigerante. Juntos, eles representaram, em 2012, 76% do que foi consumido em latas no mundo. Destaca-se a importância desses mercados para a produção de latas. Com menores participações, os outros produtos são: Chá gelado, café, sucos, energéticos e um pequeno volume de outras bebidas.

### Participação de Bebidas no uso de Latas de Alumínio a Nível Mundial (2012)



**Figura 3 – Participação de Bebidas no uso de Latas de Alumínio no Mundo<sup>10</sup>**

### 3.4. Tendências Globais no Consumo de Latas de Alumínio

Esta seção relaciona as principais megatendências globais e os motores de crescimento das bebidas em lata. Há uma série de fatores que determinam e impulsionam a demanda por essas bebidas. Entre eles, há fatores macroeconômicos, necessidades do cliente, comportamentos do consumidor, mix de embalagem<sup>11</sup> e as características do canal de distribuição, bem como a legislação.

Foram identificadas nove tendências globais que devem influenciar e modelar a indústria na próxima década ou mais. Apesar de globais, os impactos podem variar dependendo da região, tradições culturais e maturidade do mercado.

<sup>10</sup> Fonte: Relatório Anual Rexam 2012

<sup>11</sup> Existem vários tamanhos de latas de alumínio fabricadas no Brasil: 269ml, 310ml, 350ml, 473ml e 500ml.

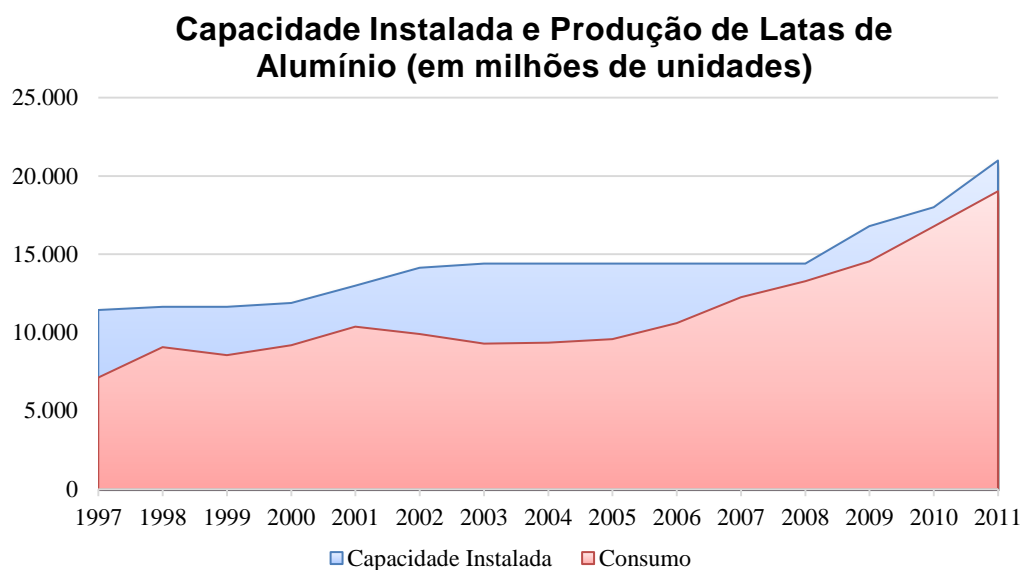
**Tabela 5 – Megatendências Globais do Mercado de Latas de Alumínio<sup>12</sup>**

Mudanças demográficas	Imobilidade
	Urbanização em massa
	Poder das mulheres (mercado emergente)
Facilidade, Conveniência e Simplicidade	Estilo de vida
	Escassez de tempo
	Diferenciação de produto
Saúde e Bem Estar	Doenças
	Demanda por produtos saudáveis
	Saúde preventiva
Individualismo e Customização	Consumidores mais individualistas
	“Feito para mim”
	Self branding
Sustentabilidade e Ética	Reciclável, reutilizável, menos material
	Percepção “limpa” do material
	Pegada verde
Premium e Acessível	Qualidade
	Valor adicionado
	Acessibilidade
Inteligente e Conectado	Embalagem inteligente
	Estilo de vida digital
	Informação
Consumidores Potenciais	Migração de influencia
	Consumo visível
	Maiores escolhas de produtos
Sensibilidade e Gratificação	Experimentação
	Prazer
	Originalidade

### 3.5. Evolução do Consumo no Brasil

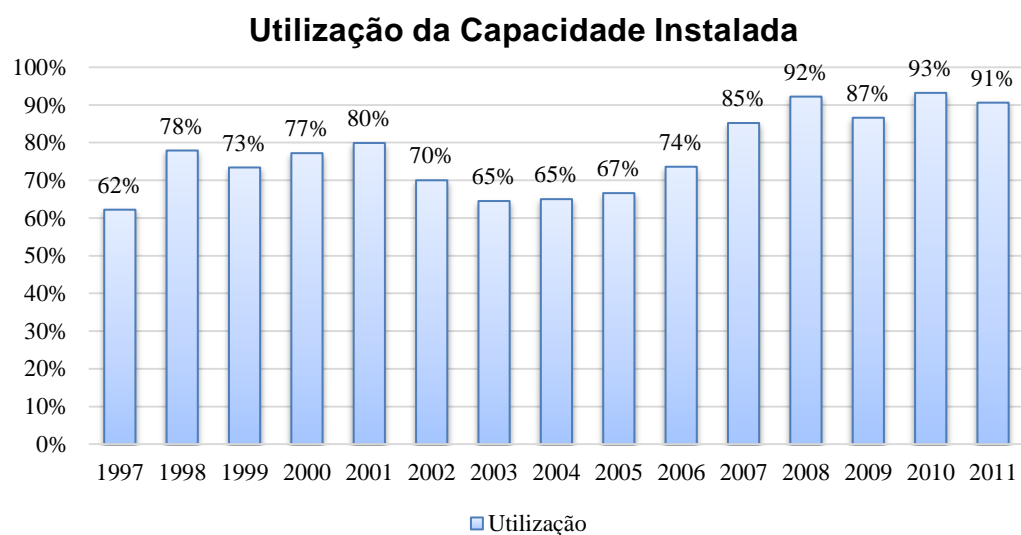
A Associação Brasileira dos Fabricantes de Latas de Alta Reciclabilidade, ABRALATAS, disponibiliza informações sobre a evolução do consumo e da capacidade instalada de latas de alumínio no Brasil. Esses dados foram consolidados e apresentados na Figura 4.

<sup>12</sup> Fonte: Relatório Anual Rexam 2012



**Figura 4 – Capacidade Instalada e Produção de Latas de Alumínio para Bebidas no Brasil – 1997 à 2011 (em milhões de unidades)<sup>13</sup>**

Analisando a figura acima, observa-se um grande crescimento do mercado brasileiro a partir de 2006. Devido aos altos valores de investimento e ao tempo de maturação do projetos, somado ao grande crescimento do mercado brasileiro, nota-se que a utilização da capacidade instalada tem aumentado bastante nos últimos anos. A Figura 5 mostra a evolução desse dado.



**Figura 5 - Utilização da Capacidade Instalada de Latas de Alumínio<sup>14</sup>**

<sup>13</sup> Fonte: ABRALATAS

<sup>14</sup> Fonte: ABRALATAS

A seção seguinte irá apresentar alguns dos principais pontos que impulsionaram o consumo brasileiro, assim como alguns fatores que irão influenciar o consumo de latas de alumínio nos próximos anos.

### **3.6. Perspectivas para o Mercado Brasileiro**

O crescimento da preferência pela lata deve-se a uma série de fatores. Dentre estes, destacam-se: a praticidade e facilidade de transporte e refrigeração, a preferência por utilização da lata nos grandes eventos, o respeito à questão ambiental<sup>15</sup> e a força da cadeia da lata que faz com que ela seja reciclada com rapidez. Porém, um dos pontos que mais contribuíram nos últimos anos na evolução do consumo brasileiro foi o crescimento expressivo do mercado de cerveja no país. Em 2010, o Brasil se tornou o terceiro maior produtor de cerveja do mundo, ultrapassando a Alemanha e a Rússia, ficando atrás apenas da China e dos EUA. A explosão de consumo no Nordeste e o aumento da renda per capita foram os grandes responsáveis por esse crescimento.

Além disso, a criação de uma legislação de trânsito mais rígida levou à migração do consumo de cerveja do bar (onde a embalagem predominante é o vidro) para a casa, beneficiando as vendas de latinhas em supermercados, onde mais de 70% das latas são estimadas para serem vendidas.

Para os próximos anos, a Copa das Confederações em 2013, Copa do Mundo em 2014 e as Olimpíadas em 2016 irão estimular ainda mais o consumo de latas de bebidas.

Como mencionado anteriormente, uma tendência importante que se observa em todo o mundo, é a crescente participação da lata de alumínio entre as embalagens de cerveja e de refrigerante. A decisão do consumidor na hora da compra está sendo extremamente influente na estratégia de venda dos fabricantes de bebida, seja por ser a embalagem com menor impacto ambiental, seja pelas demais vantagens que oferece: pode ser levada para qualquer local sem oferecer risco, pois é inquebrável (especialmente em grandes eventos e praias); gela mais rápido; conserva o sabor da bebida por não permitir a entrada de ar e luz; e ocupa

---

<sup>15</sup> A reciclabilidade do alumínio o permite ser reciclado infinitas vezes, sem que haja perda de qualidades no processo de reaproveitamento. Além disso, a mineração e o refino deste material requerem enormes gastos de energia, enquanto que a reciclagem requer apenas 5% desse total para produzi-lo.



menos espaço (inclusive no descarte, reduzindo a quantidade de lixo). Mesmo com o crescimento da participação da lata no mercado de cervejas no Brasil passando de 30% para 38% em menos de dois anos, ainda estamos longe da situação de outros países. No caso dos refrigerantes, a distância para os países desenvolvidos é ainda maior. Os números, entretanto, indicam que há um enorme potencial para que a lata ocupe um espaço maior em nosso país.

A Tabela 6 compara a participação das latas de alumínio nos mercados de cerveja e refrigerante em vários países. Essa análise ajuda a estimar uma parte do crescimento do mercado de latas. É possível observar que, principalmente em refrigerante, ainda há muito espaço para se desenvolver.

**Tabela 6 – Participação das Latinhas nos Mercado de Cerveja e Refrigerantes<sup>16</sup>**

<b>Países</b>	<b>Cervejas</b>	<b>Refrigerantes</b>
Reino Unido	70%	23%
Espanha	37%	30%
França	31%	30%
Bélgica	30%	30%
Dinamarca	52%	26%
Suécia	82%	23%
Grécia	31%	34%
Estados Unidos	51%	-
<b>Brasil</b>	<b>39%</b>	<b>8%</b>

<sup>16</sup> ABRALATAS. Revista da Lata. Edição 2011. Acesso 2013 Agosto 05. Disponível em: <  
<http://abralatas.org.br/wp-content/uploads/2013/07/Revista-da-Lata-Desempenho-do-Setor-no-Brasil-Edi%C3%A7%C3%A3o-2011.pdf> >

## 4. O Modelo de Jogos de Opções

Esta é a seção fundamental da teoria deste trabalho. Antes de entrar no modelo a ser utilizado, alguns exemplos servirão de base para ajudar a compreender a análise. Na primeira parte, será visto o caso de uma empresa atuando sozinha no mercado, com a opção de realizar um investimento para aumentar sua produção. A firma precisa decidir o melhor momento de exercer essa opção, de forma que seu valor seja maximizado. Em seguida, será introduzida uma nova variável no problema, a competição. Primeiro duas empresas idênticas atuarão no mercado, depois, duas empresas assimétricas atuarão com as mesmas opções. Elas precisam, novamente, decidir o momento ótimo de realizar o investimento (exercer a opção), porém, em um mercado competitivo, as firmas precisam contabilizar como suas ações influenciam as outras empresas e vice versa. Finalmente, no caso mais complexo, três firmas assimétricas ativas possuem a mesma opção de expansão.

### 4.1. Monopólio

#### 4.1.1. Opção de Expansão

Antes de analisar o modelo em um oligopólio, será estudado um modelo mais simples, o de monopólio, onde não há interação estratégica. Esse modelo irá formular a base para a análise de opções reais em tempo contínuo, demonstrando a metodologia básica para resolver jogos de momento ótimo de investimento (*timing*).

Será analisada a seguinte opção da firma monopolística:

- Opção de expansão: Uma empresa já está ativa no mercado e possui a opção de expandir sua capacidade de produção caso o mercado se torne mais atrativo do que inicialmente esperado. Caso o monopolista exerça sua opção real de expansão, seu fluxo de lucro (agora superior) irá refletir tanto a capacidade de produção anterior ao investimento quanto a capacidade adicionada.

Opções de expansão podem ser modeladas de duas maneiras. Uma maneira é através do aumento da capacidade de produção em tamanhos fixos – *lumpy* – ( $\Delta Q$ ), gerando um aumento correspondente no fluxo de lucro. A outra maneira envolve adições incrementais na capacidade de produção ( $dQ$ ). Como o primeiro representa melhor a indústria de Latas de Alumínio, o problema será modelado dessa forma.

#### 4.1.2. Investimento em Capacidade

Um projeto pode ter a flexibilidade de ser alterado em diferentes momentos de sua vida. Pode ser desejável, por exemplo, construir capacidade adicional se o produto for mais aceito no mercado do que se acreditava inicialmente. Nesse sentido, a oportunidade de investimento seria equivalente à escala inicial do projeto mais uma opção de compra americana de uma oportunidade de expansão futura. O preço de exercício da opção é  $I$ .

É possível distinguir dois estágios. No primeiro, o monopolista já está ativo no mercado e recebe um fluxo de lucro ( $\pi_0$ ) em função da capacidade de produção já instalada. No segundo estágio, quando o monopolista expande sua capacidade, ele recebe um fluxo de lucro superior ( $\pi_1$ ) devido à capacidade adicionada. O investimento em capacidade adicional deve acontecer no tempo ótimo  $\tilde{T}$ . A firma não irá, necessariamente, investir no instante zero, uma vez que incorrer em um custo afundado de investimento pode não ser justificável em quaisquer condições econômicas. Pode-se representar essas informações na seguinte tabela:

**Tabela 7 – Lucro da Firma em dois Estágios**

Estrutura da Indústria	$t$	Lucro	Lucro
		Estocástico	Determinístico
Antes de Investir	$0 \leq t \leq \tilde{T}$	$\tilde{\pi}_0$	$\pi_0$
Depois de Investir	$t \geq \tilde{T}$	$\tilde{\pi}_1$	$\pi_1$

O Lucro Estocástico leva em consideração as incertezas do mercado, este modelo irá supor que o fluxo de lucro da firma consiste em duas partes:

- Um fluxo de lucro determinístico que representa a capacidade instalada da empresa (presente e futura), sendo representado por  $\bar{\pi}$ .
- Um choque estocástico multiplicativo,  $\tilde{X}_t$ , representando a incerteza na indústria.

Assim, o lucro é dado por:

$$\tilde{\pi} = \bar{\pi} \cdot \tilde{X}_t \quad 4.1$$

O choque estocástico,  $\tilde{X}_t$ , segue um processo de Itô da forma:

$$d\tilde{X}_t = \alpha(\tilde{X}_t)dt + \sigma(\tilde{X}_t)dz_t \quad 4.2$$

Onde  $\alpha$  é a tendência,  $\sigma$  é a volatilidade e  $dz_t$  é o incremento de Wiener dado por:

$$dz_t = \varepsilon dt, \text{ com } \varepsilon \sim N(0, 1) \quad 4.3$$

Onde  $N(0, 1)$  significa ter distribuição Normal padronizada (média zero, variância 1) de probabilidade. Para se trabalhar com o movimento geométrico browniano (MGB) com uma tendência neutra ao risco  $\hat{\alpha}$ , é preciso subtrair o prêmio de risco  $PR$  da tendência  $\alpha$ :

$$d\tilde{X}_t = (\alpha - PR)\tilde{X}_t dt + \sigma\tilde{X}_t dz_t \quad 4.4$$

A tendência neutra ao risco  $(\alpha - PR)$  é igual a:

$$\alpha - PR = r - \delta \quad 4.5$$

Onde  $r$  é a taxa livre de risco e  $\delta$  é interpretada como taxa de distribuição de dividendos se o ativo básico for o valor da reserva desenvolvida ou do projeto.

Substituindo a equação 4.4 em 4.3, tem-se:

$$d\tilde{X}_t = (r - \delta)\tilde{X}_t dt + \sigma\tilde{X}_t dz_t \quad 4.6$$

### 4.1.3. Valor do Monopolista

O problema para o monopolista é decidir o momento exato de investir em nova capacidade. A estratégia do monopolista consiste em escolher, a priori, o gatilho do investimento  $X_T$  e investir no tempo  $\tilde{T} \equiv \inf\{t \geq 0 | \tilde{X}_t \geq X_T\}$ , quando  $X_T$  é primeiramente atingido.

O valor esperado do monopolista (no tempo  $t_0 = 0$ ), investindo em capacidade adicional no tempo  $\tilde{T}$ , é igual a (para  $X_0 \leq X_T$ ):

$$M_0(X_T) = \hat{E} \left[ \int_0^{\tilde{T}} \tilde{\pi}_0 e^{-rt} dt + \int_{\tilde{T}}^{\infty} \tilde{\pi}_1 e^{-rt} dt - I e^{-r\tilde{T}} \right]. \quad 4.7$$

Para chegarmos à solução, dois conceitos são necessários: o **Valor Esperado do Fator de Desconto Estocástico**  $B_t(\tilde{T})$  e o **Método Integral**. Ambos são explicados com maiores detalhes no Apêndice desta dissertação. De uma forma resumida, o valor esperado do fator de desconto estocástico possibilita converter o valor futuro recebido em um data incerta em valor presente. É necessário encontrar esse valor esperado visto que, como podemos observar na Equação 4.7, o monopolista irá receber o fluxo de lucro  $\tilde{\pi}_1$  a partir do momento que realizar o investimento, quando o choque estocástico  $\tilde{X}$  atingir o valor  $X_T$ . Como não é possível saber quando esse valor será atingido, dado que o choque é uma variável estocástica, somente o valor esperado do fator de desconto estocástico possibilitará calcular o valor da empresa. No método integral, são apresentadas algumas propriedades e uma notação que irão facilitar o desenvolvimento dos cálculos.

Utilizando os conceitos mencionados acima, pode-se escrever o valor do monopolista da seguinte maneira:

$$M_0(X_T) = V_0[\tilde{\pi}_0] + B_0(\tilde{T})[V_T[\tilde{\pi}_1 - \tilde{\pi}_0] - I] \quad 4.8$$

Onde  $V_t[\tilde{\pi}]$  é o valor da perpetuidade do recebimento do lucro  $\tilde{\pi}$  no tempo  $t$  em diante. Ou ainda, pode-se escrever essa função como:

$$M_0(X_T) = \frac{\bar{\pi}_0}{\delta} X_0 + B_0(\tilde{T}) \left[ \frac{(\bar{\pi}_1 - \bar{\pi}_0)}{\delta} X_T - I \right] \quad 4.9$$

O valor no tempo-0 da firma monopolista com a opção de expandir sua capacidade de produção (assumindo que ela se comporta de forma ótima) é:

$$M(X^*) \begin{cases} \bar{V}_0 X_0 + [(\bar{V}_1 - \bar{V}_0)X^* - I] \left( \frac{X_0}{X^*} \right)^{\beta_1} & \text{se } X_0 < X^*, \\ \bar{V}_1 X_0 - I & \text{se } X_0 \geq X^*. \end{cases} \quad 4.10$$

O monopolista maximiza seu valor selecionando o gatilho ótimo de investimento  $X^*$ . Aplicando a condição de primeira ordem no valor do monopolista  $M_0$  tem-se que:

$$M_X(X_T) = B_X(X_T) \cdot [V_T[\tilde{\pi}_1 - \tilde{\pi}_0] - I] + B_0(\tilde{T}) \cdot V_X[\tilde{\pi}_1 - \tilde{\pi}_0] \quad 4.11$$

Onde:

$$B_X(\cdot) = \frac{\partial B}{\partial X} \quad e \quad V_X(\cdot) = \frac{\partial V}{\partial X} \quad 4.12$$

O primeiro termo da parte direita da equação 4.7,  $V_0[\tilde{\pi}_0]$ , não depende do gatilho  $X^*$  e, por isso, desaparece (o valor da perpetuidade da capacidade já instalada não depende dos investimentos subsequentes). A condição de primeira ordem se torna, assim:

$$\frac{(\bar{V}_1 - \bar{V}_0)X^*}{I} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \quad 4.13$$

Ou ainda:

$$X^* = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \cdot \frac{\delta \cdot I}{\bar{\pi}_1 - \bar{\pi}_0} \quad 4.14$$

Onde:

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{(r - \delta)}{\sigma^2} + \sqrt{\left[ \frac{(r - \delta)}{\sigma^2} - \frac{1}{2} \right]^2 + \frac{2r}{\sigma^2}}. \quad 4.15$$

## 4.2. Duopólio

Nesta seção, será introduzido o conceito de preempção bem como seu estudo nos casos de duopólio simétrico e assimétrico.

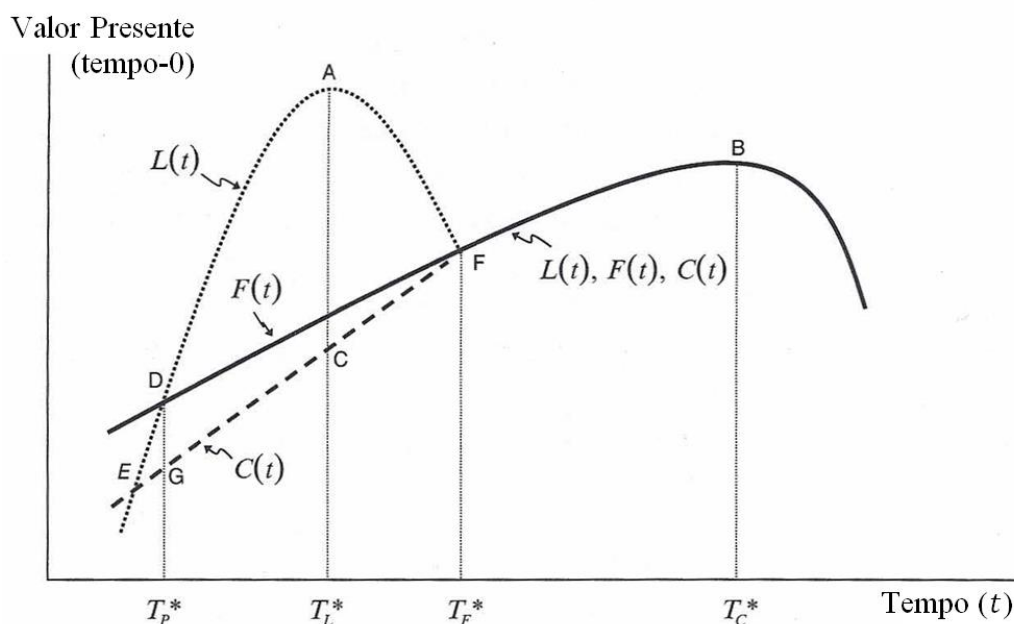
### 4.2.1. Preempção

Preempção é uma característica de mercados onde há uma **vantagem do primeiro lance** (*first move advantage*) e um excesso de lucro recebido pela firma que assume uma posição temporária como monopolista. É uma forma de competição resultante de jogos de estratégias de momento ótimo. Se há uma grande vantagem do primeiro lance adquirida pela primeira firma a exercer uma opção, todas as empresas desejarão investir e obter essa vantagem. Irá ocorrer a preempção se existir pelo menos um pequeno intervalo de tempo no qual o valor recebido pelo líder (primeira empresa a investir) seja maior do que o valor recebido pelo seguidor (neste caso, a segunda empresa a investir). Nessa situação, existe um incentivo para uma empresa antecipar seu rival e se tornar líder.

