



Yunelsy Nápoles Alvarez

Superfícies Mínimas Completas e Limitadas em \mathbb{R}^3

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Ricardo Sá Earp

Rio de Janeiro
Abril 2015

Yunelsy Nápoles Alvarez

Superfícies Mínimas Completas e Limitadas em \mathbb{R}^3

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Ricardo Sá Earp

Orientador

Departamento de Matemática-PUC-Rio

Profa. Maria Fernanda Elbert

Instituto de Matemática-UFRJ

Prof. Graham Andrew Craig Smith

Instituto de Matemática-UFRJ

Prof. Marcos Craizer

Departamento de Matemática-PUC-Rio

Prof. Rafael Oswaldo Ruggiero Rodriguez

Departamento de Matemática-PUC-Rio

José Eugenio Leal

Coordenador do Centro Técnico Científico
Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

Rio de Janeiro, 14 de abril de 2015

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Yunelsy Nápoles Alvarez

Possui graduação em Matemática pela Universidad Central “Marta Abreu” de las Villas (UCLV), Cuba.

Ficha Catalográfica

Nápoles Alvarez, Yunelsy

Superfícies Mínimas Completas e Limitadas em \mathbb{R}^3 / Yunelsy Nápoles Alvarez; orientador: Ricardo Sá Earp. — Rio de Janeiro: PUC–Rio, Departamento de Matemática, 2015.

v., 180 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Matemática.

Inclui referências bibliográficas.

1. Matemática – Dissertação 2. Imersão mínima conforme. 3. Imersão completa. 4. Conjecturas de Calabi-Yau. 5. Conjectura de Hadamard. 6. Teorema de Runge. 7. Representação de Enneper-Weierstrass. I. Sá Earp, Ricardo. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Matemática. III. Título.

CDD: 510

A minha mãe, meu exemplo a seguir...
A minha filha, a força que me inspira...

Agradecimentos

Gratidão é uma sensação tão agradável, mas dificilmente pode ser percebida entre letras. Porém, quero retribuir com estas linhas, mesmo que um agradecimento não signifique tanto, um pouquinho de todo o bem que recebi daquelas pessoas cuja presença na minha vida influenciaram, direta ou indiretamente, na realização deste sonho.

Em primeiro lugar agradeço a minha mãe por me ensinar que nenhum obstáculo ou dificuldade é insuperável, por me deixar a melhor das heranças: seu amor incondicional, seu caráter, sua força, sua determinação e sua coragem, e por estar presente, com seu exemplo, todos os dias da minha vida.

Ao meu esposo Jorgito, por estar sempre ao meu lado, me apoiar e incentivar, por ser pai e mãe naqueles momentos em que for preciso, e por todas aquelas coisas que não preciso dizer.

Ao meu orientador Ricardo Sá Earp, pelos seus ensinamentos, sua paciência e sua bondade. De forma especial agradeço a sua esposa Maria Magdalena, pela imensa generosidade e o carinho.

Aos meus segundos pais, meus sogros Elizabeth Toranzo e Jorge Carrero, e a minha cunhada-irmã Iveth Carrero, por todos os sacrifícios que fizeram por mim sem os quais este sonho não poderia ter sido realizado.

A minha querida amiga Dania González, por todos os momentos que passamos desde a nossa chegada ao Rio de Janeiro e por toda a sua ajuda. Agradeço também a sua família por ter sempre a minha em suas orações.

Aos meus compadres Meryuri Carlet e Fernando Valdiviezo, e a toda sua família, pela ajuda sincera, pela presença constante e pelo carinho infinito.

Aos amigos que me ajudaram na minha chegada ao Rio, em especial a Adán Corcho, Gerandy Montes de Oca e Mónica Santos.

Aos amigos do portão vermelho, pela convivência agradável, em especial a Ambit Pany, Maria Ines Almeida, Roberto Junior, Ricardo Paleari, Rafael Lucas de Arruda, Leonardo Freitas e Marilene.

Aos amigos da PUC-Rio, pelo apoio, disponibilidade e sugestões oportunas, em especial a Miguel Orrillo, Emília Alves, Vitor Goulart, André Zaccur. De forma muito especial a Marcelo Chaves Silva pois sua ajuda desinteressada foi fundamental.

Ao Departamento de Matemática da PUC-Rio, por terem proporcionado as condições necessárias à concretização deste sonho, em especial a aqueles professores que me aportaram conhecimentos, Rafael Ruggiero, Marcos Craizer, Boyan Sirakov, David Martínez e Padre Paul Schweitzer. Agradeço também a Débora Mondaini e a Sinésio Pesco pela ajuda oportuna.

Às pessoas da Secretaria do referido Departamento pela disposição e atenção dispensados desde minha chegada ao mesmo, especialmente à querida Creuza por manter-me sempre dentro dos prazos.

Aos amigos do grupo de Gravitação e Cosmologia da Universidad Central “Marta Abreu” de las Villas pela amizade e companheirismo. Em especial a Israel Quiros e Tame González pelo apoio incondicional.

Ao CNPq, pelo suporte financeiro sem o qual este sonho seria impossível.

Aos membros da banca por terem aceito o convite.

Às pessoas que não foram citadas neste texto, e que de uma forma ou outra me aportaram muito na minha formação profissional e como ser humano neste período. Vocês estão no meu coração.

“La gratitud, como ciertas flores, no se da en la altura y mejor reverdece en la tierra buena de los humildes.”

José Martí.

Resumo

Nápoles Alvarez, Yunelsy; Sá Earp, Ricardo. **Superfícies Mínimas Completas e Limitadas em \mathbb{R}^3** . Rio de Janeiro, 2015. 180p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Há alguns anos temos visto um grande progresso na resolução de problemas antigos na teoria das superfícies mínimas. Dentre esse problemas estão as conjecturas de Calabi-Yau, que datam dos anos 60 do século passado. A primeira delas afirmava que não existiam superfícies mínimas completas contidas em uma bola de \mathbb{R}^3 , e a segunda que todas as superfícies mínimas completas tinham uma projeção ilimitada em cada eixo. Neste trabalho pretendemos revisar dois exemplos que mostram a falsidade da segunda conjectura. O primeiro foi dado por L. P. Jorge e F. Xavier (1980), e o segundo por H. Rosenberg e E. Toubiana (1987). A primeira conjectura também é falsa. O primeiro contraexemplo foi dado por N. Nadirashvili (1996) e também constitui um contraexemplo da conjectura de Hadamard, que afirmava que não existiam superfícies completas limitadas com curvatura Gaussiana negativa. O desenvolvimento do artigo de Nadirashvili é o principal objetivo desta dissertação. A técnica usada nestes três trabalhos é o uso da Representação de Enneper-Weierstrass, combinada com aplicações adequadas do Teorema de Runge.

Palavras-chave

Imersão Mínima Conforme; Imersão Completa; Conjecturas de Calabi-Yau; Conjectura de Hadamard; Teorema de Runge; Representação de Enneper-Weierstrass.

Abstract

Nápoles Alvarez, Yunelsy; Sá Earp, Ricardo (Advisor). **Complete Bounded Minimal Surfaces in \mathbb{R}^3** . Rio de Janeiro, 2015. 180p. MSc. Dissertation — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

During some years we have seen great progress in solving old problems in minimal surfaces theory. Among these problems are the Calabi-Yau's conjectures, dating from the 60s of last century. The first one stated that there were no complete minimal surfaces contained in a ball of \mathbb{R}^3 , and the second one that all complete minimal surface should have an unbounded projection in each axes. In this work we pretend to review two examples that proof the falsity of the second conjecture. The first one was given by L. P. Jorge e F. Xavier (1980) and the second one by H. Rosenberg e E. Toubiana (1987). The first conjecture is also false. The first counterexample was given by N. Nadirashvili (1996) and it is also a counterexample to the conjecture of Hadamard, which stated that there were no complete bounded surfaces with negative Gaussian curvature. Development of Nadirashvili's article is the main objective of this dissertation. The technique used in these three works is the use of the Enneper-Weierstrass Representation, combined with appropriate applications of Runge's theorem.

Keywords

Minimal Conformal Immersion; Complete Immersion; Calabi-Yau Conjectures; Hadamard Conjecture; Runge Theorem; Enneper-Weierstrass Representation.

Resumen

Nápoles Alvarez, Yunelsy; Sá Earp, Ricardo (Tutor). **Superficies Minimales Completas e Acotadas en \mathbb{R}^3** . Rio de Janeiro, 2015. 180p. Tesis de Maestría — Departamento de Matemática, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Desde hace algunos años hemos visto un gran progreso en la solución de problemas antiguos en la teoría de las superficies minimales. Dentro de esos problemas están las conjeturas de Calabi-Yau, que datan de los años 60 del siglo pasado. La primera de ellas afirmaba que no existían superficies minimales completas contenidas en una bola de \mathbb{R}^3 , y la segunda que todas las superficies minimales completas deberían tener una proyección no acotada en cada eje. En este trabajo pretendemos revisar dos ejemplos que muestran la falsedad de la segunda conjetura. El primero fue dado por L. P. Jorge y F. Xavier (1980), y el segundo por H. Rosenberg y E. Toubiana (1987). La primera conjetura también es falsa. El primer contraejemplo fue dado por N. Nadirashvili (1996) y también constituye un contraejemplo de la conjetura de Hadamard, que afirmaba que no existían superficies completas acotadas con curvatura Gaussiana negativa. El desarrollo del artículo de Nadirashvili es el principal objetivo de esta disertación. La técnica utilizada en estos tres trabajos es el uso de la Representación de Enneper-Weierstrass, combinada con aplicaciones adecuadas de el Teorema de Runge.

Palabras claves

Inmersión Minimal Conforme; Inmersión Completa; Conjeturas de Calabi-Yau; Conjetura de Hadamard; Teorema de Runge; Representación de Enneper-Weierstrass.

Sumário

Lista de Figuras	11
1 Introdução	13
2 Os conceitos de imersão conforme, mínima e completa	18
2.1 Superfícies parametrizadas e imersas	18
2.2 Imersão conforme	27
2.3 Imersão Mínima	30
2.4 Imersão completa	46
3 Representação de Enneper-Weierstrass	47
3.1 Quantidades geométricas em termos dos dados de Weierstrass	58
4 Superfícies mínimas completas em \mathbb{R}^3 entre planos paralelos: Teoremas de Jorge-Xavier e Rosenberg-Toubiana	67
4.1 Construção sobre um disco de Jorge e Xavier	67
4.2 Construção sobre um anel de Rosenberg e Toubiana	71
5 Superfícies mínimas completas em \mathbb{R}^3 contidas em uma bola: Teorema de Nadirashvili	79
5.1 Lema Principal	79
5.2 Demonstração do Teorema de Nadirashvili	114
Referências Bibliográficas	119
Índice Remissivo	121
A Noções de Geometria Diferencial	126
A.1 Curvas Parametrizadas em \mathbb{R}^3	126
A.2 Superfícies em \mathbb{R}^3	129
A.3 Plano Tangente à Superfície	134
A.4 Primeira forma fundamental	135
A.5 Segunda forma fundamental	138
A.6 Outras quantidades geométricas	142
A.7 Superfícies regulares completas	146
B Noções de Análise Complexo e o Teorema de Runge	148
B.1 Funções holomorfas	148
B.2 Equações de Cauchy-Riemann	149
B.3 O Operador Laplaciano Complexo	151
B.4 Integrais Complexas	152
B.5 Outros teoremas importantes	170
B.6 Teorema de Runge e consequências	170

Lista de Figuras

1.1	O catenoide.	13
1.2	O helicoides.	14
1.3	Superfície de Scherk.	15
1.4	O catenoide como uma bolha de sabão.	15
1.5	Superfície de Enneper.	16
2.1	Superfície imersa em \mathbb{R}^3 .	18
2.2	Gráfico de uma função diferenciável.	19
2.3	A superfície de Enneper como uma superfície não mergulhada.	22
2.4	O catenoide obtido pela rotação da catenária ao redor do eixo x_3 .	23
2.5	O helicoides como uma superfície regrada.	25
2.6	Superfície de Scherk sobre um quadrado.	41
2.7	Superfície de Scherk sobre um tabuleiro de Xadrez.	41
3.1	Interpretação geométrica da função g .	60
4.1	Os conjuntos K_n e K_{n+1} .	68
4.2	Os conjuntos K_n , K_{n+1} , L_n e L_{n+1} .	74
5.1	O conjunto $\Omega_N^{m,n}$ para m e n fixados.	81
5.2	Outras componentes conexas de Ω_N obtidas variando m .	81
5.3	Outras componentes conexas de Ω_N obtidas variando n .	82
5.4	O conjunto ω_k para k fixado.	83
5.5	Distribuição dos conjuntos ω_{k-1} , ω_k e ω_{k+1} .	83
5.6	Curva em ϖ_k com comprimento menor que $\frac{10}{N}$.	84
5.7	Curva no anel $C(S_{2i+2}, S_{2i})$ contida num arco de ângulo θ .	84
5.8	Curva no anel $C(S_{2i+2}, S_{2i})$ com comprimento menor que $\frac{1}{N}$.	85
5.9	Restrição da curva γ que liga a origem a \mathbb{S}^1 ao anel $C(S_{2i+2}, S_{2i})$.	86
5.10	Restrição da curva γ_i que atravessa a componente $\Omega_N^{m,n}$.	87
5.11	Projeção plana do conjunto $N_{j-1}(\varpi_j)$.	93
5.12	Ângulo entre os pontos p e q de \mathcal{F} .	94
5.13	Distância entre o conjunto $N_{j-1}(\varpi_j)$ e os polos Norte e Sur.	95
5.14	Distância em \mathbb{S}^2 entre $N_j(z)$ e $N_{j-1}(z)$ para $z \in \mathbb{D} \setminus \varpi_j$.	101
5.15	F_{j-1} na base B_j .	102
5.16	Curva em ϖ_k com comprimento menor que $1 + \frac{\pi}{N}$.	106
5.17	Curva que liga a origem a um ponto $z \in \varpi_j$.	108
A.1	Polígono inscrito na curva $\alpha(t)$ com vértices em $\alpha(t_i)$.	127
A.2	Projeção estereográfica desde o polo norte.	131
A.3	Plano tangente à superfície num ponto.	134
A.4	Área do paralelogramo retilíneo em $T_{p_{ij}}S$.	137
A.5	Aplicação Normal de Gauss.	139
A.6	Curvatura normal.	142
B.1	A união dos segmentos γ_n quando K é simplesmente conexo.	171
B.2	A união dos segmentos γ_n quando K não é simplesmente conexo.	172

*Deus é o Geômetra Onipotente para quem
o mundo é imenso problema matemático.*

Leibniz

1

Introdução

A teoria das superfícies mínimas é um dos temas clássicos de estudo na Geometria Diferencial. Os primeiros passos foram dados por Euler [1] no ano 1744. O objetivo principal era encontrar os comprimentos máximos e mínimos de curvas satisfazendo certas condições de fronteira, descobrindo uma superfície obtida pela rotação da catenária. Ele chamou esta superfície de *alysseide* mas hoje é conhecida pelo nome de catenoide.

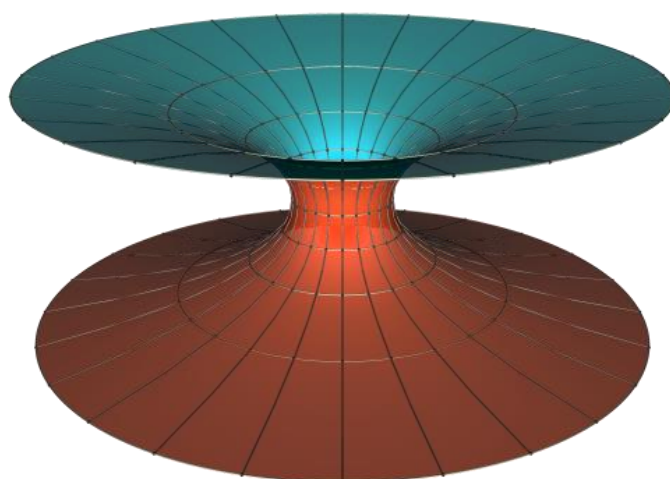


Figura 1.1: O catenoide.

Já em 1760, estendendo os resultados de Euler, Lagrange [2] propôs o problema seguinte: dada uma curva fechada sem autointerseções, achar uma superfície com a menor área dentre todas as que tem esta curva como bordo. Lagrange apresentou este problema como exemplo de um método desenvolvido por ele para achar curvas ou superfícies que minimizassem certas quantidades, tais como área, comprimento, energia, etc. Estes métodos constituem hoje o chamado Cálculo das Variações. Como primeiro passo, restringiu seu estudo às superfícies obtidas como gráfico de uma função f e mostrou que os gráficos com esta característica deviam satisfazer a equação diferencial

$$\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u_2}\right)^2\right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2}\right) - 2 \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2} + \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)^2\right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2}\right) = 0. \quad (1.1)$$

Lagrange percebeu que o plano satisfazia esta equação, mas não se preocupou por encontrar soluções não triviais da mesma. Foi Meusnier em 1776 quem deu um outro exemplo de superfície mínima, o helicóide, vista primeiramente como sendo o gráfico da função

$$f(x_1, x_2) = \arctan \frac{x_2}{x_1}, \quad x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad x_2 \neq 0.$$

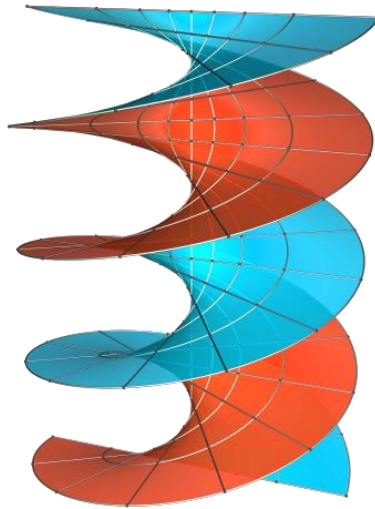


Figura 1.2: O helicóide.

Ele também comprovou que o catenoide satisfazia esta equação (embora tinha sido descoberta por Euler), olhando o semicatenóide como o gráfico da função

$$f(x_1, x_2) = a \cosh \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{a} \right).$$

Meusnier [3] também interpretou geometricamente esta equação, observando que em cada ponto de uma superfície de área mínima as duas curvaturas principais são iguais e opostas, ou seja, o que hoje conhecemos como curvatura média é identicamente nula. A partir deste momento se costuma definir uma superfície mínima como aquelas que tem curvatura média identicamente nula sobre a superfície, mas nem sempre as mesmas representam um mínimo global do funcional da área, porém são um mínimo local da área.

Devido à dificuldade de resolver a equação (1.1) (é uma equação diferencial parcial de segunda ordem, quasilinear e elíptica), não surgiram outros exemplos de superfícies mínimas no século XVIII. Em 1834, quase sessenta

anos depois do descobrimento do catenoide e do helicóide, H. F. Scherk [4] mostrou novos exemplos, o mais famoso é a chamada superfície de Scherk.

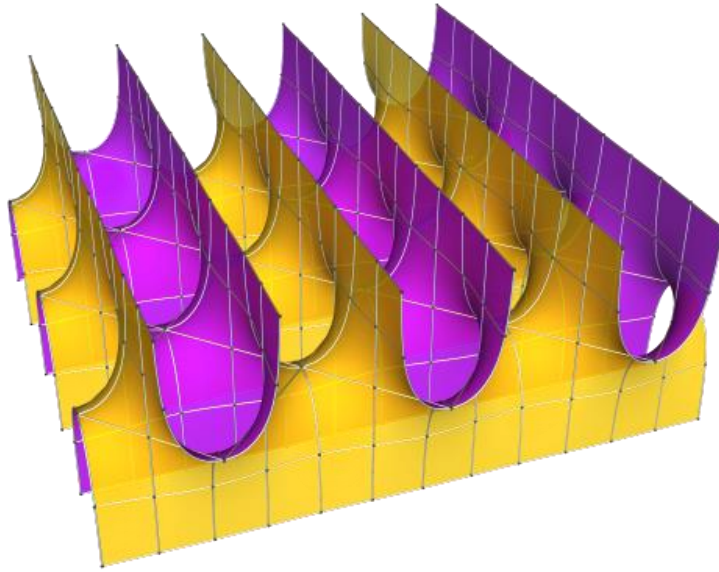


Figura 1.3: Superfície de Scherk.

Por este tempo, entre 1843 e 1869, o físico belga Joseph A. F. Plateau, realizou experiências com películas de líquido, em especial, bolhas de sabão (veja figura 1.4), sob a ação da tensão superficial. A ideia era tomar um contorno C e mergulhar em água com sabão. A superfície desejada é a representada pela película de sabão que aparece. A explicação física para que estas superfícies assim obtidas minimizem a área é uma lei conhecida como Princípio de Mínima Ação, que implica que as partículas da bolha de sabão irão se dispor sobre a superfície de modo a minimizar energia e, conseqüentemente, a área. Desde então este tipo de problema ficou conhecido como *Problema de Plateau*.

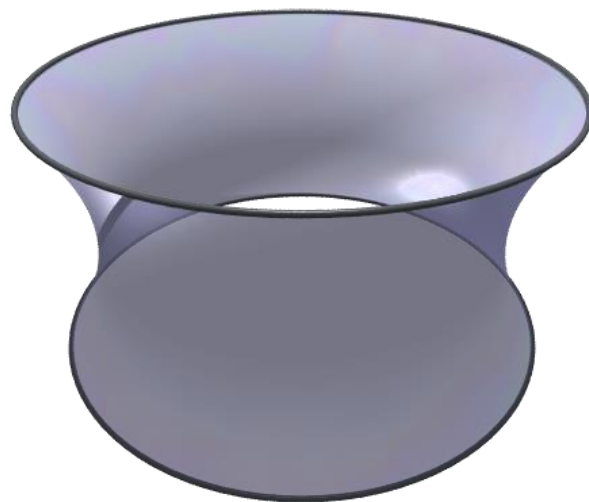


Figura 1.4: O catenoide como uma bolha de sabão.

Em 1860, Weierstrass fez um importante avanço na teoria das superfícies mínimas, obtendo fórmulas de representação para estas superfícies usando a análise complexa. Ele expôs sua teoria no seminário matemático da Universidade de Berlin em 1861 que foi publicada no ano 1866 em [5]. De forma independente, em 1864, Enneper [6] deu umas fórmulas equivalentes. Como uma aplicação muito simples de ditas fórmulas, Enneper descobriu um novo exemplo de superfície mínima, conhecida hoje em dia como Superfície de Enneper.

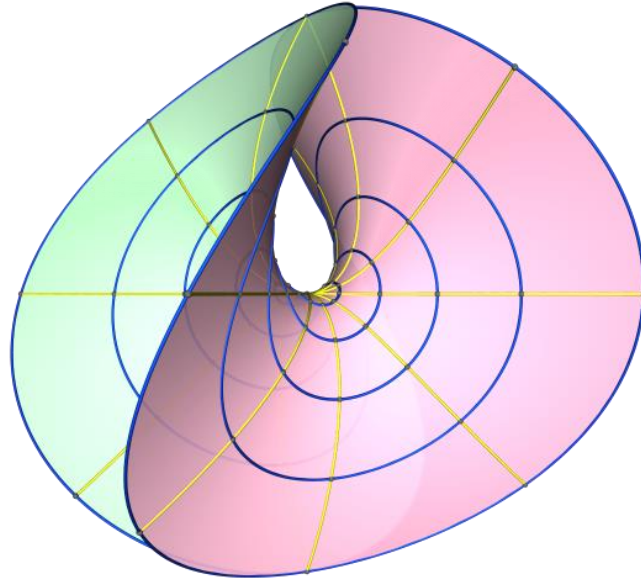


Figura 1.5: Superfície de Enneper.

Estas fórmulas de representação são as chamadas *Representação de Enneper-Weierstrass* (ou Representação de Weierstrass) de uma superfície mínima e será uma ferramenta fundamental para esta dissertação. Na segunda metade do século passado Robert Osserman, recuperou esta teoria esquecida, mostrando sua utilidade e importância no estudo das superfícies mínimas completas. Para o estudo e compreensão desta teoria nos baseamos no seu livro [7], e os resultados que usaremos serão expostos no capítulo 3.

Nos anos 60s, todos os exemplos existentes de superfícies mínimas completas não planas (catenoide, helicoides, exemplos de Riemann, ...), tinham as três funções coordenadas não limitadas. Isto motivou a E. Calabi [8] a propor duas conjecturas no ano 1965, que posteriormente foram incluídas na lista de problemas [9] proposta por S. T. Yau. As mesmas são chamadas conjecturas de Calabi-Yau.

Conjectura 1 (Calabi-Yau). *Não existem superfícies mínimas completas em \mathbb{R}^3 contidas em uma bola.*

Conjectura 2 (Calabi-Yau). *Uma superfície mínima completa em \mathbb{R}^3 tem uma projeção ilimitada em cada eixo.*

As duas conjecturas resultaram ser falsas. O primeiro exemplo de superfície mínima completa com uma coordenada limitada foi dado por L. P. Jorge and F. Xavier [10] no ano 1980. A mesma estava contida entre dois planos paralelos. Outros exemplos de superfícies mínimas entre dois planos paralelos surgiram posteriormente. Um deles é o exemplo que H. Rosenberg e E. Toubiana [11] obtiveram no ano 1987. Estes exemplos são contraexemplos da conjectura 2, e serão estudado no capítulo 4.

O argumento que Jorge e Xavier introduziram foi muito sagaz, e tem sido muito usado na maioria dos artigos dedicados estes temas. A ideia era acumular um labirinto de conjuntos compactos na fronteira do disco e aplicar o Teorema de Runge para obter a completude. Em 1996, N. Nadirashvili [12] usou esta ideia, mas de uma forma bem mais elaborada, para encontrar uma superfície mínima completa contida em uma bola de \mathbb{R}^3 , sendo este o primeiro contraexemplo à conjectura 1. Este exemplo também tem curvatura gaussiana estritamente negativa, constituindo também um contraexemplo à Conjectura de Hadamard.

Conjectura 3 (Hadamard). *Não existem superfícies completas e limitadas com curvatura Gaussiana estritamente negativa.*

O principal objetivo do presente trabalho é discutir em detalhes o exemplo de Nadirashvili, que será feito no capítulo 5. Para isto vamos introduzir os conceitos de imersão mínima, conforme e completa no capítulo 2. Outros argumentos necessários para a compreensão destes exemplos, como o teorema de Runge e consequências, podem ser encontradas no apêndice B. As definições básicas de geometria diferencial podem ser encontradas no apêndice A.

Devemos assinalar que a busca por exemplos que refutam estas conjecturas não terminou com o exemplo de Nadirashvili. Tem outros exemplos como o trabalho [13] de Francisco Martín e Santiago Morales. Mais especificamente, eles mostraram que existe uma superfície mínima completa e limitada em \mathbb{R}^3 onde o domínio da imersão é conformemente equivalente a um anel.

Finalmente devemos dizer que os exemplos mostrados não são as únicas superfícies mínimas, tem outros com um grau de maior dificuldade como pode ser visto em <http://www.indiana.edu/~minimal/archive/Classical/index.html>, onde foram tomadas as figuras desta introdução.

Neste capítulo serão apresentados os conceitos básicos sobre Geometria Diferencial necessários para o desenvolvimento dos objetivos propostos.

2.1

Superfícies parametrizadas e imersas

Definição 2.1. Definimos uma *superfície parametrizada* como sendo uma aplicação diferenciável $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio. Se a diferencial $dX_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva em cada $q \in \Omega$, dizemos que X é uma *imersão* do domínio Ω em \mathbb{R}^3 . Se, além disso, X for um homeomorfismo com a sua imagem, então X é chamada de *mergulho*.

É usual chamar a imagem $S = X(\Omega)$ (veja figura 2.1) de *superfície parametrizada*, e quando X for uma imersão ou um mergulho, de *superfície imersa* ou *superfície mergulhada*, respectivamente.

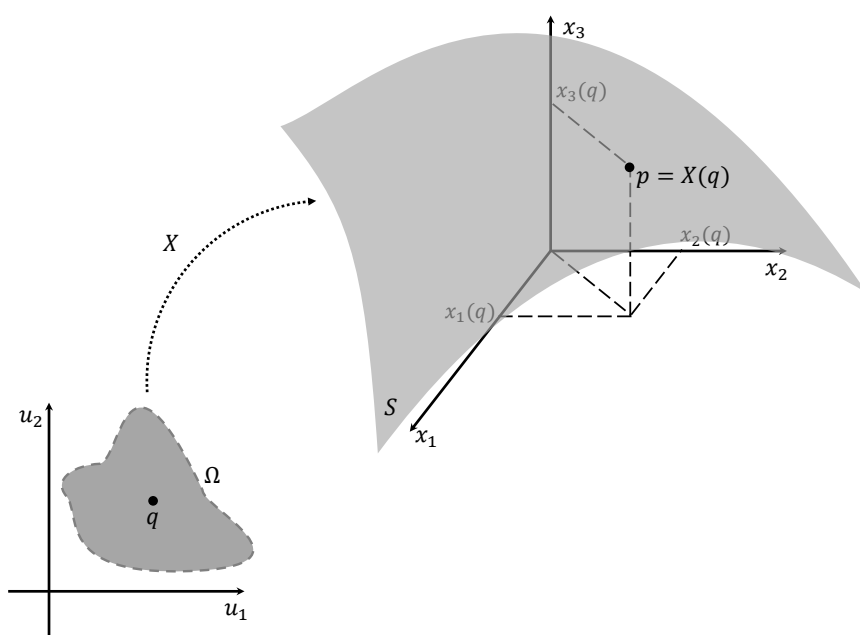


Figura 2.1: Superfície imersa em \mathbb{R}^3 .

No que segue vamos considerar a aplicação na forma

$$\begin{aligned} X : \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u_1, u_2) &\longmapsto (x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2)). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Exemplo 2.1 (Gráfico de uma função diferenciável). O gráfico de uma função diferenciável $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (veja figura 2.2) é o conjunto

$$Gr(f) = \{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)); (x_1, x_2) \in \Omega\}.$$

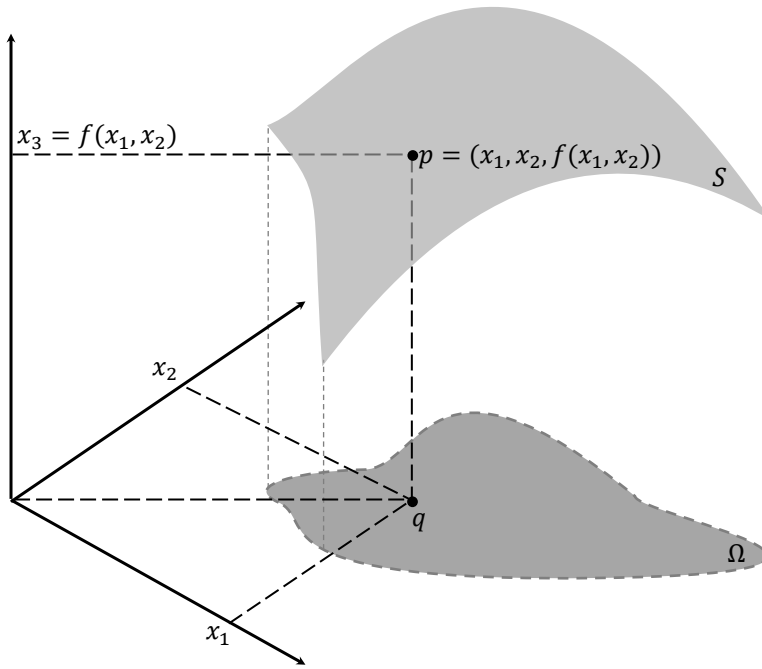


Figura 2.2: Gráfico de uma função diferenciável.

Então uma parametrização natural deste conjunto é

$$\begin{aligned} X : \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u_1, u_2) &\longmapsto (u_1, u_2, f(u_1, u_2)). \end{aligned}$$

Além disso, como $\frac{\partial X}{\partial u_1} = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u_1}\right)$ e $\frac{\partial X}{\partial u_2} = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial u_2}\right)$ são linearmente independentes, X é uma imersão. Mais ainda, X é um homeomorfismo com a sua imagem, logo, um mergulho.