No caso desta dissertação, a vantagem do primeiro lance está ligada ao investimento em produção. O aumento de capacidade da primeira firma funciona como um compromisso de manter altos níveis de produção, reduzindo o preço do mercado e ameaçando a entrada ou investimentos das firmas rivais.

#### 4.2.2. Preempção em um Duopólio: Firms Simétricas

A figura abaixo ilustra o caso de preempção descrito em **Fudenberg e Tirole (1985)**. O modelo estuda o caso de duas empresas idênticas, consequentemente com estratégias simétricas, que possuem a opção de investir em um novo mercado.  $L(\cdot)$ ,  $F(\cdot)$  e  $C(\cdot)$  são, respectivamente, o valor de se tornar líder, o de se tornar seguidor e o valor de se investir simultaneamente em um duopólio de Cournot<sup>17</sup> (descontado para o valor presente). A existência de preempção indica que, em algum tempo  $t$  ( $\geq t_0$ ), existe uma vantagem de primeiro lance, ou seja, existe pelo menos um pequeno intervalo de tempo tal que o valor recebido pelo líder é maior do que o valor recebido pelo seguidor, ou seja,  $L(t) > F(t)$ . Nessa situação, há um incentivo para a firma se antecipar ao rival e se tornar líder. A figura 6 ilustra o problema descrito acima.  $T_P^*$ ,  $T_L^*$ ,  $T_F^*$  e  $T_C^*$  são, respectivamente, os gatilhos de preempção, do líder, do seguidor e do duopólio de Cournot. Esses gatilhos e seus significados são detalhados em seguida.



**Figura 6 – Caso de Preempção em um Duopólio Simétrico<sup>18</sup>**

<sup>17</sup> Competição de Cournot é um modelo econômico usado para descrever uma estrutura de indústria na qual as empresas competem em quantidade produzida, a qual é escolhida no mesmo momento e de forma independente por cada empresa.

<sup>18</sup> CHEVALIER-ROIGNANT, B.; TRIGEORGIS, L. **Competitive Strategy**. p. 365.



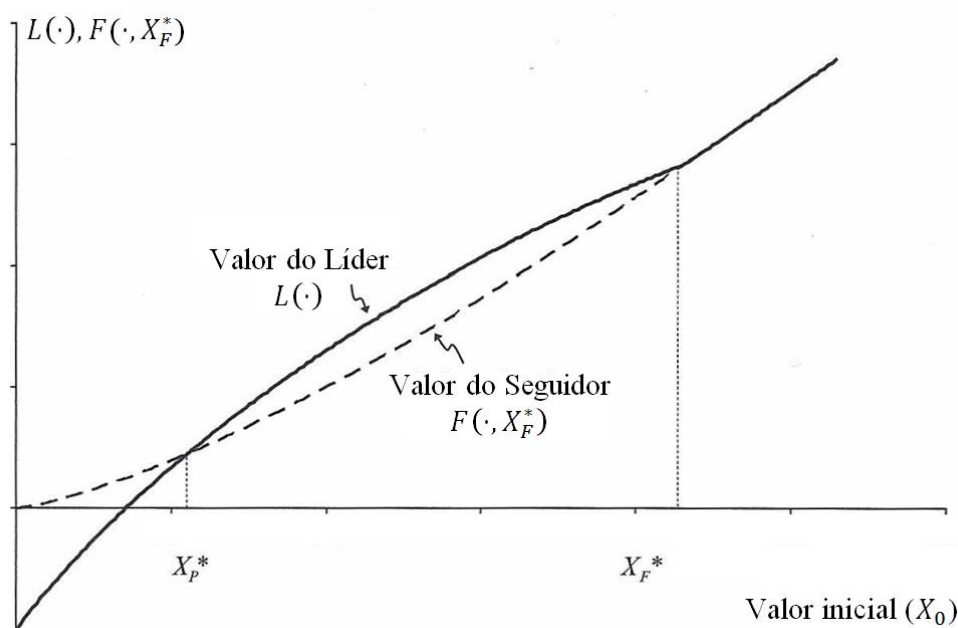
Observando a figura 6, vemos que nenhuma firma pode fazer melhor do que receber o valor do líder  $L(T_L^*)$  no ponto A. Ignorando as interações estratégicas, cada firma gostaria de investir exatamente no gatilho ótimo  $T_L^*$  que maximiza o valor do líder. No entanto, como há a vantagem do primeiro lance, cada firma tentará se antecipar ao rival, investindo um pouco antes. Esse processo de preempção irá continuar, parando somente no tempo  $T_P^*$ , ou ponto D, quando os valores esperados do líder e do seguidor são iguais, ou seja,  $L(T_P^*) = F(T_P^*)$ . Antes desse tempo ( $t < T_P^*$ ),  $L(t) < F(t)$ , não há incentivo para investir em um tempo anterior ao gatilho de preempção. No tempo de preempção  $T_P^*$ , não há vantagem de primeiro nem de segundo lance, as firmas são indiferentes entre se tornarem líder ou seguidora.

Cabe destacar que, devido ao problema de coordenação resultante da inexistência de um sequenciamento natural de líder-seguidor, pode acontecer que as empresas invistam no mesmo instante. O investimento simultâneo das mesmas no tempo  $T_L^*$ , por exemplo, resultaria em um duopólio de Cournot no ponto C, o que seria prejudicial a ambas, uma vez que  $C(T_L^*) < F(T_L^*) < L(T_L^*)$ .

Como mencionado anteriormente, em  $T_P^*$ , uma das firmas irá investir primeiro. Como a rival, ao também investir nesse momento, gerará menor valor do que se esperar para realizar o investimento, ou seja,  $C(T_P^*) < F(T_P^*)$ , a decisão de não investir será a melhor. O seguidor somente investirá no tempo  $T_F^*$ , gatilho ótimo da firma seguidora, passando a competir em um duopólio de Cournot. O gatilho de preempção da firma líder  $T_P^*$  não maximiza o seu valor; ele é o resultado da interação estratégica que, no equilíbrio, representa a indiferença entre os papéis de líder e seguidora. Nesse contexto, uma das firmas (a líder) investe no tempo de preempção  $T_P^*$  e a outra (seguidora) investe na data mais tarde  $T_F^*$ .

$T_P^*$  é o primeiro tempo no qual o valor do líder e do seguidor são iguais, ou seja,  $T_P^* \equiv \inf\{0 \leq t \leq T_L^* | L(t) = F(t)\}$ . Na região  $T_P^* < t < T_F^*$  há uma vantagem do primeiro lance para o líder, ou seja, a curva do valor do líder é acima da do seguidor ( $L(t) > F(t)$ ).  $T_C^*$  é o gatilho que maximiza o valor conjunto assumindo o investimento simultâneo.

Outra forma de visualizar o caso de preempção de um duopólio simétrico, é através da figura 7. A diferença está no eixo das abscissas. No lugar do tempo, esse eixo representa o valor inicial do choque multiplicativo estocástico  $X_0$ .

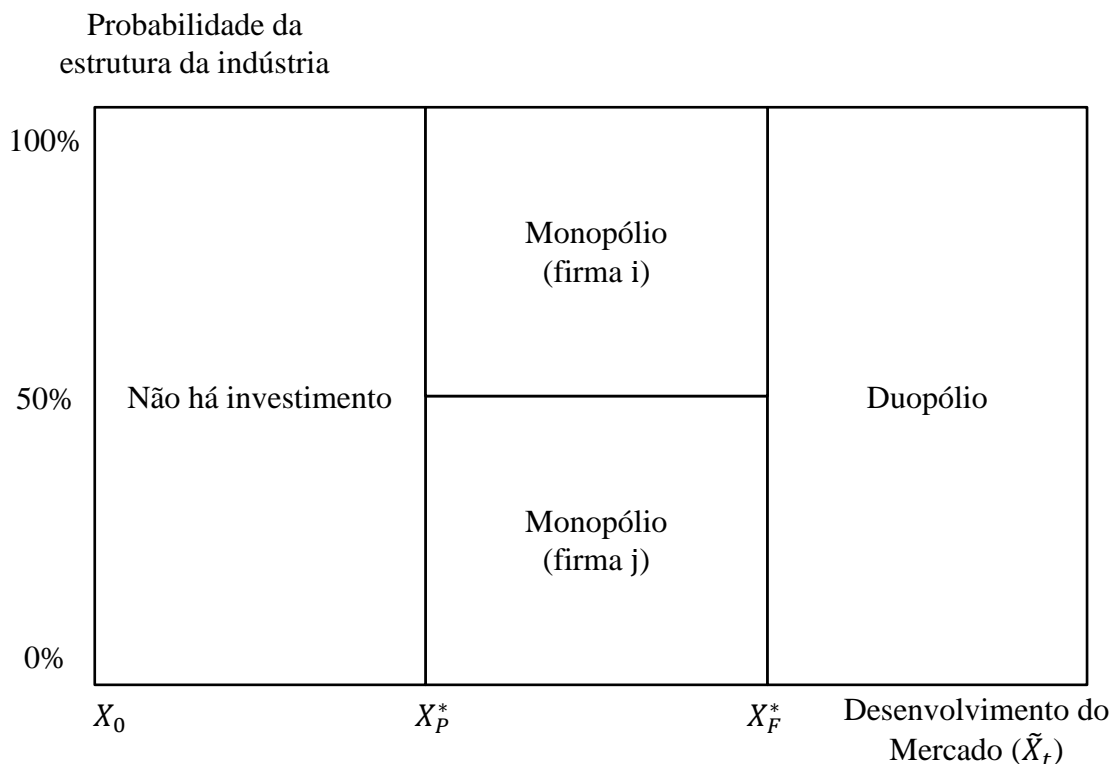


**Figura 7 – Valores e gatilhos do líder e seguidor em um novo mercado<sup>19</sup>**

Quando  $X_0 \geq X_F^*$ , ambas as empresas investem simultaneamente, recebendo o lucro equivalente ao duopólio de Cournot. Para  $X_P^* < X_0 < X_F^*$ , o valor do líder  $L(X_0)$  é superior ao valor do seguidor  $F(X_0, X_F^*)$ . Quando  $X_0 < X_P^*$ , o valor da opção do seguidor é superior ao valor presente do investimento antecipado do líder, não havendo incentivos para nenhuma das firmas se tornar líder.

Nesta dissertação, será utilizada a premissa na qual o valor inicial  $X_0$  é inferior ao gatilho de preempção da firma líder, ou seja,  $X_0 < X_P^*$ . Dessa forma, está assegurado que não haja falhas de coordenação, nas quais duas ou mais empresas investem simultaneamente, recebendo um valor inferior  $C(X_0)$ . Caso não fosse utilizada essa premissa, as firmas poderiam exercer, simultaneamente, a opção de investir em um momento não ótimo para ambas empresas. Assim, a evolução da indústria em função do desenvolvimento do mercado é representada na figura 8.

<sup>19</sup> CHEVALIER-ROIGNANT, B.; TRIGEORGIS, L. **Competitive Strategy**. p. 377.



**Figura 8 – Evolução da Estrutura do Mercado**

Antes do choque estocástico atingir  $X_P^*$ , nenhuma firma irá exercer a opção de entrar no mercado, uma vez que, como representado nas figuras 6 e 7, o valor da espera (seguidor) é maior do que o valor do investimento imediato. Quando o choque atingir  $X_P^*$ , somente uma das firmas irá investir, entrando no mercado de maneira monopolística. Como as empresas são idênticas, ambas possuem uma probabilidade igual (50%) de se tornarem líder. Somente quando o choque atingir  $X_F^*$ , a empresa rival também entrará no mercado, competindo na forma de um duopólio de Cournot.

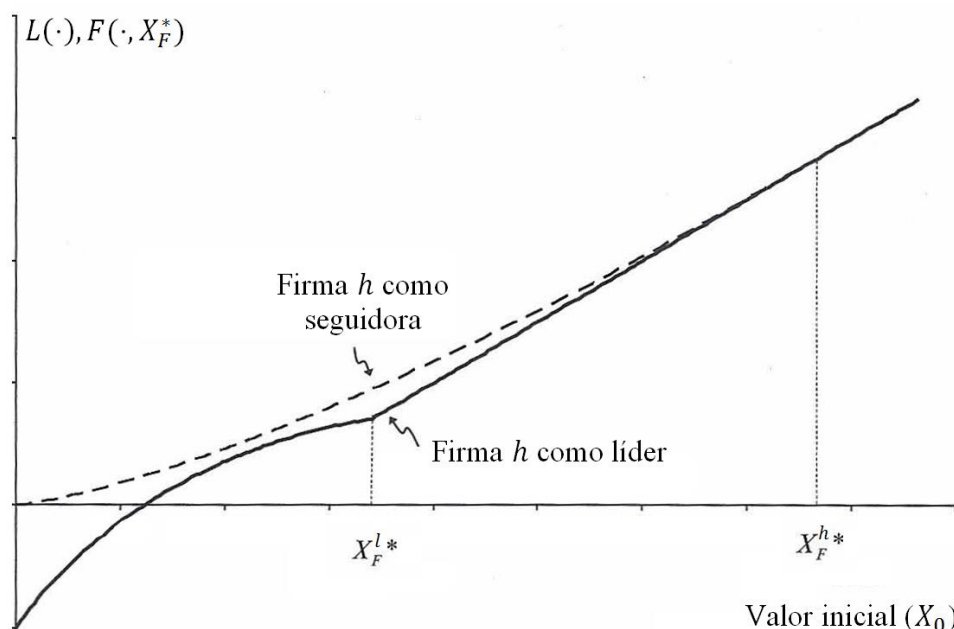
#### 4.2.3. Preempção em um Duopólio: Firms Assimétricas

Assumir assimetria entre as empresas é mais realista e descritivo de muitos duopólios e oligopólios. Iremos estender o modelo apresentado anteriormente considerando assimetria nos custos variáveis de produção. A firma com custo inferior será representada por  $l$  (custo igual a  $c_l$ ), enquanto a de custo superior,  $h$  (custo igual a  $c_h$ ).

O tamanho da vantagem competitiva irá impactar a preempção das empresas. Primeiro, iremos analisar o caso em que há uma grande vantagem para a firma de baixo custo, em seguida, veremos o caso em que essa vantagem é pequena.

#### 4.2.3.1. Grande Vantagem em Custo

A figura 9, retirada de **Chevalier-Roignant e Trigeorgis (2011)**, é um exemplo onde a diferença entre os custos variáveis de produção ( $c_l - c_h$ ) é grande. As duas curvas da figura 9 representam os valores da firma de alto custo em função do estado inicial do choque estocástico. A linha sólida equivale ao seu valor caso entrasse no mercado como líder, investindo antes da firma de baixo custo. A curva pontilhada representa o valor da firma de alto custo entrando como seguidora.  $X_F^{h*}$ ,  $X_L^{h*}$ ,  $X_F^{l*}$ ,  $X_L^{l*}$  e  $X_P^{l*}$  são, respectivamente, o gatilho de seguidora da firma de alto custo, o gatilho monopolístico da firma de alto custo entrando como líder, o gatilho da firma de baixo custo entrando como seguidora, o gatilho monopolístico da firma de baixo custo investindo como líder e o gatilho de preempção da firma de baixo custo.



**Figura 9 – Caso de Preempção com Grande Vantagem em Custo**<sup>20</sup>

<sup>20</sup> CHEVALIER-ROIGNANT, B.; TRIGEORGIS, L. **Competitive Strategy**. p. 383.

Nesse caso, a firma de alto custo ( $h$ ) não possui nenhuma vantagem do primeiro lance, uma vez que o valor da sua curva como líder está sempre localizada abaixo da curva de seu valor como seguidora. Isso porque sua grande desvantagem em custo torna uma liderança no investimento não viável economicamente. Assim, para uma diferença de custo maior do que um dado valor, a firma de baixo custo  $l$  não irá temer a preempção do seu competidor. Neste caso, como a firma de alto custo  $h$  nunca estará fazendo melhor se antecipando, ela irá esperar como seguidora o gatilho ótimo  $X_F^{h*}$  ser atingido. Já a firma de baixo custo poderá escolher seu gatilho ótimo de forma monopolística ( $X_L^{l*}$ ), aquele que maximiza o valor da empresa, ignorando a estratégia de investimento do rival. Repare que, neste caso, assumindo a premissa de o choque estocástico inicial  $X_0$  ser inferior ao gatilho  $X_L^{l*}$ , não faz sentido existir os gatilhos de preempção da firma de baixo custo  $X_P^{l*}$ , da firma de alto custo entrando como líder  $X_L^{h*}$  e nem da firma de baixo custo entrando como seguidora  $X_F^{l*}$ . Neste cenário, o único resultado possível para a indústria é a firma de baixo custo exercendo a opção de investir quando o choque estocástico primeiramente atingir o valor  $X_L^{l*}$ , e a seguidora de alto custo exercendo sua opção quando o choque for igual a  $X_F^{h*}$ .

#### 4.2.3.2. Pequena Vantagem em Custo

Neste cenário a diferença dos custos não é grande. Assume-se que cada firma possa adquirir uma vantagem de primeiro lance no estágio de investimento, ou seja, existe uma região de  $\tilde{X}_t$  tal que  $L(\tilde{X}_t) > F(\tilde{X}_t)$ .

Em contraste com o caso anterior, onde a grande vantagem em custo possibilitava a firma  $l$  ignorar o risco da preempção do rival mais fraco, aqui, a ameaça de preempção pode induzir um investimento mais cedo da empresa de baixo custo. Sob essa ameaça, a firma  $l$  não pode mais esperar até  $\tilde{T}_L^{l*} \equiv \inf\{t \geq 0 | \tilde{X}_t \geq X_L^{h*}\}$  para investir. Caso a empresa de baixo custo esperasse até o gatilho monopolista para investir, ela poderia ser antecipada pela rival  $h$ , o que forçaria a firma  $l$  investir ainda antes, e assim por diante. O ponto de preempção para a firma  $l$  seria:

$$X_P^{l*} = \inf\{\tilde{X}_t < X_F^{h*} | L^h(\tilde{X}_t) = F^h(\tilde{X}_t)\} \quad 4.16$$

Como é possível observar na figura 10, a firma  $h$  não estaria interessada em selecionar um gatilho inferior a  $X_P^{l*}$  (ou investir em um tempo inferior a  $T_P^{l*}$ ), uma vez que isso reduziria seu valor, ou seja, enquanto o choque estocástico for inferior a  $X_P^{l*}$ , o valor como seguidora da empresa de alto custo é superior ao seu valor como líder,  $L^h(X_h) < F^h(X_h)$  se  $X_h < X_P^{l*}$ .

Dependendo dos parâmetros dos gatilhos, podem existir dois casos:

**i. O gatilho de preempção da firma de baixo custo é maior do que seu gatilho monopolístico.**

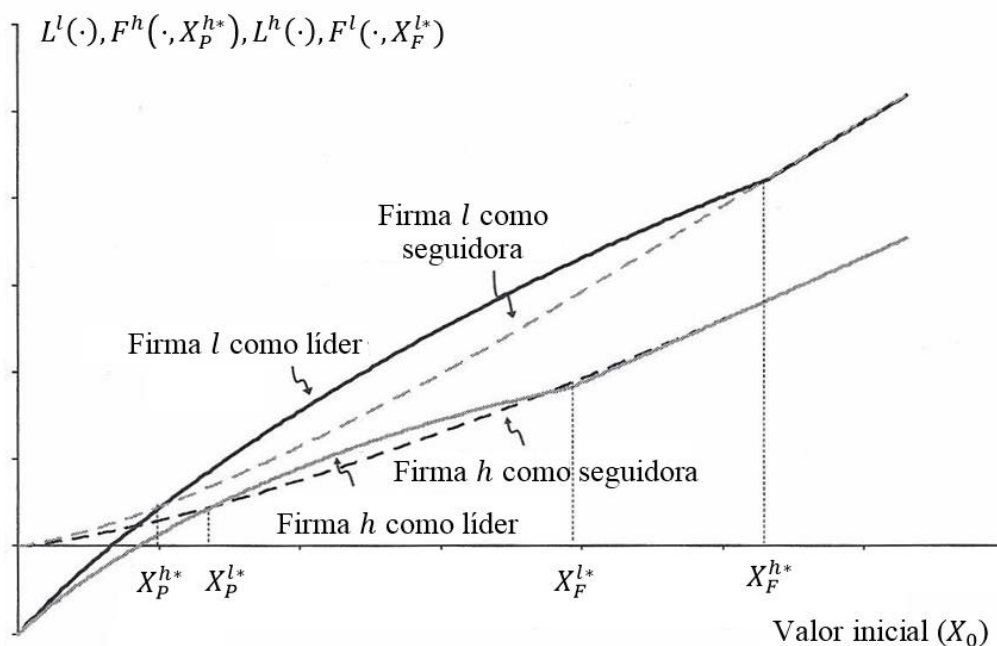
Neste caso, e assumindo a premissa de que o valor inicial do choque estocástico é inferior ao gatilho monopolístico da firma de baixo custo, ou seja,  $X_0 \leq X_L^{l*}$ , a firma de baixo custo investe como líder assim que  $X_L^{l*}$  ( $< X_L^{h*}$ ) é atingido. Dessa forma, não teria sentido a firma investir no gatilho de preempção, uma vez que ela estaria melhor investindo no seu gatilho monopolista. A firma de alto custo investe posteriormente como seguidora no tempo estocástico  $\tilde{T}_F^{h*} \equiv \inf\{t \geq t_0 | \tilde{X}_t \geq X_F^{h*}\}$ .

**ii. O gatilho de preempção da firma de baixo custo é inferior ao seu gatilho monopolístico.**

A figura 10 ajuda a compreender melhor este caso. Há quatro curvas na figura representando os valores das firmas de baixo e alto custo, nos casos delas entrando como líderes e seguidoras, em função do estado inicial do choque estocástico. Se a firma de baixo custo não tivesse concorrência, ela investiria, otimamente, em seu gatilho monopolístico  $X_L^{l*}$  (sabemos que  $X_P^{l*} < X_L^{l*} < X_F^{l*}$ ), porém a ameaça de preempção da firma de alto custo a forçará a investir antecipadamente no gatilho  $X_P^{l*}$  (ponto no qual a empresa de alto custo é indiferente entre ser seguidora ou líder).

Quando  $X_0 < X_P^{l*}$ , ambas as empresas irão esperar. Assim que  $X_P^{l*}$  é primeiramente atingido no tempo  $\tilde{T}_P^{l*}$ , a empresa de baixo custo investe como

líder. Antes desse ponto não há investimento. A firma de alto custo investe no tempo  $\tilde{T}_F^{h*}$ .



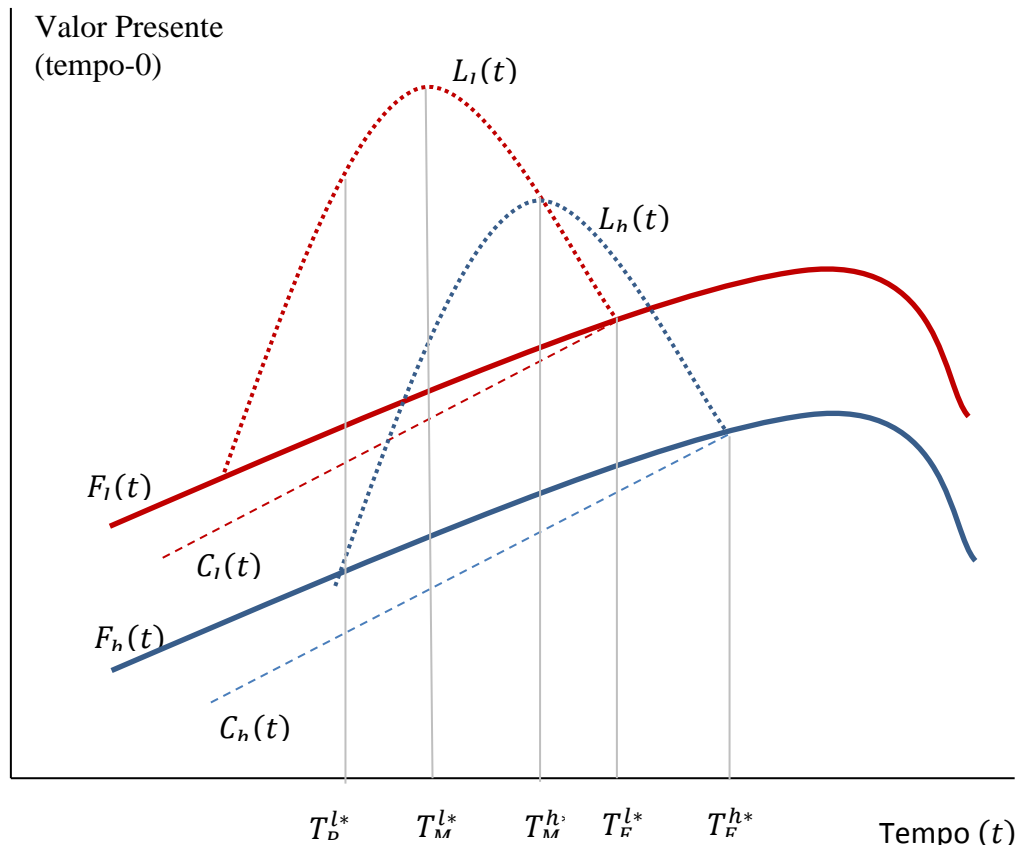
**Figura 10 – Caso de Preempção com Pequena Vantagem em Custo<sup>21</sup>**

No caso assimétrico acima, o equilíbrio de preempção no qual o líder investe mais cedo no tempo  $\tilde{T}_P^{l*}$  (ao invés do gatilho monopolista  $\tilde{T}_L^{l*}$ ) ocorre se a vantagem de custo for relativamente pequena. Neste caso, as firmas precisam levar em conta as interações estratégicas (ameaças de preempção), o que leva a investimentos mais cedo. Essa análise ajuda a enfatizar a importância de se conseguir uma vantagem de custo em jogos dinâmicos. Se a vantagem for grande o suficiente, a ameaça de preempção se torna irrelevante e a empresa de baixo custo poderia investir no tempo estocástico monopolista  $\tilde{T}_L^{l*}$  (gatilho  $X_L^{l*}$ ), ignorando a entrada do rival, apesar de ainda estar sujeita a perdas devida à competição. No entanto, se a vantagem for pequena, ela precisa, necessariamente, entrar mais cedo, no tempo de preempção  $\tilde{T}_P^{l*}$  (gatilho  $X_P^{l*}$ ) devido às interações estratégicas que ocorrerão.

Uma outra forma de visualizar o problema acima é através da figura 11, na qual a compreensão das estratégias ótimas a serem tomadas é mais intuitiva. A

<sup>21</sup> CHEVALIER-ROIGNANT, B.; TRIGEORGIS, L. **Competitive Strategy**. p. 388.

empresa de baixo custo, representada na figura pela curva vermelha, irá investir no tempo  $T_P^{l*}$ , e não no momento que maximizaria seu valor ( $T_M^{l*}$ ), de forma a evitar a antecipação da firma de alto custo.



**Figura 11 – Caso de Preempção em um Duopólio Assimétrico com Pequena Vantagem em Custo**

### 4.3. Oligopólio Assimétrico

Finalmente, essa seção irá apresentar um mercado formado por três empresas de tamanhos diferentes concorrendo em um mercado onde há ameaça de preempção. Serão encontradas as soluções analíticas para cada uma das empresas.

#### 4.3.1. Modelo em um Mercado Existente: Opção de Expansão

Aqui, as firmas não são homogêneas já que, para o mesmo investimento, uma firma tem menor custo operacional do que a outra. No caso da indústria de latas de alumínio, há três grandes empresas: Rexam, Crown e Latapack-Ball. Iremos considerar uma empresa com baixo custo ( $l$ ), uma com custo intermediário



(*int*) e outra com alto custo (*h*), de forma que:  $c_h > c_{int} > c_l$ . Todas as firmas estão operando no mercado e têm a opção de expandir a produção de latas de alumínio. O custo de um novo investimento (*I*) é o mesmo para todas as empresas, mas, como seus custos operacionais diferem, o oligopólio é assimétrico, havendo uma vantagem competitiva para a empresa de menor custo. Quando uma das empresas exerce a opção de expansão, o fluxo de lucro das outras é alterado, ou seja, o modelo considera *externalidades negativas*.

Levando em consideração as incertezas do mercado, este modelo irá supor que o fluxo de lucro da firma consiste em duas partes:

- Um fluxo de lucro determinístico, que representa a capacidade instalada da empresa (presente e futura), sendo representado por  $\bar{\pi}_i$  (sendo *i* igual a *l*, *int* ou *h*).
- Um choque estocástico multiplicativo,  $\tilde{X}_t$ , representando a incerteza na indústria, que segue um processo de Itô da forma da equação 4.2:

Lembrando que para trabalharmos com o movimento geométrico browniano com uma tendência neutra ao risco  $\hat{\alpha}$ , é preciso subtrair o prêmio de risco *PR* da tendência  $\alpha$ .

Assim, o fluxo de lucro da firma *i* é dado por:

$$\tilde{X}_t \cdot \bar{\pi}_i^n = \tilde{\pi}_i^n \quad 4.17$$

Onde *n* é o número de firmas que já exerceram a opção de expansão no mercado.

Os possíveis valores para  $\bar{\pi}_i^n$  são:

- $\bar{\pi}^0$ : significa que nenhuma empresa investiu no mercado (repare que como as firmas estão ativas, há um fluxo de lucro  $X \cdot \bar{\pi}_i^0$ );
- $\bar{\pi}^1$ : significa que apenas a empresa Líder investiu;
- $\bar{\pi}^2$ : significa que duas empresas já investiram.
- $\bar{\pi}^3$ : significa que todas as empresas do setor investiram.

A função de demanda inversa será considerada de forma linear e determinística, ou seja:

$$P(Q_T) = a - bQ_T, \text{ com } a > 0, b > 0 \text{ e } a > bQ_T \quad 4.18$$

Onde  $P(Q_T)$  é o preço da lata de alumínio. Repare que o preço é função da quantidade total ofertada pela indústria,  $Q_T$ . A função do fluxo de lucro das empresas é dada, assim, pela expressão:

$$\pi_i(Q_i) = Q_i \cdot (a - bQ_T - c_i) \quad 4.19$$

O exercício da opção de expansão de uma firma afeta os lucros das outras, uma vez que o modelo considera a externalidade negativa no preço dada pela curva da demanda (um aumento da quantidade produzida reduzirá o preço final do produto). Para a firma que primeiro investir, a externalidade negativa pode ser representada pela equação:

$$\bar{\pi}_i^1 > \bar{\pi}_i^2 > \bar{\pi}_i^3 > \bar{\pi}_i^0 \quad 4.20$$

#### 4.3.2. Líder ( $L$ ), Primeira Seguidora ( $F$ ) e Segunda Seguidora ( $FF$ )

Será definido como Líder ( $L$ ), a empresa que, sozinha, tiver exercido a opção de expansão. Partindo da premissa que o choque estocástico no tempo-0 é inferior ao gatilho de preempção da firma de baixo custo  $l$  (essa premissa será explicada com mais detalhes no decorrer desta seção), a ordem natural, devido à vantagem competitiva, é que a firma de baixo custo se torne Líder ( $L_l$ ). Quando uma empresa, sozinha, investir após a Líder, ela será a Primeira Seguidora. Seguindo a mesma lógica, a empresa de custo intermediário será a segunda a investir ( $F_{int}$ ). Se duas empresas já expandiram suas produções, e uma terceira também decidir por investir, ela será a Segunda Seguidora. Novamente, na ordem natural, deverá ser a firma de alto custo ( $FF_h$ ).

A tabela 8 relaciona os fluxos de lucros de cada uma das três empresas nos quatro possíveis estágios da indústria.

**Tabela 8 – Lucro do Oligopólio em Quatro Estágios de Desenvolvimento**

Tempo	Estrutura da Indústria	Fluxo de lucro determinístico		
		Firma $L$	Firma $F$	Firma $FF$
$t < \tilde{T}_L$	Ninguém investe	$\bar{\pi}_L^0$	$\bar{\pi}_F^0$	$\bar{\pi}_{FF}^0$
$\tilde{T}_L \leq t \leq \tilde{T}_F$	Apenas uma investe	$\bar{\pi}_L^1$	$\bar{\pi}_F^1$	$\bar{\pi}_{FF}^1$
$\tilde{T}_F \leq t \leq \tilde{T}_{FF}$	Duas investem	$\bar{\pi}_L^2$	$\bar{\pi}_F^2$	$\bar{\pi}_{FF}^2$
$t \geq \tilde{T}_{FF}$	Todas Investem	$\bar{\pi}_L^3$	$\bar{\pi}_F^3$	$\bar{\pi}_{FF}^3$

### 4.3.3. Solução do Problema

Como se está sendo analisado jogos de momento ótimo, a solução será encontrada através da retro indução (*backwards*). Isso significa que primeiro é necessário estimar o valor no nó de decisão final, neste problema, o gatilho do segundo seguidor, para então calcular a penúltima situação, gatilho do seguidor, e, por fim, a primeira, o gatilho do líder.

#### 4.3.3.1. Firma Segunda Seguidora

O valor esperado da empresa segunda seguidora (no tempo  $t_0 = 0$ ) investindo em expansão no tempo  $\tilde{T}_{FF}$ , para  $X_0 \leq X_{T_L}$ , é:

$$\begin{aligned}
 FF_0(X_T) = \hat{E} \left[ \int_0^{\tilde{T}_L} \tilde{\pi}_{FF}^0 \cdot e^{-rt} dt + \int_{\tilde{T}_L}^{\tilde{T}_F} \tilde{\pi}_{FF}^1 \cdot e^{-rt} dt \right. \\
 \left. + \int_{\tilde{T}_F}^{\tilde{T}_{FF}} \tilde{\pi}_{FF}^2 \cdot e^{-rt} dt + \int_{\tilde{T}_{FF}}^{\infty} \tilde{\pi}_{FF}^3 \cdot e^{-rt} dt - I \cdot e^{-r\tilde{T}_{FF}} \right]
 \end{aligned}
 \tag{4.21}$$

Utilizando os conceitos de valor esperado do fator de desconto estocástico e as notações apresentadas no apêndice desta dissertação, podemos escrever a equação 4.25 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
FF_0(X_T) &= V_0[\tilde{\pi}_{FF}^0] + B_0(\tilde{T}_L) \cdot V_{T_L}[\tilde{\pi}_{FF}^1 - \tilde{\pi}_{FF}^0] \\
&+ B_0(\tilde{T}_F) \cdot V_{T_F}[\tilde{\pi}_{FF}^2 - \tilde{\pi}_{FF}^1] \\
&+ B_0(\tilde{T}_{FF}) \cdot [V_{T_{FF}}[\tilde{\pi}_{FF}^3 - \tilde{\pi}_{FF}^2] - I]
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Ou ainda:

$$\begin{aligned}
FF_0(X_T) &= \frac{X_0 \cdot \bar{\pi}_{FF}^0}{\delta} + B_0(\tilde{T}_L) \cdot \frac{X_L[\bar{\pi}_{FF}^1 - \bar{\pi}_{FF}^0]}{\delta} \\
&+ B_0(\tilde{T}_F) \cdot \frac{X_F[\bar{\pi}_{FF}^2 - \bar{\pi}_{FF}^1]}{\delta} \\
&+ B_0(\tilde{T}_{FF}) \cdot \left[ \frac{X_{FF}[\bar{\pi}_{FF}^3 - \bar{\pi}_{FF}^2]}{\delta} - I \right]
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Os valores encontrados acima são para o caso de o choque estocástico inicial ( $X_0$ ) ser inferior ao primeiro gatilho ( $X_L$ ), sendo essa uma das premissas que iremos utilizar no modelo. No entanto, os casos abaixo analisam os outros possíveis casos de  $X_0$ . Apesar de não estarmos considerando esses cenários, eles ajudam a compreender os valores das empresas em cada situação:

Para  $X_L \leq X_0 < X_F$ , a empresa líder investirá imediatamente, e, dessa forma, o primeiro termo da equação 4.27 desaparece.

$$\begin{aligned}
FF_0(X_T) &= \frac{X_0 \cdot \bar{\pi}_{FF}^1}{\delta} + B_0(\tilde{T}_F) \cdot \frac{X_F[\bar{\pi}_{FF}^2 - \bar{\pi}_{FF}^1]}{\delta} \\
&+ B_0(\tilde{T}_{FF}) \cdot \left[ \frac{X_{FF}[\bar{\pi}_{FF}^3 - \bar{\pi}_{FF}^2]}{\delta} - I \right]
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Para  $X_F \leq X_0 < X_{FF}$ , tanto a empresa líder quanto a primeira seguidora investem imediatamente.

$$FF_0(X_T) = \frac{X_0 \cdot \bar{\pi}_{FF}^2}{\delta} + B_0(\tilde{T}_{FF}) \cdot \left[ \frac{X_{FF}[\bar{\pi}_{FF}^3 - \bar{\pi}_{FF}^2]}{\delta} - I \right] \tag{4.25}$$

Para  $X_0 \geq X_{FF}$ , as três empresas exercem a opção de expansão no tempo  $t_0 = 0$ .

$$FF_0(X_T) = \frac{X_0 \cdot \bar{\pi}_{FF}^3}{\delta} - I \quad 4.26$$

#### 4.3.3.1.1. Gatilho $X_{FF}$

Neste t3pico, ser3 calculado o gatilho da firma que ir3 investir por 3ltimo. A empresa ir3 maximizar seu valor selecionando o momento 3timo de investir, ou seja, o gatilho  $T_{FF}$ . H3 um *trade-off* entre a espera por um valor maior do fluxo de lucro e o custo da espera dado pelo fator de desconto. Utilizando a condi33o de primeira ordem para maximizar seu valor, toma-se a derivada parcial de  $FF_0$  em rela33o 3 vari3vel de controle estoc3stico  $X_{FF}$ , igualando o resultado a zero. Obtem-se, assim:

$$B_X(X_{FF}) \cdot [V_{T_{FF}}[\tilde{\pi}_{FF}^3 - \tilde{\pi}_{FF}^2] - I] + B_0(X_{FF}) \cdot V_X[\tilde{\pi}_{FF}^3 - \tilde{\pi}_{FF}^2] = 0 \quad 4.27$$

Onde:

$$B_X(\cdot) = \frac{\partial B}{\partial X_{T_{FF}}} \quad e \quad V_X(\cdot) = \frac{\partial V}{\partial X_{T_{FF}}} \quad 4.28$$

Ou ainda:

$$B_X(X_{FF}) \cdot \left[ \frac{X_{FF}[\bar{\pi}_{FF}^3 - \bar{\pi}_{FF}^2]}{\delta} - I \right] + B_0(X_{FF}) \cdot \left[ \frac{[\bar{\pi}_{FF}^3 - \bar{\pi}_{FF}^2]}{\delta} \right] = 0 \quad 4.29$$

Repare que o fator de desconto, antes fun33o do tempo, est3 como fun33o de um valor  $X_{FF}$  (h3 duas estrat3gias equivalentes: o investidor procura o tempo 3timo para tomar a decis3o ou o n3vel alvo 3timo para investir – valor do choque estoc3stico). Al3m disso, os tr3s primeiros termos do lado direito da equa33o 4.27 n3o dependem do gatilho e, por isso, desapareceram.

Sabe-se que:

$$B_0(X_{FF}) = \left( \frac{X_0}{X_{FF}} \right)^{\beta_1} \quad 4.30$$

A derivada do valor esperado do fator de desconto em relação à  $X_{FF}$  é:

$$B_X(X_{FF}) = -\beta_1 \frac{X_0^{\beta_1}}{X_{FF}^{\beta_1+1}} \quad 4.31$$

Substituindo as equações, é possível encontrar o valor do gatilho  $X_{FF}$ :

$$X_{FF} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \cdot \frac{\delta \cdot I}{\bar{\pi}_{FF}^3 - \bar{\pi}_{FF}^2} \quad 4.32$$

#### 4.3.3.2. Firma Primeira Seguidora

O valor esperado da empresa primeira seguidora (no tempo  $t_0 = 0$ ) investindo em expansão no gatilho  $\tilde{T}_F$ , para  $X_0 \leq X_{T_L}$ , é:

$$F_0(X_T) = \hat{E} \left[ \int_0^{\tilde{T}_L} \tilde{\pi}_F^0 \cdot e^{-rt} dt + \int_{\tilde{T}_L}^{\tilde{T}_F} \tilde{\pi}_F^1 \cdot e^{-rt} dt + \int_{\tilde{T}_F}^{\tilde{T}_{FF}} \tilde{\pi}_F^2 \cdot e^{-rt} dt + \int_{\tilde{T}_{FF}}^{\infty} \tilde{\pi}_F^3 \cdot e^{-rt} dt - I \cdot e^{-r\tilde{T}_F} \right] \quad 4.33$$

Podemos reescrever a equação 4.37 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} F_0(X_T) &= V_0[\tilde{\pi}_F^0] + B_0(\tilde{T}_L) \cdot V_{T_L}[\tilde{\pi}_F^1 - \tilde{\pi}_F^0] \\ &+ B_0(\tilde{T}_F) \cdot [V_{T_F}[\tilde{\pi}_F^2 - \tilde{\pi}_F^1] - I] \\ &+ B_0(\tilde{T}_{FF}) \cdot V_{T_{FF}}[\tilde{\pi}_F^3 - \tilde{\pi}_F^2] \end{aligned} \quad 4.34$$

Ou ainda:

$$\begin{aligned}
F_0(X_T) = & \frac{X_0 \cdot \bar{\pi}_F^0}{\delta} + B_0(\tilde{T}_L) \cdot \frac{X_L[\bar{\pi}_F^1 - \bar{\pi}_F^0]}{\delta} \\
& + B_0(\tilde{T}_F) \cdot \left[ \frac{X_F[\bar{\pi}_F^2 - \bar{\pi}_F^1]}{\delta} - I \right] \\
& + B_0(\tilde{T}_{FF}) \cdot \frac{X_{FF}[\bar{\pi}_F^3 - \bar{\pi}_F^2]}{\delta}
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Novamente, veremos os casos nos quais o valor inicial do choque estocástico  $X_0$  é superior ao primeiro gatilho da firma líder  $X_L$ . São possíveis os seguintes casos:

Para  $X_L \leq X_0 < X_F$ , a empresa líder investe imediatamente:

$$\begin{aligned}
F_0(X_T) = & \frac{X_0 \cdot \bar{\pi}_F^1}{\delta} + B_0(\tilde{T}_F) \cdot \left[ \frac{X_F[\bar{\pi}_F^2 - \bar{\pi}_F^1]}{\delta} - I \right] \\
& + B_0(\tilde{T}_{FF}) \cdot \frac{X_{FF}[\bar{\pi}_F^3 - \bar{\pi}_F^2]}{\delta}
\end{aligned} \tag{4.36}$$

Para  $X_F \leq X_0 < X_{FF}$ , tanto a líder quando a primeira seguidora investem no primeiro momento:

$$F_0(X_T) = \frac{X_0 \cdot \bar{\pi}_F^2}{\delta} - I + B_0(\tilde{T}_{FF}) \cdot \frac{X_{FF}[\bar{\pi}_F^3 - \bar{\pi}_F^2]}{\delta} \tag{4.37}$$

Para  $X_0 \geq X_{FF}$ , as três empresas investem simultaneamente:

$$F_0(X_T) = \frac{X_0 \cdot \bar{\pi}_F^3}{\delta} - I \tag{4.38}$$

#### 4.3.3.2.1. Gatilho $X_F$

Se não houvesse a ameaça de preempção, a firma Primeira Seguidora (chamaremos aqui de firma 2, neste caso  $F_2$ ) investiria otimamente no gatilho que maximizasse o valor da empresa. No entanto, devido à ameaça de preempção, há a possibilidade dela não poder esperar tanto para investir. A Segunda Seguidora (chamaremos aqui de firma 3 por ser a terceira a investir) pode ter incentivo para

se tornar Primeira Seguidora ( $F_3$ ). Isso irá ocorrer se o valor dessa empresa como Primeira Seguidora for superior ao seu valor como Segunda Seguidora, ou seja, se  $F_3 > FF_3$ . A estratégia da firma Primeira Seguidora ( $F_2$ ) irá depender, assim, do tamanho de sua vantagem competitiva.