No caso que a imersão não seja um mergulho temos uma superfície com auto-interseções como pode ser apreciado no seguinte exemplo.

Exemplo 2.2 (Superfície de Enneper). A superfície de Enneper é a imagem da parametrização

$$\begin{aligned} X : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u_1, u_2) &\longmapsto \left(u_1 + u_1 u_2^2 - \frac{u_1^3}{3}, -u_2 - u_1^2 u_2 + \frac{u_2^3}{3}, u_1^2 - u_2^2 \right). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Esta é uma superfície imersa pois os determinantes jacobianos associados não se anulam simultaneamente. De fato,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)} &= \det \begin{pmatrix} 1 - u_1^2 + u_2^2 & 2u_1 u_2 \\ -2u_1 u_2 & -1 - u_1^2 + u_2^2 \end{pmatrix} \\ &= (1 - u_1^2 + u_2^2)(-1 - u_1^2 + u_2^2) - (-4u_1^2 u_2^2) \\ &= (1 + u_1^2 + u_2^2)(u_1^2 + u_2^2 - 1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x_1, x_3)}{\partial(u_1, u_2)} &= \det \begin{pmatrix} 1 - u_1^2 + u_2^2 & 2u_1 u_2 \\ 2u_1 & -2u_2 \end{pmatrix} \\ &= (1 - u_1^2 + u_2^2)(-2u_2) - 2u_1(2u_1 u_2) \\ &= -2u_2(1 + u_1^2 + u_2^2), \end{aligned}$$

e,

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(u_1, u_2)} &= \det \begin{pmatrix} -2u_1 u_2 & -1 - u_1^2 + u_2^2 \\ 2u_1 & -2u_2 \end{pmatrix} \\ &= 4u_1 u_2^2 - 2u_1(-1 - u_1^2 + u_2^2) \\ &= 2u_1(1 + u_1^2 + u_2^2). \end{aligned}$$

Assim, $\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)}, \frac{\partial(x_1, x_3)}{\partial(u_1, u_2)}, \frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(u_1, u_2)}$ se anulam simultaneamente se, e somente se,

$$u_1^2 + u_2^2 = 1 \quad \text{e} \quad u_1 = u_2 = 0$$

o que é impossível.

Por outro lado, tal superfície possui autointersecções sobre duas curvas. De fato, fazendo a mudança

$$u_1 = \rho \cos \theta \quad \text{e} \quad u_2 = \rho \sin \theta,$$

obtemos,

$$\begin{aligned}
X(\rho, \theta) &= \left(\rho \cos \theta - \frac{\rho^3}{3} \cos^3 \theta + \rho \cos \theta (\rho^2 \sin^2 \theta), \right. \\
&\quad \left. -\rho \sin \theta - \rho^2 \cos^2 \theta (\rho \sin \theta) + \frac{\rho^3}{3} \sin^3 \theta, \rho^2 \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^2 \theta \right) \\
&= \left(\rho \cos \theta - \frac{\rho^3}{3} (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta), \right. \\
&\quad \left. -\rho \sin \theta - \frac{\rho^3}{3} (-\sin^3 \theta + 3 \cos^2 \theta \sin \theta), \rho^2 \cos 2\theta \right) \\
&= \left(\rho \cos \theta - \frac{\rho^3}{3} \cos 3\theta, -\rho \sin \theta - \frac{\rho^3}{3} \sin 3\theta, \rho^2 \cos 2\theta \right).
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
x_1(\rho, \theta)^2 + x_2(\rho, \theta)^2 &= \left(\rho \cos \theta - \frac{\rho^3}{3} \cos 3\theta \right)^2 + \left(-\rho \sin \theta - \frac{\rho^3}{3} \sin 3\theta \right)^2 \\
&= \rho^2 + \frac{\rho^6}{9} - \frac{2}{3} \rho^4 (\cos \theta \cos 3\theta - \sin \theta \sin 3\theta) \\
&= \rho^2 + \frac{\rho^6}{9} - \frac{2}{3} \rho^4 \cos 4\theta \\
&= \rho^2 + \frac{2}{3} \rho^4 + \frac{\rho^6}{9} - \frac{2}{3} \rho^4 - \frac{2}{3} \rho^4 \cos 2\theta \\
&= \left(\rho + \frac{\rho^3}{3} \right)^2 - \frac{2}{3} \rho^4 (1 + \cos 4\theta) \\
&= \left(\rho + \frac{\rho^3}{3} \right)^2 - \frac{4}{3} \rho^4 \cos^2 2\theta.
\end{aligned}$$

Assim, se

$$X(\rho_1, \theta_1) = X(\rho_2, \theta_2), \quad (2.3)$$

então

$$\rho_1^2 \cos 2\theta_1 = \rho_2^2 \cos 2\theta_2, \quad (2.4)$$

$$\left(\rho_1 + \frac{\rho_1^3}{3} \right)^2 - \frac{4}{3} \rho_1^4 \cos^2 2\theta_1 = \left(\rho_2 + \frac{\rho_2^3}{3} \right)^2 - \frac{4}{3} \rho_2^4 \cos^2 2\theta_2. \quad (2.5)$$

Substituindo (2.4) em (2.5) obtemos

$$\rho_1 + \frac{\rho_1^3}{3} = \rho_2 + \frac{\rho_2^3}{3} \implies \rho_1 = \rho_2 = \rho,$$

e substituindo em (2.4) obtemos $\cos \theta_1 = \cos \theta_2$. Isto implica que $\theta_1 = \theta_2$ ou $\theta_1 = 2\pi - \theta_2$. Se, por exemplo, $\theta_1 = 2\pi - \theta_2$, de (2.3) se têm

$$x_2(\rho, 2\pi - \theta_2) = x_2(\rho, \theta_2),$$

ou seja,

$$-\rho \sin \theta_2 - \frac{\rho^3}{3} \sin 3\theta_2 = -\rho \sin(2\pi - \theta_2) - \frac{\rho^3}{3} \sin 3(2\pi - \theta_2).$$

Daí,

$$-\rho \sin \theta_2 - \frac{\rho^3}{3} \sin 3\theta_2 = \rho \sin \theta_2 + \frac{\rho^3}{3} \sin 3\theta_2,$$

e, portanto,

$$\rho \sin \theta_2 + \frac{\rho^3}{3} \sin 3\theta_2 = 0.$$

Ou seja, os pontos (ρ_1, θ_1) e (ρ_2, θ_2) pertencem à curva

$$\sin \theta + \frac{\rho^2}{3} \sin 3\theta = 0. \quad (2.6)$$

Por outro lado,

$$x_1(\rho, 2\pi - \theta) = \rho \cos(2\pi - \theta) - \frac{\rho^3}{3} \cos 3(2\pi - \theta) = \rho \cos \theta - \frac{\rho^3}{3} \cos 3\theta = x_1(\rho, \theta)$$

e

$$x_3(\rho, 2\pi - \theta) = \rho^2 \cos 2(2\pi - \theta) = \rho^2 \cos 2\theta = x_3(\rho, \theta).$$

Portanto, os pontos que pertencem à curva dada por (2.6) (que é a intersecção da superfície com o plano $x_2 = 0$) é uma curva de autointersecções de superfície.

Analogamente pode-se mostrar que a intersecção da superfície com o plano $x_1 = 0$ também é uma curva de autointersecções. Podemos ver como de fato existem intersecções na figura 2.3.

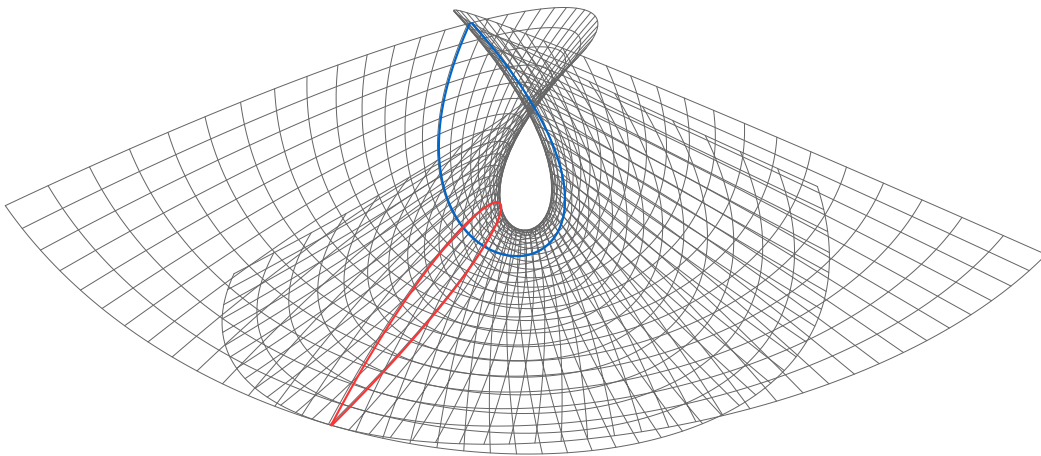


Figura 2.3: A superfície de Enneper como uma superfície não mergulhada.

Observação. A noção de imersão que estamos trabalhando não é a mais geral. A mesma é referida a uma aplicação $\phi : M \rightarrow N$, onde M e N são variedades diferenciáveis de dimensões m e n , respectivamente, $m \leq n$, tal que a diferencial $d\phi_q$ é injetiva em todo ponto $q \in M$. Se, além disto, ϕ é um homeomorfismo sobre $\phi(M) \subset N$, onde $\phi(M)$ tem a topologia induzida por N , diz-se que ϕ é um mergulho. Se $M \subset N$ e a inclusão $i : M \rightarrow N$ é um mergulho, diz-se que M é uma subvariedade de N de dimensão m . Estes conceitos mais gerais não serão necessários para o desenvolvimento deste trabalho (veja [14]).

2.1.1 Superfícies de Revolução

As superfícies de revolução são obtidas ao girarmos uma curva regular plana e conexa em torno de um eixo no plano que não intersecta a curva. Vamos considerar o plano $x_1 = 0$ como o plano que contém a curva e o eixo x_3 como o eixo de rotação. Se a parametrização da curva está dada por

$$x_2(t) = f(t), \quad x_3(t) = g(t), \quad a < t < b, \quad f(t) > 0,$$

então obtemos a aplicação

$$X(u_1, u_2) = (f(u_2) \cos u_1, f(u_2) \sin u_1, g(u_2)),$$

que é uma parametrização destas superfícies com domínio $[0, 2\pi] \times (a, b)$.

Exemplo 2.3 (O Catenoide). O catenoide é a superfície gerada pela rotação da catenária $x_2 = a \cosh\left(\frac{x_3}{a}\right)$, $a > 0$ em torno do eixo x_3 (veja figura 2.4).

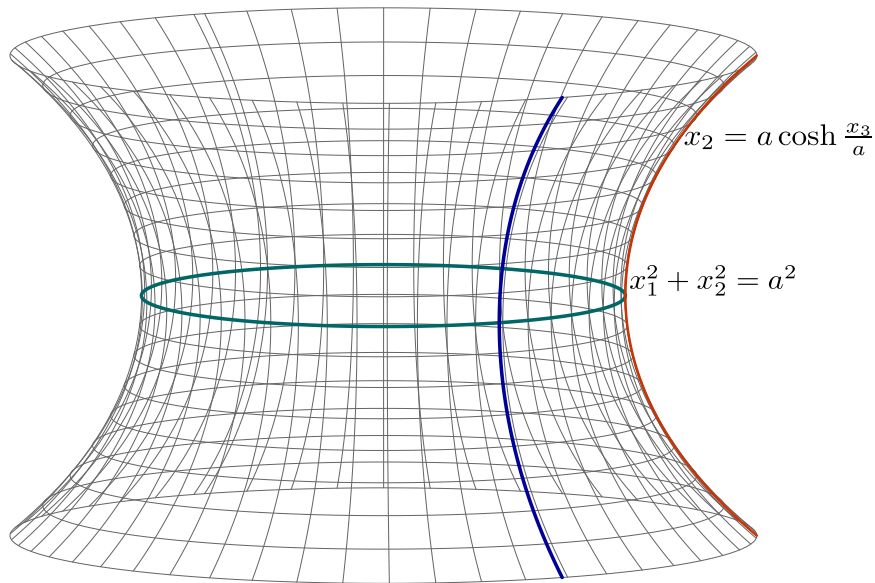


Figura 2.4: O catenoide obtido pela rotação da catenária ao redor do eixo x_3 .

Fazendo $u_2 = \frac{x_3}{a}$, ele é a imagem da aplicação

$$X(u_1, u_2) = (a \cosh u_2 \cos u_1, a \cosh u_2 \sin u_1, au_2).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u_1} &= (-a \cosh u_2 \sin u_1, a \cosh u_2 \cos u_1, 0) \\ \frac{\partial X}{\partial u_2} &= (a \sinh u_2 \cos u_1, a \sinh u_2 \sin u_1, a). \end{aligned}$$

Como a é positivo, $\frac{\partial X}{\partial u_1}$ e $\frac{\partial X}{\partial u_2}$ são linearmente independentes e, portanto, X é uma imersão. Logo, o catenoide é uma superfície imersa. Mostra-se neste caso que a inclusão é um mergulho, portanto, o catenoide é uma subvariedade de dimensão 2 de \mathbb{R}^3 .

2.1.2

Superfícies Regradas

As superfícies regradas são aquelas que tem a propriedade de que por cada um dos seus pontos passa uma reta que está inteiramente contida na superfície. Para ver isto, consideremos uma família diferenciável a 1-parâmetro de retas $\{\gamma(t), w(t)\}$; esta família é uma correspondência que associa a cada $t \in \mathbb{R}$ um ponto $\gamma(t) \in \mathbb{R}^3$ e um vetor $w(t) \in \mathbb{R}^3$, $w(t) \neq 0$, tais que ambos sejam diferenciáveis em t . Para cada $t \in J$, a reta L_t passando por $\gamma(t)$ e com vetor diretor $w(t)$ é chamada a reta da família em t . Uma superfície regradada é a imagem da parametrização

$$X(u_1, u_2) = \gamma(u_1) + u_2 w(u_1), \quad u_1 \in J, \quad u_2 \in R,$$

donde $\{\gamma(t), w(t)\}$ é a família a 1-parâmetro geradora da superfície. As curvas coordenadas $u_1 = \text{cte}$ são retas ou segmentos de retas chamadas de geratrizes (o vetor diretor da reta $w(t)$ é também chamado de geratriz), enquanto a curva $\gamma(t)$ é chamada de diretriz. Deve-se observar que estamos admitindo que existem pontos onde a diferencial não é injetiva. Um exemplo de superfície regradada é o helicóide.

Exemplo 2.4 (O helicóide). Vamos considerar a hélice de passo a sobre o cilindro $x_1^2 + y_1^2 = 1$, ou seja, $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, at)$. O parâmetro t mede o ângulo que o eixo x_1 faz com a reta que liga a origem à projeção do ponto $\alpha(t)$ sobre o plano $x_3 = 0$. Para cada ponto da hélice vamos considerar a reta r_t paralela ao plano $x_3 = 0$ que intersecta o eixo x_3 no ponto $p(t) = (0, 0, x_3(t))$.

A superfície gerada por essas retas é chamada de helicóide e pela própria construção podemos ver que é uma superfície regrada.

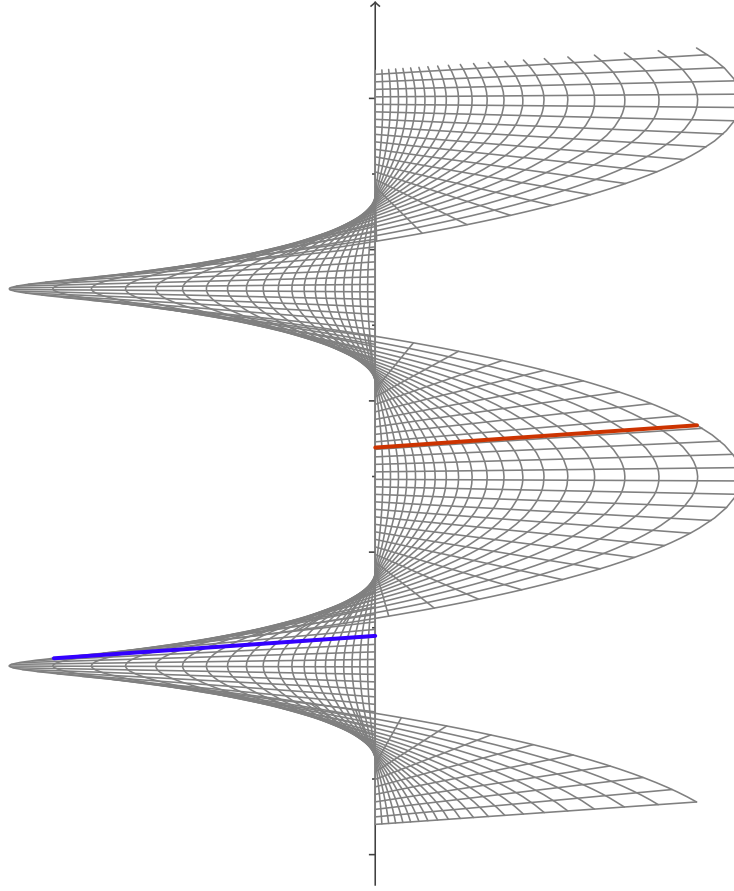


Figura 2.5: O helicóide como uma superfície regrada.

Para encontrar a parametrização do helicóide, vamos observar que $w(t) = \alpha(t) - p(t)$ é um vetor diretor de r_t e, como a reta é horizontal, então $w(t)$ é ortogonal ao vetor $e_3 = (0, 0, 1)$, assim, $\langle w, e_3 \rangle = 0$, o que implica que $p(t) = (0, 0, at)$, e $w(t) = (\cos t, \sin t, 0)$. Logo, se $k \in \mathbb{R}$, uma parametrização de r_t é

$$r_t(k) = p(t) + kw(t) = (k \cos t, k \sin t, at),$$

e assim, variando t , obtemos uma parametrização do helicóide como uma superfície regrada, ou seja,

$$\begin{aligned} X : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u_1, u_2) &\longmapsto (u_2 \cos u_1, u_2 \sin u_1, au_1), \end{aligned} \tag{2.7}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u_1} &= (-u_2 \cos u_1, u_2 \sin u_1, au_1) \\ \frac{\partial X}{\partial u_2} &= (\cos u_1, \sin u_1, 0). \end{aligned}$$

Portanto, como

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2} &= \det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -u_2 \sin u_1 & u_2 \cos u_1 & a \\ \cos u_1 & \sin u_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-a \sin u_1, a \cos u_1, -u_2 \sin^2 u_1 - u_2 \cos^2 u_1) \\ &= (-a \sin u_1, a \cos u_1, -u_2),\end{aligned}$$

então,

$$\left\| \frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\| = a^2 + u_2^2 > 0$$

logo, X é uma imersão. O helicóide também é uma subvariedade de \mathbb{R}^3 .

Observação 2.1. Como pode ser apreciado na figura 2.5, o helicóide é periódico no eixo x_3 pois as primeiras coordenadas são funções periódicas com período 2π . Logo, esta superfície é a união de todas as translações inteiras no eixo x_3 da superfície $S = X([0, 2\pi] \times \mathbb{R})$, que chamaremos de pedaço fundamental do helicóide.

2.1.3

Métrica Induzida

A proposição seguinte mostra que podemos estender os conceitos e propriedades locais da geometria diferencial (veja apêndice A) às superfícies imersas.

Proposição 2.1. *Sejam $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão e $q \in \Omega$. Então existe uma vizinhança U de q tal que $X(U)$ é uma superfície regular.*

Demonstração. Seja X como em (2.1). Como X é injetiva, podemos supor que $\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)} \neq 0$. Seja

$$\begin{aligned}F : \quad \Omega \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u_1, u_2, t) &\longmapsto (x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2) + t).\end{aligned}$$

Então

$$\det(dF_q) = \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)} \neq 0.$$

Pelo teorema da função inversa, existem vizinhanças W_1 de q e W_2 de $F(q)$ tais que $F : W_1 \longrightarrow W_2$ é um difeomorfismo. Seja $U = W_1 \cap \Omega$ e observamos que $F|_U = X(U)$. Assim, $X(U)$ é difeomorfo a V e, portanto, uma superfície regular. \square

O problema neste caso é que podemos ter dois planos tangentes em $p \in X(\Omega)$. Para dar solução a isto vamos trabalhar no conjunto Ω pois, pela proposição anterior, para cada $q \in \Omega$ existe uma vizinhança U tal que $X(U)$ é uma superfície regular. Como Ω é um conjunto aberto de uma superfície regular (o plano), ela é uma superfície regular e, para cada $q \in \Omega$ podemos definir uma métrica induzida por X no plano tangente $T_q\Omega \approx \mathbb{R}^2$. Assim, as quantidades geométricas intrínsecas para uma superfície imersa estarão definidas em função desta métrica.

Definição 2.2 (Métrica Induzida). Sejam $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão, $q \in \Omega$. A *métrica induzida* e a *distância induzida* por X em Ω no ponto q estão definidas, respectivamente, por:

$$\langle v, w \rangle_X = \langle dX_q(v), dX_q(w) \rangle, \quad \forall v, w \in T_q\Omega \approx \mathbb{R}^2, \quad (2.8)$$

$$d_X(p, q) = \inf \{ \ell(\alpha); \alpha : [0, 1] \longrightarrow S, \alpha(0) = X(p), \alpha(1) = X(q) \}. \quad (2.9)$$

Outra definição que depende da métrica induzida é a seguinte.

Definição 2.3. Seja $X \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^3)$ tal que $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão, dizemos que (Ω, d_X) é um disco geodésico de raio δ centrado na origem, se para cada $z \in \partial\Omega$ existe uma curva $\beta : [0, 1] \longrightarrow \overline{\Omega}$, com $\beta(0) = 0$ e $\beta(1) = z$, tal que $d_X(0, z) = \ell(X \circ \beta) = \delta$, onde d_X é a distância induzida por X em Ω .

2.2

Imersão conforme

Definição 2.4. Uma imersão $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é dita uma *imersão conforme* se a diferencial dX_q é conforme em cada ponto $q \in \Omega$, ou seja, preserva ângulos.

Proposição 2.2. Uma condição necessária e suficiente para que uma imersão $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ seja conforme é que, para cada $q \in \Omega$, e para cada v e w em \mathbb{R}^2 tenha-se a igualdade

$$\langle dX_q(v), dX_q(w) \rangle = \lambda^2(q) \langle v, w \rangle. \quad (2.10)$$

Demonstração. Com efeito, se (2.10) é satisfeita, então

$$\|dX_q(v)\| = \lambda(q) \|v\|, \quad \forall v \in \mathbb{R}^2. \quad (2.11)$$

Assim,

$$\cos \angle(dX_q(v), dX_q(w)) = \frac{\langle dX_q(v), dX_q(w) \rangle}{\|dX_q(v)\| \|dX_q(w)\|} = \frac{\lambda^2(q) \langle v, w \rangle}{\lambda(q) \|v\| \lambda(q) \|w\|}$$

ou seja,

$$\cos \angle(dX_q(v), dX_q(w)) = \cos \angle(v, w). \quad (2.12)$$

Reciprocamente, se vale (2.12), então para cada v e w em \mathbb{R}^2 , dX_q leva o triângulo gerado por eles, num triângulo semelhante em $dX_q(\mathbb{R}^2) = T_p S$, o que implica (2.11). Usando (2.11) e o vetor $v + w$ temos então

$$\|dX_q(v + w)\|^2 = \lambda^2(q) \|v + w\|^2,$$

ou seja,

$$\|dX_q(v)\|^2 + 2\langle dX_q(v), dX_q(w) \rangle + \|dX_q(w)\|^2 = \lambda^2(q) (\|v\|^2 + 2\langle v, w \rangle + \|w\|^2).$$

Usando novamente (2.11) obtemos (2.10). \square

Note que (2.10) é equivalente a escrever

$$\langle v, w \rangle_X = \lambda^2(q) \langle v, w \rangle,$$

onde $\langle v, w \rangle_X$ é a métrica induzida por X em Ω no ponto q . A função $\lambda : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ assim definida é diferenciável em Ω .

Observação 2.2. Se $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão conforme e $\beta : [a, b] \rightarrow \Omega$ é um caminho, então

$$\ell(X \circ \beta) = \int_a^b \|(X \circ \beta)'(t)\| dt = \int_a^b \|dX_{\beta(t)}(\beta'(t))\| dt = \int_a^b \lambda(\beta(t)) |\beta'(t)| dt,$$

esta última igualdade se deve a que X é conforme, logo,

$$\ell(X \circ \beta) = \int_a^b \lambda(\beta(t)) |\beta'(t)| dt. \quad (2.13)$$

No caso em que β estiver parametrizado pelo comprimento de arco temos

$$\ell(X \circ \beta) = \int_a^b \lambda(\beta(t)) dt. \quad (2.14)$$

Definição 2.5. Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão conforme. As coordenadas $(u_1, u_2) \in \Omega$ são chamadas de *coordenadas isotérmicas* ou *parâmetros isotérmicos*.

Nas coordenadas isotérmicas, as principais quantidades se simplificam. Por exemplo, se $\{e_1, e_2\}$ é a base canônica de \mathbb{R}^2 , então os coeficientes da primeira forma fundamental se escrevem como

$$g_{ij} = \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_i}, \frac{\partial X}{\partial u_j} \right\rangle = \langle dX_q(e_i), dX_q(e_j) \rangle = \lambda^2(q) \delta_{ij},$$

donde

$$\det(g) = \lambda^4.$$

Além disso, (devido a (A.29)) a curvatura média se reduz a

$$H = \frac{b_{11} + b_{22}}{2\lambda^2}, \quad (2.15)$$

e a curvatura gaussiana (devido a (A.34)) toma a forma

$$K = -\frac{1}{\lambda^2} \Delta \log \lambda. \quad (2.16)$$

Também temos uma fórmula útil para o laplaciano de uma imersão.

Proposição 2.3. *Seja $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão conforme e \mathbf{H} o vetor curvatura média. Então*

$$\Delta X = 2\lambda^2 \mathbf{H}. \quad (2.17)$$

Demonstração. Sejam $q \in \Omega$, $p = X(q)$ e $S = X(\Omega)$. Como X é conforme,

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial u_1}, \frac{\partial X}{\partial u_1} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_2}, \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\rangle, \quad (2.18)$$

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial u_1}, \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\rangle = 0. \quad (2.19)$$

Diferenciando (2.18) com respeito de u_1 obtemos

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_1}, \frac{\partial X}{\partial u_1} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial u_1} \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_2}, \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\rangle,$$

donde

$$\left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2}, \frac{\partial X}{\partial u_1} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u_1 \partial u_2}, \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\rangle. \quad (2.20)$$

Por outro lado, diferenciando (2.19) com respeito a u_2 obtemos

$$\frac{\partial}{\partial u_2} \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_1}, \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\rangle = 0,$$

donde

$$\left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u_1 \partial u_2}, \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_1}, \frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2} \right\rangle = 0. \quad (2.21)$$

Substituindo (2.20) em (2.21) obtemos

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial u_1}, \Delta X \right\rangle = 0,$$

ou seja, ΔX é ortogonal ao vetor $\frac{\partial X}{\partial u_1}$.

Analogamente, derivando (2.18) com respeito a u_2 e (2.19) com respeito a u_1 obtemos

$$\left\langle \frac{\partial X}{\partial u_2}, \Delta X \right\rangle = 0,$$

ou seja, ΔX é ortogonal ao vetor $\frac{\partial X}{\partial u_2}$. Assim, ΔX é um vetor normal ao plano tangente de S em p , logo é paralelo ao vetor normal unitário N e, portanto, paralelo também a \mathbf{H} .

Além disso

$$\langle \Delta X, N \rangle = \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2}, N \right\rangle + \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2}, N \right\rangle = b_{11} + b_{22},$$

portanto, devido a (2.15), obtemos

$$\langle \Delta X, N \rangle = 2\lambda^2 H$$

donde

$$\left\langle \frac{\Delta X}{2\lambda^2}, N \right\rangle = H = \langle \mathbf{H}, N \rangle. \quad (2.22)$$

Assim, como $\frac{\Delta X}{2\lambda^2}$, H e N são paralelos e vale (2.22) temos que

$$\frac{\Delta X}{2\lambda^2} = \mathbf{H},$$

ou seja,

$$\Delta X = 2\lambda^2 \mathbf{H}.$$

□

2.3

Imersão Mínima

Como já dizemos na introdução, a palavra mínima neste contexto está relacionada com o problema de encontrar a superfície com a menor área dentre todas as superfícies que tem a mesma fronteira. Vamos encontrar agora as características geométricas das superfícies imersas com esta propriedade.

Consideremos uma imersão $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $S = X(\Omega)$. Seja Γ uma curva em Ω que é fronteira de um domínio D relativamente compacto tal que $\overline{D} \subset \Omega$, e seja Σ a superfície $X|_D(D)$. Vamos supor que a área de Σ é menor ou igual que a área de qualquer outra superfície Σ_λ definida por uma imersão $X_\lambda : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que para cada $(u_1, u_2) \in \Gamma$ se têm $X(u_1, u_2) = X_\lambda(u_1, u_2)$, ou seja, tem a mesma fronteira.

Primeiramente vamos fazer variações normais. Seja N o normal sobre a superfície e consideremos uma função arbitrária $h(u_1, u_2)$ diferenciável em Ω

e, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} X_\lambda : \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u_1, u_2) &\longmapsto X(u_1, u_2) + \lambda h(u_1, u_2)N(u_1, u_2) \end{aligned}$$

que é conhecida como a *variação normal da superfície* determinada por h . Este nome vem dado pelo fato de que, na verdade, estamos “variando” a superfície paralelamente ao vetor normal. Então

$$\frac{\partial X_\lambda}{\partial u_i} = \frac{\partial X}{\partial u_i} + \lambda \left(\frac{\partial h}{\partial u_i} N + h \frac{\partial N}{\partial u_i} \right).$$

Tendo em conta que $\left\langle N, \frac{\partial X}{\partial u_j} \right\rangle = 0$ e que $\left\langle \frac{\partial N}{\partial u_i}, \frac{\partial^2 X}{\partial u_j^2} \right\rangle = -b_{ij}$ obtemos

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{ij} &= \left\langle \frac{\partial X_\lambda}{\partial u_i}, \frac{\partial X_\lambda}{\partial u_j} \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_i}, \frac{\partial X}{\partial u_j} \right\rangle + \lambda \frac{\partial h}{\partial u_j} \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_i}, N \right\rangle + \lambda h \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_i}, \frac{\partial N}{\partial u_j} \right\rangle \\ &\quad + \lambda \frac{\partial h}{\partial u_i} \left\langle N, \frac{\partial X}{\partial u_j} \right\rangle + \lambda^2 \frac{\partial h}{\partial u_i} \frac{\partial h}{\partial u_j} \langle N, N \rangle + \lambda^2 h \frac{\partial h}{\partial u_i} \left\langle N, \frac{\partial N}{\partial u_j} \right\rangle \\ &\quad + \lambda h \left\langle \frac{\partial N}{\partial u_i}, \frac{\partial X}{\partial u_j} \right\rangle + \lambda^2 h \frac{\partial h}{\partial u_j} \left\langle \frac{\partial N}{\partial u_i}, N \right\rangle + \lambda^2 h^2 \left\langle \frac{\partial N}{\partial u_i}, \frac{\partial N}{\partial u_j} \right\rangle \\ &= g_{ij} - 2\lambda h b_{ij} + \lambda^2 c_{ij}, \end{aligned}$$

onde $c_{ij} = \frac{\partial h}{\partial u_i} \frac{\partial h}{\partial u_j} + h \frac{\partial h}{\partial u_i} \left\langle N, \frac{\partial N}{\partial u_j} \right\rangle + h \frac{\partial h}{\partial u_j} \left\langle \frac{\partial N}{\partial u_i}, N \right\rangle + h^2 \left\langle \frac{\partial N}{\partial u_i}, \frac{\partial N}{\partial u_j} \right\rangle$ e, portanto, define uma função contínua em Ω . Assim, se $\tilde{g} = (\tilde{g}_{ij})$, então

$$\det(\tilde{g}) = (g_{11} - 2\lambda h b_{11} + \lambda^2 c_{11})(g_{22} - 2\lambda h b_{22} + \lambda^2 c_{22}) - (g_{12} - 2\lambda h b_{12} + \lambda^2 c_{12})^2, \quad (2.23)$$

logo

$$\det(\tilde{g}) = a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2, \quad (2.24)$$

onde

$$\begin{aligned} a_0 &= \det(g) \\ a_1 &= -4hH \det(g) \end{aligned}$$

e a_2 é uma função contínua em Ω^1 . Como X é uma imersão, então $a_0 > 0$ e, como é contínua em \bar{D} , ela atinge o seu mínimo, ou seja, a_0 tem um mínimo

¹A expressão de a_2 não foi dada pois vai ser eliminada nos cálculos.

positivo em \bar{D} . Como a_1 e a_2 são contínuas em Ω vemos que existe um $\epsilon > 0$ tal que se $|\lambda| < \epsilon$, então $\det(\tilde{g}) > 0$ para todo $(u_1, u_2) \in D$. Em outras palavras, para $|\lambda| < \epsilon$ temos que X_λ é uma imersão. Por outro lado a área de Σ_λ , que denotaremos por $A(\lambda)$ é dada por

$$A(\lambda) = \iint_D \sqrt{\det \tilde{g}} du_1 du_2.$$

Fazendo diferenciação com respeito a λ sob o símbolo de integração e avaliando em $\lambda = 0^2$, obtemos

$$\begin{aligned} A'(0) &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} \iint_D \sqrt{\det(\tilde{g})} du_1 du_2 \\ &= \iint_D \frac{\partial}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} \sqrt{\det(\tilde{g})} du_1 du_2 \\ &= \iint_D \frac{1}{2\sqrt{\det(\tilde{g})} \Big|_{\lambda=0}} \frac{\partial}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} \det(\tilde{g}) du_1 du_2 \\ &= \iint_D \frac{1}{2\sqrt{\det(g)}} (a_1 + 2a_2\lambda) \Big|_{\lambda=0} du_1 du_2 \\ &= \iint_D \frac{a_1}{2\sqrt{\det(g)}} du_1 du_2 \\ &= \iint_D \frac{-4hH \det(g)}{2\sqrt{\det(g)}} du_1 du_2, \end{aligned}$$

logo,

$$A'(0) = -2 \iint_D hH \sqrt{\det(g)} du_1 du_2. \quad (2.25)$$

Então podemos estabelecer a seguinte proposição.

Proposição 2.4. *Seja S uma superfície imersa $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$. Então ela é um ponto crítico do funcional da área para uma dada condição de contorno se, e somente se, a sua curvatura média é identicamente nula.*

Demonstração. Se $H \equiv 0$ é claro que a condição é satisfeita pois vale (2.25). Reciprocamente, suponhamos que $A'(0) = 0$ e que existe $q \in D$ tal que $H(q) \neq 0$, então existe uma vizinhança V na qual H não se anula. Escolhamos $h : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável tal que $h(q) = H(q)$, $hH > 0$ em V e h tem suporte compacto em V . Assim $A'(0) < 0$ para a variação determinada por essa função h , o que é uma contradição. \square

Definição 2.6. Uma superfície imersa S é chamada de *superfície mínima* se a curvatura média é zero em cada ponto da superfície. Neste caso dizemos que X é uma *imersão mínima*.

²Note que a superfície original é Σ_0 .

Observação. A seguinte questão é, então, natural: se S é uma superfície mínima que tem como bordo a curva Γ , ela minimiza globalmente a área? A resposta a esta pergunta é negativa e isto foi observado por H. A. Schwarz (ver obras completas publicadas em 1890) mostrando que, quando a fórmula da segunda variação do funcional área para a superfície mínima que tem como bordo Γ é estritamente menor que zero, ela não minimiza globalmente a área. Porém, as mesmas minimizam localmente a área e a prova pode ser encontrada em [15].

Lema 2.1. *Uma superfície mínima está caracterizada em termos da primeira e segunda forma fundamental pela equação*

$$g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12} = 0. \quad (2.26)$$

Demonstração. Segue diretamente da fórmula (veja proposição A.8)

$$H = \frac{g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12}}{2 \det(g)}. \quad \square$$

Exemplo 2.5 (O Catenoide é uma superfície mínima). Como consequência dos cálculos feitos no exemplo 2.3 temos que

$$\begin{aligned} g_{11} &= a^2 \cosh^2 u_2 \sin^2 u_1 + a^2 \cosh^2 u_2 \cos^2 u_1 = a^2 \cosh^2 u_2, \\ g_{12} &= -a^2 \cosh u_2 \sinh u_2 \sin u_1 \cos u_1 + a^2 \cosh u_2 \sinh u_2 \sin u_1 \cos u_1 = 0, \\ g_{13} &= a^2 \sinh^2 u_2 \cos^2 u_1 + a^2 \sinh^2 u_2 \sin^2 u_1 + a^2 = a^2 \cosh^2 u_2. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} &= (-a \cosh u_2 \cos u_1, -a \cosh u_2 \sin u_1, 0) \\ \frac{\partial^2 X}{\partial u_1 \partial u_2} &= (-a \sinh u_2 \sin u_1, a \sinh u_2 \cos u_1, 0) \\ \frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2} &= (a \cosh u_2 \cos u_1, a \cosh u_2 \sin u_1, 0). \end{aligned}$$

Além disso,

$$\sqrt{\det(g)} = \sqrt{(a^2 \cosh^2 u_2)^2} = a^2 \cosh^2 u_2.$$

Assim,

$$\begin{aligned} b_{11} &= \frac{1}{a^2 \cosh^2 u_2} \det \begin{pmatrix} -a \cosh u_2 \sin u_1 & a \cosh u_2 \cos u_1 & 0 \\ a \sinh u_2 \cos u_1 & a \sinh u_2 \sin u_1 & a \\ -a \cosh u_2 \cos u_1 & -a \cosh u_2 \sin u_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{(-a)(a^2 \cosh^2 u_2 \sin^2 u_1 + a^2 \cosh^2 u_2 \cos^2 u_1)}{a^2 \cosh^2 u_2} \\ &= -a, \end{aligned}$$

e, como $\frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2} = -\frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2}$, então $b_{22} = a$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} b_{12} &= \frac{1}{a^2 \cosh^2 u_2} \det \begin{pmatrix} -a \cosh u_2 \sin u_1 & a \cosh u_2 \cos u_1 & 0 \\ a \sinh u_2 \cos u_1 & a \sinh u_2 \sin u_1 & a \\ -a \sinh u_2 \sin u_1 & a \sinh u_2 \cos u_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{(-a)(-a^2 \sinh u_2 \cosh u_2 \sin u_1 \cos u_1 + a^2 \sinh u_2 \cosh u_2 \sin u_1 \cos u_1)}{a^2 \cosh^2 u_2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Então,

$$g_{22}b_{11} + g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12} = (a^2 \cosh u_2)(-a) + (a^2 \cosh u_2)a - 2 \cdot 0 \cdot 0 = 0,$$

portanto o catenoide é uma superfície mínima pelo lema 2.1.

Um fato interessante do catenoide é que pode ser caracterizado como a única superfície mínima de revolução.

Proposição 2.5. *Se S é uma superfície mínima de revolução em \mathbb{R}^3 e S não é um plano, então S é o catenoide ou um pedaço dele.*

Demonstração. Se S é uma superfície de revolução, então é a imagem de uma parametrização da forma

$$X(u_1, u_2) = (f(u_2) \cos u_1, f(u_2) \sin u_1, u_2)$$

onde $x_2 = f(x_3)$ é a parametrização da curva regular que estamos girando em torno do eixo x_3 . Então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u_1} &= (-f(u_2) \sin u_1, f(u_2) \cos u_1, 0) \\ \frac{\partial X}{\partial u_2} &= (f'(u_2) \cos u_1, f'(u_2) \sin u_1, 1), \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} g_{11} &= f(u_2)^2 \sin^2 u_1 + f(u_2)^2 \cos^2 u_1 = f(u_2)^2 \\ g_{12} &= -f(u_2)f'(u_2) \sin u_1 \cos u_1 + f(u_2)f'(u_2) \sin u_1 \cos u_1 = 0 \\ g_{22} &= f'(u_2)^2 \cos^2 u_1 + f'(u_2)^2 \sin^2 u_1 + 1 = 1 + f'(u_2)^2, \end{aligned}$$

Assim,

$$\sqrt{\det(g)} = \sqrt{(1 + f(u_2)^2) f(u_2)^2}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2} &= (-f(u_2) \cos u_1, -f(u_2) \sin u_1, 0) \\ \frac{\partial^2 X}{\partial u_1 \partial u_2} &= (-f'(u_2) \sin u_1, f'(u_2) \cos u_1, 0) \\ \frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2} &= (f''(u_2) \cos u_1, f''(u_2) \sin u_1, 0).\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}b_{11} &= \frac{1}{\sqrt{(1+f(u_2)^2)f(u_2)^2}} \det \begin{pmatrix} -f(u_2) \sin u_1 & f(u_2) \cos u_1 & 0 \\ f'(u_2) \cos u_1 & f'(u_2) \sin u_1 & 0 \\ -f(u_2) \cos u_1 & -f(u_2) \sin u_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-(f(u_2)^2 \sin^2 u_1 + f(u_2)^2 \cos^2 u_1)}{\sqrt{(1+f(u_2)^2)f(u_2)^2}} \\ &= -\frac{f(u_2)^2}{\sqrt{(1+f(u_2)^2)f(u_2)^2}},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_{12} &= \frac{1}{\sqrt{(1+f(u_2)^2)f(u_2)^2}} \det \begin{pmatrix} -f(u_2) \sin u_1 & f(u_2) \cos u_1 & 0 \\ f'(u_2) \cos u_1 & f'(u_2) \sin u_1 & 0 \\ -f'(u_2) \sin u_1 & f'(u_2) \cos u_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-(-f(u_2)f'(u_2) \cos u_1 \sin u_1 + f(u_2)f'(u_2) \cos u_1 \sin u_1)}{\sqrt{(1+f(u_2)^2)f(u_2)^2}} \\ &= 0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}b_{22} &= \frac{1}{\sqrt{(1+f(u_2)^2)f(u_2)^2}} \det \begin{pmatrix} -f(u_2) \sin u_1 & f(u_2) \cos u_1 & 0 \\ f'(u_2) \cos u_1 & f'(u_2) \sin u_1 & 0 \\ f''(u_2) \cos u_1 & f''(u_2) \sin u_1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-(-f(u_2)f''(u_2) \sin^2 u_1 - f(u_2)f''(u_2) \cos^2 u_1)}{\sqrt{(1+f(u_2)^2)f(u_2)^2}} \\ &= \frac{f(u_2)f''(u_2)}{\sqrt{(1+f(u_2)^2)f(u_2)^2}}.\end{aligned}$$

Assim, assumindo que a superfície é mínima e fazendo uso do Lema 2.1, obtemos,

$$f(u_2)^2 \frac{f(u_2)f''(u_2)}{\sqrt{(1+f(u_2)^2)f(u_2)^2}} + (1+f'(u_2)^2) \frac{-f(u_2)^2}{\sqrt{(1+f(u_2)^2)f(u_2)^2}} = 0, \quad (2.27)$$

então,

$$\frac{f(u_2)^2}{\sqrt{(1 + f(u_2)^2)f(u_2)^2}} \left(f(u_2)f''(u_2) - 1 - f'(u_2)^2 \right) = 0.$$

Como $f(u_2)$ não pode ser equivalente a zero (caso do plano), então,

$$f(u_2)f''(u_2) - 1 - f'(u_2)^2 = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$f(u_2)f''(u_2) = 1 + f'(u_2)^2 > 0. \quad (2.28)$$

Isto implica que $f(u_2)$ e $f''(u_2)$ não se anulam, então podemos reescrever a equação (2.28) como segue,

$$\frac{f''(u_2)}{f'(u_2)^2 + 1} = \frac{1}{f(u_2)}. \quad (2.29)$$

Multiplicando (2.29) por $f'(u_2)$, que se anula no máximo uma vez pois é estritamente crescente já que $f''(u_2)$ não se anula, obtemos,

$$\frac{f'(u_2)f''(u_2)}{f'(u_2)^2 + 1} = \frac{f'(u_2)}{f(u_2)}, \quad (2.30)$$

ou, de forma equivalente,

$$\frac{d(f'(u_2)^2 + 1)}{f'(u_2)^2 + 1} = 2 \frac{d(f(u_2))}{f(u_2)}.$$

Integrando em ambos lados obtemos,

$$\log(1 + f'(u_2)^2) = \log(b^2 f(u_2)^2),$$

logo,

$$(1 + f'(u_2)^2) = b^2 f(u_2)^2$$

donde,

$$f'(u_2) = \sqrt{b^2 f(u_2)^2 - 1}. \quad (2.31)$$

Escolhendo uma constante b tal que $b^2 f(u_2)^2 > 1$, dividindo (2.31) por essa quantidade e multiplicando por b , obtemos,

$$\frac{bf'(u_2)}{\sqrt{b^2 f(u_2)^2 - 1}} = b,$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{d(bf(u_2))}{\sqrt{(bf(u_2))^2 - 1}} = bd(u_2).$$

Integrando novamente em ambos lados, se tem

$$\cosh^{-1}(bf(u_2)) = bu_2 + c,$$

ou seja,

$$f(u_2) = \frac{1}{b} \cosh(bu_2 + c).$$

Portanto, as soluções de (2.27) é uma família de catenárias. \square

2.3.1

EDP das superfícies mínimas

No caso que a superfície imersa seja o gráfico de uma função diferenciável, temos que a primeira forma fundamental está dada por

$$g_{11} = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)^2, \quad g_{12} = \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial u_2}\right), \quad \text{e} \quad g_{22} = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u_2}\right)^2,$$

o vetor normal unitário é, portanto,

$$N = \frac{\frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2}}{\left\| \frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\|} = \frac{\left(-\frac{\partial f}{\partial u_1}, -\frac{\partial f}{\partial u_1}, 1\right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)^2 + 1}},$$

e, como

$$\frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} = \left(0, 0, \frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}\right),$$

temos que a segunda forma fundamental tem a forma

$$b_{ij} = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial u_i \partial u_j}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)^2 + 1}}.$$

Com isto obtemos uma equação equivalente à equação (2.26), que é uma equação diferencial parcial quasilinear e elíptica dada por:

$$\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u_2}\right)^2\right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2}\right) - 2 \frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{\partial f}{\partial u_2} \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2} + \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)^2\right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2}\right) = 0. \quad (2.32)$$

Sabemos que a partir de toda imersão mínima obtemos soluções para esta equação já que as mesmas são localmente uma superfície regular pela proposição 2.1, e toda superfície regular é localmente o gráfico de uma função

diferenciável (veja proposição A.3). Assim, a equação (2.32) nos permite encontrar exemplos específicos de superfícies mínimas. Chamaremos esta equação de *EDP das superfícies mínimas*. Vamos ver exemplos.

Exemplo 2.6 (O helicóide é uma superfície mínima). Do exemplo 2.4 sabemos que o helicóide de passo um está dado pela imersão

$$X(u_1, u_2) = (u_2 \cos u_1, u_2 \sin u_1, u_1).$$

Assim, se supomos que $u_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $u_2 \neq 0$, temos que

$$\frac{x_2(u_1, u_2)}{x_1(u_1, u_2)} = \tan u_1,$$

logo,

$$x_3 = \arctan \frac{x_2}{x_1}$$

e, portanto, o helicóide é o gráfico da função

$$f(x_1, x_2) = \arctan \frac{x_2}{x_1},$$

onde $x_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ e $x_2 \neq 0$. Logo, temos o seguinte,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2} \cdot \frac{-x_2}{x_1^2} = \frac{-x_2}{x_1^2 + x_2^2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2} \cdot \frac{1}{x_1} = \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} &= \frac{x_2 \cdot 2x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} &= \frac{-2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} &= \frac{-(x_1^2 + x_2^2) + x_2 \cdot 2x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} = \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}. \end{aligned}$$

Donde,

$$\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{(x_1^2 + x_2^2)^2 + x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \cdot \frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \quad (2.33)$$

$$\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{(x_1^2 + x_2^2)^2 + x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \cdot \frac{-2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}. \quad (2.34)$$

Somando (2.33) e (2.34) obtemos,

$$\begin{aligned}
& \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2\right) \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \\
&= \frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \left(\frac{(x_1^2 + x_2^2)^2 + x_1^2 - (x_1^2 + x_2^2)^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \right) \\
&= \frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \cdot \frac{-(x_2^2 - x_1^2)}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\
&= 2 \cdot \frac{-x_2}{(x_1^2 + x_2^2)} \cdot \frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2)} \cdot \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\
&= 2 \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}.
\end{aligned}$$

O helicóide pode ser caracterizado como a única superfície mínima regrada.

Proposição 2.6. *Toda superfície mínima regrada ou é parte de um plano ou é parte de um helicóide.*

Demonstração. A prova pode ser feita seguindo a mesma ideia da prova da proposição 2.5. \square

Exemplo 2.7 (Superfície de Scherk). Em 1834, H. F. Scherk, se propôs achar soluções da EDP das superfícies mínimas (2.32) da forma

$$f(x_1, x_2) = g(x_1) + h(x_2).$$

Usando isto obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = g'(x_1), \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = h'(x_2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = g''(x_1), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = h''(x_2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

Como estamos supondo que o gráfico de f é uma superfície mínima, então, neste caso particular, (2.32) toma a forma

$$(1 + h'(x_2)^2) g''(x_1) + (1 + g'(x_1)^2) h''(x_2) = 0. \quad (2.35)$$

Note que se $h'' \equiv 0$ e $g'' \equiv 0$, obtemos a solução $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + c$, ou seja, o plano. Vamos excluir este caso. Então podemos escrever (2.35) como

$$\frac{g''(x_1)}{1 + g'(x_1)^2} = -\frac{h''(x_2)}{1 + h'(x_2)^2} = 0,$$

ou, equivalentemente

$$\frac{d(g'(x_1))}{1 + g'(x_1)^2} = -\frac{d(h'(x_2))}{1 + h'(x_2)^2}.$$

Como o lado esquerdo só depende de x_1 e o direito de x_2 , ambos tem que ser iguais a uma constante a , ou seja

$$\frac{d(g'(x_1))}{1 + g'(x_1)^2} = a \quad (2.36)$$

$$\frac{d(-h'(x_2))}{1 + (-h'(x_2))^2} = a. \quad (2.37)$$

Vamos resolver (2.36). Integrando obtemos

$$\arctan g' = ax_1 + b,$$

donde

$$g' = \tan(ax_1 + b), \quad -\frac{\pi}{2} < ax_1 + b < \frac{\pi}{2}.$$

Integrando novamente obtemos

$$g(x_1) = -\log(\cos(ax_1 + b)) + B, \quad -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a} - \frac{b}{a} < x_1 < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a} - \frac{b}{a} \quad \text{e } B \text{ constante.}$$

Analogamente, obtemos a solução para (2.37)

$$h(x_2) = \log(\cos(ax_2 + c)) + C, \quad -\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a} - \frac{c}{a} < x_2 < \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a} - \frac{c}{a} \quad \text{e } C \text{ constante.}$$

Daí, temos que $f(x_1, x_2) = \log \frac{\cos(ax_2 + c)}{\cos(ax_1 + b)} + D$, onde D é uma constante e $(x_1, x_2) \in \left(-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a} - \frac{b}{a}, \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a} - \frac{b}{a}\right) \times \left(-\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a} - \frac{c}{a}, \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{a} - \frac{c}{a}\right)$. Se $a = 0$ temos $g'' = h'' = 0$ que é o plano. Vamos supor $a \neq 0$. Note também que $-\frac{b}{a}$ e $-\frac{c}{a}$ são translações horizontais e verticais, respectivamente, o valor $\frac{1}{a}$ corresponde à largura dos quadrados e a constante D é a altura desta superfície no centro dos quadrados. Vamos supor $a = 1$ e $b = c = D = 0$. Assim obtemos

$$f(x_1, x_2) = \log \frac{\cos x_2}{\cos x_1}, \quad -\frac{\pi}{2} < x_1, x_2 < \frac{\pi}{2}. \quad (2.38)$$

Para analisar o comportamento de f neste quadrado é fácil ver que

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x_1, x_2) &= \lim_{x_1 \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x_1, x_2) = -\infty \\ \lim_{x_2 \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x_1, x_2) &= \lim_{x_2 \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x_1, x_2) = \infty. \end{aligned}$$

Vamos incluir no gráfico estas retas verticais como indica a figura 2.6.

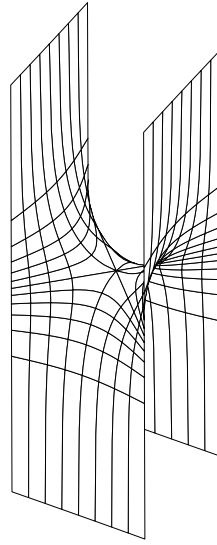


Figura 2.6: Superfície de Scherk sobre um quadrado.

Vemos que a superfície de Scherk globalmente não é um gráfico. Mas, se $\frac{\pi}{2} < x_1, x_2 < \frac{3\pi}{2}$, então $\frac{\cos x_2}{\cos x_1} > 0$ e, portanto, a função f definida em (2.38) fica bem definida neste quadrado também e, de forma geral, nos quadrados

$$Q_{k,l} = \left\{ (x_1, x_2); |x_1 - k\pi| < \frac{\pi}{2}, |x_2 - l\pi| < \frac{\pi}{2}, k + l \text{ é par} \right\}.$$

Assim temos a função f definida sobre $\bigcup_{k,l \in \mathbb{Z}} Q_{k,l}$ que parece com um tabuleiro de Xadrez como indica a figura³ 2.7.

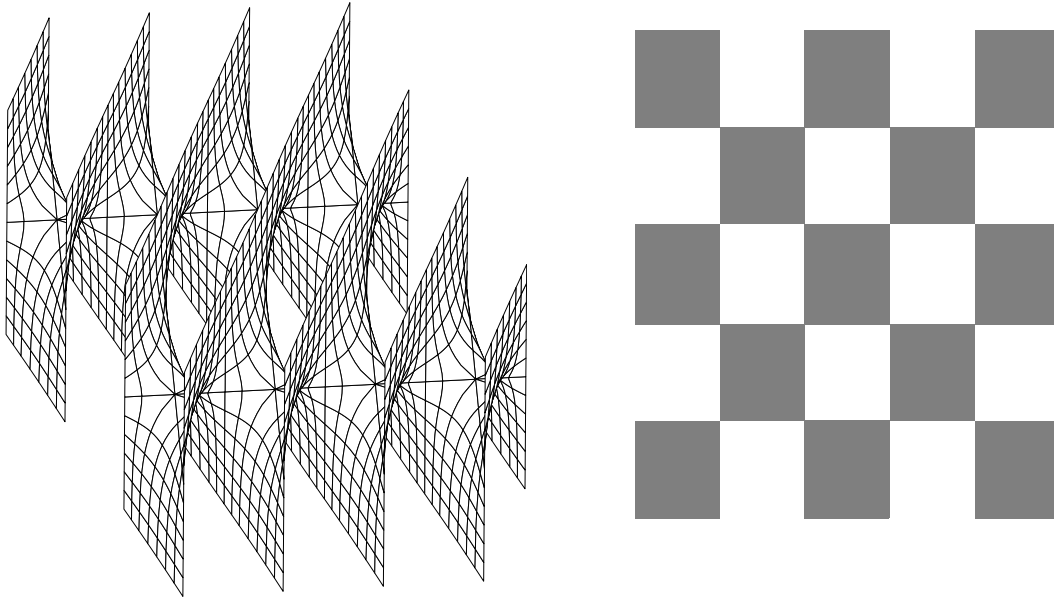


Figura 2.7: Superfície de Scherk sobre um tabuleiro de Xadrez.

³As figuras 2.6 e 2.7 foram tomadas de <http://numod.ins.uni-bonn.de/grape/EXAMPLES/AMANDUS/bmandus.html>

Note também que esta superfície pode ser dada implicitamente pela fórmula

$$e^{x_3} \cos x_1 = \cos x_2.$$

Assim podemos enunciar a seguinte proposição.

Proposição 2.7. *A única superfície mínima da forma $f(x_1, x_2) = g(x_1) + h(x_2)$ que não é um plano é a superfície de Scherk.*

Demonstração. Feita no exemplo anterior. \square

Como observamos nos exemplos anteriores, o helicóide e a superfície de Scherk não são globalmente o gráfico de uma função diferenciável. Mas isto não é por acaso.

Definição 2.7. Seja S o gráfico de uma função diferenciável $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que S é um *gráfico inteiro* se o domínio Ω coincide com \mathbb{R}^2 .

Teorema 2.1 (Bernstein). *Se uma superfície S é um gráfico mínimo inteiro, então S é um plano.*

Demonstração. A prova pode ser encontrada em [7].

2.3.2

Imersão mínima conforme

Já vimos que os parâmetros isotérmicos simplificam as quantidades geométricas e, portanto, os nossos cálculos. Logo, seria muito conveniente ter sempre uma parametrização deste tipo. Então a pergunta que surge é: quando isto é possível? A resposta é que para qualquer superfície regular em \mathbb{R}^3 , é sempre possível encontrar, numa vizinhança de cada ponto, uma parametrização conforme, mas a prova vai além dos nossos objetivos, então vamos dar uma prova que garante a existência dos mesmos em qualquer superfície imersa mínima em \mathbb{R}^3 o que é suficiente para o nosso trabalho. O resultado mais geral pode ser estudado em [16].

Teorema 2.2. *Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima. Então cada ponto de $S = X(\Omega)$ possui uma vizinhança na qual existe uma reparametrização de S em parâmetros isotérmicos.*

Demonstração. Já vimos que para todo $q \in \Omega$ existe uma vizinhança V de $X(q)$ que é o gráfico de uma função diferenciável $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, com U simplesmente conexa. Portanto podemos parametrizar V como segue

$$\begin{aligned} Y : \quad U &\longrightarrow V \\ (u_1, u_2) &\longmapsto (u_1, u_2, f(u_1, u_2)). \end{aligned}$$

Fazendo $p = \frac{\partial f}{\partial u_1}$, $q = \frac{\partial f}{\partial u_2}$ e $s = \frac{\partial^2 f}{\partial u_1 \partial u_2}$, podemos reescrever a equação das superfícies mínimas da seguinte forma

$$(1 + q^2) \frac{\partial p}{\partial u_1} - 2pqs (1 + p^2) + \frac{\partial q}{\partial u_2} = 0. \quad (2.39)$$

Seja $W = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$, então,

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{1 + q^2}{W} \right) - \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{pq}{W} \right) \\ &= \frac{2q \frac{\partial q}{\partial u_1} W^2 - (1 + q^2) \left(p \frac{\partial p}{\partial u_1} + q \frac{\partial q}{\partial u_1} \right) - \left(\frac{\partial p}{\partial u_2} q + p \frac{\partial q}{\partial u_2} \right) W^2 - pq \left(p \frac{\partial p}{\partial u_2} + q \frac{\partial q}{\partial u_2} \right)}{W^3} \\ &= \frac{1}{W^3} \left(2q \frac{\partial q}{\partial u_1} + 2qp^2 \frac{\partial q}{\partial u_1} + 2q^3 \frac{\partial q}{\partial u_1} - p \frac{\partial p}{\partial u_1} - q \frac{\partial q}{\partial u_1} - q^2 p \frac{\partial p}{\partial u_1} - q^3 \frac{\partial q}{\partial u_1} \right. \\ & \quad \left. - q \frac{\partial p}{\partial u_2} - qp^2 \frac{\partial p}{\partial u_2} - q^3 \frac{\partial p}{\partial u_2} - p \frac{\partial q}{\partial u_2} - p^3 \frac{\partial q}{\partial u_2} - pq^2 \frac{\partial q}{\partial u_2} + p^2 q \frac{\partial p}{\partial u_2} + pq^2 \frac{\partial q}{\partial u_2} \right) \\ &= \frac{1}{W^3} \left(-p(1 + q^2) \frac{\partial p}{\partial u_1} - p(1 + p^2) \frac{\partial q}{\partial u_2} + q^3 \frac{\partial q}{\partial u_1} - q^3 \frac{\partial p}{\partial u_2} + q \frac{\partial q}{\partial u_1} - q \frac{\partial p}{\partial u_2} + 2qp^2 \frac{\partial q}{\partial u_1} \right) \\ &= \frac{1}{W^3} \left(-p(1 + q^2) \frac{\partial p}{\partial u_1} - p(1 + p^2) \frac{\partial q}{\partial u_2} + 2qp^2 \frac{\partial q}{\partial u_1} \right) \\ &= \frac{-p}{W^3} \left((1 + q^2) \frac{\partial p}{\partial u_1} + (1 + p^2) \frac{\partial q}{\partial u_2} - 2qp \frac{\partial q}{\partial u_1} \right) \\ &= 0 \text{ usando (2.39),} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{1 + q^2}{W} \right) = \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{pq}{W} \right).$$

Esta condição de integrabilidade implica a existência de uma função g diferenciável em U satisfazendo o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial u_1} = \frac{pq}{W}, \\ \frac{\partial g}{\partial u_2} = \frac{1 + q^2}{W}. \end{cases}$$

Analogamente obtemos que

$$\frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{1 + p^2}{W} \right) = \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{pq}{W} \right),$$

o que também implica a existência de uma função h diferenciável em U satisfazendo o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial u_1} = \frac{1 + p^2}{W}, \\ \frac{\partial h}{\partial u_2} = \frac{pq}{W}. \end{cases}$$

Consideremos a seguinte transformação

$$\begin{aligned} T : \quad U &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u_1, u_2) &\longmapsto (u_1 + h(u_1, u_2), u_2 + g(u_1, u_2)). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Então o jacobiano de T está dado por

$$\begin{aligned} J(T) &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{\partial h}{\partial u_1} & \frac{\partial h}{\partial u_2} \\ \frac{\partial g}{\partial u_1} & 1 + \frac{\partial g}{\partial u_2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{1+p^2}{W} & \frac{pq}{W} \\ \frac{pq}{W} & 1 + \frac{1+q^2}{W} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{W} \begin{pmatrix} W+1+p^2 & pq \\ pq & W+1+q^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \det J(T) &= \frac{1}{W^2} (W^2 + W + q^2W + W + 1 + q^2 + p^2W + p^2 + p^2q^2 - (pq)^2) \\ &= \frac{1}{W^2} (W^2 + 2W + q^2W + p^2W + W^2) \\ &= \frac{1}{W} (2W + 1 + 1 + q^2 + p^2) \\ &= \frac{2W + 1 + W^2}{W} \\ &= \frac{(W+1)^2}{W} > 0. \end{aligned}$$

Logo, pelo teorema da função inversa, T tem uma inversa local T^{-1} cujo jacobiano é

$$\begin{aligned} J(T^{-1}) &= J(T)^{-1} \\ &= \frac{1}{\det J(T)} \frac{1}{W} \begin{pmatrix} W+1+q^2 & -pq \\ -pq & W+1+p^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(W+1)^2} \begin{pmatrix} W+1+q^2 & -pq \\ -pq & W+1+p^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Como o jacobiano da transformação Y é

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u_1} & \frac{\partial f}{\partial u_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ p & q \end{pmatrix},$$

então a transformação $X(\eta_1, \eta_2) = Y \circ T^{-1}(\eta_1, \eta_2)$ tem jacobiano

$$\begin{aligned} J(X) &= J(Y) \cdot J(T^{-1}) \\ &= \frac{1}{(W+1)^2} \begin{pmatrix} 1+q^2+W & -pq \\ -pq & 1+p^2+W \\ p+pW & q+qW \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(W+1)^2} \begin{pmatrix} w_1 & w_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial \eta_1} & \frac{\partial X}{\partial \eta_2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \|w_1\|^2 &= (1+q^2+W)^2 + p^2q^2 + p^2(1+W)^2 \\ &= (W+1)^2 + 2(W+1)q^2 + q^4 + p^2q^2 + p^2(W+1)^2 \\ &= (W+1)^2(1+p^2+q^2-q^2) + 2(W+1)q^2 + q^4 + p^2q^2 \\ &= (W+1)^2W^2 - q^2((W+1)^2 - 2(W+1) + 1 - 1) + q^4 + p^2q^2 \\ &= (W+1)^2W^2 - q^2(W^2 - 1 - q^2 - p^2) \\ &= (W+1)^2W^2, \end{aligned}$$

o que implica que

$$\left\| \frac{\partial X}{\partial \eta_1} \right\|^2 = \frac{1}{(W+1)^2} \|w_1\|^2 = W^2. \quad (2.41)$$

Analogamente,

$$\left\| \frac{\partial X}{\partial \eta_2} \right\|^2 = \frac{1}{(W+1)^2} \|w_2\|^2 = W^2. \quad (2.42)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} \langle w_1, w_2 \rangle &= -(1+W+q^2)pq - (1+W+p^2)pq + p(1+W)q(1+W) \\ &= -(1+W)pq - q^3p - (1+W)pq - p^3q + pq(1+W)^2 \\ &= -2(1+W)pq + (1+W)^2pq - pq(p^2+q^2) \\ &= pq((1+W-1)^2 - W^2) = 0, \end{aligned} \quad (2.43)$$

logo, w_1 e w_2 são ortogonais e, portanto, $\frac{\partial X}{\partial \eta_1}$ e $\frac{\partial X}{\partial \eta_2}$ são ortogonais.