Se a vantagem for grande o suficiente, pode ser que ela não precise se preocupar com a preempção. Isso irá ocorrer quando a empresa Segunda Seguidora ( $FF_3$ ) nunca estiver melhor como Primeira Seguidora ( $F_3$ ), ou seja, se seu valor como Segunda Seguidora fosse sempre superior ( $F_3 < FF_3$ ). Neste caso, a empresa Primeira Seguidora ( $F_2$ ) irá investir escolhendo seu gatilho de maneira monopolística (ou de forma míope), o qual será chamado de  $X_F^M$ . Neste contexto, utilizando a condição de primeira ordem para maximizar o valor da empresa, deve-se tomar a derivada parcial de  $F_0$  em relação à variável de controle estocástico  $X_F^M$ , igualando o resultado a zero. Obtem-se, então:

$$B_X(X_F^M) \cdot [V_{T_F}[\tilde{\pi}_F^2 - \tilde{\pi}_F^1] - I] + B_0(X_F) \cdot V_X[\tilde{\pi}_F^2 - \tilde{\pi}_F^1] = 0 \quad 4.39$$

O valor do gatilho  $X_F^M$  sem ameaça de preempção será, então:

$$X_F^M = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \cdot \frac{\delta \cdot I}{\tilde{\pi}_F^2 - \tilde{\pi}_F^1} \quad 4.40$$

Caso a vantagem competitiva seja pequena, pode ser que exista uma região na qual a firma Segunda Seguidora ( $FF_3$ ) esteja melhor investindo como Primeira Seguidora ( $F_3$ ). Neste cenário, a estratégia ótima da segunda firma, de forma a evitar a preempção, é investir quando o valor da Segunda Seguidora ( $FF_3$ ) se igualar ao seu valor como Primeira Seguidora ( $F_3$ ), ou seja,  $F_3 = FF_3$ . Assim, o gatilho de preempção da firma Primeira Seguidora ( $F_2$ ) será:

$$X_F^P = \inf \{ \tilde{X}_t < X_{FF} | F_3(\tilde{X}_t) = FF_3(\tilde{X}_t) \} \quad 4.41$$

O gatilho da firma Primeira Seguidora será o mínimo entre o gatilho calculado de forma monopolística e o gatilho de preempção:



$$X_F = \min\{X_F^M; X_F^P\} \quad 4.42$$

#### 4.3.3.3. Firma Líder

O valor esperado da empresa líder (no tempo  $t_0 = 0$ ) investindo em expansão no gatilho  $\tilde{T}_L$ , para  $X_0 \leq X_{T_L}$ , é:

$$\begin{aligned} L_0(X_T) = \hat{E} \left[ \int_0^{\tilde{T}_L} \tilde{\pi}_L^0 \cdot e^{-rt} dt + \int_{\tilde{T}_L}^{\tilde{T}_F} \tilde{\pi}_L^1 \cdot e^{-rt} dt + \int_{\tilde{T}_F}^{\tilde{T}_{FF}} \tilde{\pi}_L^2 \cdot e^{-rt} dt \right. \\ \left. + \int_{\tilde{T}_{FF}}^{\infty} \tilde{\pi}_L^3 \cdot e^{-rt} dt - I \cdot e^{-r\tilde{T}_L} \right] \end{aligned} \quad 4.43$$

É possível reescrever a equação 4.43 da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} L_0(X_T) = V_0[\tilde{\pi}_L^0] + B_0(\tilde{T}_L) \cdot [V_{T_L}[\tilde{\pi}_L^1 - \tilde{\pi}_L^0] - I] \\ + B_0(\tilde{T}_F) \cdot V_{T_F}[\tilde{\pi}_L^2 - \tilde{\pi}_L^1] \\ + B_0(\tilde{T}_{FF}) \cdot V_{T_{FF}}[\tilde{\pi}_L^3 - \tilde{\pi}_L^2] \end{aligned} \quad 4.44$$

Ou ainda:

$$\begin{aligned} L_0(X_T) = \frac{X_0 \cdot \bar{\pi}_L^0}{\delta} + B_0(\tilde{T}_L) \cdot \left[ \frac{X_L[\bar{\pi}_L^1 - \bar{\pi}_L^0]}{\delta} - I \right] \\ + B_0(\tilde{T}_F) \cdot \frac{X_F[\bar{\pi}_L^2 - \bar{\pi}_L^1]}{\delta} \\ + B_0(\tilde{T}_{FF}) \cdot \frac{X_{FF}[\bar{\pi}_L^3 - \bar{\pi}_L^2]}{\delta} \end{aligned} \quad 4.45$$

O valor da empresa irá depender do estado inicial da demanda. São possíveis os seguintes casos:

Para  $X_L \leq X_0 < X_F$ , a empresa líder investe imediatamente:

$$\begin{aligned} L_0(X_T) = \frac{X_0 \cdot \bar{\pi}_L^1}{\delta} - I + B_0(\tilde{T}_F) \cdot \frac{X_F[\bar{\pi}_L^2 - \bar{\pi}_L^1]}{\delta} \\ + B_0(\tilde{T}_{FF}) \cdot \frac{X_{FF}[\bar{\pi}_L^3 - \bar{\pi}_L^2]}{\delta} \end{aligned} \quad 4.46$$

Para  $X_F \leq X_0 < X_{FF}$ , firma líder e primeira seguidora investem no tempo-0:

$$L_0(X_T) = \frac{X_0 \cdot \bar{\pi}_L^2}{\delta} - I + B_0(\tilde{T}_{FF}) \cdot \frac{X_{FF}[\bar{\pi}_L^3 - \bar{\pi}_L^2]}{\delta} \quad 4.47$$

Para  $X_0 \geq X_{FF}$ , todas as três empresas investem imediatamente:

$$L_0(X_T) = \frac{X_0 \cdot \bar{\pi}_L^3}{\delta} - I \quad 4.48$$

#### 4.3.3.3.1. Gatilho $X_L$

O mesmo raciocínio utilizado para a análise do gatilho  $X_F$  será apresentado aqui. Se não houvesse a ameaça de preempção, a firma Líder (será chamada, neste momento, de firma 1, neste caso  $L_1$ ) investiria otimamente no gatilho que maximizasse o valor da empresa. No entanto, devido à ameaça de preempção, há a possibilidade dela não poder esperar tanto para investir. A Primeira Seguidora (será chamada, neste momento, de firma 2 por ser a segunda a investir) pode ter incentivo para se tornar Líder ( $L_2$ ). Isso irá ocorrer se o valor dessa empresa como Líder for superior ao seu valor como Primeira Seguidora, ou seja, se  $L_2 > F_2$ . A estratégia da firma Líder ( $L_1$ ) irá depender do tamanho de sua vantagem competitiva.

Se a vantagem for grande o suficiente, pode ser que ela não precise se preocupar com a preempção. Isso irá ocorrer quando a empresa Primeira Seguidora ( $F_2$ ) nunca estiver melhor como Líder ( $L_2$ ), ou seja, seu valor como Primeira Seguidora seria sempre superior ( $L_2 < F_2$ ). Neste caso, a empresa Líder ( $L_1$ ) irá investir escolhendo seu gatilho de maneira monopolística (ou de forma míope), o qual será chamado de  $X_L^M$ . Neste caso, utilizando a condição de primeira ordem para maximizar o valor da empresa, deve-se tomar a derivada parcial de  $L_0$  em relação à variável de controle estocástico  $X_L^M$ , igualando o resultado a zero. Obtem-se:

$$B_X(X_L^M) \cdot [V_{T_L}[\tilde{\pi}_L^1 - \tilde{\pi}_L^0] - I] + B_0(X_L) \cdot V_X[\tilde{\pi}_L^1 - \tilde{\pi}_L^0] = 0 \quad 4.49$$

O valor do gatilho  $X_L^M$  sem a ameaça de preempção será, então:

$$X_L^M = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \cdot \frac{\delta \cdot I}{\bar{\pi}_L^1 - \bar{\pi}_L^0} \quad 4.50$$

Caso a vantagem competitiva seja pequena, pode ser que exista uma região na qual a Primeira Seguidora ( $F_2$ ) esteja melhor investindo como Líder ( $L_2$ ). Neste cenário, a estratégia ótima da primeira firma, de forma a evitar a preempção, é investir quando o valor da Primeira Seguidora ( $F_2$ ) se igualar ao seu valor como Líder ( $L_2$ ), ou seja,  $L_2 = F_2$ . Assim, o gatilho de preempção da firma Líder ( $L_1$ ) será:

$$X_L^P = \inf \{ \tilde{X}_t < X_F | L_2(\tilde{X}_t) = F_2(\tilde{X}_t) \} \quad 4.51$$

O gatilho da firma Líder será o mínimo entre o gatilho calculado de forma monopolística e o gatilho de preempção:

$$X_L = \min\{X_L^M; X_L^P\} \quad 4.52$$

#### 4.3.4. Competição de Cournot

Nesta seção, será definido e calculado o lucro determinístico das três firmas competindo em um oligopólio assimétrico. As empresas irão competir na forma de um oligopólio de Cournot. Como a competição ocorre por quantidade produzida, poderia se pensar em calcular os *outputs* das empresas pelo modelo de Stackelberg<sup>22</sup>. No entanto, este modelo apresenta um problema chamado de inconsistência temporal, situação na qual as preferências dos tomadores de decisão mudam ao longo do tempo (as quantidades escolhidas deixam de ser equilíbrio). Assim, o modelo de Cournot é uma melhor maneira de se estimar o lucro na configuração estudada.

Primeiro, será analisado um mercado no qual  $n$  firmas oligopolistas competem em quantidade e produzem um bem homogêneo. Cada firma  $i$  tem um custo marginal de produção  $c_i$ . A demanda será representada através da seguinte função linear:

<sup>22</sup> Diferentemente da competição de Cournot, na qual os competidores decidem a quantidade a ser produzida no mesmo instante, no modelo de Stackelberg, as quantidades produzidas são escolhidas de forma sequencial, primeiro o líder depois o seguidor.

$$P(Q_T) = a - bQ_T, \text{ com } a > 0, b > 0 \text{ e } a > bQ_T \quad 4.53$$

A função de lucro das firmas  $i$ 's é dada por:

$$\pi_i(q_i, Q_{-i}) = [P(q_i, Q_{-i}) - c_i]q_i, \quad i = 1, \dots, n \quad 4.54$$

Onde  $Q_{-i}$  é a quantidade total produzida por todas empresas do mercado exceto a firma  $i$ , com  $Q_T = q_i + Q_{-i}$ . Para obter o equilíbrio de Cournot-Nash, deve-se encontrar o perfil da estratégia de produção ótima  $(q_i^C, q_{i+1}^C, \dots, q_n^C)$  de tal forma que cada firma  $i$  maximize seu lucro considerando como dadas as escolhas dos rivais. Isso leva à seguinte condição de primeira ordem:

$$\frac{\partial \pi_i(q_i^C, Q_{-i}^C)}{\partial q_i} = 0 \quad 4.55$$

$$q_i^C \cdot \frac{\partial P(q_i^C, Q_{-i}^C)}{\partial q_i} + P(q_i^C, Q_{-i}^C) = c_i \quad 4.56$$

No caso da demanda linear, a receita marginal é  $RMg(q_i, Q_{-i}) = a - 2bq_i - bQ_{-i}$ . No modelo de oligopólio de Cournot com  $n$  firmas assimétricas, é preciso resolver o seguinte sistema de  $n$  equações e  $n$  variáveis:

$$\begin{cases} a - 2bq_i^C - b(Q_T^C - q_i^C) = c_i \\ a - 2bq_{i+1}^C - b(Q_T^C - q_{i+1}^C) = c_{i+1} \\ \dots \\ a - 2bq_n^C - b(Q_T^C - q_n^C) = c_n \end{cases} \quad 4.57$$

Resolvendo o sistema, encontra-se a quantidade total produzida no mercado:

$$Q_T^C = \left( \frac{n}{n+1} \right) \left( \frac{a - \bar{c}}{b} \right) \quad 4.58$$

Onde  $\bar{c} \equiv \sum_{j=1}^n c_j / n$  é a média dos custos de produção da indústria. Iremos definir  $\bar{c}_{-i} \equiv \sum_{j \neq i}^n c_j / (n-1)$  como a média dos custos de produção de todas as

firmas do mercado exceto a firma  $i$ . A quantidade individual de cada firma é obtida substituindo a quantidade total da indústria em cada equação do sistema 4.61:

$$q_i^c = \frac{1}{n+1} \left( \frac{a - nc_i + (n-1)\bar{c}_{-i}}{b} \right) \quad 4.59$$

O preço de equilíbrio será:

$$P^c = \bar{c} + \frac{a - \bar{c}}{n+1} \quad 4.60$$

O lucro da firma  $i$  será dado por:

$$\pi_i^c = \frac{1}{(n+1)^2} \frac{(a - nc_i + (n-1)\bar{c}_{-i})^2}{b} \quad 4.61$$

Como, no modelo estudado, há três empresas ( $l$  com custo  $c_l$ ,  $int$  com custo  $c_{int}$  e  $h$  com custo  $c_h$ ), para se achar o lucro de cada uma, basta substituir os valores na equação 4.61.

Para o caso da empresa de baixo custo, temos:

$$\pi_l^c = \frac{1}{(3+1)^2} \frac{\left( a - 3c_l + (3-1) \left( \frac{c_{int} + c_h}{2} \right) \right)^2}{b} \quad 4.62$$

O lucro da firma de custo intermediário será:

$$\pi_{int}^c = \frac{1}{(3+1)^2} \frac{\left( a - 3c_{int} + (3-1) \left( \frac{c_l + c_h}{2} \right) \right)^2}{b} \quad 4.63$$

E, para o caso da empresa de alto custo:

$$\pi_h^c = \frac{1}{(3+1)^2} \frac{\left( a - 3c_h + (3-1) \left( \frac{c_l + c_{int}}{2} \right) \right)^2}{b} \quad 4.64$$

## 5. Aplicação do Modelo

Neste capítulo, será aplicado o modelo apresentado no final da seção anterior no mercado de latas de alumínio. Primeiro, serão feitas estimativas das variáveis do modelo. Na segunda parte, será calculada a solução numérica e, por fim, uma análise de sensibilidade será realizada.

### 5.1. Estimação das Variáveis

Para aplicar o modelo na indústria de latas de alumínio, é necessário estimar as variáveis utilizando dados e informações do mercado. Os parâmetros a serem calculados são os seguintes:

- i. Taxa livre de Risco ( $r$ );
- ii. Prêmio de Risco ( $PR$ ) da indústria de latas de alumínio;
- iii. Tendência ( $\alpha$ );
- iv. Volatilidade ( $\sigma$ );
- v. Variáveis da função de demanda inversa [ $P(Q_T) = a - b \cdot Q_T$ ];
- vi. Investimento ( $I$ );
- vii. Custo de Produção ( $c_i$ );
- viii. Lucro das Firms ( $\pi_i$ ).

#### 5.1.1. Taxa livre de Risco ( $r$ )

É preciso encontrar um valor que represente as características desta taxa. A taxa Selic não é uma boa aproximação para a taxa livre de risco, primeiro porque o Brasil possui algum risco de falência – a classificação de crédito do Brasil, conforme as agências de classificação risco, não é AAA – e segundo porque ela apresenta algum risco de reinvestimento, ou seja, os rendimentos da reaplicação não são garantidos devido à variabilidade da taxa.

Uma boa representação para a taxa são os títulos soberanos do governo Brasileiro de 10 anos, atualmente, em torno de 10,12%<sup>23</sup> ao ano. No entanto, ainda é preciso descontar um valor referente ao risco de falência do Brasil. Esse valor é representado pelo índice EMBI+ (“Emerging Markets Bonds Index Plus”), atualmente, em 1,87%<sup>24</sup>. Assim, uma boa aproximação para a taxa livre de risco para o Brasil é a diferença entre esses valores, ou seja:

$$r = 8,25\%.$$

### 5.1.2. Prêmio de Risco ( $PR$ ) da indústria de latas de alumínio

Iremos fazer uso do Modelo de Precificação de Ativos Financeiros, CAPM, para estimar o prêmio de risco do setor analisado. Pelo modelo temos:

$$PR = \beta \cdot PR_{Brasil} \quad 5.1$$

O professor Aswath Damodaran disponibiliza, em seu *website*, uma série de dados para ajudar na avaliação de empresas. O prêmio de risco estimado para o Brasil é de 2,63%<sup>25</sup> ao ano.

Já para o cálculo do beta, iremos utilizar a estimativa do *Deutsche Bank*, apresentada em um relatório que deu início à cobertura de uma das empresas do setor, a Rexam. Nesse documento, o valor do beta utilizado na avaliação da empresa foi de 0,9.

Assim, chega-se a um prêmio de risco anual da indústria de latas de alumínio de:

$$PR = 2,37\%.$$

### 5.1.3. Movimento Geométrico Browniano

Neste tópico, será estimado os parâmetros do choque estocástico multiplicativo,  $\tilde{X}_t$ , que representa a incerteza na indústria de latas de alumínio.

<sup>23</sup> Retirado do site da Bloomberg, acessado no dia 24/05/13 às 13 horas e 7 minutos. Disponível em: < <http://www.bloomberg.com/quote/GBR10Y:IND> >.

<sup>24</sup> Retirado do site portalbrasil.net. Valor referente ao risco país do dia 23/05/13. Disponível em: < [http://www.portalbrasil.net/2013/economia/dolar\\_riscopais\\_maio.htm](http://www.portalbrasil.net/2013/economia/dolar_riscopais_maio.htm) >.

<sup>25</sup> Website acessado no dia 24/05/13 às 17h e 44 minutos. Disponível em: <[http://people.stern.nyu.edu/ADAMODAR/New\\_Home\\_Page/datafile/ctryprem.html](http://people.stern.nyu.edu/ADAMODAR/New_Home_Page/datafile/ctryprem.html)>.

Trata-se de um processo de Itô da forma:

$$d\tilde{X}_t = \alpha(\tilde{X}_t)dt + \sigma(\tilde{X}_t)dz_t \quad 5.2$$

Onde  $\alpha$  é a tendência,  $\sigma$  a volatilidade e  $dz_t$  o incremento de Wiener, e

$$dz_t = \varepsilon dt, \text{ com } \varepsilon \sim N(0, 1) \quad 5.3$$

Onde  $N(0, 1)$  significa ter distribuição Normal padronizada (média zero, variância 1) de probabilidade.

#### 5.1.3.1. Tendência ( $\alpha$ )

A Associação Brasileira dos Fabricantes de Latas de Alta Reciclabilidade (ABRALATAS) disponibiliza alguns dados sobre o setor no Brasil. No entanto, pelo fato de a indústria de lata brasileira ser relativamente recente, há poucos dados históricos sobre o seu consumo e a sua produção. **Pindyck (1999)** e **Dixit e Pindyck (1994)** recomendam séries longas (duas décadas ou mais) para estimar a tendência. Isso porque a variância de seu estimador é função do intervalo de tempo ( $T$ ) utilizado; a  $var(\hat{\alpha})$  é proporcional a  $\sigma^2/T^{26}$ . No caso estudado, uma regressão com as informações sobre o consumo de latas só utilizaria valores em um intervalo muito curto de tempo (de 1997 até 2011) e, provavelmente, a estimação da tendência não seria representativa para o setor.

Ao invés de se calcular a tendência, será feita uma abordagem mais qualitativa. Estudos da Rexam apontam que o crescimento no Brasil entre os anos de 2013 e 2015 esteja entre cinco e seis pontos percentuais<sup>27</sup>. Como grande parte desse crescimento será devido à Copa do Mundo de futebol e às Olimpíadas, assumiu-se um crescimento inferior, igual a três pontos percentuais, de forma a representar um crescimento de longo prazo. É importante observar que será feita uma análise de sensibilidade, nesta variável, na próxima seção.

<sup>26</sup> Retirado de **Días (2005)**, que faz referência ao livro **Campbell & Lo & MacKinlay (1997, p.364)**.

<sup>27</sup> Relatório Anual da Rexam de 2012.



Assim:

$$\alpha = 3,00\%.$$

### 5.1.3.2. Volatilidade ( $\sigma$ )

Diferentemente do cálculo da tendência, para se conseguir uma boa estimativa para a volatilidade, é necessário uma grande quantidade de dados. Assim, mesmo com um intervalo de tempo limitado do setor de latas de alumínio, a regressão linear dos dados resultará em uma boa estimativa para a variância do estimador da volatilidade  $var(\hat{\sigma})$ , uma vez que a mesma é proporcional a  $2 \cdot \sigma^4/n^{28}$ .

Assumindo que o consumo do mercado de latas de alumínio ( $Q_T$ ) siga um Movimento Geométrico Browniano (MGB), trabalha-se com o seu logaritmo ( $\ln Q_T$ ), pois este possui distribuição normal. Dessa forma, a regressão ótima será linear. Assim, chega-se a seguinte equação em tempo discreto:

$$\ln Q_t = a + \ln Q_{t-1} + \varepsilon_t \quad 5.4$$

$\varepsilon_t$  são i.i.d.<sup>29</sup> e seguem uma distribuição Normal  $N(0, \sigma^2)$ .

O estimador da volatilidade ( $\hat{\sigma}$ ) é igual a:

$$\hat{\sigma}^2 = var \left[ \frac{\ln Q_t}{\ln Q_{t-1}} \right] \quad 5.5$$

Os dados do setor, disponibilizados no site da ABRALATAS<sup>30</sup>, e os cálculos encontram-se na tabela abaixo:

<sup>28</sup> Retirado de **Días (2005)**, que faz referência ao livro **Campbell & Lo & MacKinlay (1997, p.364)**.

<sup>29</sup> Independentes e identicamente distribuídas. Cada variável randômica possui a mesma probabilidade das demais e são mutualmente independentes.

<sup>30</sup> Website acessado em 28/05/13 às 17h e 25 minutos. Disponível em: <<http://www.abralatas.org.br/common/html/dadosdosetor.php>>.

**Tabela 9 – Vendas Anuais de latas de Alumínio no Brasil**

<b>Ano</b>	<b><math>Q_t</math> (Bilhões)</b>	<b><math>\ln Q_t</math></b>	<b><math>\ln Q_t / \ln Q_{t-1}</math></b>
<b>1990</b>	0,44	-0,821	–
<b>1991</b>	0,74	-0,304	0,370
<b>1992</b>	0,82	-0,197	0,649
<b>1993</b>	1,34	0,293	-1,484
<b>1994</b>	1,67	0,515	1,758
<b>1995</b>	2,96	1,086	2,109
<b>1996</b>	4,01	1,388	1,279
<b>1997</b>	7,12	1,963	1,414
<b>1998</b>	9,07	2,205	1,123
<b>1999</b>	8,56	2,147	0,974
<b>2000</b>	9,19	2,218	1,033
<b>2001</b>	10,38	2,340	1,055
<b>2002</b>	9,91	2,293	0,980
<b>2003</b>	9,28	2,228	0,972
<b>2004</b>	9,36	2,236	1,004
<b>2005</b>	9,59	2,261	1,011
<b>2006</b>	10,60	2,361	1,044
<b>2007</b>	12,27	2,507	1,062
<b>2008</b>	13,27	2,586	1,031
<b>2009</b>	14,55	2,677	1,035
<b>2010</b>	17,40	2,856	1,067
<b>2011</b>	18,50	2,918	1,021
<b>2012</b>	19,40	2,965	1,016

Em seguida, a raiz quadrada da variância dos dados da última coluna é calculada para encontrar a estimativa da volatilidade anual. Assim:

$$\hat{\sigma} = 19,19\% .$$

#### 5.1.4. Variáveis da função de demanda inversa [ $P(Q_T) = a - b \cdot Q_T$ ]

A função de demanda inversa<sup>31</sup> é linear e determinística, de forma que:

$$P(Q_T) = a - bQ_T, \text{ com } a > 0, b > 0 \text{ e } a > bQ_T \quad 4.53$$

Onde  $P(Q_T)$  é o preço da lata de alumínio em dólar no Brasil.

Para estimar os parâmetros da função linear, foram coletados dados dos relatórios anuais das três empresas que atuam no setor. Através da receita total das empresas no Brasil e das quantidades vendidas nos anos de 2011 e 2012, foi possível encontrar uma reta que representa a demanda inversa brasileira de latas de alumínio.

As quantidades totais produzidas na indústria foram as seguintes:

**Tabela 10 – Produção Anual de Latas de Alumínio no Brasil em Bilhões de Unidades**

Ano	$Q_t$ (Bilhões)
2011	18,50
2012	19,40

As receitas totais, em milhões de dólares, foram estimadas através de informações contidas nos relatórios anuais das empresas. Seus valores, em milhões de dólares, são:

<sup>31</sup> Na curva de demanda regular, há uma relação inversa entre o preço e a quantidade demandada de um bem. Quando o preço sobe, a demanda cai. Quando o preço cai, a demanda aumenta. A quantidade é a variável independente e preço é a variável dependente. A curva de demanda inversa trata o preço como função da quantidade demandada. Assim, um aumento da quantidade demandada, ou produzida, reduziria o preço do mercado.

**Tabela 11 – Receita Anual das Empresas no Brasil em Milhões de Dólares**

Ano	Ball	Crown	Rexam
2011	420,38	592,96	1.132,43
2012	432,36	593,22	1.063,58

Realizando os cálculos, chega-se um preço unitário de US\$ 0,12 em 2011 e US\$ 0,11 em 2012. Assim, os parâmetros estimados para a função de demanda inversa são:

$$a = 0,26 e$$

$$b = 0,0079 .$$

### 5.1.5. Investimento (I)

Nesta dissertação, assumiu-se a premissa de igualdade de investimento entre as empresas para a expansão da produção de latas de alumínio. Ela se justifica uma vez que as empresas nacionais importam máquinas e equipamentos para a construção de novas fábricas de alumínio, se relacionando, normalmente, com os mesmos fornecedores.