Em resumo, das equações (2.41), (2.42) e (2.43) obtivemos que

$$g_{11} = g_{22}, \quad \text{e} \quad g_{12} = 0$$

para os parâmetros η_1 e η_2 , portanto eles são isotérmicos. \square

Proposição 2.8. *Seja $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão conforme. Então X é mínima se, e somente se, suas funções coordenadas $x_k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, $k = 1, 2, 3$, são funções harmônicas.*

Demonstração. Se X é uma imersão conforme, temos a fórmula (2.17) para o laplaciano de X obtida na proposição 2.3. Assim, $H \equiv 0$ se, e somente se, as funções coordenadas são harmônicas. \square

2.4

Imersão completa

Vamos relacionar o conceito de completude de uma imersão com o conceito de completude que estamos acostumados.

Definição 2.8. *Seja $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão. Dizemos que X é uma imersão completa se Ω é um espaço métrico completo para a distância induzida por X em Ω definida por (2.9).*

Para nosso trabalho vamos precisar da seguinte definição.

Definição 2.9. *Seja $\beta : [0, b) \longrightarrow \Omega$. Então β é chamada de curva divergente ou caminho divergente se para cada compacto $K \subset \Omega$, existe $t_0 \in [0, b)$ tal que $\beta(t) \notin K$ para todo $t > t_0$.*

Intuitivamente uma curva divergente “sai” de todo compacto $K \subset \Omega$.

Proposição 2.9. *Seja $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão. Se a imagem de toda curva $\beta : [0, b) \longrightarrow \Omega$ divergente tem comprimento infinito, ou seja,*

$$\ell(X \circ \beta) = \lim_{t \rightarrow b} \int_0^t \|(X \circ \beta)'(u)\| du = \infty, \quad (2.44)$$

então X é completa.

Demonstração. A prova é consequência do teorema de Hopf-Rinow (veja teorema A.2). \square

Observação. Fazendo abuso de notação também vamos escrever

$$\ell(X \circ \beta) = \int_0^b \|(X \circ \beta)'(u)\| du$$

no caso em que β seja divergente.

3

Representação de Enneper-Weierstrass

Como já dizemos a Representação de Enneper-Weierstrass foi introduzida na década de 1860 por K. Weierstrass e A. Enneper de forma independente. A mesma é uma excelente ferramenta, que identifica cada imersão mínima com três funções holomorfas ϕ_k , $k = 1, 2, 3$, sobre um domínio no plano complexo, que também são identificadas com uma função holomorfa f e uma função meromorfa g (que tem um significado geométrico), da forma que descreveremos a continuação.

Vamos introduzir a seguinte notação. Seja \mathbb{C} o plano complexo e identifiquemos \mathbb{C} com \mathbb{R}^2 fazendo $z = u_1 + iu_2$ onde $(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$.

Lema 3.1. *Seja $X : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão, e consideremos as seguintes funções complexas*

$$\phi_k(z) = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_k}{\partial u_2} = 2 \frac{\partial x_k}{\partial z}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.1)$$

Então

1. ϕ_k é holomorfa se, e somente se, x_k é harmônica.

2. X é conforme se, e somente se, $\sum_{k=1}^3 (\phi_k(z))^2 = 0$.

3. Se X é conforme, então $\sum_{k=1}^3 |\phi_k(z)|^2 \neq 0$.

Demonstração.

1. Vamos provar o item 1. Se ϕ_k é holomorfa então

$$\frac{\partial \phi_k}{\partial \bar{z}} = 0,$$

portanto,

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial x_k}{\partial z} = 0,$$

ou seja, $\Delta x_k = 0$. Para a recíproca é só inverter a ordem das operações.

2. Para provar 2 vamos observar que

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^3 (\phi_k(z))^2 &= \sum_{k=1}^3 \left[\left(\frac{\partial x_k}{\partial u_1} \right)^2 - 2i \frac{\partial x_k}{\partial u_1} \frac{\partial x_k}{\partial u_2} - \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_2} \right)^2 \right] \\ &= \left\| \frac{\partial X}{\partial u_1} \right\|^2 - \left\| \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\|^2 - 2i \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_1}, \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\rangle,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\sum_{k=1}^3 (\phi_k(z))^2 = g_{11} - g_{22} - 2ig_{12},$$

e, portanto, o resultado segue.

3. Para provar 3 observemos que

$$\sum_{k=1}^3 |\phi_k(z)|^2 = \sum_{k=1}^3 \left[\left(\frac{\partial x_k}{\partial u_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial x_k}{\partial u_2} \right)^2 \right] = \left\| \frac{\partial X}{\partial u_1} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\|^2,$$

ou seja,

$$\sum_{k=1}^3 |\phi_k(z)|^2 = g_{11} + g_{22}. \quad (3.2)$$

Se X é conforme, então $g_{11} = g_{22} = \lambda^2$, logo $\sum_{k=1}^3 |\phi_k(z)|^2 = 2\lambda^2 > 0$. \square

Teorema 3.1. *Seja $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima conforme. Então as funções ϕ_k definidas por (3.1) são holomorfas e satisfazem*

$$\sum_{k=1}^3 (\phi_k(z))^2 = 0, \quad (3.3)$$

$$\sum_{k=1}^3 |\phi_k(z)|^2 \neq 0. \quad (3.4)$$

Reciprocamente, dadas três funções $\phi_k(z)$, $k = 1, 2, 3$, holomorfas em um domínio Ω simplesmente conexo e que satisfazem as equações (3.3) e (3.4), existe uma imersão mínima conforme $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que vale (3.1).

Demonstração. Seja $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima conforme, então as funções x_k são harmônicas. Isto implica que as funções ϕ_k são holomorfas pelas teses 1 do lema 3.1. Como X é conforme, as funções ϕ_k satisfazem (3.3) e (3.4) pelas teses 2 e 3 do lema 3.1.

Reciprocamente, suponhamos que as funções ϕ_k são holomorfas em um domínio Ω simplesmente conexo e definamos

$$x_k(z) = \Re \int_{z_0}^z \phi_k(\zeta) d\zeta, \quad k = 1, 2, 3. \quad (3.5)$$

Como, para cada $k = 1, 2, 3$, o período de ϕ_k é zero em Ω por ser holomorfa e Ω é simplesmente conexo, então a função

$$\varphi_k(z) = \int_{z_0}^z \phi_k(\zeta) d\zeta,$$

está bem definida e é holomorfa em Ω . Assim, como

$$\varphi_k(z) = x_k + i \Im \int_{z_0}^z \phi_k(\zeta) d\zeta,$$

então x_k está bem definida e é harmônica. Por outro lado temos que

$$\phi_k(z) = \varphi'_k(z) = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} + i \frac{\partial}{\partial u_1} \left(\Im \int_{z_0}^z \phi_k(\zeta) d\zeta \right) = \frac{\partial x_k}{\partial u_1} - i \frac{\partial x_k}{\partial u_2},$$

esta última igualdade devido às equações de Cauchy Riemann (veja (C-R)). Logo, (3.1) é satisfeita.

Além disso, como as funções ϕ_k satisfazem (3.3), então X é conforme pelas teses 2 do lema 3.1. Como as funções x_k são harmônicas, então X é mínima pela proposição 2.8. \square

Observação 3.1. Não é necessário que o domínio Ω seja simplesmente conexo e sim que os períodos as funções ϕ_k sejam imaginários puros para que as funções x_k estejam bem definidas. Além disso, as funções x_k estão definidas de forma única a menos de uma constante aditiva, portanto a superfície fica inteiramente determinada a menos de translações.

Exemplo 3.1 (Representação de Enneper-Weierstrass do catenoide).

Seja $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e consideremos as seguintes funções em Ω

$$\phi_1(z) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) \quad (3.6)$$

$$\phi_2(z) = \frac{i}{2} \left(-1 - \frac{1}{z^2} \right) \quad (3.7)$$

$$\phi_3(z) = \frac{1}{z}. \quad (3.8)$$

Obviamente as funções ϕ_k são holomorfas em Ω . Além disso,

$$\sum_{k=1}^3 \phi_k(z)^2 = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^4} \right) - \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z^4} \right) + \frac{1}{z^2} = 0,$$

logo, as funções ϕ_k satisfazem (3.3) e como ϕ_3 não se anula em Ω , a equação (3.4) também é satisfeita. Falta verificar que os períodos das ϕ_k em Ω são imaginários puros. Basta provar que os períodos são imaginários puros para o círculo unitário, pois qualquer outra curva fechada ao redor da origem é homotópica a ele. Para isto observamos que uma parametrização do círculo está dada por $z = e^{i\theta}$, onde $\theta \in [0, 2\pi]$. Então,

$$\int_{|z|=1} \phi_1(z) dz = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 - \frac{1}{e^{2i\theta}}\right) i e^{i\theta} d\theta = \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta - \frac{i}{2} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta = 0,$$

$$\int_{|z|=1} \phi_2(z) dz = -\frac{i}{2} \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{1}{e^{2i\theta}}\right) i e^{i\theta} d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta = 0$$

e

$$\int_{|z|=1} \phi_3(z) dz = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\theta}} i e^{i\theta} d\theta = i \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

Logo, existe uma imersão mínima conforme de Ω em \mathbb{R}^3 pelo teorema 3.1 e podemos calcular suas componentes como segue. A componente x_1 está dada por

$$x_1(z) = \Re \int_1^z \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\zeta^2}\right) d\zeta = \frac{1}{2} \Re \left(\int_1^z d\zeta - \int_1^z \frac{1}{\zeta^2} d\zeta \right) = \frac{1}{2} \Re \left(z + \frac{1}{z} - 2 \right),$$

logo, a menos de uma translação temos que

$$x_1(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{u_1}{u_1^2 + u_2^2} + u_1 \right).$$

Por outro lado a componente x_2 está dada por

$$x_2(z) = \Re \int_1^z \frac{i}{2} \left(-1 - \frac{1}{\zeta^2} \right) d\zeta = \frac{1}{2} \Im \left(\int_1^z d\zeta + \int_1^z \frac{1}{\zeta^2} d\zeta \right) = \frac{1}{2} \Im \left(z - \frac{1}{z} \right),$$

ou seja,

$$x_2(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{u_2}{u_1^2 + u_2^2} + u_2 \right).$$

Finalmente, a componente x_3 está dada por

$$x_3(z) = \Re \int_1^z \frac{1}{\zeta} d\zeta = \Re (\log |z| + i \arg(z)),$$

portanto

$$x_3(z) = \frac{1}{2} \log (u_1^2 + u_2^2).$$

Fazendo uso das coordenadas polares ($r > 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$) obtemos

$$x_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos \theta}{r} + r \cos \theta \right) = \frac{r^2 + 1}{2r} \cos \theta,$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \theta}{r} + r \sin \theta \right) = \frac{r^2 + 1}{2r} \sin \theta$$

e

$$x_3 = \frac{1}{2} \log r^2 = \log r.$$

Fazendo a mudança $t = \log r$ (sabemos que $r > 0$) temos que $r = e^t$ e, portanto,

$$\frac{r^2 + 1}{2r} = \frac{e^{2t} + 1}{2e^t} = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh t.$$

Assim obtivemos a imersão

$$X(u_1, u_2) = (\cosh u_1 \cos u_2, \cosh u_1 \sin u_2, u_2),$$

que é um catenoide como vimos no exemplo 2.3.

A questão que surge agora é como encontrar três funções ϕ_k satisfazendo as propriedades do teorema 3.1. O fato surpreendente é que podemos descrever explicitamente todas soluções do sistema dado pelas equações (3.3) e (3.4) como garante o seguinte teorema.

Teorema 3.2. *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio. Sejam f e g uma função holomorfa e meromorfa, respectivamente, em Ω satisfazendo a seguinte propriedade¹*

$q \in \Omega$ é polo de g de ordem m se, e somente se, q é zero de f de ordem $2m$.

Então as funções

$$\phi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2), \quad \phi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2), \quad \phi_3 = fg, \quad (3.9)$$

são holomorfas em Ω e satisfazem (3.3) e (3.4). Reciprocamente, dadas três funções holomorfas ϕ_k , $k = 1, 2, 3$ satisfazendo (3.3) e (3.4), podem ser representadas na forma (3.9) exceto no caso $\phi_1 \equiv i\phi_2$, $\phi_3 \equiv 0$.

¹A partir de agora chamaremos esta propriedade de *propriedade dos zeros e polos*.

Demonstração. Primeiro observemos que

$$\begin{aligned}\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 &= \frac{1}{4}f^2(1 - 2g^2 + g^4) - \frac{1}{4}f^2(1 + 2g^2 + g^4) + f^2g^2 \\ &= \frac{1}{4}f^2(1 + g^4) - \frac{1}{2}f^2g^2 - \frac{1}{4}f^2(1 + g^4) - \frac{1}{2}f^2g^2 + f^2g^2 \\ &= 0,\end{aligned}$$

portanto as funções dadas satisfazem (3.3). Por outro lado, para que (3.4) seja satisfeita, devemos garantir que estas funções não se anulem simultaneamente, assim, se $\phi_3(q) = 0$, $q \in \Omega$, temos que $f(q) = 0$ ou $g(q) = 0$. Vamos analisar os dois casos.

1. Se $f(q) = 0$, então q é zero de f de ordem $2m$ e polo de g de ordem m , com $m > 0$, pela *propriedade dos zeros e polos*, portanto $f(q)g(q)^2 \neq 0$, então

$$\begin{aligned}\phi_1(q) &= \frac{f(q)g(q)^2}{2} \neq 0 \\ \phi_2(q) &= -\frac{f(q)g(q)^2}{2} \neq 0.\end{aligned}$$

2. Se $g(q) = 0$, temos que $f(q) \neq 0$ pois, pela *propriedade dos zeros e polos*, os únicos zeros de f são os polos de g , então

$$\begin{aligned}\phi_1(q) &= \frac{f(q)}{2} \neq 0 \\ \phi_2(q) &= \frac{f(q)}{2} \neq 0.\end{aligned}$$

Portanto, as funções ϕ_k também satisfazem (3.4).

Para o recíproco definimos as seguintes funções

$$f = \phi_1 - i\phi_2 \tag{3.10}$$

$$g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}. \tag{3.11}$$

Multiplicando (3.10) e (3.11) obtemos

$$\phi_3 = fg.$$

Reescrevendo (3.3) na forma

$$(\phi_1 + i\phi_2)(\phi_1 - i\phi_2) = -\phi_3^2, \tag{3.12}$$

obtemos

$$(\phi_1 + i\phi_2) = -\frac{\phi_3^2}{\phi_1 - i\phi_2} = -(\phi_1 - i\phi_2)\frac{\phi_3^2}{(\phi_1 - i\phi_2)^2},$$

ou seja,

$$(\phi_1 + i\phi_2) = -fg^2. \quad (3.13)$$

Usando (3.11) obtemos que

$$\begin{aligned} 1 + g^2 &= 1 + \frac{\phi_3^2}{(\phi_1 - i\phi_2)^2} \\ &= \frac{\phi_1^2 - 2i\phi_1\phi_2 - \phi_2^2 + \phi_3^2}{(\phi_1 - i\phi_2)^2} \\ &= \frac{-2\phi_2^2 - 2i\phi_1\phi_2}{(\phi_1 - i\phi_2)^2} \\ &= \frac{-2i\phi_2(\phi_1 - i\phi_2)}{(\phi_1 - i\phi_2)^2} \\ &= -\frac{2i\phi_2}{\phi_1 - i\phi_2}, \end{aligned}$$

assim,

$$f(1 + g^2) = -2i\phi_2$$

e, portanto,

$$\phi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2).$$

Usando novamente (3.11) temos que

$$\begin{aligned} 1 - g^2 &= 1 - \frac{\phi_3^2}{(\phi_1 - i\phi_2)^2} \\ &= \frac{\phi_1^2 - 2i\phi_1\phi_2 - \phi_2^2 - \phi_3^2}{(\phi_1 - i\phi_2)^2} \\ &= \frac{2\phi_1^2 - 2i\phi_1\phi_2}{(\phi_1 - i\phi_2)^2} \\ &= \frac{2\phi_1(\phi_1 - i\phi_2)}{(\phi_1 - i\phi_2)^2} \\ &= \frac{2\phi_1}{\phi_1 - i\phi_2}, \end{aligned}$$

donde

$$f(1 - g^2) = 2\phi_1,$$

portanto

$$\phi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2).$$

Assim, as funções ϕ_k , $k = 1, 2, 3$, tem a forma (3.9). Por outro lado, vemos que esta representação não está bem definida no caso que o denominador de g seja identicamente zero, ou seja $\phi_1 \equiv i\phi_2$, mas neste caso, dado que vale (3.12), temos que $\phi_3 \equiv 0$, que é o caso que excluimos no teorema. \square

Definição 3.1. Seja $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima conforme. O par (g, f) associado a X é chamado de *dados de Weierstrass* da superfície.

Exemplo 3.2 (Dados de Weierstrass do catenoide). Usando o exemplo 3.1 vemos que, no caso do catenoide, que pode ser representado pelas funções holomorfas (3.6), (3.7) e (3.8), temos que

$$f = \phi_1 - i\phi_2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right) + \frac{1}{2} \left(-1 - \frac{1}{z^2} \right) = \frac{1}{z^2},$$

e

$$g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2} = \frac{\phi_3}{f} = z.$$

Assim, os dados de Weierstrass do catenoide é o par

$$\left(z, \frac{1}{z^2} \right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}. \quad (3.14)$$

Observação. No caso mais geral de uma imersão $X : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$, onde M é uma superfície de Riemann² a representação de Weierstrass está dada por três 1-formas holomorfas $\Phi_k(z)$ sobre M e os dados de Weierstrass são da forma (g, η) , onde g é uma função meromorfa e η é uma 1-forma holomorfa sobre M , ambas satisfazendo a condição dos zeros e polos que foi estudada antes. No caso que a superfície de Riemann é um aberto Ω do plano complexo as 1-formas antes mencionadas podem ser globalmente expressadas na forma

$$\eta(z) = f(z)dz \quad \text{e} \quad \Phi_k(z) = \phi_k(z)dz, \quad k = 1, 2, 3,$$

onde f e ϕ_k , $k = 1, 2, 3$, são funções holomorfas em Ω . Ou seja, no plano estas funções determinam as 1-formas η e Φ_k , $k = 1, 2, 3$, respectivamente. Devido a isto, na representação de Weierstrass não falamos de 1-formas holomorfas, mas de funções holomorfas e os dados de Weierstrass em nosso texto são da forma (g, f) .

Estamos em condições então de representar qualquer superfície mínima em \mathbb{R}^3 segundo umas funções f e g holomorfa e meromorfa, respectivamente, satisfazendo a *propriedade dos zeros e polos*.

²Para a definição de superfície de Riemann veja a definição 4.3.5 em [17].

Teorema 3.3. *Qualquer imersão mínima conforme $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ não plana sobre um domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$ simplesmente conexo, pode ser representado na forma*

$$\begin{aligned} x_1(z) &= \Re \int_{z_0}^z \frac{1}{2} f(\zeta) (1 - g(\zeta)^2) d\zeta \\ x_2(z) &= \Re \int_{z_0}^z \frac{i}{2} f(\zeta) (1 + g(\zeta)^2) d\zeta \\ x_3(z) &= \Re \int_{z_0}^z f(\zeta) g(\zeta) d\zeta, \end{aligned} \quad (3.15)$$

onde as funções f e g são holomorfa e meromorfa, respectivamente, em Ω , e satisfazem a propriedade dos zeros e polos. Reciprocamente, dadas duas funções f e g holomorfa e meromorfa, respectivamente, em Ω , satisfazendo a propriedade dos zeros e polos, existe uma imersão mínima não plana em \mathbb{R}^3 na forma (3.15).

Demonstração. Seja $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima conforme não plana, então pelo teorema 3.1, existem ϕ_k , $k = 1, 2, 3$ holomorfas, satisfazendo (3.3) e (3.4), isto implica a existência das funções f e g , holomorfa e meromorfa, respectivamente, em Ω , satisfazendo (3.9) pelo teorema 3.2, excepto no caso $\phi_1 \equiv i\phi_2$, $\phi_3 \equiv 0$, mas este caso é um plano dado que $\phi_3 \equiv 0$ implica que x_3 é constante em Ω e o resultado segue. Reciprocamente, tendo duas funções f e g holomorfa e meromorfa, respectivamente, em Ω , satisfazendo a *propriedade dos zeros e polos*, existem ϕ_k , $k = 1, 2, 3$, definidas por (3.9) e satisfazendo (3.3) e (3.4) pelo teorema 3.2, mas isto implica a existência de x_k , $k = 1, 2, 3$, dadas por (3.5), e que estão bem definidas dado que Ω é simplesmente conexo, e o resultado segue. \square

Observação 3.2. Devemos notar que se temos uma função holomorfa h em um domínio Ω simplesmente conexo, podemos tomar como dados de Weierstrass a $g(z) = h(z)$, e qualquer função f holomorfa e que não se anule em Ω , pois as mesmas satisfazem a *propriedade dos zeros e polos*. Por outro lado, como na observação 3.1, não precisamos que Ω seja simplesmente conexo para que o teorema acima seja verdadeiro, basta que os períodos das funções ϕ_k , $k = 1, 2, 3$, definidas por (3.9), sejam imaginários puros em Ω .

Exemplo 3.3 (Superfície de Enneper). Uma escolha evidente seria considerar o par de funções

$$f \equiv 1 \quad \text{e} \quad g(z) = z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Elas satisfazem as hipóteses do teorema 3.15 e, portanto, a superfície obtida a partir delas será uma superfície mínima. Vamos encontrá-la. Segundo estes dados a coordenada x_1 está dada por

$$\begin{aligned}
x_1(z) &= \Re \int_0^z \frac{1}{2} (1 - \zeta^2) d\zeta \\
&= \frac{1}{2} \Re \left(z - \frac{z^3}{3} \right) \\
&= \frac{1}{6} \Re \left((u_1 + iu_2) (3 - u_1^2 - 2iu_1u_2 + u_2^2) \right),
\end{aligned}$$

portanto

$$x_1(u_1, u_2) = \frac{u_1}{2} - \frac{u_1 u_2^2}{2} - \frac{u_1^3}{6}. \quad (3.16)$$

A coordenada x_2 é a seguinte,

$$\begin{aligned}
x_2(z) &= \Re \int_0^z \frac{i}{2} (1 + \zeta^2) d\zeta \\
&= -\frac{1}{2} \Im \left(z + \frac{z^3}{3} \right) \\
&= -\frac{1}{6} \Im \left((u_1 + iu_2) (3 + u_1^2 + 2iu_1u_2 - u_2^2) \right),
\end{aligned}$$

assim

$$x_2(u_1, u_2) = -\frac{u_2}{2} - \frac{u_1^2 u_2}{2} + \frac{u_2^3}{6}. \quad (3.17)$$

Finalmente, a coordenada x_3 se obtém como segue,

$$\begin{aligned}
x_3(z) &= \Re \int_0^z \zeta d\zeta \\
&= \frac{1}{2} \frac{z^2}{2} \\
&= \frac{1}{2} \Re (u_1^2 + 2iu_1u_2 - u_2^2),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$x_3(u_1, u_2) = u_1^2 - u_2^2. \quad (3.18)$$

Assim a superfície cujas componentes são (3.16), (3.17) e (3.18), é a superfície de Enneper (veja exemplo 2.2), portanto a mesma é uma superfície mínima.

Observação. Seja $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima com dados de Weierstrass (g, f) onde Ω é um domínio simplesmente conexo. Suponhamos que g é um biholomorfismo sobre Ω , assim, $g'(z) \neq 0 \forall z \in \Omega$, então fazendo a mudança de variável $w = g(z)$, temos que $dw = g'(z)dz$. Por outro lado temos que f não se anula em Ω para que a *propriedade dos zeros e polos* seja satisfeita. Definamos a função

$$h(w) = h(g(z)) = \frac{f(z)}{g'(z)}$$

e seja $w_0 = g(z_0)$. Logo,

$$\phi_1(z) = \frac{1}{2} \int_{z_0}^z h(g(z)) (1 - g(z)^2) g'(z) dz = \frac{1}{2} \int_{w_0}^w h(w) (1 - w^2) dw,$$

$$\phi_2(z) = \frac{i}{2} \int_{z_0}^z h(g(z)) (1 + g(z)^2) g'(z) dz = \frac{i}{2} \int_{w_0}^w h(w) (1 + w^2) dw$$

e

$$\phi_3(z) = \int_{z_0}^z h(g(z)) g(z) g'(z) dz = \int_{w_0}^w h(w) w dw.$$

Portanto a imersão cujas componentes são

$$\begin{aligned} x_1 &= \Re \frac{1}{2} \int_{w_0}^w h(w) (1 + w^2) dw \\ x_2 &= \Re \frac{i}{2} \int_{w_0}^w h(w) (1 + w^2) dw \\ x_3 &= \Re \int_{w_0}^w h(w) w dw, \end{aligned} \quad (3.19)$$

é uma imersão mínima.³ Ou seja, no lugar de ter duas funções f e g como em (3.15), as expressões dadas em (3.19) envolve apenas uma função h holomorfa e que não se anula em $g(\Omega)$. Reciprocamente, toda função h holomorfa e que não se anula em um domínio Ω simplesmente conexo, define uma imersão mínima cujas componentes estão dadas em (3.19); de fato, as funções $f(z) = h(z)$ e $g(z) = z$ satisfazem a *propriedade dos zeros e polos*. Em outras palavras, a cada função holomorfa e que não se anule corresponde uma superfície mínima e vice-versa.

Observação 3.3. Sejam (g, f) os dados de Weierstrass de uma imersão mínima conforme $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ cujas componentes estão dadas por (3.15). Seja h uma função holomorfa e que não se anula sobre Ω , então as funções $\tilde{g} = \frac{g}{h}$ e $\tilde{f} = fh$ satisfazem a *propriedade dos zeros e polos* e, portanto, estes dados determinam uma nova imersão mínima conforme \tilde{X} . Note que $\tilde{x}_3 = x_3$, portanto esta transformação deforma uma imersão mínima em uma outra imersão mínima sem modificar a terceira coordenada. Esta forma de obter uma nova imersão mínima a partir de outra é conhecida como *transformação de López-Ros*. O nome vem dado pelo fato de que F. J. López e A. Ros usaram este tipo de modificações em [18] tomando constantes positivas como sendo a função h .

³Note que simplesmente provamos que a reparametrização de uma superfície mínima é uma superfície mínima.

3.1

Quantidades geométricas em termos dos dados de Weierstrass

Um fato importante é que esta representação nos permite obter teoremas gerais sobre superfícies mínimas expressando as quantidades geométricas básicas associadas à superfície em termos dos dados de Weierstrass.

3.1.1

A aplicação normal de Gauss

Sejam f e g duas funções holomorfa e meromorfa, respectivamente, em domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$ satisfazendo a *propriedade dos zeros e polos*. Os teoremas 3.1 e 3.3 garantem a existência de funções ϕ_k , $k = 1, 2, 3$ holomorfas em Ω , definidas por (3.9) e satisfazendo (3.3) e (3.4), e a existência de uma imersão mínima conforme $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja componentes estão definidas por (3.5). Assim, como o plano tangente à superfície em um ponto p é gerado por $\frac{\partial X}{\partial u_1}$ e $\frac{\partial X}{\partial u_2}$ e vale (3.2), temos que

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= \left\| \frac{\partial X}{\partial u_1} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^3 |\phi_k|^2 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} |f|^2 |1 - g^2|^2 + \frac{1}{4} |f|^2 |1 + g^2|^2 + |f|^2 |g|^2 \right) \\ &= \frac{|f|^2}{8} (|1 - g^2|^2 + |1 + g^2|^2 + 4|f|^2 |g|^2) \\ &= \frac{|f|^2}{8} ((1 - g^2)(1 - \bar{g}^2) + (1 + g^2)(1 + \bar{g}^2) + 4|f|^2 |g|^2) \\ &= \frac{|f|^2}{4} (1 + 2|g|^2 + |g|^4) \\ &= \frac{|f|^2}{4} (1 + |g|^2)^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\lambda(z) = \frac{|f(z)|}{2} (1 + |g(z)|^2). \quad (3.20)$$

Vamos encontrar agora a relação entre a aplicação normal de Gauss e os dados de Weierstrass. Para isto vemos que, usando (3.1), obtemos

$$\begin{aligned} &\frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2} \\ &= (\Re \phi_2 \Im \phi_3 - \Im \phi_2 \Re \phi_3, \Im \phi_1 \Re \phi_3 - \Re \phi_1 \Im \phi_3, \Re \phi_1 \Im \phi_2 - \Im \phi_1 \Re \phi_2) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2} = (\Im(\phi_2 \bar{\phi}_3), \Im(\bar{\phi}_1 \phi_3), \Im(\phi_1 \bar{\phi}_2)). \quad (3.21)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \Im(\phi_2 \overline{\phi_3}) &= \Im\left(\frac{i}{2}|f|^2 \bar{g}(1+g^2)\right) \\
 &= \Re\left(\frac{1}{2}|f|^2 \bar{g}(1+g^2)\right) \\
 &= \frac{1}{2}|f|^2 \Re(\bar{g} + |g|^2 g) \\
 &= \frac{1}{4}|f|^2 (\bar{g} + |g|^2 g + g + |g|^2 \bar{g}) \\
 &= \frac{1}{4}|f|^2 (2\Re g + 2|g|^2 \Re g) \\
 &= \frac{1}{2}|f|^2 (1+g^2) \Re g,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Im(\overline{\phi_1} \phi_3) &= \Im\left(\frac{1}{2}|f|^2 g(1-\bar{g}^2)\right) \\
 &= \frac{1}{2}|f|^2 \Im(g - |g|^2 \bar{g}) \\
 &= \frac{1}{2}|f|^2 (g - |g|^2 \bar{g} - \bar{g} + |g|^2 g) \\
 &= \frac{1}{4}|f|^2 (2\Im g + 2|g|^2 \Im g) \\
 &= \frac{1}{2}|f|^2 (1+g^2) \Im g
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 \Im(\phi_1 \overline{\phi_2}) &= \Im\left(-\frac{i}{4}|f|^2 ((1-g^2)(1+\bar{g}^2))\right) \\
 &= \Re\left(-\frac{1}{4}|f|^2 (1+\bar{g}^2 - g^2 - |g|^4)\right) \\
 &= -\frac{1}{8}|f|^2 (1+\bar{g}^2 - g^2 - |g|^4 + 1+g^2 - \bar{g}^2 - |g|^4) \\
 &= \frac{1}{4}|f|^2 (|g|^4 - 1).
 \end{aligned}$$

Substituindo em (3.21) obtemos

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2} &= \left(\frac{1}{2}|f|^2 (1+g^2) \Re g, \frac{1}{2}|f|^2 (1+g^2) \Im g, \frac{1}{4}|f|^2 (|g|^2 + 1) (|g|^2 - 1)\right) \\
 &= \frac{|f|^2}{4} (1+g^2) (2\Re g, 2\Im g, |g|^2 - 1) \\
 &= \frac{|f|}{2} \lambda (2\Re g, 2\Im g, |g|^2 - 1)
 \end{aligned}$$

e, como a aplicação é conforme e vale (A.11), temos que

$$\left\| \frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\| = \lambda^2.$$

Portanto

$$N = \frac{|f|}{2\lambda} (2\Re g, 2\Im g, |g|^2 - 1) = \left(\frac{2\Re g}{1 + |g|^2}, \frac{2\Im g}{1 + |g|^2}, \frac{|g|^2 - 1}{1 + |g|^2} \right).$$

Assim, $N = \pi^{-1}(g)$, onde π é a projeção estereográfica desde o polo norte (veja exemplo A.2), o que implica que $g = \pi \circ N$, tendo g um significado geométrico bem interessante.

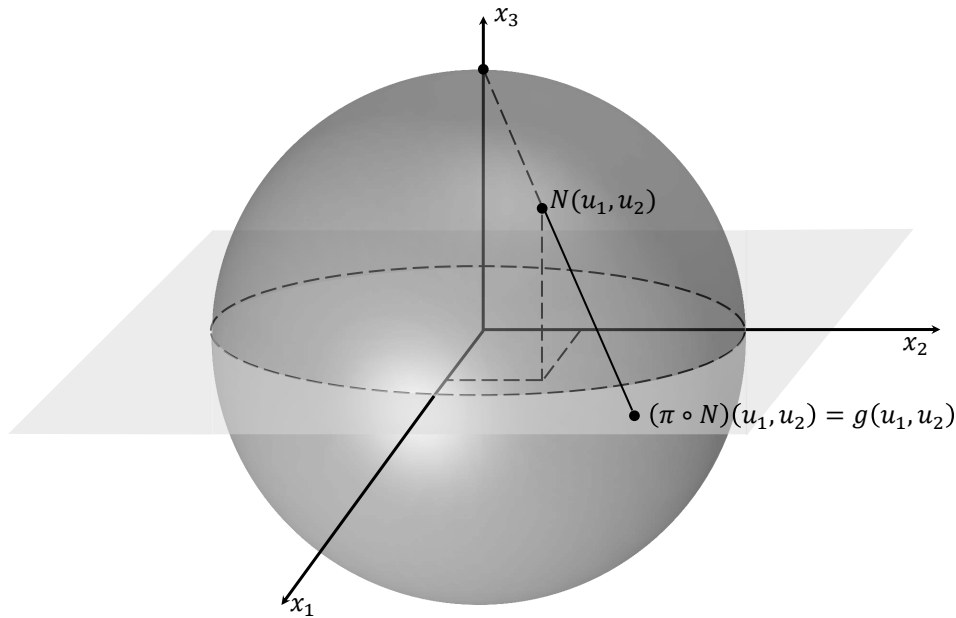


Figura 3.1: Interpretação geométrica da função g .

Além disso, isto nos dá uma outra caracterização das superfícies mínimas.

Proposição 3.1. *Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão conforme. Então X é mínima se, e somente se, a função $g = \pi \circ N$ é meromorfa.*

Demonstração. Se X é mínima então $\pi \circ N = g$ como foi visto. Reciprocamente, vamos supor que a função $g = \pi \circ N$ é meromorfa. Portanto g é aplicação conforme. Como π é anticonforme, π^{-1} também é. Logo, $N = \pi^{-1} \circ g$ é anticonforme. Portanto, sua derivada e, como consequência a aplicação de Weingarten, tem autovalores do mesmo módulo e sinais opostos. Mas estes autovalores são as curvaturas principais (veja observação A.4), portanto $H \equiv 0$. \square

Teorema 3.4 (Osserman). *Seja $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima completa, então a superfície é um plano ou a imagem da aplicação normal de Gauss é densa em \mathbb{S}^2 .*

Demonstração. A prova pode ser encontrada em [7]. \square

3.1.2

Curvatura gaussiana, curvatura total e curvaturas principais

Lembrando que em uma parametrização conforme a curvatura gaussiana está dada por (2.16), que o operador laplaciano complexo é $\Delta = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$ (veja proposição B.5), e que, como f é holomorfa e g é meromorfa, vale (veja proposição B.4)

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{g}}{\partial z} = 0,$$

temos que

$$\begin{aligned} K &= -\frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log \left(\frac{\sqrt{f \bar{f}} (1 + g \bar{g})}{2} \right) \\ &= -\frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{1}{2} \log(f \bar{f}) + \log(1 + g \bar{g}) - \log 2 \right) \\ &= -\frac{2}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log(f \bar{f}) - \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \log(1 + g \bar{g}) \\ &= -\frac{2}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{f \bar{f}} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \bar{f} + f \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} \right) - \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{1 + g \bar{g}} \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \bar{g} + g \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} \right) \\ &= -\frac{2}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\bar{f}'}{\bar{f}} \right) - \frac{4}{\lambda^2} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{g \bar{g}'}{1 + g \bar{g}} \right) \\ &= -\frac{2}{\lambda^2} \frac{\frac{\partial \bar{f}'}{\partial z} \bar{f} - \bar{f}' \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}}{\bar{f}^2} - \frac{4}{\lambda^2} \frac{\left(\frac{\partial g}{\partial z} \bar{g}' + g \frac{\partial \bar{g}'}{\partial z} \right) (1 + g \bar{g}) - g \bar{g}' \left(\frac{\partial g}{\partial z} \bar{g} + g \frac{\partial \bar{g}}{\partial z} \right)}{(1 + g \bar{g})^2} \\ &= -\frac{4}{\lambda^2} \left(\frac{|g'|^2 (1 + |g|^2) - |g|^2 |g'|^2}{(1 + |g|^2)} \right) \\ &= -\frac{4}{\lambda^2} \frac{|g'|^2}{(1 + |g|^2)^2} \\ &= \frac{16 |g'|^2}{|f|^2 (1 + |g|^2)^4}, \end{aligned} \tag{3.22}$$

ou seja, a curvatura gaussiana está dada, em termos dos dados de Weierstrass, por

$$K = - \left(\frac{4 |g'|}{|f| (1 + |g|^2)^2} \right)^2 \tag{3.23}$$

Proposição 3.2. *Seja $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima com $S = X(\Omega)$ conexa e cujos dados de Weierstrass são (g, f) . Então a curvatura gaussiana só pode ter zeros isolados, exceto no caso do plano onde $K \equiv 0$.*

Demonstração. Vamos supor que K não é equivalente a zero. Pela equação (3.23), vemos que os zeros da curvatura gaussiana são os zeros de g' e os polos de g e as mesmas só possuem zeros e polos isolados pois são meromorfas. \square

Observação. Se z_0 é um polo de g , então $K(z_0) = 0$ se, e somente se, a ordem de z_0 é maior que 1. De fato, se z_0 é um polo de g de ordem m , então, pela propriedade dos zeros e polos, z_0 é um zero de f de ordem $2m$. Assim, existe uma vizinhança W de z_0 tal que

$$g(z) = \frac{q(z)}{(z - z_0)^m} \text{ e } f(z) = p(z)(z - z_0)^{2m}, \forall z \in W,$$

onde p e q são holomorfas e não se anulam em W (veja teoremas B.11 e B.12). Então

$$g'(z) = \frac{q'(z)(z - z_0)^m - mq(z)(z - z_0)^{m-1}}{(z - z_0)^{2m}} = \frac{q'(z)(z - z_0) - mq(z)}{(z - z_0)^{m+1}}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \frac{|g'(z)|}{|f(z)|(1 + |g(z)|^2)^2} &= \frac{\left| \frac{q'(z)(z - z_0) - mq(z)}{(z - z_0)^{m+1}} \right|}{|p(z)(z - z_0)^{2m}| \left(1 + \left| \frac{q(z)}{(z - z_0)^m} \right|^2 \right)^2} \\ &= \frac{|q'(z)(z - z_0) - mq(z)|}{|p(z)| (|z - z_0|^{2m} + |q(z)|^2)^2} |z - z_0|^{m-1}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$K(z) = - \left(\frac{4 |q'(z)(z - z_0) - mq(z)|}{|p(z)| (|z - z_0|^{2m} + |q(z)|^2)^2} |z - z_0|^{m-1} \right)^2.$$

Proposição 3.3. *Sejam (g, f) os dados de Weierstrass de uma imersão mínima conforme X com curvatura de Gauss estritamente negativa em \mathbb{D} e $h : \mathbb{D}_\eta \longrightarrow \mathbb{C}$, $1 \leq \eta \leq \xi$, uma função holomorfa satisfazendo*

$$(i) \ h(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{D}_\eta,$$

$$(ii) \ \left(\frac{g}{h} \right)'(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{D}.$$

Então a imersão mínima cujos dados de Weierstrass são $(g/h, fh)$ tem curvatura de Gauss estritamente negativa em \mathbb{D} .

Demonstração. Pela observação 3.3 sabemos que $(g/h, fh)$ são os dados de Weierstrass de uma nova imersão mínima conforme $\tilde{X} : \mathbb{D}_\eta \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Vamos ver que dita imersão tem curvatura de Gauss estritamente negativa. Usando a fórmula (3.23), obtemos

$$K_X = - \left(\frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2} \right)^2 \quad \text{e} \quad K_{\tilde{X}} = - \left(\frac{4|(g/h)'|}{|fh|(1+|g/h|^2)^2} \right)^2.$$

Vamos supor que existe $z_0 \in \overline{\mathbb{D}}$ tal que $K_{\tilde{X}}(z_0) = 0$. Como estamos assumindo que $(g/h)'(z_0) \neq 0$, segue que z_0 só pode ser polo de g/h , e cuja ordem é maior que 1 pela observação anterior. Mas isto implica que z_0 é polo de g com a mesma ordem porque h é holomorfa e não se anula em \mathbb{D}_η . Novamente pela observação anterior vemos que $K(z_0) = 0$ o que é uma contradição. \square

Exemplo 3.4 (Curvatura gaussiana do helicóide). Vamos encontrar a curvatura gaussiana do helicóide usando (3.23). Para encontrar os dados de Weierstrass desta superfície vamos achar uma parametrização conforme da mesma fazendo uma mudança de coordenadas na imersão (2.7) dada no exemplo 2.4 que não é conforme. Mais precisamente, seja

$$u_1 = v_1 - \frac{\pi}{2} \quad \text{e} \quad u_2 = a \sinh v_2,$$

então

$$\tilde{X}(v_1, v_2) = \left(a \sin v_1 \sinh v_2, -a \cos v_1 \sinh v_2, av_1 - a \frac{\pi}{2} \right),$$

portanto

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{X}}{\partial u_1} &= (a \cos v_1 \sinh v_2, a \sin v_1 \sinh v_2, a) \\ \frac{\partial \tilde{X}}{\partial u_2} &= (a \sin v_1 \cosh v_2, -a \cos v_1 \cosh v_2, 0), \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} g_{11} &= a^2 \sinh^2 v_2 + a^2 = a^2 \cosh^2 v_2 \\ g_{12} &= 0 \\ g_{22} &= a^2 \cosh^2 v_2 \end{aligned}$$

onde \tilde{X} é imersão conforme e, portanto, temos associada três funções holomor-

fas como garante o teorema 3.1 que são

$$\phi_1 = a \cos v_1 \sinh v_2 - ai \sin v_1 \cosh v_2 = -a \sinh(iz),$$

$$\phi_2 = a \sin v_1 \sinh v_2 + ai \cos v_1 \cosh v_2 = ai \cosh(iz)$$

e

$$\phi_3 = a.$$

Assim, os dados de Weierstrass do helicóide vêm dados por

$$f = -a \sinh(iz) - i(ai \cosh(iz)) = ae^{-iz},$$

$$g = \frac{a}{ae^{-iz}} = e^{iz},$$

com $z \in \mathbb{C}$, donde

$$g' = ie^{iz},$$

portanto

$$|f| = |a|e^{u_2}, \quad |g| = e^{-u_2} \quad \text{e} \quad |g'| = e^{-u_2},$$

assim

$$K = - \left(\frac{4e^{-u_2}}{|a|e^{u_2}(1+e^{-2u_2})^2} \right)^2 = - \left(\frac{4e^{-2u_2}}{|a|(1+e^{-2u_2})^2} \right)^2 = - \left(\frac{16e^{-4u_2}}{a^2(1+e^{-2u_2})^4} \right).$$

Observação. Em [19], Rossenberg, H. mostrou que uma superfície mínima, injetivamente imersa em \mathbb{R}^3 , completa e de curvatura de Gauss limitada é própria. O helicóide é uma superfície própria pois

$$-\frac{16}{a^2} \leq K < 0.$$

Por outro lado, podemos achar uma fórmula para as curvaturas principais. Dado que a imersão é mínima, temos que as mesmas satisfazem $k_2 = -k_1$ e, como vale (3.23), vemos que

$$k_1 = -\frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2} \quad \text{e} \quad k_2 = \frac{4|g'|}{|f|(1+|g|^2)^2}. \quad (3.24)$$

Além disso, podemos também obter uma fórmula para a curvatura total em termos destes dados. Seja D um domínio tal que $\overline{D} \subset \Omega$. Então temos que

a curvatura total de $X|_D$ está dada por (estamos usando (A.36))

$$\iint_D K dA = \iint_D K \lambda^2 du_1 du_2 = - \iint_D \frac{4}{\lambda^2} \frac{|g'|^2}{(1 + |g|^2)^2} \lambda^2 du_1 du_2,$$

esta última igualdade devido a (3.22). Daí,

$$\iint_D K dA = -4 \iint_D \frac{|g'|^2}{(1 + |g|^2)^2} du_1 du_2 \quad (3.25)$$

Podemos dar agora uma interpretação geométrica para a curvatura total. Seja $R = X(D)$ e π a projeção estereográfica desde o polo norte⁴. Como $N = \pi^{-1} \circ g$, então, tomando coordenadas $(v_1, v_2) \in g(D)$, a área de $N(R) \subset \mathbb{S}^2$ é

$$\begin{aligned} A(N(R)) &= \iint_{g(D)} \left\| \frac{\partial \pi^{-1}}{\partial v_1} \wedge \frac{\partial \pi^{-1}}{\partial v_2} \right\| dv_1 dv_2 \\ &= \iint_{g(D)} \frac{4}{(1 + v_1^2 + v_2^2)^2} dv_1 dv_2 \\ &= \iint_D \frac{4}{(1 + |g(u_1, u_2)|^2)^2} |g'(u_1, u_2)|^2 du_1 du_2^5 \\ &= - \iint_D K du_1 du_2, \end{aligned}$$

ou seja, a curvatura total é o negativo da área da imagem da aplicação normal de Gauss da superfície contando o número de vezes que a mesma cobre $N(R)$. Se N atinge quase todo ponto em \mathbb{S}^2 um mesmo número de vezes $n < \infty$, então a curvatura total da superfície é

$$\iint_D K du_1 du_2 = -nA(\mathbb{S}^2) = -4\pi n.$$

Exemplo 3.5 (Curvatura total do catenoide). Usando novamente os dados de Weierstrass que obtivemos no exemplo 3.2, vemos que $g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ é uma bijeção e como π^{-1} é uma bijeção, então N é uma bijeção, ou seja $n = 1$. Além disso, como $\pi^{-1}(0) = (0, 0, -1)$ vemos que a imagem de N é $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, \pm 1)\}$, logo

$$\iint_{\mathbb{C} \setminus \{0\}} K dS = -4\pi.$$

Exemplo 3.6 (Curvatura total do helicóide). Primeiramente vamos calcular a curvatura total de um pedaço fundamental do helicóide usando (3.25). Este pedaço fundamental tem como domínio $\Omega = [0, 2\pi a] \times \mathbb{R}$ como

⁴A primeira forma fundamental da esfera com a parametrização estereográfica pode ser encontrada no exemplo A.2.

⁵Note que o jacobiano da g é $|g|^2$ (veja observação B.1).

vimos na observação 2.1, logo

$$\begin{aligned}
 \iint_{\Omega} K dA &= -4 \int_0^{2\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2u_2}}{(1 + e^{-2u_2})^2} du_2 du_1 \\
 &= 4\pi a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-2e^{-2u_2}}{(1 + e^{-2u_2})^2} du_2 \\
 &= 4\pi a \int_{\infty}^0 \frac{du}{(1 + u)^2} \\
 &= -4\pi a \int_0^{\infty} \frac{du}{(1 + u)^2} \\
 &= -4\pi a.
 \end{aligned}$$

Mas, a curvatura total do helicóide é $-\infty$.

Observação. Huber [20] mostrou que uma superfície mínima completa com curvatura total finita é conformemente equivalente a uma superfície de Riemann compacta menos um número finito de pontos. Estes pontos correspondem aos fins da superfície. Graças a este teorema, Osserman [7] mostrou que os dados de Weierstrass se estendem meromorficamente à superfície de Riemann compacta e, conseqüentemente, a aplicação normal de Gauss também se estende sobre M . Usando isto, L. P. Jorge e W. Meeks [21] provaram que uma superfície mínima completa de curvatura total finita em \mathbb{R}^3 é própria. Logo, a superfície não pode estar em um semi-espaço exceto se for um plano, usando o teorema 1 em [22]. Um outro teorema foi dado por Colding e Minicozzi [23]. Eles provaram que toda superfície mínima completa mergulhada em \mathbb{R}^3 com topologia finita é própria.

4

Superfícies mínimas completas em \mathbb{R}^3 entre planos paralelos: Teoremas de Jorge-Xavier e Rosenberg-Toubiana

O objetivo deste capítulo é discutir os trabalhos feitos por L. P. M. de Jorge e F. Xavier em [10] e por Rosenberg e E. Toubiana em [11]. O ponto de partida destes exemplos é encontrar uma função holomorfa num disco e que não se anule neste conjunto para que a imersão dada pelos dados de Weierstrass esteja bem definida. Além disso, é preciso fazer uma boa escolha para que a superfície seja completa. A ideia para este tipo de construção está motivada por uma ideia de Remmert que usava o teorema de Runge para mostrar a existência de mergulhos holomorfos próprios do disco unidade em \mathbb{C}^3 . Usaremos a notação \mathbb{D} para indicar o disco unitário e \mathbb{D}_c para indicar o disco centrado na origem e de raio c , e \mathbb{S}^1 o círculo unitário.

4.1

Construção sobre um disco de Jorge e Xavier

Como foi dito, Jorge e Xavier, em [10], proporcionaram por primeira vez um método de construção de superfícies mínimas completas não planas, imersas em uma banda de \mathbb{R}^3 . Mais precisamente, eles provaram o seguinte resultado:

Teorema 4.1 (Jorge-Xavier). *Existe uma imersão mínima completa não plana $X : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuja imagem está contida entre dois planos paralelos.*

A construção desta imersão é feita obtendo uns dados de Weierstrass da forma $(g, 1/g)$, onde $g : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função holomorfa que não se anula em \mathbb{D} . Pela observação 3.2, sabemos que $X : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada a partir destes dados está bem definida e é uma imersão mínima. A mesma está dada por

$$X(z) = \left(\Re \int_0^z \frac{1}{2} \left(\frac{1}{g(\zeta)} - g(\zeta) \right) d\zeta, \Re \int_0^z \frac{i}{2} \left(\frac{1}{g(\zeta)} + g(\zeta) \right) d\zeta, \Re \int_0^z d\zeta \right) \quad (4.1)$$

Como $x_3 = \Re \int_0^z d\zeta$ e $|z| < 1$, então $|x_3| < 1$ e isto diz que a superfície está contida entre dois planos paralelos.

Vamos construir então a função g . Seja D_n uma sequência de discos centrados na origem verificando

1. $D_n \subset \overset{\circ}{D}_{n+1}$,
2. $\bigcup_n D_n = \mathbb{D}$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ vamos considerar um anel contido no interior do conjunto $D_n \setminus D_{n-1}$, cujo bordo é a união de dois círculos A_n e B_n , e que denotaremos por $C(A_n, B_n)$. Seja K_n o conjunto compacto obtido removendo de $C(A_n, B_n)$ um pequeno pedaço, interceptando o eixo real positivo se n é ímpar, e interceptando o eixo real negativo se n é par (veja figura 4.1). Podemos observar que a sequência K_n satisfaz

1. $K_n \subset D_n \forall n \in \mathbb{N}$,
2. $K_n \cap D_{n-1} = \emptyset \forall n \in \mathbb{N}$,
3. $\mathbb{C} \setminus K_n$ é conexo.

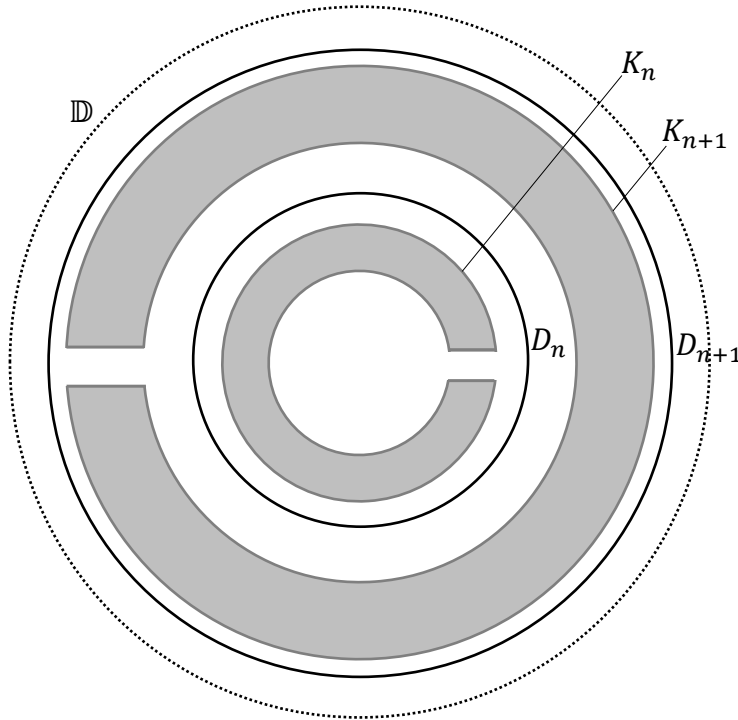


Figura 4.1: Os conjuntos K_n e K_{n+1} .

Como para cada $n \in \mathbb{N}$ os conjuntos K_n são compactos disjuntos, existe uma sequência de abertos disjuntos U_n tal que $K_n \subset U_n$. Seja $\{c_n\}$ uma sequência de números reais positivos que especificaremos depois, e seja $f : \bigcup_n U_n \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = c_n \text{ se } z \in U_n.$$

Então f é holomorfa. Logo, existe uma função h holomorfa em \mathbb{D} tal que

$$|h(z) - f(z)| < 1 \quad \forall z \in \bigcup_n K_n,$$

pelo teorema de Runge, ou seja,

$$|h(z) - c_n| < 1 \quad \forall z \in K_n. \quad (4.2)$$

Definimos g como sendo

$$g(z) = e^{h(z)}, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Só falta provar que a imersão definida em (4.1) é completa para uma seleção adequada da sequência $\{c_n\}$, ou seja,

$$\int_0^b \left(\frac{1}{|g(\beta(t))|} + |g(\beta(t))| \right) dt = \infty \quad (4.3)$$

para cada curva $\beta : [0, b) \rightarrow \mathbb{D}$ divergente e parametrizada pelo comprimento de arco.

Sejam

$$E = \bigcup_{n \text{ par}} K_n \quad \text{e} \quad O = \bigcup_{n \text{ ímpar}} K_n.$$

Dizemos que uma curva β atravessa um conjunto K_n se intercepta os dois arcos A_n e B_n que estão na fronteira de K_n .

Afirmção 4.1. *Qualquer curva divergente em \mathbb{D} com comprimento finito, atravessa todos os K_n de E salvo um número finito deles, ou atravessa todos os K_n de O salvo um número finito deles.*

Demonstração. Se evitasse uma quantidade infinita deles, desviando pelos eixos, a curva teria comprimento infinito. \square

É preciso fazer distinção entre os casos seguintes.

1. β tem comprimento infinito ($b = \infty$).

Como $\frac{1}{|g(z)|} + |g(z)| \geq 1$, $\forall z \in \mathbb{D}$, então

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{|g(\beta(t))|} + |g(\beta(t))| \right) dt \geq \int_0^\infty dt = \infty.$$

2. β tem comprimento finito ($b < \infty$).

Neste caso vale a afirmação 4.1. Vamos considerar que temos a primeira das possibilidades desta afirmação. Escrevendo

$$g(z) = e^{c_n} e^{h(z)-c_n},$$

temos que

$$|g(z)| = e^{c_n} e^{\Re h(z) - c_n}.$$

Como vale (4.2), então $\Re h(z) - c_n > -1$, portanto

$$|g(z)| > e^{c_n-1} \quad \forall z \in K_n. \quad (4.4)$$

Sejam $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que β atravessa cada K_n de E para $n \geq n_1$, e

$$J_n = \{t \in [0, b); \beta(t) \in K_n\} = [a_n, b_n]. \quad (4.5)$$

Note que $\bigcup_n J_n \neq [0, b)$ pois $\bigcap_n K_n = \emptyset$, então

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{1}{|g(\beta(t))|} dt + \int_0^b |g(\beta(t))| dt &\geq \int_0^b |g(\beta(t))| dt \\ &\geq \sum_{\substack{n \geq n_1 \\ n \text{ par}}} \int_{a_n}^{b_n} |g(\beta(t))| dt \\ &\geq \sum_{\substack{n \geq n_1 \\ n \text{ par}}} \int_{a_n}^{b_n} e^{c_n-1} dt \quad \text{por (4.4)} \\ &= \sum_{\substack{n \geq n_1 \\ n \text{ par}}} e^{c_n-1} \ell(\beta|_{J_n}) \end{aligned}$$

e, como $\ell(\beta|_{J_n})$ é maior o igual que a diferença r_n entre os raios de A_n e B_n , então

$$\int_0^b \frac{1}{|g(\beta(t))|} dt + \int_0^b |g(\beta(t))| dt \geq \sum_{\substack{n \geq n_1 \\ n \text{ par}}} r_n e^{c_n-1}.$$

Analogamente, se temos a segunda das possibilidades na afirmação 4.1, existe um $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que β atravessa cada compacto K_n de O para $n \geq n_2$, e obtemos

$$\int_0^b \frac{1}{|g(\beta(t))|} dt + \int_0^b |g(\beta(t))| dt \geq \sum_{\substack{n \geq n_2 \\ n \text{ ímpar}}} r_n e^{c_n-1}.$$

Logo, se escolhermos $c_n = -\log r_n$, então

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \geq n_1 \\ n \text{ par}}} r_n e^{c_n-1} &= \sum_{\substack{n \geq n_1 \\ n \text{ par}}} \frac{1}{e} = \infty. \\ \sum_{\substack{n \geq n_2 \\ n \text{ ímpar}}} r_n e^{c_n-1} &= \sum_{\substack{n \geq n_2 \\ n \text{ ímpar}}} \frac{1}{e} = \infty. \end{aligned}$$

Isto finaliza a prova do teorema 4.1.

4.2

Construção sobre um anel de Rosenberg e Toubiana

Rosenberg e Toubiana, seguindo a mesma ideia de Jorge e Xavier, demonstraram a existência de superfícies mínimas completas entre dois planos paralelos, mas dessa vez, sobre um anel da forma $1/c < |z| < c$ que será denotado por $C(1/c, c)$. Mais precisamente mostraram o seguinte teorema.

Teorema 4.2 (Rosenberg-Toubiana). *Dado $c > 1$ existe uma imersão $X : C(1/c, c) \rightarrow \mathbb{R}^3$ mínima e completa, cuja imagem está contida entre dois planos paralelos e é topologicamente um cilindro.*

Isto foi provado pela obtenção de uns dados de Weierstrass da forma $(g(z), \frac{1}{z\overline{g(z)}})$ onde $g : C(1/c, c) \rightarrow \mathbb{C}$ é uma função holomorfa que não se anula em $C(1/c, c)$ e verifica

$$\int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta g(\zeta)} = \overline{\int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta}, \quad (4.6)$$

para toda curva $\gamma : [a, b] \rightarrow C(1/c, c)$ ao redor da origem.

Vamos ver qual é o sentido desta condição. A superfície será topologicamente um cilindro se a imersão X manda círculos $|z| = k$, com $k > 0$, num plano horizontal, ou seja, x_3 seria constante em cada círculo $|z| = k$. Dado que x_3 é harmônica, temos o seguinte problema¹

$$\begin{cases} \Delta u(z) = 0 & \text{se } z \in C(c_1, c_2), \\ u(z) = a & \text{se } |z| = c_1, \\ u(z) = b & \text{se } |z| = c_2. \end{cases} \quad (4.7)$$

Então a função

$$u(z) = A \log |z| + B, \quad z = u_1 + iu_2$$

é solução de (4.7) para $a = A \log c_1 + B$ e $b = A \log c_2 + B$ pois

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial u_1} &= \frac{2Au_1}{u_1^2 + u_2^2} \implies \frac{\partial^2 u}{\partial u_1^2} = -\frac{2A(u_1^2 - u_2^2)}{(u_1^2 + u_2^2)^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial u_2} &= \frac{2Au_2}{u_1^2 + u_2^2} \implies \frac{\partial^2 u}{\partial u_2^2} = \frac{2A(u_1^2 - u_2^2)}{(u_1^2 + u_2^2)^2}, \end{aligned}$$

portanto $\Delta u = 0$. Por outro lado, dita solução é única. De fato, suponhamos que existe uma outra solução v do problema (4.7) e consideremos a função harmônica $w(z) = u(z) - v(z)$. Então $w(z) = 0$, para todo $z \in \partial C(c_1, c_2)$ e, portanto, ela atinge um máximo ou um mínimo no interior. Assim, w é constante (igual a zero) pelo princípio do máximo para funções harmônicas (veja corolário B.6.2). Logo $u \equiv v$.

¹Este é um caso particular para o operador laplaciano do Problema de Dirichlet.

Então, tomando $g(z)f(z) = \frac{1}{z}$, temos que

$$x_3 = \Re \int_{z_0}^z \frac{1}{\zeta} d\zeta = \log |z| + D, \quad z \in C(1/c, c),$$

onde D é uma constante, sendo solução do problema de Dirichlet. Assim $(g(z), \frac{1}{zg(z)})$ serão os dados de Weierstrass da imersão em questão.

Como já foi dito, para que a imersão X esteja bem definida é necessário que os períodos das funções ϕ_k , $k = 1, 2, 3$, sejam imaginários puros. A própria construção de x_3 implica que está bem definida pois

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{\zeta} d\zeta = 2\pi i.$$

Falta provar que x_1 e x_2 também estão bem definidas. A condição (4.6) é introduzida para garantir isto. De fato, se $\gamma : [a, b] \rightarrow C(1/c, c)$ é uma curva suave ao redor da origem, então

$$\begin{aligned} 2 \Re \left(\int_{\gamma} \phi_1(\zeta) d\zeta \right) &= \Re \left(\int_{\gamma} f(\zeta) (1 - g(\zeta)^2) d\zeta \right) \\ &= \Re \left(\int_{\gamma} \frac{1}{\zeta g(\zeta)} - \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{\gamma} \frac{1}{\zeta g(\zeta)} d\zeta - \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta + \overline{\int_{\gamma} \frac{1}{\zeta g(\zeta)} d\zeta} - \overline{\int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta} \right) \\ &= 0 \quad \text{pela condição (4.6),} \end{aligned}$$

logo x_1 está bem definida.