Como apontado nos relatórios anuais das empresas, estudos do mercado e notícias do setor, o valor do desembolso para a concretização do investimento é bastante similar entre os competidores. As empresas devem incorrer em um custo de, aproximadamente, US\$ 100 milhões<sup>32</sup> para implementar uma fábrica com capacidade anual de 1 bilhão de latas de alumínio. Dessa forma, o investimento, em bilhões de dólares, será:

$$I = 0,1 .$$

<sup>32</sup> Alguns documentos fazem referência a esse valor: site da ABRALATAS e relatórios do BNDES. Os links abaixo foram acessados no dia 28/05/13 às 19h e 4 minutos.

ABRALATAS – Disponível em: <[www.abralatas.org.br/common/html/noticia.php?o=493](http://www.abralatas.org.br/common/html/noticia.php?o=493)>.

BNDES (1) – Disponível em: <[www.bndes.gov.br/SiteBNDES/export/sites/default/bndes\\_pt/Galerias/Arquivos/conhecimento/relato/latas.pdf](http://www.bndes.gov.br/SiteBNDES/export/sites/default/bndes_pt/Galerias/Arquivos/conhecimento/relato/latas.pdf)>.

BNDES (2) – Disponível em: <[www.bndes.gov.br/SiteBNDES/export/sites/default/bndes\\_pt/Galerias/Arquivos/conhecimento/bnset/cerveja.pdf](http://www.bndes.gov.br/SiteBNDES/export/sites/default/bndes_pt/Galerias/Arquivos/conhecimento/bnset/cerveja.pdf)>.

### 5.1.6. Custo de Produção ( $c_i$ )

#### 5.1.6.1. Antes da Expansão

Para o cálculo dos custos de produção unitários (antes da expansão), foram utilizadas as informações dos relatórios anuais de cada uma das empresas. O custo operacional unitário das empresas foi estimado multiplicando-se o preço de venda unitário pelo complemento da margem operacional de cada firma. Os seguintes dados foram encontrados:

**Tabela 12 – Margem Operacional das Empresas do Setor**

		<b>Receita</b> (Em milhões)	<b>Lucro Operacional</b> (Em milhões)	<b>Margem Operacional</b>
<b>Rexam</b>	<b>2012</b>	£ 3.885	£ 456	11,7%
	<b>2011</b>	£ 3.786	£ 447	11,8%
<b>Ball</b>	<b>2012</b>	\$ 6.492	\$ 742	11,4%
	<b>2011</b>	\$ 6.434	\$ 725	11,3%
<b>Crown</b>	<b>2012</b>	\$4.906	\$665	13,6%
	<b>2011</b>	\$4.803	\$637	13,3%

Será utilizada a média da margem operacional de cada empresa. Calculando o custo operacional, tendo como base o preço unitário de 2012 (US\$ 0,11), temos:

**Tabela 13 – Custo Operacional Unitário das Empresas do Setor**

<b>Firma</b>	<b>Margem Operacional</b>	<b>Cálculo</b>	<b>Custo Operacional Unitário (<math>c_i^0</math>)</b>
<b>Rexam (<i>int</i>)</b>	11,75%	88,25% x 0,11	US\$ 0,0961
<b>Ball (<i>h</i>)</b>	11,35%	88,65% x 0,11	US\$ 0,0965
<b>Crown (<i>l</i>)</b>	13,45%	86,55% x 0,11	US\$ 0,0942

Assim:

$$c_h^0 = 0,0965 ;$$

$$c_{int}^0 = 0,0961 e$$

$$c_l^0 = 0,0942 .$$

### 5.1.6.2. Depois da Expansão

O investimento em expansão será modelado através de uma redução no custo operacional das empresas<sup>33</sup>. Como elas competem em quantidade, segundo o modelo de Cournot, uma redução do custo fará com que a empresa aumente sua quantidade produzida.

A redução de custo operacional devido ao investimento será considerada em 5%. Em seguida, o impacto desse valor no gatilho das empresas será mensurado através de uma análise de sensibilidade.

Os custos operacionais unitários após a expansão serão, assim:

$$c_h^1 = 0,0917 ;$$

$$c_{int}^1 = 0,0913 e$$

$$c_l^1 = 0,0895 .$$

### 5.1.7. Lucro das Firms ( $\pi_i$ )

Vide equação 4.61, em contexto de competição assimétrica de Cournot, o lucro da firma  $i$  será dado por:

$$\pi_i^c = \frac{1}{(n+1)^2} \frac{(a - nc_i + (n-1)\bar{c}_{-i})^2}{b} \quad 4.61$$

Onde  $\bar{c}_{-i} \equiv \sum_{j \neq i}^n c_j / (n-1)$  é a média dos custos de produção de todas as firmas do mercado exceto a firma  $i$ , e  $n$  é igual ao número de empresas no mercado.

<sup>33</sup> Isso porque, como as firmas competem em um oligopólio de Cournot, uma redução de custo implica aumento de quantidade produzida.

A fórmula acima será, agora, aplicada no setor de latas de alumínio. No caso estudado,  $n$  é igual a 3. Com a premissa que  $X_0 < \min\{X_L^P; X_L^M\}$ , teremos quatro situações possíveis neste mercado:

- i. Nenhuma empresa exerceu sua opção de expansão –  $\bar{\pi}^0$ ;
- ii. Somente a empresa de baixo custo investiu –  $\bar{\pi}^1$ ;
- iii. As firmas de baixo custo e de custo intermediário investiram –  $\bar{\pi}^2$  e
- iv. Todas as empresas exerceram a opção de expansão –  $\bar{\pi}^3$ .

Os lucros das firmas em cada situação estão representados nas tabelas abaixo. Devido à vantagem competitiva e à premissa de que  $X_0 < \min\{X_L^P; X_L^M\}$ , a firma de baixo custo investirá como líder, a de custo intermediário como Primeira Seguidora, e a de alto custo como Segunda Seguidora.

#### Primeiro caso:

**Tabela 14 – Lucro das Empresas no Primeiro Caso**

Nenhuma Empresa Investiu	
Firma	Lucro (Bilhões)
$\bar{\pi}_{L_l}^0$	0,234
$\bar{\pi}_{F_{int}}^0$	0,215
$\bar{\pi}_{F_{F_h}}^0$	0,210

Repare que os lucros diferem entre si. Isso porque a firma que possui uma vantagem em custo produzirá mais do que aquela que possui um custo maior.

#### Segundo caso:

**Tabela 15 – Lucro das Empresas no Segundo Caso**

Somente Líder Investiu	
Firma	Lucro (Bilhões)
$\bar{\pi}_{L_l}^1$	0,274
$\bar{\pi}_{F_{int}}^1$	0,202
$\bar{\pi}_{F_{F_h}}^1$	0,198

Após a expansão da firma de baixo custo como líder, sua produção e seu lucro aumentarão. O aumento de produção diminuirá o preço unitário do mercado e, conseqüentemente, fará com que os lucros determinísticos das firmas de custo intermediário e de alto custo sejam reduzidos.

**Terceiro caso:**

**Tabela 16 – Lucro das Empresas no Terceiro Caso**

Líder e Primeira Seguidora Investiram	
Firma	Lucro (Bilhões)
$\bar{\pi}_{L_l}^2$	0,260
$\bar{\pi}_{F_{int}}^2$	0,241
$\bar{\pi}_{FF_h}^2$	0,186

Quando o gatilho da firma de custo intermediário é atingido, essa exerce sua opção de expansão, se tornando a Primeira Seguidora ( $F$ ). Isso faz com que o lucro da firma de baixo custo (que já havia aumentado sua capacidade de produção) se reduza, assim como o lucro da firma de alto custo, devido à redução do preço do mercado.

**Quarto caso:**

**Tabela 17 – Lucro das Empresas no Quarto Caso**

Todas Investiram	
Firma	Lucro (Bilhões)
$\bar{\pi}_{L_l}^3$	0,247
$\bar{\pi}_{F_{int}}^3$	0,227
$\bar{\pi}_{FF_h}^3$	0,223

Utilizando o mesmo raciocínio do caso anterior, a expansão da produção da firma de alto custo, Segunda Seguidora ( $FF$ ), irá aumentar o seu lucro e reduzir o das outras firmas operando no mercado.



## 5.2. Estudo de Caso

Antes de iniciar as análises deste tópico, cabe destacar que, como está sendo analisado jogos de momento ótimo, a solução será encontrada através da retro indução (*backwards*). Dessa forma, o primeiro passo será encontrar o gatilho da firma Segunda Seguidora ( $FF$ ).

### 5.2.1. Gatilho Segunda Seguidora

Foi apresentado, no capítulo anterior, que o gatilho da firma Segunda Seguidora  $X_{FF}$  é dado por:

$$X_{FF} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \cdot \frac{\delta \cdot I}{\bar{\pi}_{FF}^3 - \bar{\pi}_{FF}^2} \quad 4.32$$

Como essa firma é a última a expandir a sua produção, ela não precisa se preocupar com ameaças de preempção.

A premissa do modelo,  $X_0 < \min\{X_L^P; X_L^M\}$ , faz com que a firma de maior custo  $h$  seja a Segunda Seguidora. Dessa forma, o gatilho será:

$$X_{FF} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \cdot \frac{\delta \cdot I}{\bar{\pi}_{FF_h}^3 - \bar{\pi}_{FF_h}^2} = \frac{2,47}{2,47 - 1} \cdot \frac{7,63\% \cdot 0,100}{0,223 - 0,186} = 0,348 \quad 5.6$$

### 5.2.2. Gatilho Primeira Seguidora

Foi visto que o gatilho da firma Primeira Seguidora será o mínimo entre o gatilho calculado de forma monopolística e o gatilho de preempção:

$$X_F = \min\{X_F^M; X_F^P\}, \quad 4.42$$

Onde:

$$X_F^M = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \cdot \frac{\delta \cdot I}{\bar{\pi}_F^2 - \bar{\pi}_F^1} e \quad 4.40$$

$$X_F^P = \inf \{ \tilde{X}_t < X_{FF} | F_h(\tilde{X}_t) = FF_h(\tilde{X}_t) \}. \quad 4.41$$

O gatilho monopolístico da firma de custo intermediário é:

$$X_{F_{int}}^M = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \cdot \frac{\delta \cdot I}{\bar{\pi}_{F_{int}}^2 - \bar{\pi}_{F_{int}}^1} = \frac{2,47}{2,47 - 1} \cdot \frac{7,76\% \cdot 0,100}{0,241 - 0,202} = 0,336. \quad 5.7$$

Para calcular o gatilho de preempção, é preciso encontrar o valor de  $X_t$  no qual a firma de alto custo é indiferente entre investir como Primeira Seguidora e esperar para investir em  $X_{FF_h}$ , ou seja, o ponto no qual o valor da firma de alto custo  $h$  como Primeira Seguidora ( $F_h$ ) é igual ao seu valor como Segunda Seguidora ( $FF_h$ ).

O valor, no tempo-0 e sem a ameaça de preempção, da firma de alto custo como Segunda Seguidora é:

$$\begin{aligned} FF_h^0(X_T) &= \frac{X_0 \cdot \bar{\pi}_{FF_h}^0}{\delta} + B_0(\tilde{T}_{L_l}) \cdot \frac{X_{L_l}[\bar{\pi}_{FF_h}^1 - \bar{\pi}_{FF_h}^0]}{\delta} \\ &+ B_0(\tilde{T}_{F_{int}}) \cdot \frac{X_{F_{int}}[\bar{\pi}_{FF_h}^2 - \bar{\pi}_{FF_h}^1]}{\delta} \\ &+ B_0(\tilde{T}_{FF_h}) \cdot \left[ \frac{X_{FF_h}[\bar{\pi}_{FF_h}^3 - \bar{\pi}_{FF_h}^2]}{\delta} - I \right], \end{aligned} \quad 5.8$$

Onde  $X_{F_{int}} = X_{F_{int}}^M = 0,336^{34}$  e  $X_{FF_h} = 0,348$ .

---

<sup>34</sup> Estamos calculando o valor da empresa no caso sem a ameaça de preempção.

O valor, no tempo-0, da firma de alto custo como Primeira Seguidora é:

$$\begin{aligned}
 F_h^0(X_T) &= \frac{X_0 \cdot \bar{\pi}_{F_h}^0}{\delta} + B_0(\tilde{T}_{L_l}) \cdot \frac{X_{L_l} [\bar{\pi}_{F_h}^1 - \bar{\pi}_{F_h}^0]}{\delta} \\
 &+ B_0(\tilde{T}_{F_h}) \cdot \left[ \frac{X_{F_h} [\bar{\pi}_{F_h}^2 - \bar{\pi}_{F_h}^1]}{\delta} - I \right] \\
 &+ B_0(\tilde{T}_{FF_{int}}) \cdot \frac{X_{FF_{int}} [\bar{\pi}_{F_h}^3 - \bar{\pi}_{F_h}^2]}{\delta}.
 \end{aligned} \tag{5.9}$$

Para encontrar o valor de  $X_{F_h}$  que iguala as equações acima, deve-se encontrar o gatilho da firma de custo intermediário entrando como Segunda Seguidora ( $X_{FF_{int}}$ ). Nesse contexto:

$$X_{FF_{int}} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \cdot \frac{\delta \cdot I}{\bar{\pi}_{FF_{int}}^3 - \bar{\pi}_{FF_{int}}^2}. \tag{5.10}$$

Para alcançar a igualdade acima mencionada, é necessário encontrar o valor dos fluxos de lucro neste caso, no qual a firma de baixo custo é Líder, a de alto custo Primeira Seguidora e a de custo intermediário Segunda Seguidora. Lembrando que o lucro da firma  $i$  será dado por:

$$\pi_i^c = \frac{1}{(n+1)^2} \frac{(a - nc_i + (n-1)\bar{c}_{-i})^2}{b} \tag{4.61}$$

Onde  $\bar{c}_{-i} \equiv \sum_{j \neq i}^n c_j / (n-1)$  é a média dos custos de produção de todas as firmas do mercado exceto a firma  $i$ , e  $n$  é igual ao número de empresas no mercado, neste caso, igual a 3.

Assim:

**Primeiro caso:**

**Tabela 18 – Lucro das Empresas no Primeiro Caso e considerando Firma de Alto Custo como Primeira Seguidora**

Nenhuma Empresa Investiu	
<b>Firma</b>	<b>Lucro (Bilhões)</b>
$\bar{\pi}_{L_l}^0$	0,234
$\bar{\pi}_{F_h}^0$	0,210
$\bar{\pi}_{FF_{int}}^0$	0,215

Nenhuma firma exerceu a opção de expansão.

**Segundo caso:**

**Tabela 19 – Lucro das Empresas no Segundo Caso e considerando Firma de Alto Custo como Primeira Seguidora**

Somente Líder Investiu	
<b>Firma</b>	<b>Lucro (Bilhões)</b>
$\bar{\pi}_{L_l}^1$	0,274
$\bar{\pi}_{F_h}^1$	0,198
$\bar{\pi}_{FF_{int}}^1$	0,202

Expansão da firma de baixo custo como líder.

**Terceiro caso:****Tabela 20 – Lucro das Empresas no Terceiro Caso e considerando Firma de Alto Custo como Primeira Seguidora**

Líder e Primeira Seguidora Investiram	
Firma	Lucro (Bilhões)
$\bar{\pi}_{L_l}^2$	0,260
$\bar{\pi}_{F_h}^2$	0,236
$\bar{\pi}_{FF_{int}}^2$	0,190

Caso em que a firma de alto custo investe como Primeira Seguidora.

**Quarto caso:****Tabela 21 – Lucro das Empresas no Quarto Caso e considerando Firma de Alto Custo como Primeira Seguidora**

Todas Investiram	
Firma	Lucro (Bilhões)
$\bar{\pi}_{L_l}^3$	0,247
$\bar{\pi}_{F_h}^3$	0,223
$\bar{\pi}_{FF_{int}}^3$	0,227

Firma de custo intermediário investe como Segunda Seguidora.

Agora, é possível calcular o gatilho da firma de custo intermediário entrando como Segunda Seguidora ( $X_{FF_{int}}$ ):

$$X_{FF_{int}} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \cdot \frac{\delta \cdot I}{\bar{\pi}_{FF_{int}}^3 - \bar{\pi}_{FF_{int}}^2} = \frac{2,47}{2,47 - 1} \cdot \frac{7,62\% \cdot 0,100}{0,227 - 0,190} = 0,346. \quad 5.11$$

Igualando os valores da firma de alto custo como Primeira Seguidora ( $F_h^0$ ) e Segunda Seguidora ( $FF_h^0$ ) temos, assim:

$$\begin{aligned}
& \frac{X_0 \cdot \bar{\pi}_{FFh}^0}{\delta} + B_0(\tilde{T}_{Ll}) \cdot \frac{X_{Ll}[\bar{\pi}_{FFh}^1 - \bar{\pi}_{FFh}^0]}{\delta} \\
& + B_0(\tilde{T}_{Fint}) \cdot \frac{X_{Fint}[\bar{\pi}_{FFh}^2 - \bar{\pi}_{FFh}^1]}{\delta} \\
& + B_0(\tilde{T}_{FFh}) \cdot \left[ \frac{X_{FFh}[\bar{\pi}_{FFh}^3 - \bar{\pi}_{FFh}^2]}{\delta} - I \right] \\
& = \frac{X_0 \cdot \bar{\pi}_{Fh}^0}{\delta} + B_0(\tilde{T}_{Ll}) \cdot \frac{X_{Ll}[\bar{\pi}_{Fh}^1 - \bar{\pi}_{Fh}^0]}{\delta} \\
& + B_0(\tilde{T}_{Fh}) \cdot \left[ \frac{X_{Fh}[\bar{\pi}_{Fh}^2 - \bar{\pi}_{Fh}^1]}{\delta} - I \right] \\
& + B_0(\tilde{T}_{FFint}) \cdot \frac{X_{FFint}[\bar{\pi}_{Fh}^3 - \bar{\pi}_{Fh}^2]}{\delta}
\end{aligned} \tag{5.12}$$

Eliminando os termos iguais dos dois lados da equação<sup>35</sup>:

$$\begin{aligned}
& B_0(\tilde{T}_{Fint}) \cdot \frac{X_{Fint}[\bar{\pi}_{FFh}^2 - \bar{\pi}_{FFh}^1]}{\delta} \\
& + B_0(\tilde{T}_{FFh}) \cdot \left[ \frac{X_{FFh}[\bar{\pi}_{FFh}^3 - \bar{\pi}_{FFh}^2]}{\delta} - I \right] \\
& = B_0(\tilde{T}_{Fh}) \cdot \left[ \frac{X_{Fh}[\bar{\pi}_{Fh}^2 - \bar{\pi}_{Fh}^1]}{\delta} - I \right] \\
& + B_0(\tilde{T}_{FFint}) \cdot \frac{X_{FFint}[\bar{\pi}_{Fh}^3 - \bar{\pi}_{Fh}^2]}{\delta}
\end{aligned} \tag{5.13}$$

<sup>35</sup> Repare que  $\bar{\pi}_{FFh}^0 = \bar{\pi}_{Fh}^0$  e  $\bar{\pi}_{FFh}^1 = \bar{\pi}_{Fh}^1$ . A firma de alto custo recebe o mesmo fluxo de lucro em ambos os casos porque, nesses estágios de desenvolvimento da indústria, nem a Primeira Seguidora (F) nem a Segunda Seguidora (FF) investiram.

Substituindo o valor esperado do fator de desconto estocástico por  $B_t(\tilde{T}) = \left(\frac{X_t}{X_T}\right)^{\beta_1}$ , chega-se a:

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{X_{F_{int}}}\right)^{\beta_1} \cdot \frac{X_{F_{int}}[\bar{\pi}_{FF_h}^2 - \bar{\pi}_{FF_h}^1]}{\delta} \\
 & + \left(\frac{1}{X_{FF_h}}\right)^{\beta_1} \cdot \left[ \frac{X_{FF_h}[\bar{\pi}_{FF_h}^3 - \bar{\pi}_{FF_h}^2]}{\delta} - I \right] \\
 & = \left(\frac{1}{X_{F_h}}\right)^{\beta_1} \cdot \left[ \frac{X_{F_h}[\bar{\pi}_{F_h}^2 - \bar{\pi}_{F_h}^1]}{\delta} - I \right] \\
 & + \left(\frac{1}{X_{FF_{int}}}\right)^{\beta_1} \cdot \frac{X_{FF_{int}}[\bar{\pi}_{F_h}^3 - \bar{\pi}_{F_h}^2]}{\delta}
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Substituindo os valores na equação e utilizando a função *Solver* do Excel, encontramos o gatilho  $X_{F_h}$ , ou seja, o gatilho de preempção da firma de custo intermediário  $X_{F_{int}}^P$ . Assim:

$$X_{F_{int}}^P = 0,298.$$

A firma de custo intermediário investirá em:

$$X_{F_{int}} = \min\{X_{F_{int}}^M; X_{F_{int}}^P\} = \min\{0,336; 0,298\} = 0,298. \tag{5.15}$$

A ameaça de preempção faz com que firma de custo intermediário não possa esperar o ponto que maximiza seu valor como Primeira Seguidora. Como sua vantagem em custo não é grande o suficiente, ela precisa investir antes para que não seja antecipada pela firma de alto custo.

### 5.2.3. Gatilho Líder

O gatilho da firma Líder será o mínimo entre o gatilho calculado de forma monopolística e o gatilho de preempção:

$$X_F = \min\{X_L^P; X_L^M\}, \tag{4.52}$$

Onde:

$$X_L^M = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \cdot \frac{\delta \cdot I}{\bar{\pi}_L^1 - \bar{\pi}_L^0} e \quad 4.50$$

$$X_L^P = \inf \{ \tilde{X}_t < X_F | L_{int}(\tilde{X}_t) = F_{int}(\tilde{X}_t) \}. \quad 4.51$$

O gatilho monopolístico da firma de baixo custo é:

$$X_{L_l}^M = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \cdot \frac{\delta \cdot I}{\bar{\pi}_{L_l}^1 - \bar{\pi}_{L_l}^0} = \frac{2,47}{2,47 - 1} \cdot \frac{7,76\% \cdot 0,100}{0,274 - 0,234} = 0,320. \quad 5.16$$

Para calcular o gatilho de preempção, é preciso encontrar a valor de  $X_t$  no qual a firma de custo intermediário é indiferente entre investir como Líder e esperar para investir em  $X_{F_{int}}$ , ou seja, o ponto no qual o valor da firma de custo intermediário *int* como Líder ( $L_{int}$ ) é igual ao seu valor como Primeira Seguidora ( $F_{int}$ ).