Analogamente,

$$\begin{aligned} 2 \Re \left(\int_{\gamma} \phi_2(\zeta) d\zeta \right) &= \Re \left(i \int_{\gamma} f(\zeta) (1 + g(\zeta)^2) d\zeta \right) \\ &= \Re \left(i \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta g(\zeta)} + \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right) \\ &= -\Im \left(\int_{\gamma} \frac{1}{\zeta g(\zeta)} + \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right) \\ &= -\frac{1}{2i} \left(\int_{\gamma} \frac{1}{\zeta g(\zeta)} d\zeta + \int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta - \overline{\int_{\gamma} \frac{1}{\zeta g(\zeta)} d\zeta} - \overline{\int_{\gamma} \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta} \right) \\ &= 0 \quad \text{pela condição (4.6),} \end{aligned}$$

logo x_2 também está bem definida. Em resumo a imersão

$$X(z) = \left(\Re \left(\int_1^z \frac{1}{\zeta g(\zeta)} - \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right), \Re \left(i \int_1^z \frac{1}{\zeta g(\zeta)} + \frac{g(\zeta)}{\zeta} d\zeta \right), \Re \left(\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} \right) \right),$$

onde $z \in C(1/c, c)$, está bem definida.

Vamos construir então a função holomorfa g que não se anula em $C(1/c, c)$ e que satisfaz a condição (4.6). O procedimento é análogo à construção de Jorge-Xavier, mas agora vamos precisar, tanto de uma sequência de compactos que se acumule em $\partial \mathbb{D}_c$, como de uma outra que se acumule na fronteira de $\mathbb{D}_{1/c}$ pois os caminhos podem divergir tanto para $\partial \mathbb{D}_{1/c}$, como para $\partial \mathbb{D}_c$. Mais precisamente, seja $\{D_n\}$ uma sequência de discos centrados na origem satisfazendo

1. $D_n \subset \overset{\circ}{D}_{n+1}$,
2. $\bigcup_n D_n = \mathbb{D}_c$.
3. $\mathbb{D} \subset D_1$.

Seja $\{K_n\}$ uma sequência de compactos como na seção anterior de forma tal que $K_1 \cap \mathbb{D} = \emptyset$, ou seja, os conjuntos K_n estão fora do disco unitário mas dentro do anel. Assim, esta sequência satisfaz

1. $K_n \subset D_n \forall n \in \mathbb{N}$,
2. $K_n \cap D_{n-1} = \emptyset \forall n \in \mathbb{N}$,
3. $\mathbb{C} \setminus K_n$ é conexo.

Seja $\{c_n\}$ uma sequência de números reais positivos que vamos especificar depois. Raciocinando como na seção anterior vemos que, como consequência do teorema de Runge (veja lema B.2), existe uma função holomorfa g_0 sobre \mathbb{D}_c satisfazendo

$$|g_0(z) - c_n| < 1 \quad \forall z \in K_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (4.8)$$

Definamos agora uma nova sequência de compactos $\{L_n\}$ como sendo

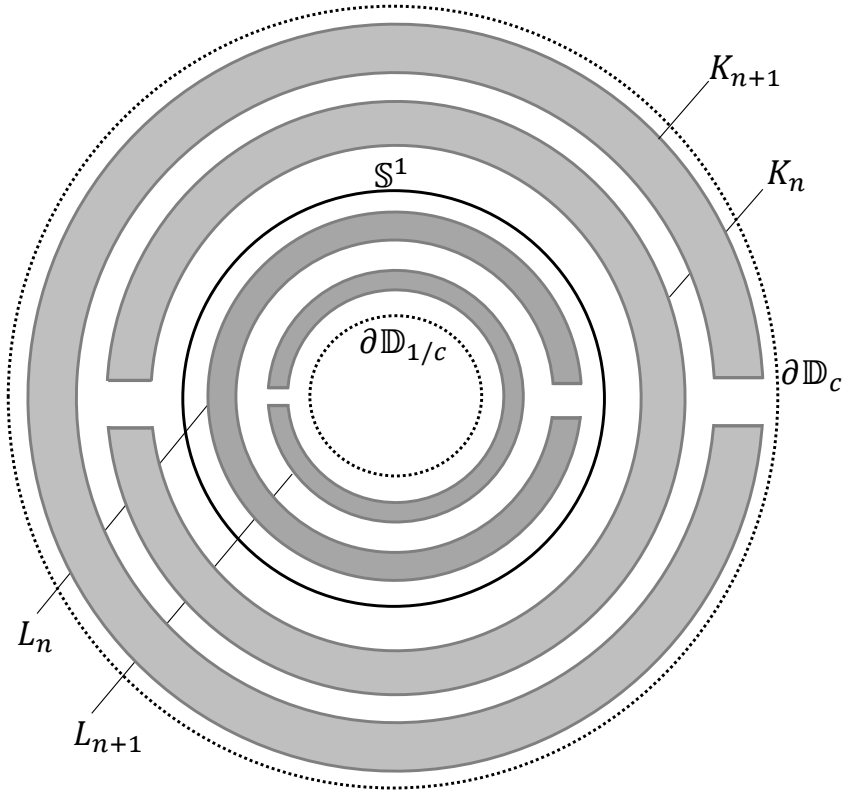
$$L_n = \left\{ -\frac{1}{\bar{z}}, \quad z \in K_n \right\},$$

Então $\{K_n\}$ é uma sequência que se acumula em $\partial \mathbb{D}_c$ e $\{L_n\}$ em $\partial \mathbb{D}_{1/c}$ (veja figura 4.2).

Por último vamos definir a função

$$g(z) = z \exp \left(2 \left(g_0(z) - \overline{g_0 \left(-\frac{1}{\bar{z}} \right)} \right) \right), \quad z \in C(1/c, c).$$

A função g é holomorfa em $C(1/c, c)$ pois a função $\hat{g}(z) = \overline{g_0 \left(-\frac{1}{\bar{z}} \right)}$ é holomorfa neste conjunto já que $\frac{\partial \hat{g}}{\partial \bar{z}} = 0$. Além disso é obvio que g não se anula em $C(1/c, c)$.

Figura 4.2: Os conjuntos K_n , K_{n+1} , L_n e L_{n+1} .

Por outro lado temos o seguinte,

$$\begin{aligned}
 g\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) &= -\frac{1}{\bar{z}} \exp\left(2\left(g_0\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right) - \overline{g_0(z)}\right)\right) \\
 &= -\frac{1}{z \exp\left(2\left(g_0(z) - \overline{g_0\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right)}\right)\right)} \\
 &= -\frac{1}{g(z)},
 \end{aligned}$$

ou seja,

$$\frac{1}{g(z)} = -\overline{g\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right)}. \quad (4.9)$$

Então, se a curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ é uma parametrização de \mathbb{S}^1 temos o seguinte,

$$\gamma(t)\overline{\gamma(t)} = 1, \quad (4.10)$$

logo,

$$-\overline{\gamma(t)} = -\frac{1}{\gamma(t)} \quad (4.11)$$

Diferenciando (4.10) obtemos

$$\gamma'(t) = -\frac{\overline{\gamma'(t)}}{\gamma(t)^2}. \quad (4.12)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta g(\zeta)} &= \int_{\gamma} \frac{1}{\zeta} \left(-g \left(-\frac{1}{\bar{\zeta}} \right) \right) d\zeta \text{ por (4.9)} \\
 &= \int_0^{2\pi} \frac{-1}{\gamma(t)} g \left(-\frac{1}{\overline{\gamma(t)}} \right) \gamma'(t) dt \\
 &= \int_0^{2\pi} -\overline{\gamma(t)} g(-\gamma(t)) \gamma'(t) dt \text{ por (4.11)} \\
 &= \int_0^{2\pi} -\overline{\gamma(t)} g(-\gamma(t)) \left(-\frac{\overline{\gamma'(t)}}{\gamma(t)^2} \right) dt \text{ por (4.12)} \\
 &= \int_0^{2\pi} \overline{\left(\frac{g(-\gamma(t))}{-\gamma(t)} (-\gamma'(t)) \right)} dt \\
 &= \int_{\gamma} \overline{\frac{g(\zeta)}{\zeta}} d\zeta,
 \end{aligned}$$

ou seja, g satisfaz a condição (4.6) como desejado.

Consideremos também os conjuntos E e O da seção anterior e

$$\hat{E} = \bigcup_{n \text{ par}} L_n \text{ e } \hat{O} = \bigcup_{n \text{ ímpar}} L_n.$$

Então são satisfeitas as seguintes afirmações.

Afirmção 4.2. *Qualquer curva $\beta : [a, b] \rightarrow C(1/c, c)$ que diverge para $\partial \mathbb{D}_c$ e que tem comprimento finito, atravessa todos os K_n de E salvo um número finito deles, ou atravessa todos os K_n de O salvo um número finito deles.*

Afirmção 4.3. *Qualquer curva $\beta : [a, b] \rightarrow C(1/c, c)$ que diverge para $\partial \mathbb{D}_{1/c}$ e que tem comprimento finito, atravessa todos os L_n de \hat{E} salvo um número finito deles, ou atravessa todos os K_n de \hat{O} salvo um número finito deles.*

Falta mostrar que dita imersão é completa, ou seja,

$$\int_0^b \frac{1}{|\beta(t)|} \left(\frac{1}{|g(\beta(t))|} + |g(\beta(t))| \right) dt = \infty, \quad (4.13)$$

para cada curva $\beta : [0, b) \rightarrow C(1/c, c)$ divergente e parametrizada pelo comprimento de arco. Para isto vamos a fazer algumas considerações prévias.

1. Suponhamos que $z \in \bigcup_n K_n$, e vamos a limitar inferiormente $|g(z)|$. Temos o seguinte

$$(a) \quad |z| > 1 \quad \forall z \in \bigcup_n K_n.$$

(b) Como vale (4.8), então

$$\Re(c_n - g_0(z)) < 1 \implies \Re(g_0(z)) > c_n - 1,$$

assim

$$\exp(2\Re(g_0(z))) = |\exp(2g_0(z))| > \exp(2c_n - 2). \quad (4.14)$$

- (c) Como $z \in C(1/c, c)$ e $\exp\left(-2g_0\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right)\right)$ é holomorfa neste conjunto, então

$$\left|\exp\left(-2g_0\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right)\right)\right| \geq \inf_{w \in C(1/c, c)} \left|\exp\left(-2g_0\left(-\frac{1}{\bar{w}}\right)\right)\right| = L_1 > 0. \quad (4.15)$$

Usando (4.14) e (4.15) obtemos

$$|g(z)| = |z| |\exp(2g_0(z))| \left|\exp\left(-2g_0\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right)\right)\right| > \exp(2c_n - 2)L_1,$$

ou seja,

$$|g(z)| > Le^{2c_n}, \quad L > 0 \quad \forall z \in \bigcup_n K_n. \quad (4.16)$$

2. Suponhamos agora que $z \in \bigcup_n L_n$ e vamos limitar inferiormente $\frac{1}{|g(z)|}$.

Temos o seguinte

- (a) $\left|\frac{1}{z}\right| > 1 \quad \forall z \in \bigcup_n L_n$.

- (b) Como $z \in \bigcup_n L_n$, então $-\frac{1}{z} \in \bigcup_n K_n$, e como vale (4.8), temos que

$$\Re\left(c_n - g_0\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right)\right) < 1 \implies \Re\left(g_0\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right)\right) > c_n - 1,$$

assim

$$\exp\left(2\Re\left(g_0\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right)\right)\right) = \left|\exp\left(2g_0\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right)\right)\right| > \exp(2c_n - 2). \quad (4.17)$$

- (c) Como $z \in C(1/c, c)$ e $\exp(-2g_0(z))$ é holomorfa neste conjunto, então

$$|\exp(-2g_0(z))| \geq \inf_{w \in C(1/c, c)} |\exp(-2g_0(w))| = L_2 > 0. \quad (4.18)$$

Usando (4.17) e (4.18) obtemos

$$\left|\frac{1}{g(z)}\right| = \left|\frac{1}{z}\right| |\exp(-2g_0(z))| \left|\exp\left(2g_0\left(-\frac{1}{\bar{z}}\right)\right)\right| > \exp(2c_n - 2)L_2,$$

ou seja,

$$\left|\frac{1}{g(z)}\right| > L'e^{2c_n}, \quad L' > 0 \quad \forall z \in \bigcup_n L_n. \quad (4.19)$$

Vamos ver que para uma eleição adequada da sequência $\{c_n\}$ se satisfaz (4.13). Para isto precisamos separar em dois casos.

1. β tem comprimento infinito ($b = \infty$).

Neste caso, como

$$\frac{1}{|g(z)|} + |g(z)| \geq 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{|z|} \geq \frac{1}{c},$$

então

$$\lambda(z) = \frac{1}{|z|} \left(\frac{1}{|g(z)|} + |g(z)| \right) \geq \frac{1}{c},$$

portanto

$$\int_0^\infty \frac{1}{|\beta(t)|} \left(\frac{1}{|g(\beta(t))|} + |g(\beta(t))| \right) dt \geq \frac{1}{c} \int_0^\infty dt = \infty.$$

2. β tem comprimento finito ($b < \infty$).

Precisamos separar este caso em mais dois.

(i) β diverge para $\partial \mathbb{D}_c$

Neste caso vale a afirmação 4.2. Se temos a primeira das possibilidades, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que β atravessa todos os $K_n \forall n \geq n_1$, n par, então

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{1}{|\beta(t)|} \left(\frac{1}{|g(\beta(t))|} + |g(\beta(t))| \right) dt &\geq \frac{1}{c} \int_0^b |g(\beta(t))| dt \\ &\geq \frac{1}{c} \sum_{\substack{n \geq n_1 \\ n \text{ par}}} \int_{a_n}^{b_n} |g(\beta(t))| dt \\ &\geq \frac{L}{c} \sum_{\substack{n \geq n_1 \\ n \text{ par}}} e^{2c_n} \ell(\beta|_{J_n}) \text{ por (4.16)} \end{aligned}$$

e, dado que $\ell(\beta|_{J_n})$ é maior o igual que a diferença r_n entre os raios de A_n e B_n , então

$$\int_0^b \frac{1}{|\beta(t)|} \left(\frac{1}{|g(\beta(t))|} + |g(\beta(t))| \right) dt \geq \frac{L}{c} \sum_{\substack{n \geq n_1 \\ n \text{ par}}} r_n e^{2c_n},$$

Analogamente, se temos a segunda das possibilidades, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_0^b \frac{1}{|\beta(t)|} \left(\frac{1}{|g(\beta(t))|} + |g(\beta(t))| \right) dt \geq \frac{L}{c} \sum_{\substack{n \geq n_2 \\ n \text{ ímpar}}} r_n e^{2c_n}.$$

Se escolhemos $c_n = -\frac{1}{2} \log r_n$, então

$$\sum_{\substack{n \geq n_1 \\ n \text{ par}}} r_n e^{2c_n} = \sum_{\substack{n \geq n_1 \\ n \text{ par}}} 1 = \infty.$$

$$\sum_{\substack{n \geq n_2 \\ n \text{ ímpar}}} r_n e^{2c_n} = \sum_{\substack{n \geq n_2 \\ n \text{ ímpar}}} 1 = \infty.$$

(ii) β diverge para $\partial \mathbb{D}_{1/c}$.

Neste caso vale a afirmação 4.3. Se for o primeiro dos casos, existe $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que β atravessa todos os L_n de \hat{E} salvo um número finito deles. Então, se $\hat{J}_n = \{t \in [0, b]; \beta(t) \in L_n\} = [\hat{a}_n, \hat{b}_n]$, temos que

$$\begin{aligned} \int_0^b \frac{1}{|\beta(t)|} \left(\frac{1}{|g(\beta(t))|} + |g(\beta(t))| \right) dt &\geq \frac{1}{c} \int_0^b \frac{1}{|g(\beta(t))|} dt \\ &\geq \frac{1}{c} \sum_{\substack{n \geq m_1 \\ n \text{ par}}} \int_{\hat{a}_n}^{\hat{b}_n} \frac{1}{|g(\beta(t))|} dt \\ &\geq \frac{L'}{c} \sum_{\substack{n \geq m_1 \\ n \text{ par}}} e^{2c_n} \ell(\beta|_{\hat{J}_n}) \text{ por (4.19),} \end{aligned}$$

e, dado que $\ell(\beta|_{\hat{J}_n})$ é maior o igual que a diferença s_n entre os raios dos círculos $\hat{A}_n = \{-\frac{1}{\bar{z}}; z \in A_n\}$ e $\hat{B}_n = \{-\frac{1}{\bar{z}}; z \in B_n\}$, então

$$\int_0^b \frac{1}{|\beta(t)|} \left(\frac{1}{|g(\beta(t))|} + |g(\beta(t))| \right) dt \geq \frac{L'}{c} \sum_{\substack{n \geq m_1 \\ n \text{ par}}} s_n e^{2c_n}.$$

Analogamente, para a segunda possibilidade, existe $m_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_0^b \frac{1}{|\beta(t)|} \left(\frac{1}{|g(\beta(t))|} + |g(\beta(t))| \right) dt \geq \frac{L'}{c} \sum_{\substack{n \geq m_2 \\ n \text{ ímpar}}} s_n e^{2c_n}.$$

Se escolhemos $c_n = -\frac{1}{2} \log s_n$, então

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{n \geq m_1 \\ n \text{ ímpar}}} s_n e^{2c_n} &= \sum_{\substack{n \geq m_1 \\ n \text{ ímpar}}} 1 = \infty. \\ \sum_{\substack{n \geq m_2 \\ n \text{ ímpar}}} s_n e^{2c_n} &= \sum_{\substack{n \geq m_2 \\ n \text{ ímpar}}} 1 = \infty. \end{aligned}$$

Ou seja, dependendo das possibilidades para o comportamento de β , é possível encontrar uma sequência de reais positivos para que a condição (4.13) seja satisfeita. Assim está demonstrado o teorema 4.2.

Observação. Note que, como $g = \pi \circ N$ onde π é a projeção estereográfica desde o polo norte, e temos que g é uma função holomorfa que não se anula em $C(1/c, c)$, então o vetor normal não pode ser vertical. Assim, o plano tangente nunca é horizontal, ou seja, a superfície é transversal a cada plano horizontal.

5

Superfícies mínimas completas em \mathbb{R}^3 contidas em uma bola: Teorema de Nadirashvili

Este é o principal capítulo da dissertação. O objetivo é discutir o exemplo de Nadirashvili [12], que constitui um contraexemplo às conjecturas de Calabi-Yau e Hadamard. Mais precisamente, vamos mostrar o seguinte teorema.

Teorema 5.1 (Nadirashvili). *Existe uma imersão mínima conforme e completa $X : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$, que tem curvatura de Gauss estritamente negativa e cuja imagem está contida numa bola.*

A demonstração está baseada também nos trabalhos [24] e [25]. A ideia é construir uma sequência convergente de imersões mínimas conformes e limitadas em \mathbb{R}^3 com curvatura de Gauss estritamente negativa. O limite desta sequência também será uma imersão mínima conforme com curvatura de Gauss estritamente negativa e será uma imersão completa depois de fazer as escolhas certas. A sequência vai ser construída de forma recursiva. A construção do termo $n + 1$ a partir do termo n -ésimo está baseado no *Lema Principal*.

5.1

Lema Principal

Nesta seção será demonstrado o *Lema Principal* no qual está baseada a demonstração do teorema 5.1. Consideramos que a construção deste lema é a ideia mais original do artigo.

Lema Principal. *Seja $X \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{R}^3)$, tal que $X : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão mínima conforme verificando:*

- (i) $X(0) = 0$.
- (ii) (\mathbb{D}, d_X) é um disco geodésico de raio ρ com centro na origem.
- (iii) $X(\mathbb{D}) \subset B_r$.
- (iv) $K_X(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{D}$.

Então para cada $\epsilon > 0$ e $s > 0$, existe uma imersão mínima conforme, $Y : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$, verificando:

1. $Y(0) = 0$.
2. (\mathbb{D}, d_Y) é um disco geodésico de raio $\rho + s$ com centro na origem.
3. $\|Y(z) - X(z)\| < \epsilon, \forall z \in \mathbb{D}_{1-\epsilon}$.
4. $Y(\mathbb{D}) \subset B_R$, onde $R = \sqrt{r^2 + s^2} + \epsilon$.
5. $K_Y(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{D}$.

A ideia da prova do lema é a seguinte. Se toma a representação de Weierstrass da imersão X e se modifica usando o teorema de Runge (com uma ideia mais elaborada que no capítulo anterior). Em cada passo se obtêm uma nova Representação de Weierstrass ϕ^k que terá associada uma imersão F_k . Para cada k teremos associado um conjunto ω_k do disco unitário, no qual será modificada ϕ^{k-1} usando a transformação de López-Ros (veja observação 3.3) para obter ϕ^k mediante uma escolha adequada da função h desta transformação, de forma tal que isto implique um aumento da norma de ϕ^k com respeito à norma de ϕ^{k-1} em ω_k . Isto implicará um aumento de λ_{F_k} com respeito a $\lambda_{F_{k-1}}$ e, portanto, $\ell(F_k \circ \beta)$ será maior que $\ell(F_{k-1} \circ \beta)$ para qualquer curva β que atravesse estes conjuntos. Por outro lado, $F_k(\mathbb{D})$ estará limitado de uma forma adequada. Tendo fixado um $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande em função das hipóteses do lema será construída a imersão Y a partir da imersão F_{2N} .

5.1.1

Os conjuntos ω_k

Seja $N > 3$ um inteiro. Para cada $n \in \{1, 2, \dots, 2N^2\}$ e $m \in \{1, 2, \dots, N\}$, seja $S_n = 1 - \frac{n}{N^3}$ e \mathbb{S}_n o círculo centrado na origem com raio S_n . Seja

$$\Omega_N = \bigcup_{n,m} \Omega_N^{m,n}$$

onde cada conjunto $\Omega_N^{m,n}$ se define como segue (veja figura 5.1). Se n é ímpar

$$\Omega_N^{m,n} = \left\{ z \in \mathbb{C}; S_n + \frac{1}{4N^3} \leq |z| \leq S_{n-1} - \frac{1}{4N^3}, 2(m-1)\frac{\pi}{N} + \frac{1}{N^2} \leq \arg(z) \leq 2m\frac{\pi}{N} - \frac{1}{N^2} \right\}$$

e se n é par¹

$$\Omega_N^{m,n} = \left\{ z \in \mathbb{C}; S_n + \frac{1}{4N^3} \leq |z| \leq S_{n-1} - \frac{1}{4N^3}, 2(m-1)\frac{\pi}{N} + \frac{1}{N^2} \leq \arg(ze^{i\pi/N}) \leq 2m\frac{\pi}{N} - \frac{1}{N^2} \right\}.$$

¹Note que $\arg(ze^{i\pi/N}) = \arg(z) + \pi/N$.

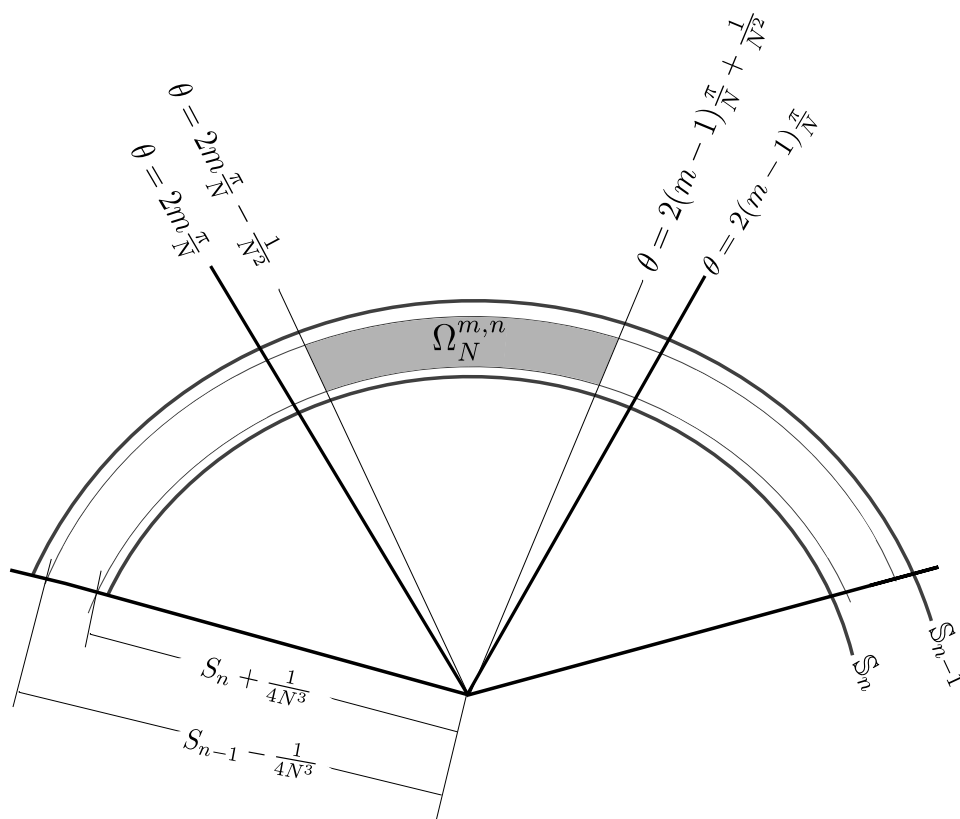


Figura 5.1: O conjunto $\Omega_N^{m,n}$ para m e n fixados.

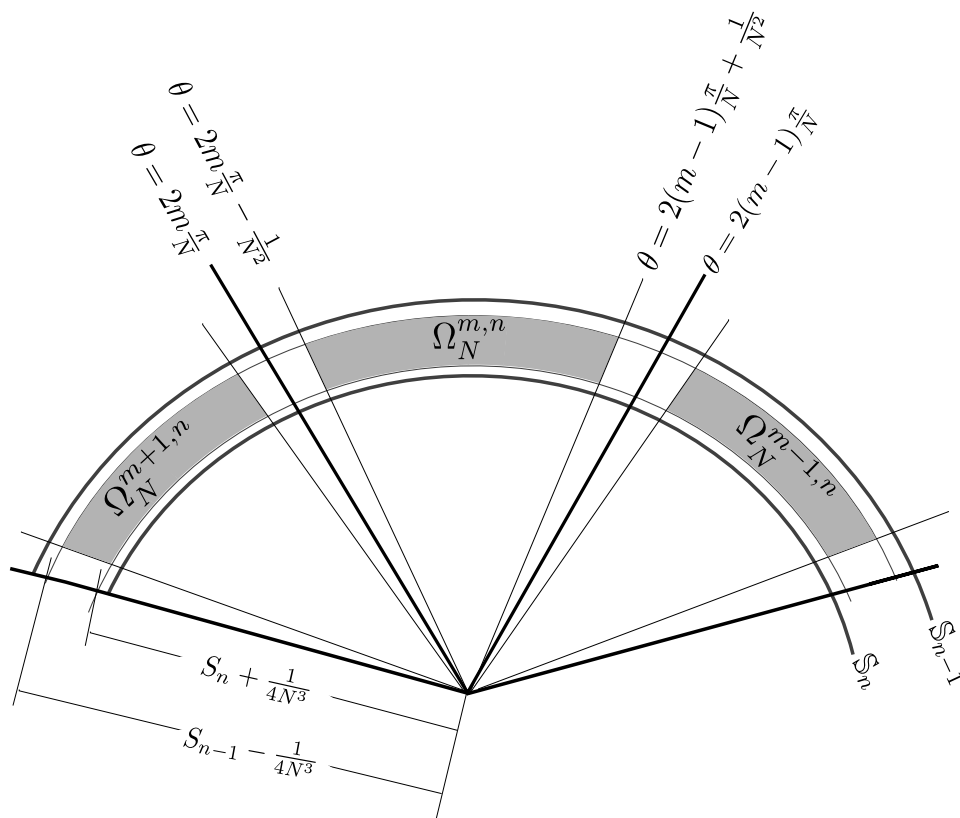
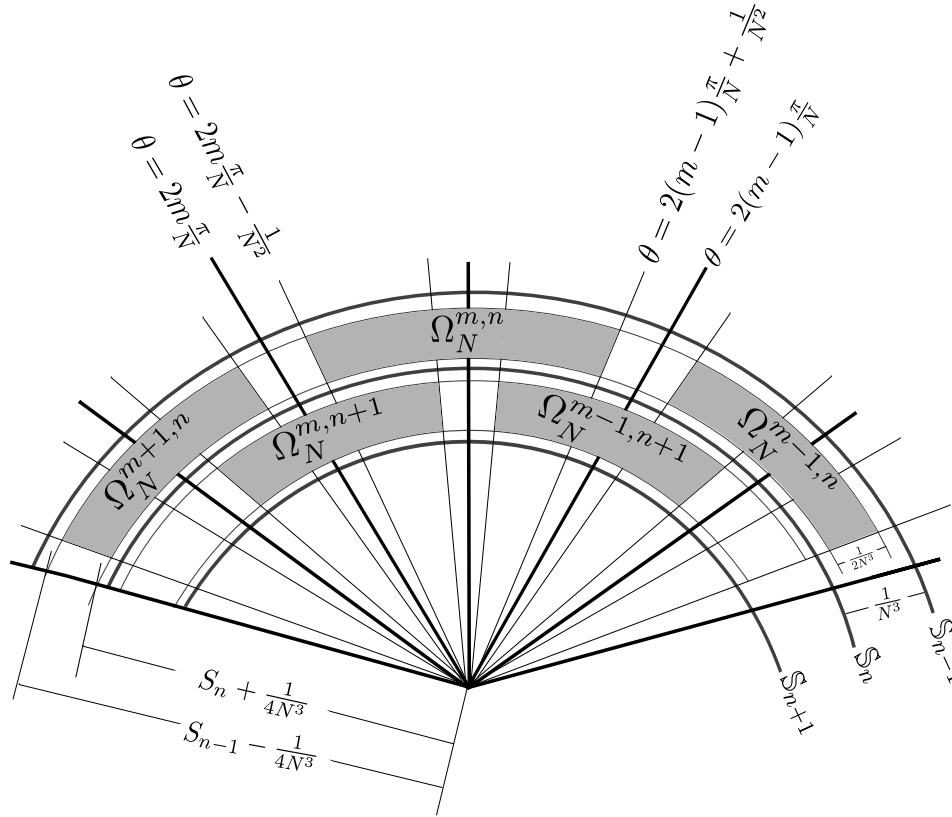


Figura 5.2: Outras componentes conexas de Ω_N obtidas variando m .


 Figura 5.3: Outras componentes conexas de Ω_N obtidas variando n .

Para $1 \leq k \leq 2N$ sejam

$$L_k = \left\{ z \in \mathbb{C}; \arg(z) = k \frac{\pi}{N}, S_{2N^2} < |z| < 1 \right\}$$

e

$$\Xi_k = \left\{ (m, n); \Omega_N^{m,n} \cap L_k \neq \emptyset \right\}.$$

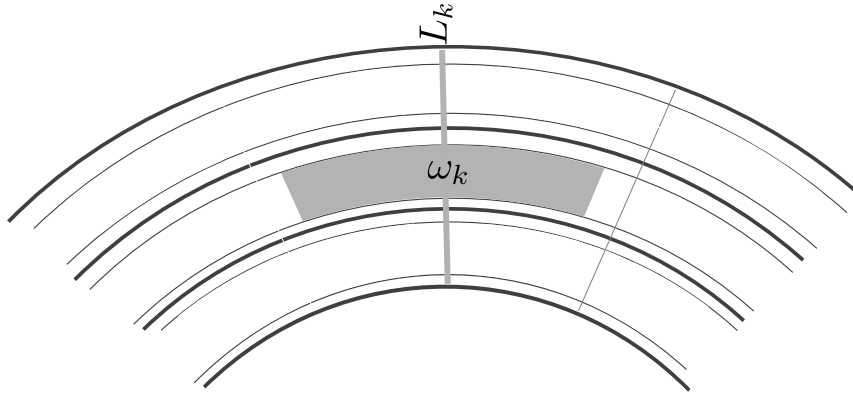
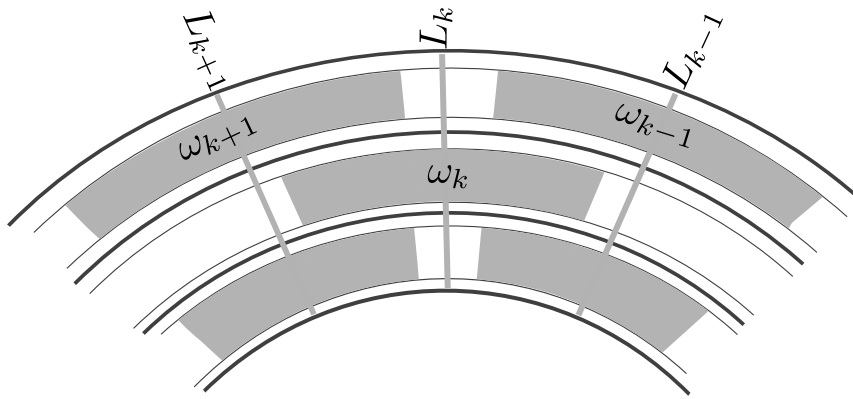
Por último definimos os conjuntos (veja figura 5.4)

$$\omega_k = L_k \cup \left(\bigcup_{(m,n) \in \Xi_k} \Omega_N^{m,n} \right)$$

e

$$\varpi_k = \{ z \in \mathbb{C}; d(z, \omega_k) < t \}$$

onde t é suficientemente pequeno para que os conjuntos $\overline{\varpi_1}, \dots, \overline{\varpi_{2N}}$ sejam disjuntos entre si, e também vamos supor $t < \frac{1}{2N}$. Note que o conjunto ω_k é a união de L_k com aquelas componentes de Ω_N que este segmento intersecta, e ϖ_k é uma vizinhança de ω_k .


 Figura 5.4: O conjunto ω_k para k fixado.

 Figura 5.5: Distribuição dos conjuntos ω_{k-1} , ω_k e ω_{k+1} .

Proposição 5.1. Para cada $1 \leq k \leq 2N$ temos que

1. Para cada par de pontos em ϖ_k existe uma curva $\beta : [0, 1] \rightarrow \varpi_k$, ligando ambos tal que $\ell(\beta) < \frac{10}{N}$.
2. Se $\beta : [0, 1] \rightarrow C(S_{2i+2}, S_{2i})$, com $|\beta(t_0)| = S_{2i+2}$ e $|\beta(t_1)| = S_{2i}$ onde $t_0, t_1 \in [0, 1]$, para algum $i \in \{0, \dots, N^2 - 1\}$, então se verifica uma das seguintes propriedades.

(i) $\ell(\beta) \geq \frac{1}{N}$.

(ii) Se $\ell(\beta) < \frac{1}{N}$, então β atravessa alguma componente de Ω_N , com $n = 2i+1$ ou $n = 2i+2$, ou seja, existem \tilde{t}_0 e \tilde{t}_1 tal que $|\beta(\tilde{t}_0)| = S_n$ e $|\beta(\tilde{t}_1)| = S_{n+1}$.

Demonstração. Vamos provar 1. Sejam z_1 e z_2 em ϖ_k e consideremos as curvas seguintes (veja figura 5.6).

$$C_1 = \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| = |z_1|, \min \left\{ \frac{k\pi}{N}, \arg(z_1) \right\} \leq \arg(z) \leq \max \left\{ \frac{k\pi}{N}, \arg(z_1) \right\} \right\},$$

$$C_2 = \left\{ z \in \mathbb{C}; |z| = |z_2|, \min \left\{ \frac{k\pi}{N}, \arg(z_2) \right\} \leq \arg(z) \leq \max \left\{ \frac{k\pi}{N}, \arg(z_2) \right\} \right\},$$

e

$$\hat{L}_k = \left\{ z \in \mathbb{C}; \arg(z) = \frac{k\pi}{N}, \min \{|z_1|, |z_2|\} \leq |z| \leq \max \{|z_1|, |z_2|\} \right\}.$$

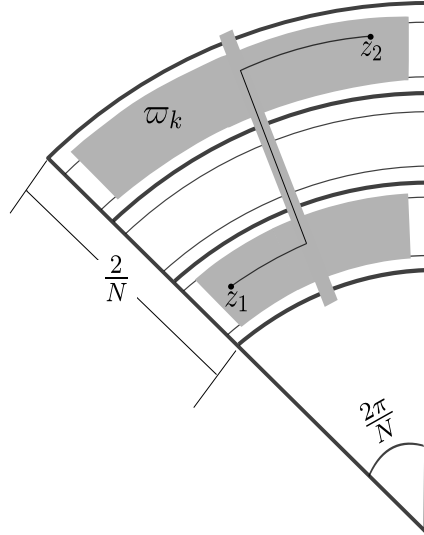


Figura 5.6: Curva em ϖ_k com comprimento menor que $\frac{10}{N}$.

Então a curva β cujo traço é $C_1 \cup \hat{L}_k \cup C_2$ liga z_1 e z_2 . Além disso, $\ell(C_1) < \frac{\pi}{N}$ e $\ell(C_2) < \frac{\pi}{N}$ por ser arcos de círculos com ângulo menor que $\frac{\pi}{N}$ e raio menor que 1, e $\ell(\hat{L}_k) < \frac{2}{N} + 2t < \frac{3}{N}$. Logo, $\ell(\beta) < \frac{10}{N}$.

Para provar 2 vamos supor que $\ell(\beta) < \frac{1}{N}$. Sabemos que $|\beta(t)| \geq S_{2N^2} = 1 - \frac{2}{N} \forall t \in [0, 1]$. Seja δ o comprimento do arco de círculo de raio S_{2N^2} e com ângulo $\theta = \max_{t \in [0, 1]} \arg(\beta(t)) - \min_{t \in [0, 1]} \arg(\beta(t))$. Então $\delta = \left(1 - \frac{2}{N}\right) \theta$ (veja figura 5.7).

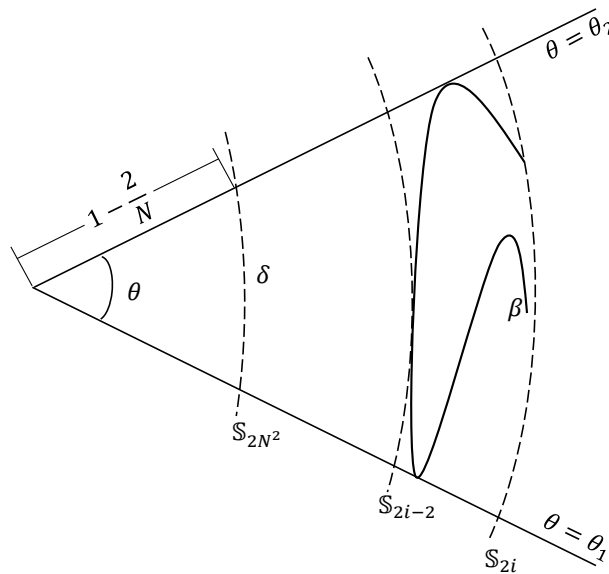


Figura 5.7: Curva no anel $C(S_{2i+2}, S_{2i})$ contida num arco de ângulo θ .

Vamos mostrar que $\ell(\beta) > \delta$. Para isto vamos parametrizar β em coordenadas polares por

$$\beta(t) = (\varphi(t) \cos t, \varphi(t) \sin t),$$

onde $\varphi(t)$ é o raio de $\beta(t)$ (estamos supondo que β é de classe C^1). Daí

$$\beta'(t) = (\varphi'(t) \cos t - \varphi(t) \sin t, \varphi'(t) \sin t + \varphi(t) \cos t)$$

e, portanto,

$$\|\beta'(t)\| = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \varphi(t)^2} \geq \varphi(t) \geq S_{2N^2} = 1 - 2N.$$

Logo

$$\ell(\beta) = \int_a^b \|\beta'(t)\| dt \geq \left(1 - \frac{2}{N}\right) \theta = \delta,$$

onde $a = \min_{t \in [0,1]} \arg(\beta(t))$ e $b = \max_{t \in [0,1]} \arg(\beta(t))$. Como $\delta \leq \ell(\beta) < \frac{1}{N}$, então $\left(1 - \frac{2}{N}\right) \theta < \frac{1}{N}$, logo $\theta < \frac{1}{N-2}$ que é menor que $\frac{\pi}{N} - \frac{2}{N^2}$ porque $N > 3$. Logo, β está contida num setor circular de ângulo menor que a metade do setor circular no qual estão encaixadas as componentes do conjunto Ω_N , portanto β atravessa alguma delas.

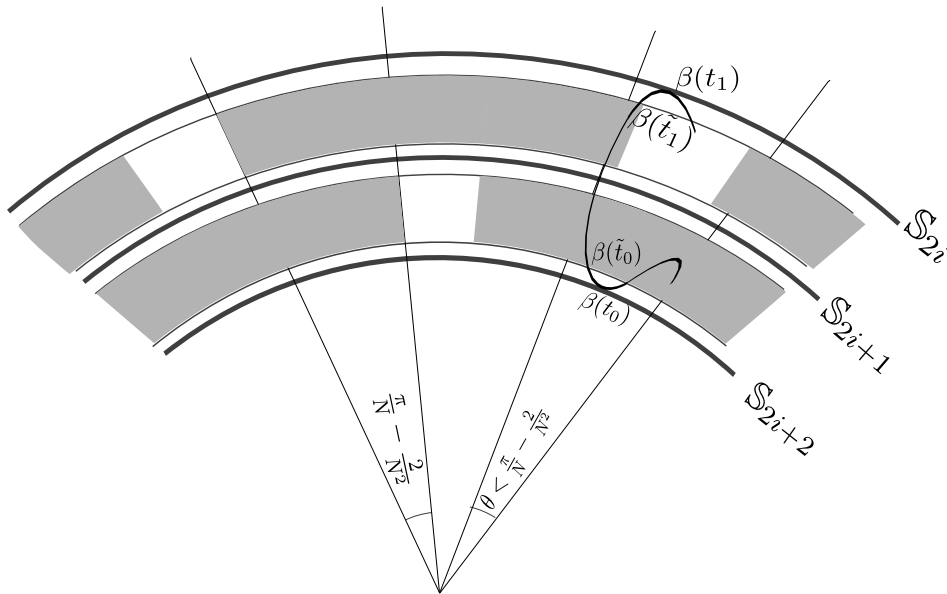


Figura 5.8: Curva no anel $C(S_{2i+2}, S_{2i})$ com comprimento menor que $\frac{1}{N}$.

Portanto temos 2(ii). □

Proposição 5.2. *Seja $X \in C^\infty(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{R}^3)$, tal que $X : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão mínima conforme. Sejam $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 3$ e $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$ verificando*

$$(i) \quad \lambda_X(z) \geq c, \quad \forall z \in \mathbb{D},$$

$$(ii) \quad \lambda_X(z) \geq cN^4, \quad \forall z \in \Omega_N.$$

Então, $\frac{c}{2}N \leq d_X(0, \mathbb{S}^1)$.

Demonstração. Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, com $\gamma(0) = 0$ e $\gamma(1) \in \mathbb{S}^1$. Para cada $0 \leq i \leq N^2 - 1$, seja γ_i o pedaço da curva γ que liga os círculos \mathbb{S}_{2i+2} e \mathbb{S}_{2i} e que está contida no anel $C(\mathbb{S}_{2i+2}, \mathbb{S}_{2i})$, isto é, $\gamma_i(t) = \gamma|_{[a_i, b_i]}(t)$, onde $\gamma(a_i) \in \mathbb{S}_{2i+2}$ e $\gamma(b_i) \in \mathbb{S}_{2i}$.

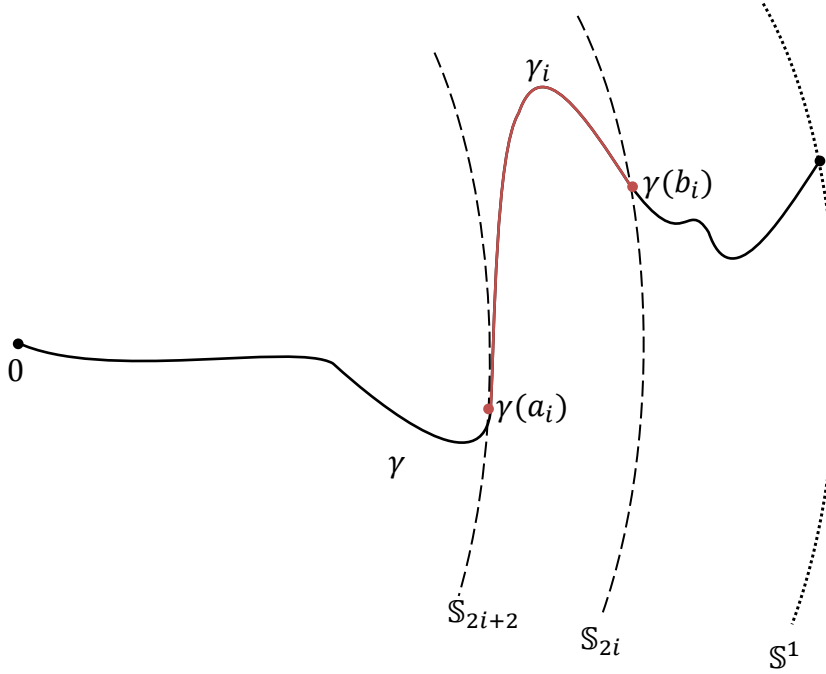


Figura 5.9: Restrição da curva γ que liga a origem a \mathbb{S}^1 ao anel $C(\mathbb{S}_{2i+2}, \mathbb{S}_{2i})$.

Se mostramos que

$$\frac{c}{2N} \leq \ell(X \circ \gamma_i), \quad \forall 0 \leq i \leq N^2 - 1, \quad (5.1)$$

teremos que

$$\ell(X \circ \gamma) \geq \sum_{i=0}^{N^2-1} \ell(X \circ \gamma_i) \geq \sum_{i=0}^{N^2-1} \frac{c}{2N} = \frac{c}{2}N,$$

o que implica que $d_X(0, \mathbb{S}^1) \geq \frac{c}{2}N$. Para mostrar (5.1) temos que separar em dois casos.

Caso 1. $\frac{1}{N} \leq \ell(\gamma_i)$.

Neste caso temos que

$$\ell(X \circ \gamma_i) = \int_{a_i}^{b_i} \|(X \circ \gamma_i)'(t)\| dt = \int_{a_i}^{b_i} \lambda(\gamma_i) \|\gamma_i'(t)\| dt \geq c \ell(\gamma_i),$$

esta última desigualdade pela hipóteses (i). Daí,

$$\ell(X \circ \gamma_i) \geq \frac{c}{2N}.$$

Caso 2. $\ell(\gamma_i) < \frac{1}{N}$.

Neste caso temos que γ_i atravessa alguma componente $\Omega_N^{m,n}$ pela propriedade 2(ii) da proposição 5.1. Seja $\hat{\gamma}_i$ o pedaço de γ_i contida em $\Omega_N^{m,n}$.

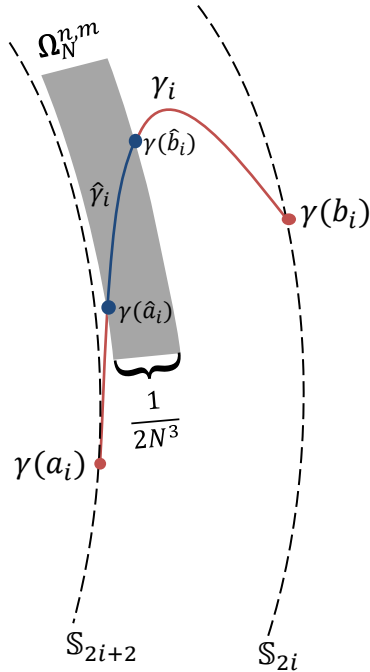


Figura 5.10: Restrição da curva γ_i que atravessa a componente $\Omega_N^{m,n}$.

Então

$$\ell(\hat{\gamma}_i) \geq S_{n-1} - S_n - \frac{1}{2N^3} = \frac{1}{2N^3}.$$

Assim,

$$\ell(X \circ \gamma_i) \geq \ell(X \circ \hat{\gamma}_i) \geq \int_{\hat{a}_i}^{\hat{b}_i} \lambda(\gamma_i(t)) \|\gamma_i'(t)\| dt \geq cN^4 \ell(\hat{\gamma}_i),$$

esta última desigualdade pela hipóteses (ii). Daí,

$$\ell(X \circ \gamma_i) \geq \frac{c}{2N}.$$

5.1.2

Construção das imersões F_0, \dots, F_{2N}

Seja $X : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima satisfazendo as hipóteses do *Lema Principal*. Sejam $\epsilon > 0$ e $s > 0$ arbitrários.

Definição de F_0 e escolha de N

Dado $\xi > 1$, vamos definir a imersão mínima conforme F_0 como sendo

$$\begin{aligned} F_0 : \mathbb{D}_\xi &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ z &\mapsto X(z/\xi). \end{aligned}$$

Vamos supor que ξ é suficientemente próximo de 1 para que se verifiquem as seguintes desigualdades.

$$\sup_{z \in \mathbb{D}_{1-\epsilon}} \{\|X(z) - F_0(z)\|\} < \frac{\epsilon}{3}, \quad (5.2)$$

$$d_{F_0}(0, z) < \rho + \frac{s}{4}, \quad \forall z \in \mathbb{S}^1, \quad (5.3)$$

e

$$d_{F_0}(0, \mathbb{S}^1) > \rho - u, \quad (5.4)$$

onde $0 < u < \rho$, $s + u < R$, $R = \sqrt{s^2 + r^2} + \epsilon$ e $\sqrt{u^2 + 2su} < \frac{\epsilon}{2}$.

É possível supor (5.3) e (5.4) neste caso já que, pela própria definição de F_0 , temos

$$d_{F_0|_{\mathbb{D}}}(0, z) = d_{X|_{\mathbb{D}_{1/\xi}}}(0, z/\xi), \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Se $\xi \rightarrow 1$, então, $\|z/\xi\| \rightarrow 1$, portanto

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} d_{X|_{\mathbb{D}_{1/\xi}}}(0, z/\xi) = \lim_{\|z\| \rightarrow 1} d_X(0, z) = \rho,$$

pela hipóteses (ii) do lema, sendo esta convergência uniforme. Daí,

$$\lim_{\xi \rightarrow 1} d_{F_0|_{\mathbb{D}}}(0, z) = \rho, \quad \forall z \in \mathbb{S}^1.$$

Seja $\phi^0(z) = (\phi_1^0(z), \phi_2^0(z), \phi_3^0(z))$ a representação de Weierstrass de F_0 , e N_0 a aplicação de Gauss. Vamos definir as seguintes constantes positivas.

$$r_1 = 1 + \sup_{z \in \mathbb{D}} \{\|\phi^0(z)\|\}, \quad r_2 = \frac{1}{2} \inf_{z \in \mathbb{D}} \{\|\phi^0(z)\|\}^2, \quad r_3 = \frac{10r_1}{\sqrt{2}},$$

$$r_4 = 4 + 10 \max_{z \in \mathbb{D}} \{\|(dN_0)_z\|\}, \quad \text{onde } \|(dN_0)_z\| = \sup_{\|v\|=1} \|(dN_0)_z(v)\|,$$

$$r_5 = \frac{2}{r_2}, \quad \text{e} \quad r_6 = 2(r_3 + r_4 + r_5).$$

O passo seguinte é tomar N suficientemente grande, em função da imersão X dada e das constantes $\epsilon, s, \rho, r, u, r_1 \dots r_6$.

Observação 5.1. Como a imersão F_0 é uniformemente contínua em \mathbb{D} , temos que para o ϵ fixado, existe um $\delta(\epsilon)$ tal que se $|w - z| < \delta(\epsilon)$, então $\|F_0(w) - F_0(z)\| < \frac{\epsilon}{3}$. Note que este $\delta(\epsilon)$ somente depende de ϵ .

Vamos escolher $N > 47$ de forma tal que

$$\left| \ln \left(1 - \frac{3}{N} \right) \right| \left(1 - \frac{3}{N} \right)^{-\frac{2}{\epsilon}} \leq \frac{\epsilon}{2} \delta(\epsilon).$$

Também queremos que

$$N \geq \frac{4}{\inf_{z \in \overline{\mathbb{D}}} \|\phi^0(z)\|}, \quad N > r_5^2, \quad N > \frac{1}{2r_2^2}, \quad N > \frac{2(4\rho + s)}{r_2 s}, \quad N > \frac{10}{R - r},$$

$$N > \frac{30}{\epsilon}, \quad N > \frac{(11 + c)^2}{(R - s - u)^2}, \quad N > \frac{16(2(s + u)c' + c'^2 + 400 + 40r)}{\epsilon^4},$$

onde

$$c = \frac{3r_1 r_2 + 2\sqrt{2}(\rho + s)}{\sqrt{2}r_2} \quad \text{e} \quad c' = c + 10 + r_6(10 + r).$$

Construção de F_{2N}

O objetivo agora é construir uma família de imersões mínimas conformes F_0, \dots, F_{2N} , definidas em discos abertos que contenham $\overline{\mathbb{D}}$, satisfazendo as seguintes condições, para $1 \leq k \leq 2N$.

(I_k) $F_k(z) = \left(\Re \int_0^z \phi_1^k(\zeta) d\zeta, \Re \int_0^z \phi_2^k(\zeta) d\zeta, \Re \int_0^z \phi_3^k(\zeta) d\zeta \right)$, onde $\phi^k(z) = (\phi_1^k(z), \phi_2^k(z), \phi_3^k(z))$ é a representação de Weierstrass de F_k .

(II_k) $\|\phi^k(z) - \phi^{k-1}\| \leq \frac{1}{N^2}, \forall z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \varpi_k$.

(III_k) $\|\phi^k(z)\| \geq N^{7/2}, \forall z \in \omega_k$.

(IV_k) $\|\phi^k(z)\| \geq \frac{1}{\sqrt{N}}, \forall z \in \varpi_k$.

(V_k) $d_{\mathbb{S}^2}(N_k(z), N_{k-1}(z)) < \frac{1}{N\sqrt{N}}, \forall z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \varpi_k$, onde N_k é a aplicação de Gauss de F_k .

(VI_k) $K_{F_k}(z) \neq 0, \forall z \in \overline{\mathbb{D}}$.

(VII_k) Existe uma base ortonormal $B_k = \{b_1^k, b_2^k, b_3^k\}$ em \mathbb{R}^3 tal que

²Note que $r_2 > 0$ já que F_0 é uma imersão e $\lambda_{F_0}(z) = \frac{\|\phi^0(z)\|}{\sqrt{2}}$.

(VII.1_k) Se $z \in \overline{\varpi_k}$ e $\|F_{k-1}(z)\| \geq \frac{1}{\sqrt{N}}$, então

$$\left| \left((x_1^{k-1}(z), x_2^{k-1}(z)) \right) \right| < \frac{r_6}{\sqrt{N}} \|F_{k-1}(z)\|,$$

(VII.2_k) Para cada $z \in \overline{\mathbb{D}}$ temos que

$$x_3^k(z) = x_3^{k-1}(z),$$

onde x_i^k é a coordenada i -ésima da imersão F_k na base B_k .

Note que a imersão F_0 satisfaz as propriedades que não são recursivas. A imersão F_1 será construída usando as afirmações 5.1 e 5.2, e estará dada por (5.12) para $j = 1$. Mais geralmente, (5.12) dá F_j em termos de F_0, \dots, F_{j-1} . Então podemos supor que existem as imersões F_0, \dots, F_{j-1} , $1 \leq j \leq 2N$, satisfazendo as propriedades, (I_k), ..., (VII_k), para $0 \leq k \leq j-1$, e vamos a construir o termo j -ésimo. Para isto vamos introduzir mostrar as afirmações mencionadas.

Afirmação 5.1. *A imersão $(j-1)$ -ésima satisfaz as seguintes propriedades.*

- (a) $\|\phi^{j-1}(z)\| \leq r_1, \forall z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} \varpi_i.$
- (b) $\|\phi^{j-1}(z)\| \geq r_2, \forall z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} \varpi_i.$
- (c) $\text{diam}(F_{j-1}(\varpi_j)) \leq \frac{r_3}{N}.$
- (d) $\sup_{z, w \in \varpi_j} d_{\mathbb{S}^2}(N_{j-1}(z), N_{j-1}(w)) < \frac{r_4}{\sqrt{N}}.$

Demonstração. Vamos mostrar (a).

$$\begin{aligned} \|\phi^{j-1}(z)\| &\leq \|\phi^{j-1}(z) - \phi^0(z)\| + \|\phi^0(z)\| \\ &\leq \|\phi^{j-1}(z) - \phi^{j-2}(z)\| + \dots + \|\phi^1(z) - \phi^0(z)\| + \|\phi^0(z)\| \\ &\leq (j-1) \frac{1}{N^2} + \sup_{z \in \overline{\mathbb{D}}} \{\|\phi^0(z)\|\}, \end{aligned}$$

esta última desigualdade vale para cada $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} \varpi_i$ por (II_k) com $1 \leq k \leq j-1$. Como $j \leq 2N$, então $(j-1) \frac{1}{N^2} \leq 1$, portanto,

$$\|\phi^{j-1}(z)\| \leq 1 + \sup_{z \in \overline{\mathbb{D}}} \{\|\phi^0(z)\|\} = r_1, \forall z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} \varpi_i.$$

De forma análoga obtemos (b).

$$\begin{aligned} \|\phi^{j-1}(z)\| &\geq \|\phi^0(z)\| - \|\phi^{j-1}(z) - \phi^0(z)\| \\ &\geq \|\phi^0(z)\| - \|\phi^{j-1}(z) - \phi^{j-2}(z)\| - \dots - \|\phi^1(z) - \phi^0(z)\| \\ &\geq \inf_{z \in \mathbb{D}} \{\|\phi^0(z)\|\} - (j-1) \frac{1}{N^2}, \end{aligned}$$

esta última desigualdade vale para cada $z \in \mathbb{D} \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} \varpi_i$ por (Π_k) com $1 \leq k \leq j-1$. Como temos que $N \geq \frac{4}{\inf_{z \in \mathbb{D}} \{\|\phi^0(z)\|\}}$, então $(j-1) \frac{1}{N^2} \leq \frac{1}{2} \inf_{z \in \mathbb{D}} \{\|\phi^0(z)\|\}$, portanto

$$\|\phi^{j-1}(z)\| \geq \frac{1}{2} \inf_{z \in \mathbb{D}} \{\|\phi^0(z)\|\} = r_2, \quad \forall z \in \mathbb{D} \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} \varpi_i.$$

A condição (c) é obtida como segue. Seja $z, w \in \varpi_j$, então existe uma curva $\beta : [0, 1] \rightarrow \varpi_j$, com $\beta(0) = z$ e $\beta(1) = w$, tal que $\ell(\beta) < \frac{10}{N}$ pela propriedade 1 da proposição 5.1. Daí,

$$\ell(F_{j-1} \circ \beta) = \int_0^1 \lambda_{F_{j-1}}(\beta(t)) \|\beta'(t)\| dt = \int_0^1 \frac{\|\phi^{j-1}(\beta(t))\|}{\sqrt{2}} \|\beta'(t)\| dt \leq \frac{r_1}{\sqrt{2}} \ell(\beta),$$

onde a última desigualdade se deve à condição (a), pois $\varpi_j \subset \mathbb{D} \setminus \bigcup_{i=1}^{j-1} \varpi_i$, portanto

$$\ell(F_{j-1} \circ \beta) \leq \frac{10r_1}{\sqrt{2}N} = \frac{r_3}{N}.$$

Daí,

$$d(F_{j-1}(z), F_{j-1}(w)) \leq \frac{r_3}{N}, \quad \forall z, w \in \varpi_j,$$

o que prova (c).

Por último vamos mostrar (d). Novamente pela propriedade 1 da proposição 5.1, temos que para cada $1 \leq k \leq 2N$, e para todo $z, w \in \varpi_k$, existe uma curva $\beta : [0, 1] \rightarrow \varpi_k$, com $\beta(0) = z$ e $\beta(1) = w$ tal que $\ell(\beta) < \frac{10}{N}$. Então

$$\begin{aligned} \ell(N_0 \circ \beta) &= \int_0^1 \|(dN_0)_{\beta(t)}(\beta'(t))\| dt \\ &\leq \int_0^1 \|(dN_0)_{\beta(t)}\| \|\beta'(t)\| dt \\ &\leq \max_{z \in \mathbb{D}} \{ \|(dN_0)_{\beta(t)}\| \} \ell(\beta), \end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade se deve a que $(dN_0)_{\beta(t)}$ é uma aplicação linear que é contínua³, e a segunda porque a função $z \rightarrow \|(dN_0)_z\|$ é contínua em $\overline{\mathbb{D}}$. Daí,

$$d_{\mathbb{S}^2}(N_0|_{\varpi_k}(z), N_0|_{\varpi_k}(w)) \leq \frac{10}{N} \max_{z \in \overline{\mathbb{D}}} \left\{ \|(dN_0)_{\beta(t)}\| \right\}, \quad \forall z, w \in \omega_k. \quad (5.5)$$

Seja $z \in \varpi_j$, então

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{S}^2}(N_{j-1}(z), N_0(z)) &\leq d_{\mathbb{S}^2}(N_{j-1}(z), N_{j-2}(z)) + \cdots + d_{\mathbb{S}^2}(N_1(z), N_0(z)) \\ &\leq (j-1) \frac{1}{N\sqrt{N}}, \end{aligned}$$

onde a segunda desigualdade vale pela propriedade (V_k) , $1 \leq k \leq j-1$, já que $\varpi_j \subset \overline{\mathbb{D}} \setminus \varpi_k$, para $1 \leq k \leq j-1$. Como $j \leq 2N$, então

$$d_{\mathbb{S}^2}(N_{j-1}(z), N_0(z)) \leq \frac{2}{\sqrt{N}}, \quad \forall z \in \varpi_j. \quad (5.6)$$

Então, para todo $z, w \in \varpi_j$ temos que

$$\begin{aligned} &d_{\mathbb{S}^2}(N_{j-1}(z), N_{j-1}(w)) \\ &\leq d_{\mathbb{S}^2}(N_{j-1}(z), N_0(z)) + d_{\mathbb{S}^2}(N_0(z), N_0(w)) + d_{\mathbb{S}^2}(N_0(w), N_{j-1}(w)) \\ &\leq \frac{4}{\sqrt{N}} + \frac{10}{N} \max_{z \in \overline{\mathbb{D}}} \left\{ \|(dN_0)_{\beta(t)}\| \right\} \quad \text{por (5.5) e (5.6),} \\ &\leq \frac{4 + 10 \max_{z \in \overline{\mathbb{D}}} \left\{ \|(dN_0)_{\beta(t)}\| \right\}}{\sqrt{N}} \\ &= \frac{r_4}{\sqrt{N}}, \end{aligned}$$

o que implica (d) . □

Afirmção 5.2. *É possível escolher um ponto $q_j \in \mathbb{S}^2$ tal que se verifiquem as seguintes propriedades.*

(a) Se $z \in \varpi_j$ e $\|F_{j-1}(z)\| \geq \frac{1}{\sqrt{N}}$, então

$$\angle(q_j, F_{j-1}(z)) \leq \frac{r_6}{\sqrt{N}}. \quad (5.7)$$

(b) Para todo $z \in \varpi_j$ temos que

$$\angle(q_j, N_{j-1}(z)) \geq \frac{r_5}{\sqrt{N}} \quad \text{e} \quad \angle(-q_j, N_{j-1}(z)) \geq \frac{r_5}{\sqrt{N}}. \quad (5.8)$$

Demonstração. Para $y \in \mathbb{R}^3$ e $m > 0$ definimos o cone

$$C_m(y) = \{x \in \mathbb{R}^3; \angle(x, y) \leq m\}.$$

³Note que estamos trabalhando com espaços vetoriais de dimensão finita.