O valor, no tempo-0 e sem ameaça de preempção, da firma de custo intermediário como Primeira Seguidora é:

$$\begin{aligned} F_{int}^0(X_T) &= \frac{X_0 \cdot \bar{\pi}_{F_{int}}^0}{\delta} + B_0(\tilde{T}_{L_l}) \cdot \frac{X_{L_l}[\bar{\pi}_{F_{int}}^1 - \bar{\pi}_{F_{int}}^0]}{\delta} \\ &+ B_0(\tilde{T}_{F_{int}}) \cdot \left[ \frac{X_{F_{int}}[\bar{\pi}_{F_{int}}^2 - \bar{\pi}_{F_{int}}^1]}{\delta} - I \right] \\ &+ B_0(\tilde{T}_{FF_h}) \cdot \frac{X_{FF_h}[\bar{\pi}_{F_{int}}^3 - \bar{\pi}_{F_{int}}^2]}{\delta} \end{aligned} \quad 5.17$$

Onde  $X_{L_l} = X_{L_l}^M = 0,320$ ,  $X_{F_{int}} = X_{F_{int}}^M = 0,336$  e  $X_{FF_h} = 0,348$ .

O valor, no tempo-0 e sem ameaça de preempção, da firma de custo intermediário como Líder é:



$$\begin{aligned}
L_{int}^0(X_T) &= \frac{X_0 \cdot \bar{\pi}_{L_{int}}^0}{\delta} + B_0(\tilde{T}_{L_{int}}) \cdot \left[ \frac{X_{L_{int}}[\bar{\pi}_{L_{int}}^1 - \bar{\pi}_{L_{int}}^0]}{\delta} - I \right] \\
&+ B_0(\tilde{T}_{F_l}) \cdot \frac{X_{F_l}[\bar{\pi}_{L_{int}}^2 - \bar{\pi}_{L_{int}}^1]}{\delta} \\
&+ B_0(\tilde{T}_{FF_h}) \cdot \frac{X_{FF_h}[\bar{\pi}_{L_{int}}^3 - \bar{\pi}_{L_{int}}^2]}{\delta}
\end{aligned} \tag{5.18}$$

Para encontrar o valor de  $X_{L_{int}}$  que iguala as equações acima deve-se encontrar o gatilho da firma de baixo custo entrando como Primeira Seguidora ( $X_{F_l}$ ). Assim:

$$X_{F_l} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \cdot \frac{\delta \cdot I}{\bar{\pi}_{F_l}^2 - \bar{\pi}_{F_l}^1}. \tag{5.19}$$

É necessário, também, encontrar o valor dos fluxos de lucro neste caso, onde a firma de custo intermediário é Líder, a de baixo custo Primeira Seguidora e a de alto custo Segunda Seguidora. Lembrando que o lucro da firma  $i$  será dado por:

$$\pi_i^c = \frac{1}{(n+1)^2} \frac{(a - nc_i + (n-1)\bar{c}_{-i})^2}{b} \tag{4.61}$$

Onde  $\bar{c}_{-i} \equiv \sum_{j \neq i}^n c_j / (n-1)$  é a média dos custos de produção de todas as firmas do mercado exceto a firma  $i$ , e  $n$  é igual ao número de empresas no mercado, neste caso, igual a 3. Assim:

**Primeiro caso:****Tabela 22 – Lucro das Empresas no Primeiro Caso e considerando Firma de Custo Intermediário como Líder**

Nenhuma Empresa Investiu	
Firma	Lucro (Bilhões)
$\bar{\pi}_{L_{int}}^0$	0,215
$\bar{\pi}_{F_l}^0$	0,234
$\bar{\pi}_{FF_h}^0$	0,210

Nenhuma firma exerceu a opção de expansão.

**Segundo caso:****Tabela 23 – Lucro das Empresas no Segundo Caso e considerando Firma de Custo Intermediário como Líder**

Somente Líder Investiu	
Firma	Lucro (Bilhões)
$\bar{\pi}_{L_{int}}^1$	0,254
$\bar{\pi}_{F_l}^1$	0,221
$\bar{\pi}_{FF_h}^1$	0,198

Expansão da firma de custo intermediário como líder.

**Terceiro caso:****Tabela 24 – Lucro das Empresas no Terceiro Caso e considerando Firma de Custo Intermediário como Líder**

Líder e Primeira Seguidora Investiram	
Firma	Lucro (Bilhões)
$\bar{\pi}_{L_{int}}^2$	0,241
$\bar{\pi}_{F_l}^2$	0,260
$\bar{\pi}_{FF_h}^2$	0,186

Caso em que a firma de baixo custo investe como Primeira Seguidora.

**Quarto caso:**

**Tabela 25 – Lucro das Empresas no Quarto Caso e considerando Firma de Custo Intermediário como Líder**

Todas Investiram	
Firma	Lucro (Bilhões)
$\bar{\pi}_{L_{int}}^3$	0,227
$\bar{\pi}_{F_l}^3$	0,247
$\bar{\pi}_{FF_h}^3$	0,223

Firma de alto custo investe como Segunda Seguidora.

Agora, é possível calcular o gatilho da firma de baixo custo entrando como Primeira Seguidora ( $X_{F_l}$ ):

$$X_{F_l} = \frac{\beta_1}{\beta_1 - 1} \cdot \frac{\delta \cdot I}{\bar{\pi}_{F_l}^2 - \bar{\pi}_{F_l}^1} = \frac{2,47}{2,47 - 1} \cdot \frac{7,62\% \cdot 0,100}{0,260 - 0,221} = 0,328. \quad 5.20$$

Neste momento, é possível, assim, igualar os valores da firma de custo intermediário investindo como Líder e Primeira Seguidora, isto é:

$$L_{int}^0(X_T) = F_{int}^0(X_T) \quad 5.21$$

$$\begin{aligned}
& \frac{X_0 \cdot \bar{\pi}_{L_{int}}^0}{\delta} + B_0(\tilde{T}_{L_{int}}) \cdot \left[ \frac{X_{L_{int}}[\bar{\pi}_{L_{int}}^1 - \bar{\pi}_{L_{int}}^0]}{\delta} - I \right] \\
& + B_0(\tilde{T}_{F_l}) \cdot \frac{X_{F_l}[\bar{\pi}_{L_{int}}^2 - \bar{\pi}_{L_{int}}^1]}{\delta} \\
& + B_0(\tilde{T}_{FF_h}) \cdot \frac{X_{FF_h}[\bar{\pi}_{L_{int}}^3 - \bar{\pi}_{L_{int}}^2]}{\delta} \\
& = \frac{X_0 \cdot \bar{\pi}_{F_{int}}^0}{\delta} + B_0(\tilde{T}_{L_l}) \cdot \frac{X_{L_l}[\bar{\pi}_{F_{int}}^1 - \bar{\pi}_{F_{int}}^0]}{\delta} \\
& + B_0(\tilde{T}_{F_{int}}) \cdot \left[ \frac{X_{F_{int}}[\bar{\pi}_{F_{int}}^2 - \bar{\pi}_{F_{int}}^1]}{\delta} - I \right] \\
& + B_0(\tilde{T}_{FF_h}) \cdot \frac{X_{FF_h}[\bar{\pi}_{F_{int}}^3 - \bar{\pi}_{F_{int}}^2]}{\delta}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Eliminando os termos iguais (repare que  $\bar{\pi}_{L_{int}}^0 = \bar{\pi}_{F_{int}}^0$ ,  $\bar{\pi}_{L_{int}}^2 = \bar{\pi}_{F_{int}}^2$  e  $\bar{\pi}_{L_{int}}^3 = \bar{\pi}_{F_{int}}^3$ )<sup>36</sup>:

$$\begin{aligned}
& B_0(\tilde{T}_{L_{int}}) \cdot \left[ \frac{X_{L_{int}}[\bar{\pi}_{L_{int}}^1 - \bar{\pi}_{L_{int}}^0]}{\delta} - I \right] \\
& + B_0(\tilde{T}_{F_l}) \cdot \frac{X_{F_l}[\bar{\pi}_{L_{int}}^2 - \bar{\pi}_{L_{int}}^1]}{\delta} = B_0(\tilde{T}_{L_l}) \cdot \frac{X_{L_l}[\bar{\pi}_{F_{int}}^1 - \bar{\pi}_{F_{int}}^0]}{\delta} \\
& + B_0(\tilde{T}_{F_{int}}) \cdot \left[ \frac{X_{F_{int}}[\bar{\pi}_{F_{int}}^2 - \bar{\pi}_{F_{int}}^1]}{\delta} - I \right]
\end{aligned} \tag{5.23}$$

---

<sup>36</sup>  $\bar{\pi}_{L_{int}}^0 = \bar{\pi}_{F_{int}}^0$  pois, em ambos os casos, a empresa de custo intermediário não investiu.  $\bar{\pi}_{L_{int}}^2 = \bar{\pi}_{F_{int}}^2$  pois, em ambos os casos, a empresa de custo intermediário compete, na forma de um oligopólio de Cournot, em um cenário no qual apenas as firmas *int* e *l* expandiram suas produções. E  $\bar{\pi}_{L_{int}}^3 = \bar{\pi}_{F_{int}}^3$  porque, aqui, a empresa de custo intermediário compete, na forma de um oligopólio de Cournot, em um contexto no qual todas as firmas já exerceram a opção de expandir sua produção.

Substituindo o valor esperado do fator de desconto estocástico por  $B_t(\tilde{T}) = \left(\frac{X_t}{X_T}\right)^{\beta_1}$ , temos:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{X_{L_{int}}}\right)^{\beta_1} \cdot \left[ \frac{X_{L_{int}}[\bar{\pi}_{L_{int}}^1 - \bar{\pi}_{L_{int}}^0]}{\delta} - I \right] \\ & + \left(\frac{1}{X_{F_l}}\right)^{\beta_1} \cdot \frac{X_{F_l}[\bar{\pi}_{L_{int}}^2 - \bar{\pi}_{L_{int}}^1]}{\delta} = \left(\frac{1}{X_{L_l}}\right)^{\beta_1} \cdot \frac{X_{L_l}[\bar{\pi}_{F_{int}}^1 - \bar{\pi}_{F_{int}}^0]}{\delta} \\ & + \left(\frac{1}{X_{F_{int}}}\right)^{\beta_1} \cdot \left[ \frac{X_{F_{int}}[\bar{\pi}_{F_{int}}^2 - \bar{\pi}_{F_{int}}^1]}{\delta} - I \right] \end{aligned} \quad 5.24$$

Queremos encontrar o valor  $X_{L_{int}}$  que iguala as equações acima.

Substituindo todos os valores calculados na equação e utilizando a função *Solver* do Excel, chega-se ao gatilho  $X_{L_{int}}$ , ou seja, o gatilho de preempção da firma de baixo custo  $X_{L_l}^P$ , assim:

$$X_{L_l}^P = 0,290 .$$

A firma de baixo custo investirá em:

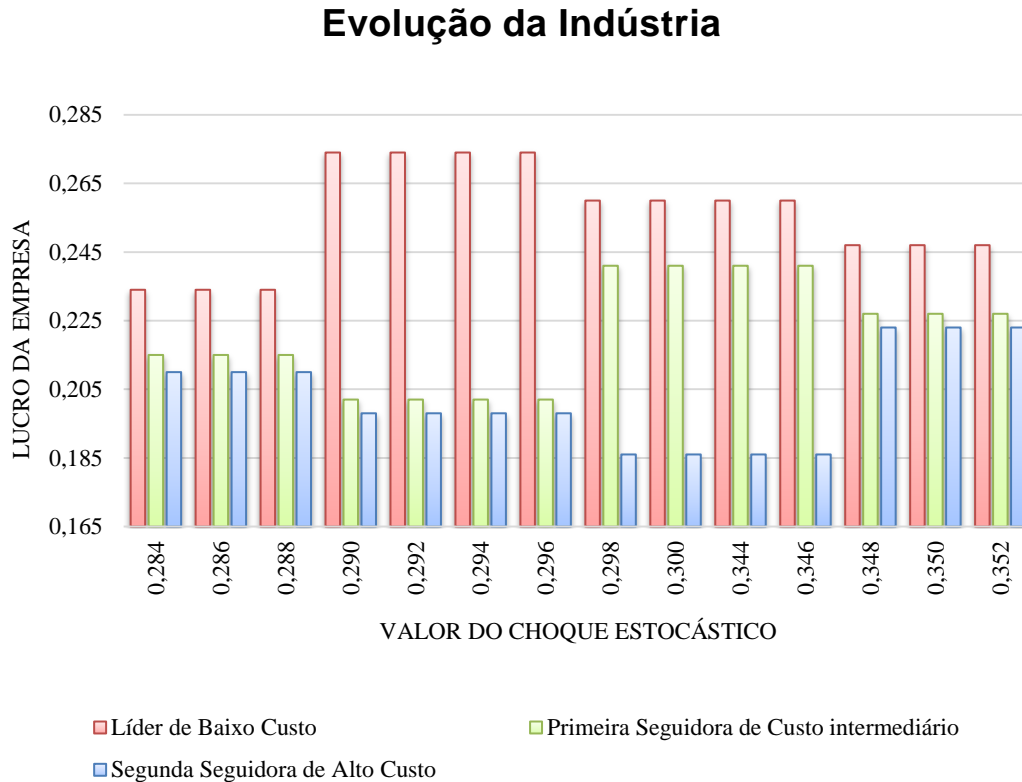
$$X_{L_l} = \min\{X_{L_l}^M; X_{L_l}^P\} = \min\{0,320; 0,290\} = 0,290 . \quad 5.25$$

A ameaça de preempção faz com que a firma de baixo custo não possa esperar o ponto que maximiza seu valor como Líder. Como sua vantagem em custo não é grande o suficiente, ela precisa investir antes para que não seja antecipada pela firma de custo intermediário.

#### 5.2.4. Estrutura da Indústria

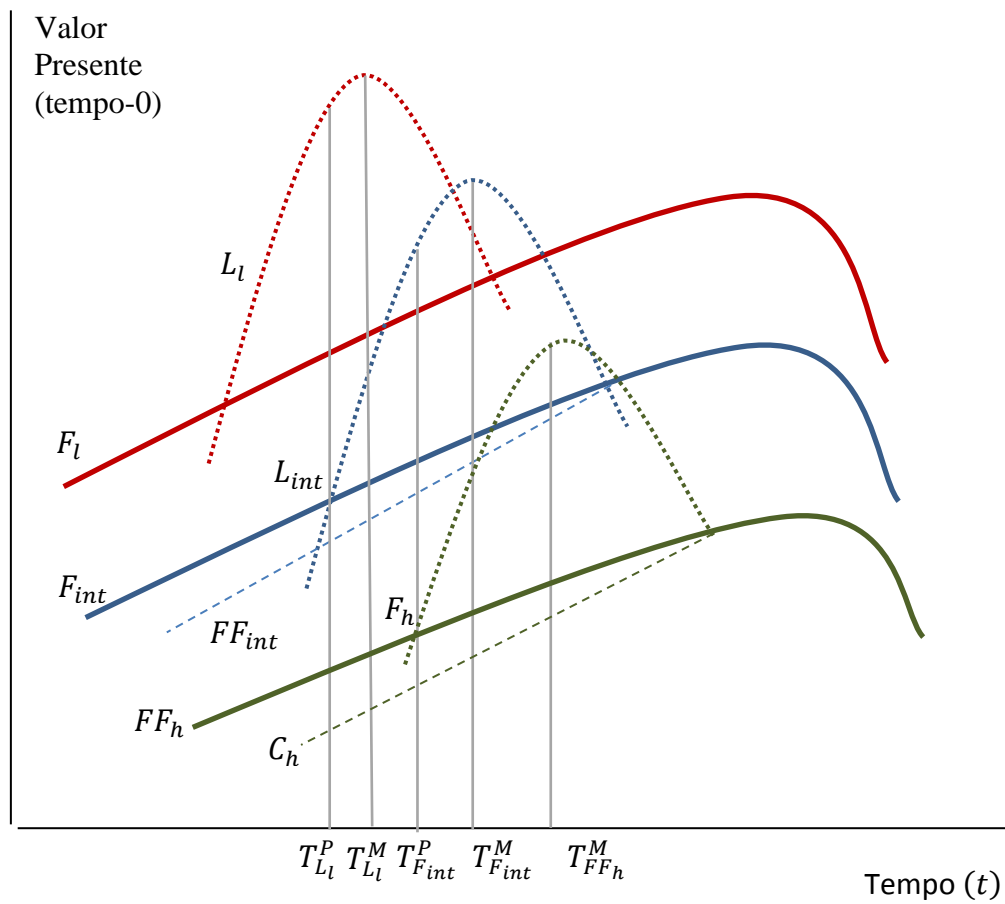
No tempo-0, todas as três firmas estão ativas no mercado. Quando o choque estocástico  $X_t$  atingir o valor 0,290, a firma de baixo custo investirá o valor  $I$  e expande sua produção. Enquanto o choque estocástico for maior do que 0,290 e menor do que 0,298, apenas a firma  $l$  estará se beneficiando de uma maior

produção. Somente quando o choque atingir 0,298, a firma de custo intermediário exercerá a opção de aumento de produção. Já firma de alto custo  $h$ , só investirá quando o valor do choque chegar a 0,348. A evolução da estrutura da indústria está representada na figura abaixo. O gráfico relaciona o lucro das empresas com o valor do choque estocástico.



**Figura 12 – Lucro da Indústria em Função do Momento Ótimo de Investimento**

A figura 13 não é uma representação exata do problema analisado, mas apenas um ilustração dos gatilhos, o que facilita a compreensão do modelo. Como foi visto, a firma Líder de baixo custo irá investir em seu tempo de preempção  $T_{L_i}^P$ , não podendo esperar para investir no ponto que maximizaria seu valor, referente ao gatilho monopolístico  $T_{L_i}^M$ . Já a firma Primeira Seguidora de custo intermediário, irá investir em seu tempo de preempção  $T_{F_{int}}^P$ , não podendo esperar para investir no ponto que maximizaria seu valor, referente ao gatilho monopolístico  $T_{F_{int}}^M$ . Finalmente, por não ter ameaça de preempção, a firma Segunda Seguidora de alto custo irá investir em seu tempo monopolístico  $T_{F_{int}}^M$ .



**Figura 13 – Gatilhos de Preempção e Monopolísticos das Firmas**

### 5.3. Análise de Sensibilidade

A análise de sensibilidade é utilizada para estudar o comportamento dos resultados de um estudo a medida em que as premissas do modelo variam. Esta análise possibilita avaliar o grau de confiança dos resultados quando há incerteza nas suposições dos dados e resultados. De um modo geral, ela ajuda na tomada de decisões, no refinamento de dados e na determinação dos elementos críticos do estudo.

Foi feita uma comparação entre as variação nos gatilhos monopolísticos e de preempção das três empresas em relação às variáveis estimadas no início deste capítulo. Os gatilhos utilizados como referência são:

**Tabela 26 – Gatilho das Empresas**

	$X_i^P$	$X_i^M$
$L_l$	0,290	0,320
$F_{int}$	0,298	0,336
$FF_h$	—	0,348

Será analisado o comportamento do gatilho após as variações de 5%, 10%, 15% e 20% das seguintes variáveis:

- i. Taxa livre de Risco ( $r$ );
- ii. Prêmio de Risco ( $PR$ ) da indústria de latas de alumínio;
- iii. Tendência ( $\alpha$ );
- iv. Volatilidade ( $\sigma$ );
- v. Variáveis da função de demanda inversa [ $P(Q_T) = a - b \cdot Q_T$ ];
- vi. Investimento ( $I$ );
- vii. Custo de Produção ( $c_i$ ).

Para cada um dos casos, será apresentada uma tabela contendo os valores e as variações percentuais dos gatilhos monopolísticos e de preempção das empresas de baixo custo, custo intermediário e alto custo.



### 5.3.1. Taxa livre de Risco ( $r$ )

Uma variação positiva de 20% na taxa livre de risco faz com que o gatilho seja alterado, positivamente, em torno de 16%. Um aumento na taxa livre de risco estará postergando o momento ótimo de investimento das empresas, ou seja, o investimento só será justificado em um mercado mais lucrativo do que anteriormente. Essa é a quarta variável mais sensível do modelo sendo, portanto, de extrema relevância. Como será visto, o modelo é mais sensível à variável da função de demanda inversa  $a$ , seguida do investimento e da variável da função de demanda inversa  $b$ .

**Tabela 27 – Análise de Sensibilidade da Taxa Livre de Risco ( $r$ )**

	$r_{5\%} = 8,66\%$		$r_{10\%} = 9,08\%$		$r_{15\%} = 9,49\%$		$r_{20\%} = 9,90\%$	
	$X_i^P$	$X_i^M$	$X_i^P$	$X_i^M$	$X_i^P$	$X_i^M$	$X_i^P$	$X_i^M$
$L_l$	0,302	0,332	0,313	0,345	0,325	0,357	0,336	0,370
$\Delta$	3,99%	3,97%	7,96%	7,92%	11,9%	11,8%	15,9%	15,8%
$F_{int}$	0,310	0,349	0,322	0,362	0,334	0,376	0,345	0,389
$\Delta$	4,00%	3,97%	7,98%	7,92%	11,9%	11,8%	15,9%	15,8%
$FF_h$	–	0,362	–	0,375	–	0,389	–	0,403
$\Delta$		3,97%		7,92%		11,8%		15,8%

### 5.3.2. Prêmio de Risco ( $PR$ ) da indústria de latas de alumínio

Uma variação positiva de 20% no prêmio de risco faz com que o gatilho seja alterado, positivamente, em torno de 2,2%. O prêmio de risco impacta negativamente a taxa de crescimento do movimento geométrico browniano neutro ao risco. Ao se reduzir a tendência, o mercado demorará mais tempo para se tornar ótimo e, assim, os gatilhos serão impactados positivamente. O modelo mostra-se pouco sensível a esta variável.

**Tabela 28 – Análise de Sensibilidade do Prêmio de Risco da Indústria de Latas de Alumínio (PR)**

	$PR_{5\%} = 2,76\%$		$PR_{10\%} = 2,89\%$		$PR_{15\%} = 3,02\%$		$PR_{20\%} = 3,16\%$	
	$X_i^P$	$X_i^M$	$X_i^P$	$X_i^M$	$X_i^P$	$X_i^M$	$X_i^P$	$X_i^M$
$L_l$	0,292	0,321	0,293	0,323	0,295	0,325	0,297	0,327
$\Delta$	0,551%	0,537%	1,11%	1,08%	1,68%	1,63%	2,25%	2,18%
$F_{int}$	0,300	0,338	0,301	0,339	0,33	0,341	0,305	0,343
$\Delta$	0,557%	0,537%	1,12%	1,08%	1,69%	1,63%	2,27%	2,18%
$FF_h$	–	0,350	–	0,352	–	0,354	–	0,355
$\Delta$		0,537%		1,08%		1,63%		2,18%

### 5.3.3. Tendência ( $\alpha$ )

Uma variação positiva de 20% na tendência do movimento geométrico browniano faz com que o gatilho seja alterado, negativamente, em torno de 2,6%. Quanto maior a tendência do movimento geométrico browniano mais rápido o mercado irá crescer, se tornando mais lucrativo. É intuitivo que o momento ótimo do investimento das empresas, o gatilho, será reduzido. Assim como no caso do PR, o modelo mostra-se pouco sensível a essa variável.

**Tabela 29 – Análise de Sensibilidade da Tendência ( $\alpha$ )**

	$\alpha_{5\%} = 3,15\%$		$\alpha_{10\%} = 3,30\%$		$\alpha_{15\%} = 3,45\%$		$\alpha_{20\%} = 3,60\%$	
	$X_i^P$	$X_i^M$	$X_i^P$	$X_i^M$	$X_i^P$	$X_i^M$	$X_i^P$	$X_i^M$
$L_l$	0,288	0,317	0,286	0,315	0,284	0,313	0,282	0,311
$\Delta$	-0,689%	-0,670%	-1,37%	-1,33%	-2,03%	-1,98%	-2,69%	-2,62%
$F_{int}$	0,296	0,334	0,294	0,331	0,292	0,329	0,290	0,327
$\Delta$	-0,696%	-0,670%	-1,38%	-1,33%	-2,05%	-1,98%	-2,71%	-2,62%
$FF_h$	–	0,346	–	0,343	–	0,341	–	0,339
$\Delta$		-0,670%		-1,33%		-1,98%		-2,62%

### 5.3.4. Volatilidade ( $\sigma$ )

Uma variação positiva de 20% na volatilidade do MGB faz com que o gatilho seja alterado, positivamente, em torno de 10%. A volatilidade impacta negativamente o valor da variável  $\beta_1$ . Por sua vez, uma variação negativa no valor de  $\beta_1$  aumenta o valor do gatilho. Dessa forma, a volatilidade impacta o valor do gatilho na mesma direção. Comparada as outras variáveis, a volatilidade do MGB possui uma importância intermediária, sendo a quinta variável mais sensível do modelo.

**Tabela 30 – Análise de Sensibilidade da Volatilidade ( $\sigma$ )**

	$\sigma_{5\%} = 20,15\%$		$\sigma_{10\%} = 21,11\%$		$\sigma_{15\%} = 22,07\%$		$\sigma_{20\%} = 23,03\%$	
	$X_i^P$	$X_i^M$	$X_i^P$	$X_i^M$	$X_i^P$	$X_i^M$	$X_i^P$	$X_i^M$
$L_I$	0,297	0,327	0,304	0,335	0,311	0,343	0,318	0,351
$\Delta$	2,33%	2,36%	4,70%	4,77%	7,13%	7,23%	9,61%	9,73%
$F_{int}$	0,305	0,344	0,312	0,352	0,319	0,360	0,326	0,368
$\Delta$	2,31%	2,36%	4,68%	4,77%	7,09%	7,23%	9,56%	9,73%
$FF_h$	–	0,356	–	0,364	–	0,373	–	0,382
$\Delta$		2,36%		4,77%		7,23%		9,73%

### 5.3.5. Variável da função de demanda inversa ( $a$ )

Uma variação positiva de 20% na variável da função de demanda inversa  $a$  faz com que o gatilho seja alterado, negativamente, em torno de 22,6%. Um aumento de  $a$  aumenta a função preço da indústria de latas de alumínio. Com o preço mais alto, o lucro é impactado positivamente. Neste cenário, as empresas irão investir em uma data mais cedo, e, por isso, o gatilho é impactado negativamente. Trata-se, assim, da variável mais sensível do modelo.

**Tabela 31 – Análise de Sensibilidade da Variável da Função de Demanda Inversa ( $a$ )**

	$a_{5\%} = 0,275$		$a_{10\%} = 0,288$		$a_{15\%} = 0,302$		$a_{20\%} = 0,315$	
	$X_i^P$	$X_i^M$	$X_i^P$	$X_i^M$	$X_i^P$	$X_i^M$	$X_i^P$	$X_i^M$
$L_l$	0,270	0,298	0,238	0,279	0,238	0,262	0,225	0,247
$\Delta$	-6,76%	-6,82%	-17,8%	-12,8%	-17,8%	-18,0%	-22,4%	-22,6%
$F_{int}$	0,277	0,311	0,243	0,290	0,243	0,272	0,230	0,256
$\Delta$	-6,96%	-7,27%	-18,3%	-13,6%	-18,3%	-19,0%	-23,0%	-23,9%
$FF_h$	–	0,322	–	0,299	–	0,279	–	0,262
$\Delta$		-7,54%		-14,0%		-19,7%		-24,6%

### 5.3.6. Variável da função de demanda inversa ( $b$ ) e Investimento ( $I$ )

Uma variação positiva de 20%, tanto no investimento quando na variável da função de demanda inversa  $b$ , faz com que o gatilho seja alterado, positivamente, em 20%. Caso seja necessário realizar um investimento superior para expandir a fábrica, as firmas irão postergar seus investimentos, uma vez que o mercado precisa se tornar mais vantajoso que anteriormente, justificando um desembolso maior. Já um aumento de  $b$  impacta negativamente a função preço da indústria de latas de alumínio. Preço menor equivale a lucros menores e, portanto, a necessidade de se esperar que o mercado atinja uma posição mais elevada, fazendo com que o investimento seja postergado. O modelo é extremamente sensível a essas variáveis.

**Tabela 32 – Análise de Sensibilidade do Investimento ( $I$ ) e da Variável da Função de Demanda Inversa ( $b$ )**

	$I_{5\%} = 0,105$ ou $b_{5\%} = 0,0083$		$I_{10\%} = 0,110$ ou $b_{5\%} = 0,0087$		$I_{15\%} = 0,115$ ou $b_{15\%} = 0,0091$		$I_{20\%} = 0,120$ ou $b_{20\%} = 0,0095$	
	$X_i^P$	$X_i^M$	$X_i^P$	$X_i^M$	$X_i^P$	$X_i^M$	$X_i^P$	$X_i^M$
$L_l$	0,305	0,336	0,319	0,351	0,334	0,367	0,348	0,383
$\Delta$	5,00%	5,00%	10,0%	10,0%	15,0%	15,0%	20,0%	20,0%
$F_{int}$	0,313	0,353	0,328	0,369	0,343	0,386	0,358	0,403
$\Delta$	5,00%	5,00%	10,0%	10,0%	15,0%	15,0%	20,0%	20,0%
$FF_h$	—	0,365	—	0,383	—	0,400	—	0,417
$\Delta$		5,00%		10,0%		15,0%		20,0%

### 5.3.7. Custo de Produção ( $c_i$ )

Uma variação positiva de 20% no custo de produção das três firmas faz com que o gatilho seja alterado, negativamente, em torno de 8%. A intuição levaria a pensar que com custos superiores reduziriam o lucro das firmas o que as fariam esperar para investir em um momento posterior. No entanto, devido às características da competição em um oligopólio de Cournot, um aumento do custo de produção simultâneo das três firmas, leva a investimentos mais cedo no mercado. Comparada às outras variáveis, o custo possui uma importância intermediária, sendo a sexta variável mais sensível do modelo.

**Tabela 33 – Análise de Sensibilidade do Custo de Produção ( $c_i$ )**

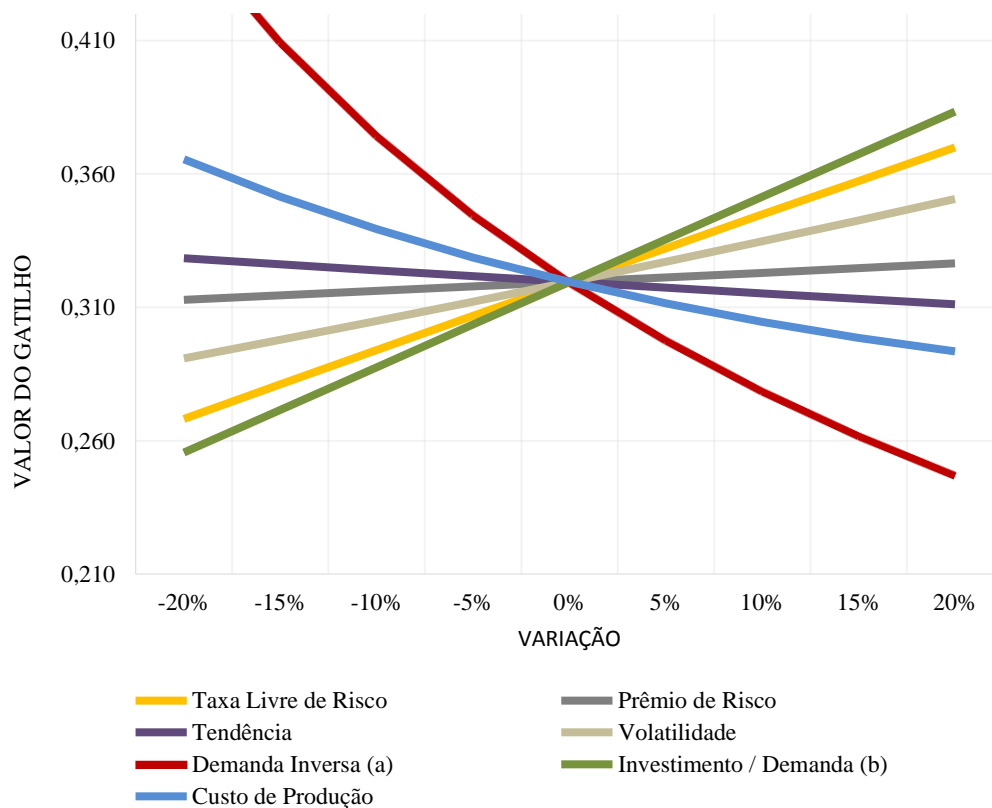
	$c_{i5\%} = c_i \cdot 1,05$		$c_{i10\%} = c_i \cdot 1,10$		$c_{i15\%} = c_i \cdot 1,15$		$c_{i20\%} = c_i \cdot 1,20$	
	$X_i^P$	$X_i^M$	$X_i^P$	$X_i^M$	$X_i^P$	$X_i^M$	$X_i^P$	$X_i^M$
$L_l$	0,283	0,312	0,276	0,305	0,271	0,299	0,266	0,293
$\Delta$	-2,54%	-2,50%	-4,74%	-4,67%	-6,61%	-6,55%	-8,20%	-8,16%
$F_{int}$	0,291	0,329	0,285	0,324	0,280	0,319	0,276	0,316
$\Delta$	-2,32%	-1,98%	-4,29%	-3,62%	-5,94%	-4,93%	-7,30%	-5,98%
$FF_h$	–	0,342	–	0,338	–	0,334	–	0,332
$\Delta$		-1,67%		-2,96%		-3,94%		-4,62%

### 5.3.8. Resultado

Essa seção combina a análise de sensibilidade de todas as variáveis apresentadas.

As figuras e tabelas abaixo representam a sensibilidade dos gatilhos monopolísticos e de preempção da firma líder de baixo custo em relação às variações percentuais positivas e negativas das premissas. Quanto maior a inclinação da curva, maior a sensibilidade do gatilho à variável em questão. As figuras mostram que tanto o gatilho monopolístico, quanto o de preempção são mais sensíveis à variável da demanda inversa  $a$ , seguida pelo valor do investimento, pela variável da demanda inversa  $b$  e pela taxa livre de risco  $r$ .

## ANÁLISE SENSIBILIDADE DO GATILHO MONOPOLÍSTICO

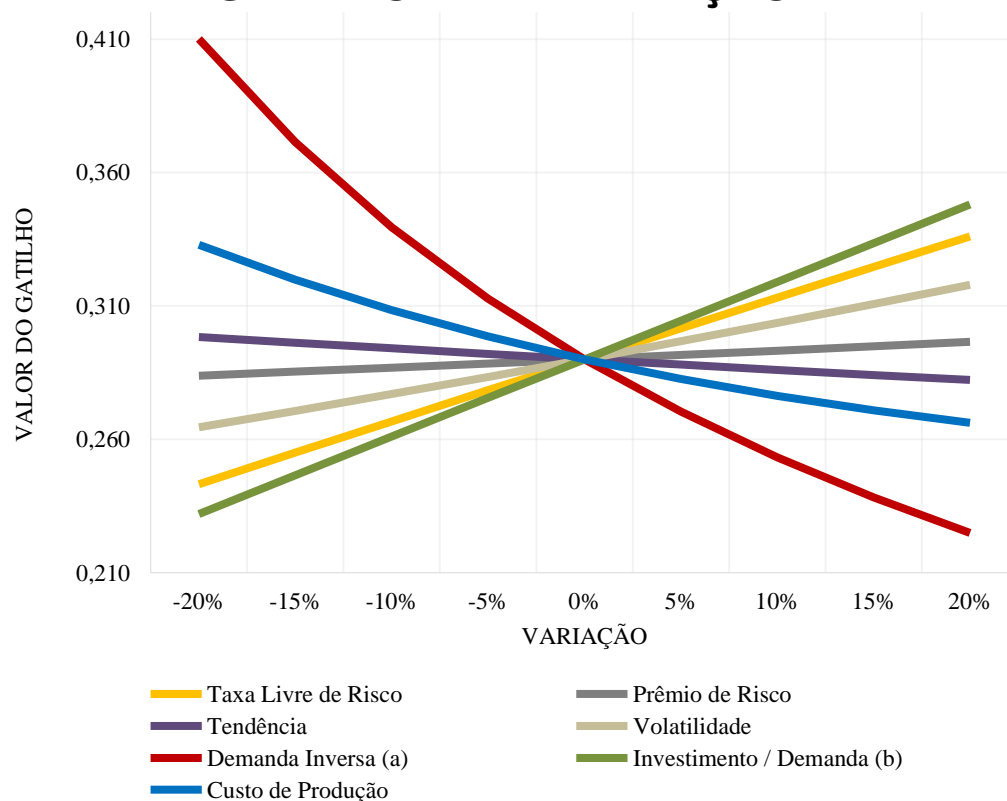


**Figura 14 – Análise de Sensibilidade do Gatilho Monopolístico  $X_{L_i}^M$**

**Tabela 34 – Valor do Gatilho Monopolístico ( $X_{L_i}^M$ ) em relação a Mudanças nas Variáveis**

	-20%	-15%	-10%	-5%	0%	5%	10%	15%	20%
Taxa Livre de Risco	0,268	0,281	0,294	0,307	0,320	0,332	0,345	0,357	0,370
Prêmio de Risco	0,313	0,315	0,316	0,318	0,320	0,321	0,323	0,325	0,327
Tendência	0,328	0,326	0,324	0,322	0,320	0,317	0,315	0,313	0,311
Volatilidade	0,291	0,298	0,305	0,312	0,320	0,327	0,335	0,343	0,351
Demanda Inversa (a)	0,452	0,409	0,374	0,345	0,320	0,298	0,279	0,262	0,247
Investimento / Demanda (b)	0,256	0,272	0,288	0,304	0,320	0,336	0,351	0,367	0,383
Custo de Produção	0,366	0,351	0,339	0,329	0,320	0,312	0,305	0,299	0,293

## ANÁLISE SENSIBILIDADE DO GATILHO DE PREEMPÇÃO



**Figura 15 – Análise de Sensibilidade do Gatilho de Preempção  $X_{L_t}^P$**

**Tabela 35 – Valor do Gatilho de Preempção ( $X_{L_t}^P$ ) em relação a Mudanças nas Variáveis**

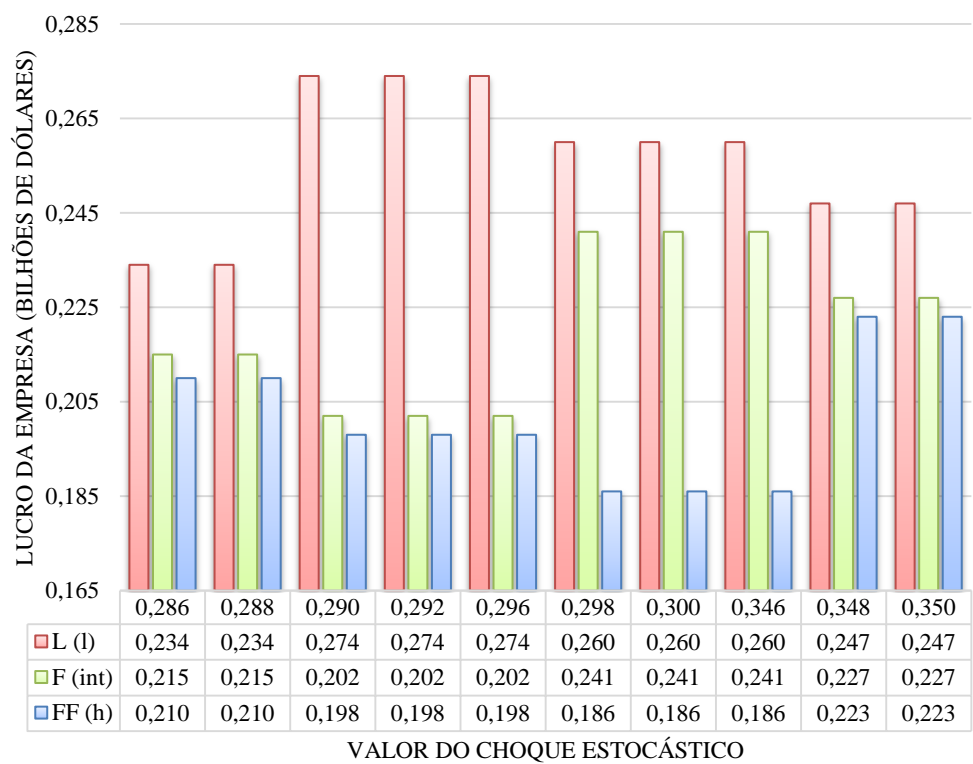
	-20%	-15%	-10%	-5%	0%	5%	10%	15%	20%
Taxa Livre de Risco	0,243	0,255	0,267	0,278	0,290	0,302	0,313	0,325	0,336
Prêmio de Risco	0,284	0,285	0,287	0,288	0,290	0,292	0,293	0,295	0,297
Tendência	0,298	0,296	0,294	0,292	0,290	0,288	0,286	0,284	0,282
Volatilidade	0,264	0,271	0,277	0,283	0,290	0,297	0,304	0,311	0,318
Demanda Inversa (a)	0,410	0,371	0,340	0,313	0,290	0,270	0,253	0,238	0,225
Investimento / Demanda (b)	0,232	0,247	0,261	0,276	0,290	0,305	0,319	0,334	0,348
Custo de Produção	0,333	0,320	0,308	0,299	0,290	0,283	0,276	0,271	0,266



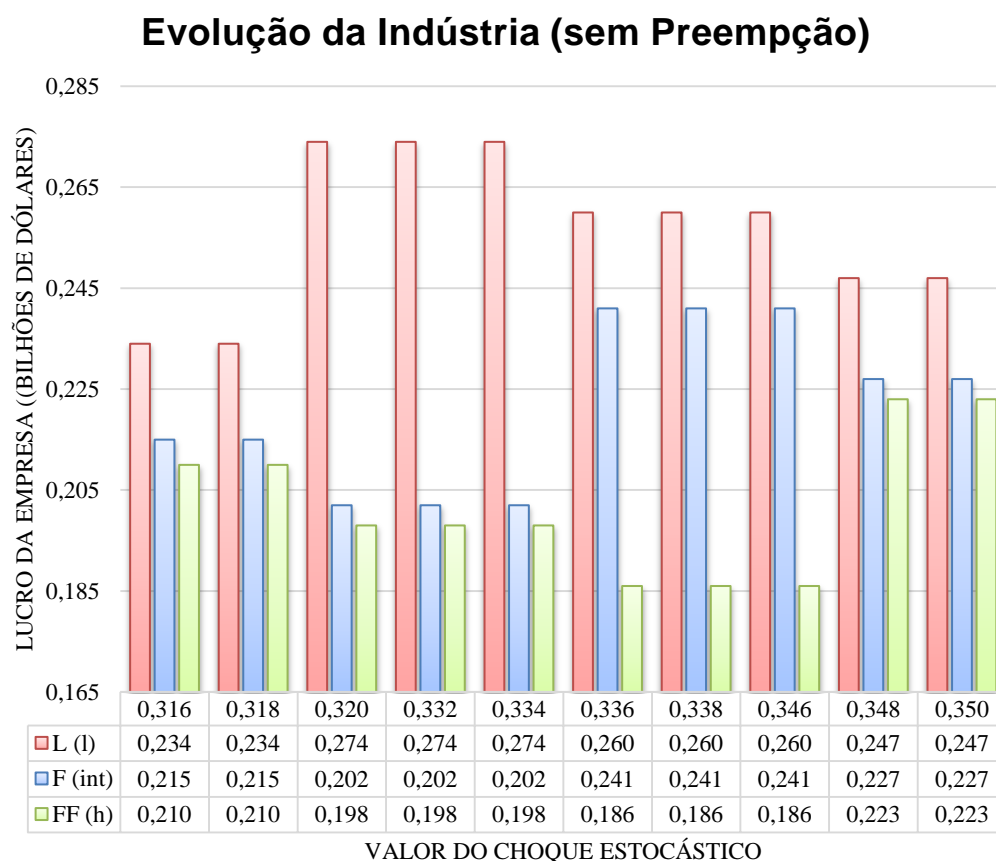
## 6. Conclusão

Neste trabalho foi visto como a ameaça de preempção em um contexto de competição oligopolista pode interferir no momento ótimo da decisão de investir. O modelo foi aplicado na indústria de latas de alumínio, na qual existem três principais empresas atuando. Foi possível comparar o impacto da preempção no gatilho das firmas. As figuras abaixo comparam os casos com e sem a ameaça de preempção.

### Evolução da Indústria (Preempção)

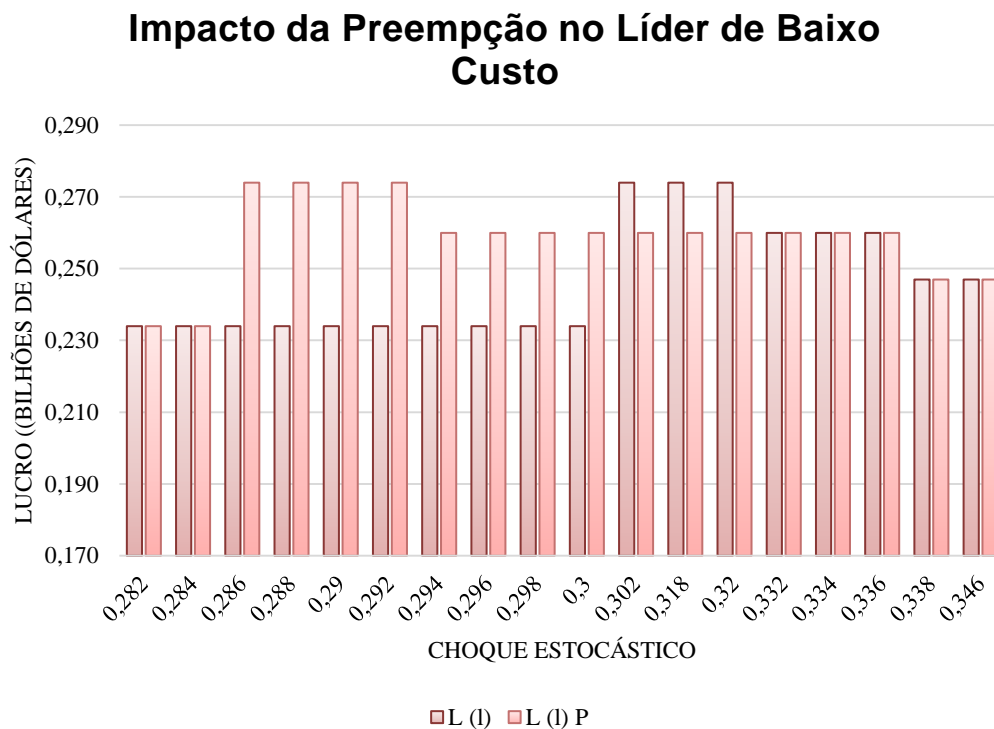


**Figura 16 – Evolução do Lucro das Empresas em Função do Choque Estocástico sob Ameaça de Preempção**

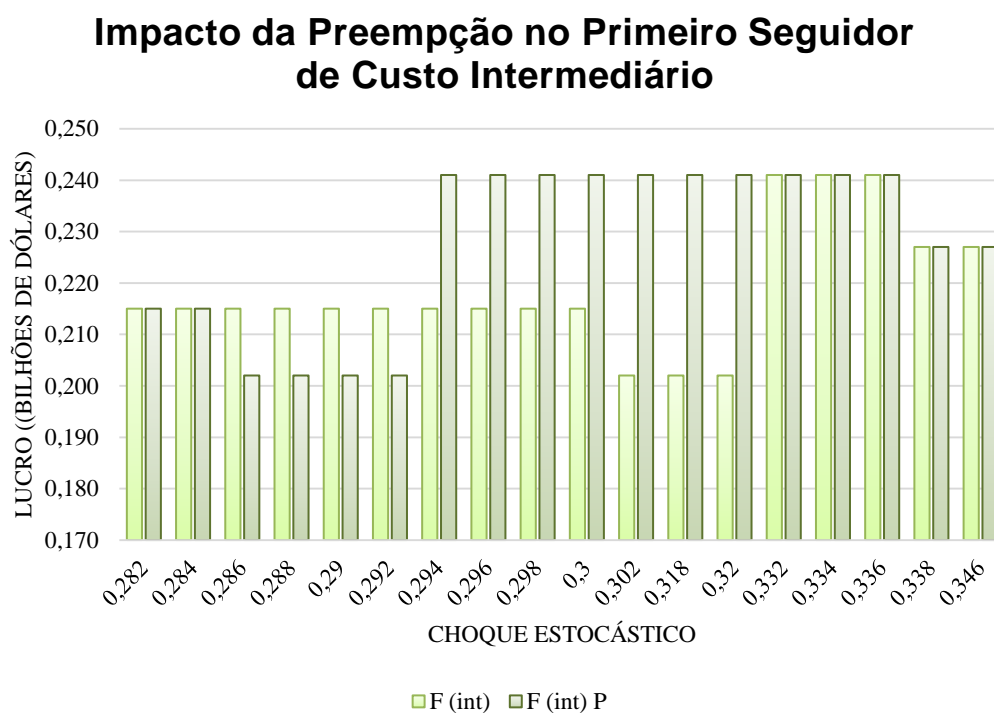


**Figura 17 – Evolução do Lucro das Empresas em Função do Choque Estocástico sem Ameaça de Preempção**

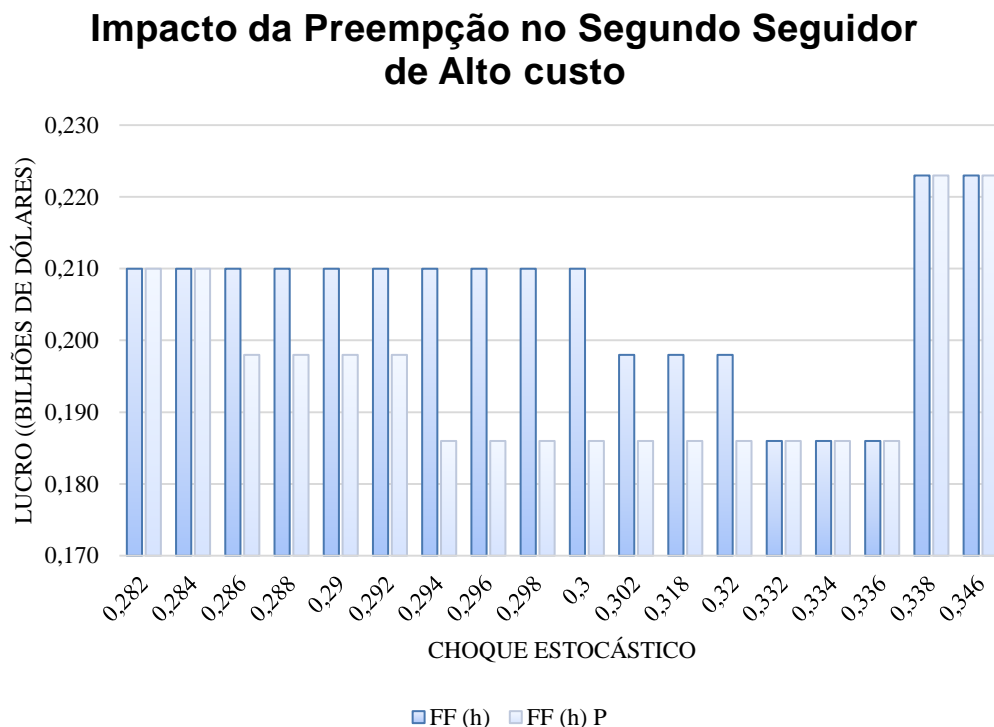
Para facilitar a comparação dos cenários com e sem a ameaça de preempção, são apresentados os casos de cada empresa isoladamente. As figuras mostram o fluxo de lucro das empresas em função do choque estocástico, apresentando os cenários com e sem preempção.



**Figura 18 – Impacto da Preempção no Momento Ótimo de Investimento da Firma Líder de Baixo Custo ( $L_I$ )**



**Figura 19 – Impacto da Preempção no Momento Ótimo de Investimento da Firma Primeira Seguidora de Custo Intermediário ( $F_{int}$ )**



**Figura 20 – Impacto da Preempção no Momento Ótimo de Investimento da Firma Segunda Seguidora de Alto Custo ( $FF_h$ )**

O estudo realizado ajuda a enfatizar a importância, em um modelo dinâmico, de se obter uma vantagem competitiva em custo. No caso estático, a empresa de menor custo consegue absorver um lucro maior do mercado, pois possui uma margem superior. No caso dinâmico, será possível obter lucros monopolísticos, ou se aproveitar de uma expansão isolada, por um período de tempo maior. Caso a vantagem competitiva seja muito grande, a ameaça de preempção do rival poderá ser considerada irrelevante, e a empresa irá investir no tempo randômico monopolístico  $\tilde{T}_L^M$ , ignorando a possibilidade de entrada do rival. No caso do estudo feito neste trabalho, a vantagem de custo não foi grande o suficiente para que as empresas pudessem investir em seu gatilho monopolístico. Quando isso ocorre, a firma precisa entrar em um tempo de preempção mais cedo  $\tilde{T}_L^P$  devido à interação estratégica e à rivalidade.

## **6.1. Sugestões para Trabalhos Futuros**

As extensões e estudos adicionais serão divididas em dois grupos, o primeiro está relacionado às premissas da indústria de latas de alumínio e o segundo às premissas do modelo.

### **6.1.1. Indústria de latas de alumínio**

#### **6.1.1.1. Investimento**

Na aplicação do modelo, assumiu-se um investimento igual a US\$ 100 milhões para as três firmas do mercado. Como mencionado anteriormente, essa premissa se justifica pois as máquinas já possuem uma certa maturidade tecnológica e são importadas por todas as empresas.

É importante observar algumas características do investimento para as empresas deste setor. O valor do investimento reflete a opção de construção de uma nova fábrica de latas de alumínio. No entanto, após esse primeiro investimento, há a possibilidade de aumentar as linhas de produção das fábricas através de um novo investimento, com valor inferior ao inicial. Há fábricas capazes de suportar até três linhas de produção no Brasil, com capacidade total anual próxima a 3,5 bilhões de latinhas.

Seria interessante adicionar essa opção às premissas de investimento do modelo. As empresas iriam analisar qual seria a melhor opção: investir em uma nova fábrica, ou expandir uma existente. Cabe destacar a expansão de uma fábrica não será sempre viável, pois essa opção só será possível se a firma possuir, pelo menos, uma fábrica que suporte uma nova linha.

#### **6.1.1.2. Produção**

Neste trabalho, a produção das empresas foi modelada através do equilíbrio de Cournot. O custo de produção marginal foi estimado por meio das informações publicadas pelas empresas no mercado. O resultado foi uma produção relativamente próxima de cada uma das três empresas do setor.

No Brasil, há uma diferença grande entre as participações de mercado das empresas. Enquanto no modelo estudado, as empresas possuem todas uma participação próxima a 30%, no mercado brasileiro, a diferença é significativa,

sendo, aproximadamente, 20%, 25% e 55% as participações de cada uma delas. É interessante observar que não é a empresa de menor custo que mais vende para o mercado. Essa maior participação se justifica por questões históricas e também por contratos firmados de longo prazo entre as empresas e os grandes compradores de latinhas (e.g. produtores de refrigerantes, cerveja e energéticos).

Um modelo que absorvesse essas características representaria melhor ainda o ambiente do mercado brasileiro. Porém, é provável que a complexidade dessas premissas impeça a existência de uma solução analítica.

## 6.1.2. Modelo de Oligopólio Assimétrico

### 6.1.2.1. Valor Inicial do Choque Estocástico

O modelo desenvolvido nesta dissertação estudou apenas um caso para o valor inicial do choque estocástico. No tempo-0, assumimos que o choque estocástico  $X_0$  era inferior ao gatilho de preempção da firma líder  $X_L^P$ . Isso impede que haja problemas de coordenação das firmas, ou seja, sem essa premissa, as firmas poderiam exercer, simultaneamente, a opção de investir em um momento não ótimo para elas ou entrar no mercado em uma sequência diferente da apresentada neste trabalho.

Para exemplificar esse problema de coordenação, suponhamos que, no tempo-0, o choque estocástico seja superior ao gatilho de preempção da firma líder de baixo custo, e inferior ao seu gatilho monopolístico, ou seja,  $X_{L_l}^P < X_0 < X_{L_l}^M$ . Nesse momento, a firma primeira seguidora de custo intermediário teria incentivo de se antecipar à empresa de baixo custo, e investir como líder. Se essa antecipação ocorresse, seria mais vantajoso para a empresa  $l$  se tornar primeira seguidora do que investir simultaneamente com a firma de custo intermediário. No entanto, existe uma probabilidade positiva de as duas empresas investirem simultaneamente, o que seria uma falha de coordenação, uma vez que ambas estariam melhor como primeira seguidora.

Um modelo que analisasse todos os possíveis casos para o valor inicial do choque estocástico seria mais completo do que o apresentado nessa dissertação, e ajudaria a compreender os prováveis equilíbrios da indústria.

## 7. Bibliografia

ABRALATAS. **Revista da Lata**. Edição 2011. Acesso 2013 Agosto 05. Disponível em: < <http://abralatas.org.br/wp-content/uploads/2013/07/Revista-da-Lata-Desempenho-do-Setor-no-Brasil-Edi%C3%A7%C3%A3o-2011.pdf> >

ANDERSON, S. T.; FRIEDMAN, D.; OPREA, R. Preemption Games: Theory and Experiment. **The American Economic Review**, Vol. 100, No. 4 (SEPTEMBER 2010), pp. 1778-1803.

Associação Brasileira dos Fabricantes de Latas de Alta Reciclabilidade, **ABRALATAS**. Acesso em 2013 Jul 5. Disponível em <http://www.abralatas.org.br/>.

AZEVEDO, A. F.; PAXSON, D. A. Real Options Game Models: A Review. **14th Annual International Conference**. Real Options Group. June 2010. Rome/Italy.

BACK, K.; PAULSEN, D. Open-Loop Equilibria and Perfect Competition in Option Exercise Games. **The Review of Financial Studies**, Vol. 22, No. 11 (Nov., 2009), pp. 4531-4552

BALDURSSON, F. M. Irreversible Investment under Uncertainty in Oligopoly. **Journal of Economic Dynamics and Control**, Volume 22, Number 4, April 1998 , pp. 627-644(18).

BALL CORPORATION (2012) **Annual Report**. [Online] Disponível em <<http://phx.corporate-ir.net/External.File?item=UGFyZW50SUQ9MTc1NTY2fENoaWxkSUQ9LTF8VHlwZT0z&t=1>> [Acessado Abril 2013].

BLACK F.; SCHOLES M. **The Pricing of Options and Corporate Liabilities**. The Journal of Political Economy, Vol. 81, No. 3 (May - Jun., 1973), pp. 637-654.

**BLOOMBERG**. Acesso em 2013 Mai 23. Disponível em: <http://www.bloomberg.com/quote/GEBR10Y:IND>.

BOONMAN, H. J.; HAGSPIEL, V. Sensitivity of Demand Function Choice in a Strategic Real Options. **17th Annual International Conference on Real Options**, 2013.

CHEVALIER-ROIGNANT, B. et al. Strategic investment under uncertainty: A synthesis. **European Journal of Operational Research** 215 (2011) 639–650.

CHEVALIER-ROIGNANT, B.; FLATH, C. M.; TRIGEORGIS, L. Strategic Market Entry and Operational Flexibility in Oligopoly (October 1, 2012). **Working Paper**. Disponível em SSRN: <http://ssrn.com/abstract=2244231> ou <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2244231>.

CHEVALIER-ROIGNANT, B.; TRIGEORGIS, L. **Competitive Strategy**. Cambridge: The MIT Press, 2011.

COX, J. C.; ROSS, S. A.; RUBINSTEIN, M. **Option Pricing: A Simplified Approach**. Journal of Financial Economics 1 (1979) 229-263.

CROWN HOLDINGS, INC. (2012) **Annual Report**. [Online] Disponível em <<http://phx.corporate-ir.net/External.File?item=UGFyZW50SUQ9MTc1ODg5fENoaWxkSUQ9LTF8VHlwZT0z&t=1>> [Acessado Abril 2013].

**DAMODARAN ONLINE**. Acesso em 2013 Mai 23. Disponível em: [http://people.stern.nyu.edu/ADAMODAR/New\\_Home\\_Page/datafile/ctryprem.html](http://people.stern.nyu.edu/ADAMODAR/New_Home_Page/datafile/ctryprem.html).

DIAS, M.A.G. Opções Reais Híbridas com Aplicação em Petróleo. **Tese de Doutorado**, Departamento de Engenharia Industrial, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brasil, 509p, 2005.

DIAS, M.A.G.; TEIXEIRA, J.P. Continuous-Time Option Games – Oligopoly, War of Attrition and Bargaining under Uncertainty. Montreal: **Proceedings of the 8th Annual International Conference on Real Options, June 2004**. Versão revisada a ser submetida para publicação.

DIAS, M.A.G.; TEIXEIRA, J.P. Continuous-Time Option Games: Review of Models and Extensions – Duopoly under Uncertainty. Washington: **Proceedings of the 7th Annual International Conference on Real Options, Julho de 2003**. Versão revisada submetida para publicação.

DIXIT, A. K.; PINDYCK R. S. **Investment under Uncertainty**. EUA: Princeton University Press, 1994.

FUDENBERG, D.; TIROLE, J. Pre-emption and Rent Equalization in the Adoption of New Technology. **Review of Economic Studies**, vol.52, 1985, p.383-401.



GREMADIER, S. R. 2002. Options exercise games: An application to the equilibrium investment strategies of firms. **Review of Financial Studies**.

GRENADIER, S.R., (Ed.) **Game Choices – The Intersection of Real Options and Game Theory**. London: Risk Books, 2000a, 395 p.

HUCHZERMEIER, A.; LOCH, C. H. Project Management Under Risk: Using the Real Options Approach to Evaluate Flexibility in R&D. **Management Science**, Vol. 47, No. 1. (2001), pp. 85-101

HUISMAN, K. L. M.; KORT, P. M. Effects of Strategic Interactions on the Option Value of Waiting. **Working Paper**, Tilburg University, September 1999, 41 pgs.

HUISMAN, K.J.M. **Technology Investment: A Game Theoretic Real Options Approach**. Boston: Kluwer Academic Pub., 2001, 259 p.

HULL, J. C. **Option, Futures, and Other Derivatives**. 7. ed. EUA: Pearson Prentice Hall, 2009.

JONES, D.; WILDE, M. Initiating Coverage with a BUY. **Deutsche Bank Markets Research**. 2012.

KIJIMA, M.; KO, S.; SHIBATA, T. Strategic Investment Among Asymmetric Firms in Oligopoly. **15th Annual International Conference** June 15-18, 2011.

LAMBRECHT, B.; PERRAUDIN, W. **Option Games**. Working Paper. Cambridge University e CEPR (UK), August, 1994, 17 p.

LAMBRECHT, B.; PERRAUDIN, W. Real Option and Preemption. **Working Paper**, Cambridge University and Birkbeck College (London) and CEPR, 35pp.

LAMBRECHT, B.; PERRAUDIN, W. Real Options and Preemption under Incomplete Information. **Paper presented at the 3rd Annual International Conference on Real Options**, Wassenaar, The Netherlands, June 1999, version of December 1998, 41 pp.

LEDVINA, A.; SIRCAR, R. Dynamic Bertrand Oligopoly. **Working Paper**, 2011.

LEUNG, C. M.; KWOK, Y. K. Real options game models of R&D competition between asymmetric firms with spillovers. Submitted to **Journal of Economic and Dynamic Control**. 2013.

LIEBERMAN, M. B.; MONTGOMERY, D. B. First Mover Advantages. **Strategic Management Journal**, vol.9, 1988, pp.41-58.

MARTZOUKOS, S. H.; ZACHARIAS, E. Real Option Games with R&D and Learning Spillovers. **MPRA Paper 12686**, 2008, University Library of Munich, Germany.

MUN, J. **Real Option Analysis: tools and techniques for valuing strategic investments and decisions**. EUA: Wiley, 2002.

MYERS, S. C.; TURNBULL, S. M. Capital Budgeting and the Capital Asset Pricing Model: Good News and Bad News. **The Journal of Finance**. New Jersey. Vol. 32, No. 2, 16-18 set. 1976.

NOVY-MARX, R. An Equilibrium Model of Investment under Uncertainty. **Review of Financial Studies**, 2007, 20 (5): 1461-1502.

NOVY-MARX, R. Real Options and Investment in a Dynamic Model of Oligopoly. **Working Paper**, 2007.

PAWLINA, G.; KORT, P. M. Real Options in an Asymmetric Duopoly: Who Benefits from Your Competitive Disadvantage?. **Journal of Economics and Management Strategy**, Vol. 15, No. 1, 03.2006, p. 1-35.

PINDYCK ;R. S., 1999. **The Long-Run Evolutions of Energy Prices**, The Energy Journal, International Association for Energy Economics, vol. 0 (Number 2), pages 1-27.

**PORTALBRASIL.NET**. Acesso em 2013 Mai 23. Disponível em: [http://www.portalbrasil.net/2013/economia/dolar\\_riscopais\\_maio.htm](http://www.portalbrasil.net/2013/economia/dolar_riscopais_maio.htm).

REXAM PLC (2012) **Annual Report**. [Online] Disponível em <[https://www.rexam.com/files/reports/2012ar/files/2012\\_annual\\_report.pdf](https://www.rexam.com/files/reports/2012ar/files/2012_annual_report.pdf)> [Acessado Abril 2013].

SAMANEZ, C. P. **Gestão de Investimentos e Geração de Valor**. São Paulo, Prentice Hall, 2007.

SCHWARTZ, E. S.; TRIGEORGIS, L. **Real Options and Investment under Uncertainty**. Cambridge: The MIT Press, 2001.

SMETS, F.R. **Essays on Foreign Direct Investment**. New Haven (EUA): Doctoral Thesis, Yale University, 1993, 219 p.

SMIT, H. T. J.; TRIGEORGIS, L. Flexibility and Commitment in Strategic Investment. **Working Paper**, Erasmus University and Columbia University, 1996, 45 pp.

SMIT, H. T. J.; TRIGEORGIS, L. Flexibility and Competitive R&D Strategies. **Working Paper**, Erasmus University and Columbia University, 1997, 47 pp.

SMIT, H. T. J.; TRIGEORGIS, L. **Strategic Investment Real Options and Games**. EUA: Princeton University Press, 2004.

SMIT, H. T. J.; TRIGEORGIS, L. Valuing Infrastructure Investment: An Option Games Approach. **California Management Review**, 2004, 52 (2) 79-100.

SMIT, H. T. J.; ANKUM, L. A. A Real Options and Game-Theoretic Approach to Corporate Investment Strategy under Competition. **Financial Management**, Autumn 1993, pp.241-250

SMIT, H.T.J.; ANKUM, L.A. **A Real Options and Game-Theoretic Approach to Corporate Investment Strategy under Competition**. Financial Management, Autumn, 1993, p.241-250

TEIXEIRA, R. B. M. Opções Reais e Teoria de Jogos como Base de Decisões Estratégicas em Empresas do setor de Telecomunicações no Brasil. **Dissertação de Mestrado**, Departamento de Administração, PUC-Rio, Rio de Janeiro, Brasil, 55p.

THIJSEN, J. J. J. Preemption in a real option game with a first mover advantage and player-specific uncertainty. **Journal of Economic Theory** 145 (2010).

THIJSEN, J.J.J. **Investment under Uncertainty, Coalition Spillovers and Market Evolution in a Game Theoretic Perspective**. Dordrecht: Kluwer Academic Pub., 2004, 251 p.

TRIGEORGIS, L. Anticipated Competitive Entry and Early Preemptive Investment in Deferrable Projects. **Journal of Economics and Business**, vol.43, no 2, May 1991, pp.143-156.

TRIGEORGIS, L. **Real Options Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation**. Cambridge: The MIT Press, 1996.

WEEDS, H. Strategic Delay in a Real Options Model of R&D Competition. **Review of Economic Studies**, Aug2002, Vol. 69 Issue 240, p729.

## 8. Apêndice

### 8.1. Valor Esperado do Fator de Desconto Estocástico

Iremos definir o valor esperado do fator de desconto estocástico como:

$$B_t(\tilde{T}) \equiv \hat{E}_t[e^{-r(\tilde{T}-t)}] \quad \forall t \geq 0 \quad 8.1$$

Este fator pode ser usado para converter o valor futuro (recebido em uma data incerta  $\tilde{T}$ ) em termos presente (tempo conhecido  $t$ ).

Para o caso especial de um movimento geométrico browniano, o valor esperado do fator de desconto é igual a:

$$B_t(\tilde{T}) = \left(\frac{X_t}{X_T}\right)^{\beta_1} \quad 8.2$$

Onde:

$$\beta_1 = \frac{1}{2} - \frac{(r - \delta)}{\sigma^2} + \sqrt{\left[\frac{(r - \delta)}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{2r}{\sigma^2}} \quad 8.3$$

### 8.2. Método Integral

Utilizando as propriedades de Markov para um processo de Itô, podemos escrever o VPL de um projeto no tempo-T como:

$$V[X_T] \equiv E_T \left[ \int_T^\infty X_t \cdot e^{-r(t-T)} dt \right] = E_T \left[ \int_T^\infty X_t \cdot B_T(t) dt \right] \quad 8.4$$

E assim, é possível escrever o VPL de um projeto no tempo-0 usando a seguinte notação:

$$\begin{aligned}
 E_0 \left[ \int_0^{\tilde{T}} \tilde{\pi}(\tilde{X}_t) \cdot e^{-rt} dt \right] & \quad \mathbf{8.5} \\
 &= E_0 \left[ \int_0^{\infty} \tilde{\pi}(\tilde{X}_t) \cdot e^{-rt} dt \right] - E_0 \left[ \int_{\tilde{T}}^{\infty} \tilde{\pi}(\tilde{X}_t) \cdot e^{-rt} dt \right] \\
 &= E_0 \left[ \int_0^{\infty} \tilde{\pi}(\tilde{X}_t) \cdot e^{-rt} dt \right] \\
 &\quad - B_0(\tilde{T}) E_T \left[ \int_{\tilde{T}}^{\infty} \tilde{\pi}(\tilde{X}_t) \cdot e^{-r(t-\tilde{T})} dt \right] \\
 &= V_0[\tilde{\pi}] - B_0(\tilde{T}) V_T[\tilde{\pi}]
 \end{aligned}$$