Seja $y \in N_{j-1}(\varpi_j)$. Como vale (d) na afirmação 5.1, temos que

$$d_{\mathbb{S}^2}(x, y) \leq \frac{r_4}{\sqrt{N}}, \quad \forall x \in N_{j-1}(\varpi_j),$$

portanto, dado que $d_{\mathbb{S}^2}(x, y)$ é o comprimento do círculo maximal de \mathbb{S}^2 que contém x e y , e que é igual a $\angle(x, y)$, temos que

$$\angle(x, y) \leq \frac{r_4}{\sqrt{N}}, \quad \forall x \in N_{j-1}(\varpi_j).$$

Daí, $N_{j-1}(\varpi_j) \subset C_y\left(\frac{r_4}{\sqrt{N}}\right)$ e, portanto,

$$N_{j-1}(\varpi_j) \subset C_y\left(\frac{r_4 + r_5}{\sqrt{N}}\right), \quad \forall y \in N_{j-1}(\varpi_j).$$

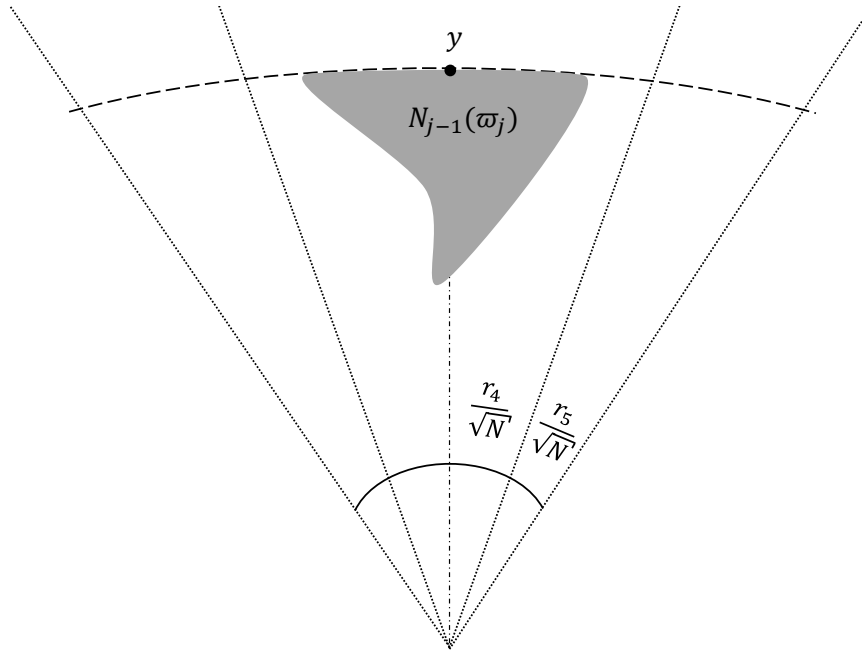


Figura 5.11: Projeção plana do conjunto $N_{j-1}(\varpi_j)$.

Então, se $x \in \mathbb{S}^2 \setminus C_y\left(\frac{r_4 + r_5}{\sqrt{N}}\right)$, temos que

$$\angle(x, N_{j-1}(z)) \geq \frac{r_5}{\sqrt{N}}, \quad \forall z \in \varpi_j,$$

e se $x \in \mathbb{S}^2 \setminus C_{-y}\left(\frac{r_4 + r_5}{\sqrt{N}}\right)$,

$$\angle(-x, N_{j-1}(z)) \geq \frac{r_5}{\sqrt{N}}, \quad \forall z \in \varpi_j.$$

Logo, escolhendo $x \in \mathbb{S}^2 \setminus \left(C_y \left(\frac{r_4+r_5}{\sqrt{N}} \right) \cup C_{-y} \left(\frac{r_4+r_5}{\sqrt{N}} \right) \right)$, temos a propriedade (b).

Vamos ver agora qual destes pontos satisfaz (a). Se se satisfazem as hipóteses de (a), então os conjuntos

$$\mathcal{F} = \left\{ p \in F_{j-1}(\varpi_j); \|p\| \geq \frac{1}{\sqrt{N}} \right\}$$

$$\tilde{\mathcal{F}} = \left\{ \frac{p}{\|p\|}; p \in \mathcal{F} \right\}$$

são não vazios. Seja $q \in \mathcal{F}$, então

$$d(p, q) < \frac{r_3}{N}, \quad \forall p \in F_{j-1}(\varpi_j) \quad (5.9)$$

pela propriedade (c) da afirmação 5.1. Para cada $p \in \mathcal{F}$, sejam P e Q os pontos de intersecção das retas que unem a origem com p e q , respectivamente, com a esfera de raio $\frac{1}{\sqrt{N}}$. Então (veja figura 5.12),

$$d(P, Q) = \frac{2}{\sqrt{N}} \sin \left(\frac{\angle(p, q)}{2} \right).$$

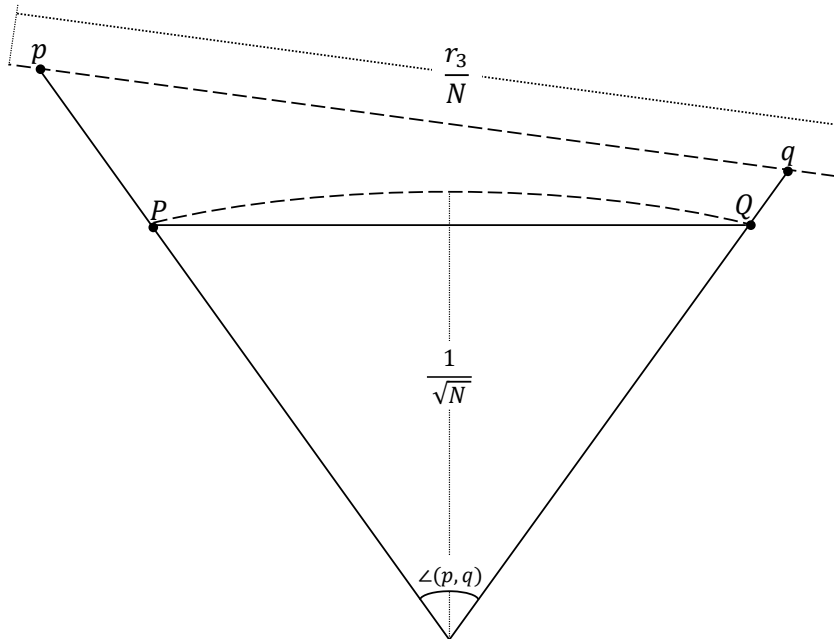


Figura 5.12: Ângulo entre os pontos p e q de \mathcal{F} .

Usando (5.9) e o fato de que $d(P, Q) \leq d(p, q)$, obtemos

$$\sin \left(\frac{\angle(p, q)}{2} \right) < \frac{r_3}{2\sqrt{N}}, \quad (5.10)$$

Como $0 \leq \angle(p, q) \leq \pi$, então⁴

$$\angle(p, q) \leq 4 \sin \left(\frac{\angle(p, q)}{2} \right).$$

Usando (5.10) obtemos

$$\angle(p, q) < \frac{2r_3}{\sqrt{N}}, \quad \forall p \in \mathcal{F}. \quad (5.11)$$

Vamos a escolher q_j como segue.

- Se $(\mathbb{S}^2 \setminus (C_y(\frac{r_4+r_5}{\sqrt{N}}) \cup C_{-y}(\frac{r_4+r_5}{\sqrt{N}}))) \cap \tilde{\mathcal{F}} \neq \emptyset$, então q_j é qualquer ponto neste conjunto,
- se $(\mathbb{S}^2 \setminus (C_y(\frac{r_4+r_5}{\sqrt{N}}) \cup C_{-y}(\frac{r_4+r_5}{\sqrt{N}}))) \cap \tilde{\mathcal{F}} = \emptyset$, escolhemos q_j em $\mathbb{S}^2 \setminus (C_y(\frac{r_4+r_5}{\sqrt{N}}) \cup C_{-y}(\frac{r_4+r_5}{\sqrt{N}}))$ satisfazendo $\angle(q_j, q') < \frac{2(r_4+r_5)}{\sqrt{N}}$, para algum $q' \in \mathcal{F}$.

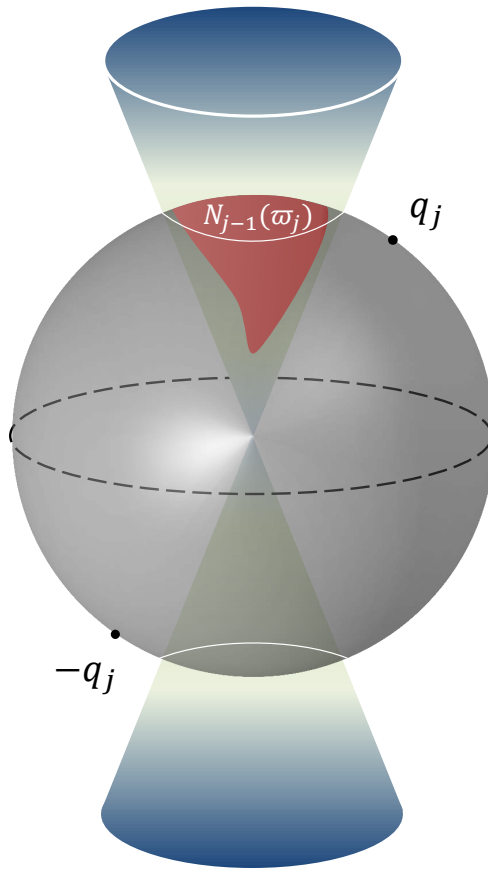


Figura 5.13: Distância entre o conjunto $N_{j-1}(\varpi_j)$ e os polos Norte e Sur.

Vamos ver que esta eleição de q_j verifica (a). Primeiro vamos supor que $(\mathbb{S}^2 \setminus (C_y(\frac{r_4+r_5}{\sqrt{N}}) \cup C_{-y}(\frac{r_4+r_5}{\sqrt{N}}))) \cap \tilde{\mathcal{F}} \neq \emptyset$ e escolhemos $q_j = q$ que vem da

⁴A desigualdade $x < 4 \sin \left(\frac{x}{2} \right)$ vale se $0 < x < 3.7909$.

expressão (5.11), então

$$\angle(q_j, p) \leq \frac{r_6}{\sqrt{N}},$$

pela própria definição de r_6 .

Por outro lado, vamos supor que $(\mathbb{S}^2 \setminus (C_y(\frac{r_4+r_5}{\sqrt{N}}) \cup C_{-y}(\frac{r_4+r_5}{\sqrt{N}}))) \cap \tilde{\mathcal{F}} = \emptyset$, e seja $q_j \in \mathbb{S}^2 \setminus (C_y(\frac{r_4+r_5}{\sqrt{N}}) \cup C_{-y}(\frac{r_4+r_5}{\sqrt{N}}))$ satisfazendo $\angle(q_j, q') < \frac{2(r_4+r_5)}{\sqrt{N}}$, para algum $q' \in \mathcal{F}$. Logo, se $p \in \mathcal{F}$, então,

$$\begin{aligned} \angle(q_j, p) &\leq \angle(q_j, q') + \angle(q', p) \\ &\leq \frac{2(r_4+r_5)}{\sqrt{N}} + \frac{2r_3}{\sqrt{N}} \text{ por (5.11),} \\ &= \frac{r_6}{\sqrt{N}}. \end{aligned} \quad \square$$

Agora, já podemos definir a imersão F_j . Seja $B_j = \{b_1^j, b_2^j, b_3^j\}$ uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 tal que $b_3^j = q_j$. Sejam $\tilde{\phi}^{j-1}(z) = \sum_{i=0}^3 \tilde{\phi}_i^{j-1}(z)b_i^j$ e (g_{j-1}, f_{j-1}) a Representação de Weierstrass e os dados de Weierstrass, respectivamente, da imersão F_{j-1} para a base B_j .

Seja $\tau > 1$ Sabemos que g_{j-1} é uma função meromorfa sobre um disco contendo $\overline{\mathbb{D}}$, e que $g'_{j-1}(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{\mathbb{D}}$ porque $K_{F_{j-1}}(z) \neq 0$ em $\overline{\mathbb{D}}$ por (VI_{j-1}) . Sejam $K_1 = \overline{\mathbb{D}} \setminus \varpi_j$ e $K_2 = \overline{\omega_j}$. Então, como consequência do teorema de Runge, existe uma função $h : \mathbb{D}_\eta \rightarrow \mathbb{C}$, $\eta > 1$, verificando (veja proposição B.7)

$$(A) \quad |h(z) - 1| \leq \frac{1}{\tau}, \quad \forall z \in K_1.$$

$$(B) \quad |h(z) - \tau| \leq \frac{1}{\tau}, \quad \forall z \in K_2.$$

$$(C) \quad \left(\frac{g_{j-1}}{h}\right)'(z) \neq 0, \quad \forall z \in \overline{\mathbb{D}}.$$

$$(D) \quad h(z) \neq 0, \quad \forall z \in \mathbb{D}_\eta.$$

Sabemos que a transformação de López-Ros (veja observação 3.3) nos dá uma nova imersão mínima conforme a partir dos dados

$$f_j = f_{j-1}h \quad \text{e} \quad g_j = g_{j-1}/h. \quad (5.12)$$

A proposição 3.3 garante que a mesma tem curvatura de Gauss estritamente negativa em $\overline{\mathbb{D}}$. Consideraremos como F_j esta imersão. Se $\tilde{\phi}^j = (\tilde{\phi}_1^j, \tilde{\phi}_2^j, \tilde{\phi}_3^j)$ é a Representação de Weierstrass para estes dados⁵, então

$$F_j(z) = \sum_{i=0}^3 \left(\Re \int_0^z \tilde{\phi}_i^j(\zeta) d\zeta \right) b_i^j.$$

⁵Note que $\tilde{\phi}_3^j = \tilde{\phi}_3^{j-1}$.

Observação 5.2. Seja $n \in \mathbb{N}$, h_n a função dada pela proposição B.7 para $\tau = n$ e $g_j^n(z) = g_{j-1}(z)/h_n(z)$. Como

$$|h_n - 1| < \frac{1}{n}, \quad \forall z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \varpi_j,$$

então a sequência $\{h_n\}$ converge uniformemente a 1 quando $n \rightarrow \infty$ em $\overline{\mathbb{D}} \setminus \varpi_j$ e, portanto, $\{g_j^n\}$ converge uniformemente a g_{j-1} quando $n \rightarrow \infty$ em $\overline{\mathbb{D}} \setminus \varpi_j$. Logo, para cada $\bar{\epsilon} > 0$, existe um $N_{\bar{\epsilon}} \in \mathbb{N}$ tal que

$$|g_j^n(z) - g_{j-1}(z)| < \bar{\epsilon}, \quad \forall n \geq N_{\bar{\epsilon}} \in \mathbb{N}.$$

Vamos escolher τ como na observação anterior para $\bar{\epsilon} = \frac{1}{2N\sqrt{N}}$, ou seja $\tau > N_{\text{sen } \frac{1}{2N\sqrt{N}}}$. Também vamos considerar

$$\tau > \sup_{w \in \overline{\mathbb{D}}} \left\{ \left\| \phi^{j-1}(w) \right\| \right\} N^2 + 1 \quad \text{e} \quad \tau > \frac{\sqrt{2} N^{7/2}}{\sup_{w \in \overline{\mathbb{D}}} \{|f(w)|\}}.$$

Agora vamos mostrar que F_j , assim definida, satisfaz $(I_j), \dots, (VII_j)$. A propriedade (I_j) segue de expressar F_j na base canônica $\{e_1, e_2, e_3\}$ de \mathbb{R}^3 . Se b_{ik}^j são as coordenadas de b_k^j na base canônica, com $k = 1, 2, 3$, ou seja,

$$b_k^j = \sum_{i=1}^3 b_{ik}^j e_i,$$

então a representação de Weierstrass de F_j na base canônica está dada por

$$F_j(z) = \sum_{i=0}^3 \left(\Re \int_0^z \phi_i^j(\zeta) d\zeta \right) e_i,$$

onde

$$\phi_i^j(z) = \sum_{k=1}^3 b_{ik}^j \tilde{\phi}_k^j(z). \quad (5.13)$$

Para mostrar as restantes propriedades vamos notar que as mesmas são independentes da base. Então,

$$\begin{aligned} \|\phi^j - \phi^{j-1}\|^2 &= \|\tilde{\phi}^j - \tilde{\phi}^{j-1}\|^2 \\ &= |\tilde{\phi}_1^j - \tilde{\phi}_1^{j-1}|^2 + |\tilde{\phi}_2^j - \tilde{\phi}_2^{j-1}|^2 + |\tilde{\phi}_3^j - \tilde{\phi}_3^{j-1}|^2 \\ &= \frac{1}{4} \left(|f_j - f_{j-1} - f_j g_j^2 + f_{j-1} g_{j-1}^2|^2 + |f_j - f_{j-1} + f_j g_j^2 - f_{j-1} g_{j-1}^2|^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(|f_j - f_{j-1}| + |f_j g_j^2 - f_{j-1} g_{j-1}^2| \right)^2, \end{aligned}$$

Daí, se $z \in K_1 = \overline{\mathbb{D}} \setminus \varpi_j$, então

$$\begin{aligned}
 \|\phi^j(z) - \phi^{j-1}(z)\| &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|f_j(z) - f_{j-1}(z)| + |f_j(z)g_j(z)^2 - f_{j-1}(z)g_{j-1}(z)^2| \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|f_{j-1}(z)(h(z) - 1)| + \left| f_{j-1}(z)g_{j-1}(z)^2 \left(\frac{1 - h(z)}{h(z)} \right) \right| \right) \\
 &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{|f_{j-1}(z)|}{\tau} + \frac{|f_{j-1}(z)g_{j-1}(z)^2|}{\tau - 1} \right), \text{ devido a (A)} \\
 &\leq \frac{1}{\tau - 1} \left(\frac{|f_{j-1}(z)| + |f_{j-1}(z)g_{j-1}(z)^2|}{\sqrt{2}} \right) \\
 &= \frac{\|\phi^{j-1}(z)\|}{\tau - 1} \\
 &\leq \frac{\sup_{w \in \overline{\mathbb{D}}} \|\phi^{j-1}(z)\|}{\tau - 1}.
 \end{aligned}$$

Como $\tau > \sup_{w \in \overline{\mathbb{D}}} \|\phi^{j-1}(z)\| N^2 + 1$, temos que

$$\|\phi^j(z) - \phi^{j-1}(z)\|^2 \leq \frac{1}{N^2},$$

o que implica (II_j).

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
 \|\phi^j(z)\| &= \|\tilde{\phi}^j(z)\| \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|f_j(z)| + |f_j(z)g_j(z)^2| \right) \\
 &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} |f_j(z)| \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} |f_{j-1}(z)h(z)|.
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

Daí, se $z \in K_2 = \overline{\omega_j}$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \|\phi^j(z)\| &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} |f_{j-1}(z)| \frac{(\tau - 1)(\tau + 1)}{\tau} \text{ usando (B)} \\
 &= \frac{\tau - 1}{\sqrt{2}} \frac{\tau + 1}{\tau} |f_{j-1}(z)| \\
 &\geq \frac{\tau - 1}{\sqrt{2}} \sup_{w \in \overline{\mathbb{D}}} \{|f_{j-1}(w)|\}.
 \end{aligned}$$

Como $\tau \geq 1 + \frac{\sqrt{2}N^{7/2}}{\sup_{w \in \overline{\mathbb{D}}} \{|f_{j-1}(w)|\}}$, então $\|\phi^j(z)\| \geq N^{7/2}$ e, portanto, vale (III_j).

Para provar a propriedade (IV_j) não podemos usar a proposição B.7 pois não conhecemos o comportamento de h em $\varpi_j \setminus \omega_j$. Usaremos o item (b) da afirmação 5.2.

Usando (5.12) e (5.14) obtemos

$$\|\phi^j(z)\| = \frac{1}{\sqrt{2}}|f_{j-1}(z)||g_{j-1}(z)| \left(\frac{|h(z)|}{|g_{j-1}(z)|} + \frac{|g_{j-1}(z)|}{|h(z)|} \right) \geq \frac{2}{\sqrt{2}}|f_{j-1}(z)||g_{j-1}(z)|,$$

porque $a + \frac{1}{a} \geq 2$ para todo $a > 0$. Isolando f_j na fórmula da métrica conforme (veja (3.20)) e substituindo acima, obtemos

$$\|\phi^j(z)\| \geq 2 \|\phi^{j-1}(z)\| \frac{|g_{j-1}(z)|}{1 + |g_{j-1}(z)|^2}. \quad (5.15)$$

Agora precisamos limitar inferiormente em ϖ_j a função

$$\frac{|g_{j-1}(z)|}{1 + |g_{j-1}(z)|^2}. \quad (5.16)$$

Para isto vamos notar que $g_{j-1}(z) = \pi \circ N_{j-1}(z)$, onde π é a projeção estereográfica desde o polo norte que, neste caso, é o ponto q_j da afirmação 5.2⁶. O item (b) desta afirmação implica que a função g não se anula e que não tem polos em ϖ_j (veja figura 5.13). Mais especificamente, temos que

$$\frac{r_5}{\sqrt{N}} \leq \angle(q_j, N_{j-1}(z)) \leq \pi - \frac{r_5}{\sqrt{N}}. \quad (5.17)$$

Agora, se $z \in \varpi_j$, então a terceira coordenada de $N_{j-1}(z)$ na base B_j é $\cos \angle(q_j, N_{j-1}(z))$. Usando o fato de o cosseno ser uma função decrescente em $[0, \pi]$ e (5.17), obtemos

$$-\cos \frac{r_5}{\sqrt{N}} \leq \cos \angle(q_j, N_{j-1}(z)) \leq \cos \frac{r_5}{\sqrt{N}}.$$

Assim, temos que

$$N_{j-1}(\varpi_j) = \left\{ x_1 b_1^j + x_2 b_2^j + x_3 b_3^j; -\cos \frac{r_5}{\sqrt{N}} \leq x_3 \leq \cos \frac{r_5}{\sqrt{N}} \right\},$$

ou seja, o conjunto $N_{j-1}(\varpi_j)$ é o que está na esfera entre dois planos horizontais, portanto sua imagem pela projeção estereográfica é um anel. Para ver qual é o anel vamos encontrar a projeção estereográfica dos pontos da forma $x_1 b_1^j + x_2 b_2^j \pm \cos \frac{r_5}{\sqrt{N}} b_3^j$. Logo,

⁶Note que a base B_j foi escolhida de forma tal que $b_3^j = q_j$.

$$\pi \left(x_1 b_1^j + x_2 b_2^j + \cos \frac{r_5}{\sqrt{N}} b_3^j \right) = \left(\frac{x_1}{1 - \cos \frac{r_5}{\sqrt{N}}}, \frac{x_2}{1 - \cos \frac{r_5}{\sqrt{N}}} \right),$$

donde

$$\left| \pi \left(x_1 b_1^j + x_2 b_2^j + \cos \frac{r_5}{\sqrt{N}} b_3^j \right) \right|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{\left(1 - \cos \frac{r_5}{\sqrt{N}} \right)^2} = \frac{1 - \cos^2 \frac{r_5}{\sqrt{N}}}{\left(1 - \cos \frac{r_5}{\sqrt{N}} \right)^2},$$

portanto,

$$\left| \pi \left(x_1 b_1^j + x_2 b_2^j + \cos \frac{r_5}{\sqrt{N}} b_3^j \right) \right| = \frac{\sin \frac{r_5}{\sqrt{N}}}{1 - \cos \frac{r_5}{\sqrt{N}}}.$$

Analogamente, temos

$$\left| \pi \left(x_1 b_1^j + x_2 b_2^j - \cos \frac{r_5}{\sqrt{N}} b_3^j \right) \right| = \frac{\sin \frac{r_5}{\sqrt{N}}}{1 + \cos \frac{r_5}{\sqrt{N}}}.$$

Daí,

$$\frac{\sin \frac{r_5}{\sqrt{N}}}{1 + \cos \frac{r_5}{\sqrt{N}}} \leq |g_{j-1}(z)| \leq \frac{\sin \frac{r_5}{\sqrt{N}}}{1 - \cos \frac{r_5}{\sqrt{N}}}. \quad (5.18)$$

Como queremos limitar inferiormente (5.16), e temos (5.18), vamos minimizar a função

$$H(x) = \frac{x}{1+x^2} \quad \text{com } x \in I = \left(\frac{\sin \frac{r_5}{\sqrt{N}}}{1 + \cos \frac{r_5}{\sqrt{N}}}, \frac{\sin \frac{r_5}{\sqrt{N}}}{1 - \cos \frac{r_5}{\sqrt{N}}} \right).$$

Como

$$H'(x) = \frac{(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2},$$

então os pontos críticos de H são 1 e -1 neste intervalo, mas $-1 \notin I$. Por outro lado H é estritamente crescente em $\left(\frac{\sin \frac{r_5}{\sqrt{N}}}{1 + \cos \frac{r_5}{\sqrt{N}}}, 1 \right)$, logo 1 não é mínimo. Vamos verificar então nos extremos do intervalo I .

$$\begin{aligned} H \left(\frac{\sin \frac{r_5}{\sqrt{N}}}{1 + \cos \frac{r_5}{\sqrt{N}}} \right) &= \frac{\frac{\sin \frac{r_5}{\sqrt{N}}}{1 + \cos \frac{r_5}{\sqrt{N}}}}{1 + \frac{\sin^2 \frac{r_5}{\sqrt{N}}}{\left(1 + \cos \frac{r_5}{\sqrt{N}} \right)^2}} \\ &= \frac{\sin \frac{r_5}{\sqrt{N}}}{1 + \cos \frac{r_5}{\sqrt{N}}} \frac{\left(1 + \cos \frac{r_5}{\sqrt{N}} \right)^2}{\left(1 + \cos \frac{r_5}{\sqrt{N}} \right)^2 + \sin^2 \frac{r_5}{\sqrt{N}}} \\ &= \frac{\sin \frac{r_5}{\sqrt{N}} \left(1 + \cos \frac{r_5}{\sqrt{N}} \right)}{\left(2 + 2 \cos \frac{r_5}{\sqrt{N}} \right)} \\ &= \frac{\sin \frac{r_5}{\sqrt{N}}}{2}. \end{aligned}$$

Neste caso encontramos que os dois extremos são mínimos, ou seja,

$$H \left(\frac{\sin \frac{r_5}{\sqrt{N}}}{1 - \cos \frac{r_5}{\sqrt{N}}} \right) = \frac{\sin \frac{r_5}{\sqrt{N}}}{2}.$$

Substituindo em (5.15), obtemos

$$\|\phi^j(z)\| \geq \|\phi^{j-1}(z)\| \sin \frac{r_5}{\sqrt{N}} \geq r_2 \sin \frac{r_5}{\sqrt{N}} = \frac{2}{r_5} \sin \frac{r_5}{\sqrt{N}}$$

pela propriedade (b) da afirmação 5.1 já que $z \in \varpi_j$, e pela definição de r_5 .

Como $N > r_5^2$, o que implica que $\frac{r_5}{\sqrt{N}} < 1$, então

$$\frac{2}{r_5} \sin \frac{r_5}{\sqrt{N}} \geq \frac{1}{\sqrt{N}},$$

daí

$$\|\phi^j(z)\| \geq \frac{1}{\sqrt{N}},$$

o que implica (IV_j) .

Para provar (V_j) vamos escolher $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \varpi_j$, e vamos observar que

$$\sin \frac{\angle(N_j(z), N_{j-1}(z))}{2} = \frac{\|N_j(z) - N_{j-1}(z)\|}{2}.$$

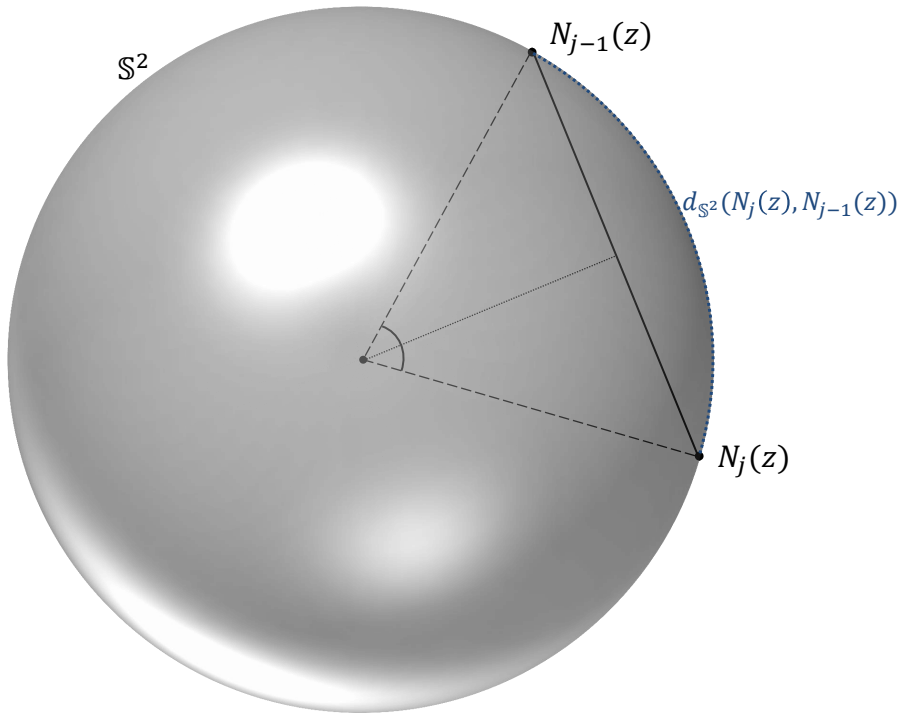


Figura 5.14: Distância em \mathbb{S}^2 entre $N_j(z)$ e $N_{j-1}(z)$ para $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \varpi_j$.

Como $\angle(N_j(z), N_{j-1}(z)) = d_{\mathbb{S}^2}(N_j(z), N_{j-1}(z))$ (veja figura 5.14), então

$$2 \sin \frac{d_{\mathbb{S}^2}(N_j(z), N_{j-1}(z))}{2} = \|N_j(z) - N_{j-1}(z)\| < 2 |g_j(z) - g_{j-1}(z)|,$$

Como $\tau > N_{\text{sen}} \frac{1}{2N\sqrt{N}}$ (veja obsevação 5.2), então $|g_j(z) - g_{j-1}(z)| < \text{sen} \frac{1}{2N\sqrt{N}}$,
donde

$$\text{sen} \frac{d_{\mathbb{S}^2}(N_j(z), N_{j-1}(z))}{2} < \text{sen} \frac{1}{2N\sqrt{N}},$$

daí

$$d_{\mathbb{S}^2}(N_j(z), N_{j-1}(z)) < \frac{1}{N\sqrt{N}},$$

o que prova (V_j).

A propriedade (VI_j) segue da proposição 3.3 porque temos que

- $h(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{D}_\eta$ por (D).
- $\left(\frac{g_{j-1}}{h}\right)'(z) \neq 0, \forall z \in \overline{\mathbb{D}}$ por (C) já que $g'_{j-1}(z) \neq 0$ em $\overline{\mathbb{D}}$ por (VI_{j-1}).

Vamos provar agora a propriedade (VII_j), e para isto vamos considerar a base B_j . Vamos observar que

$$\text{sen} \angle(q_j, F_{j-1}(z)) = \frac{|(x_1^{j-1}(z), x_2^{j-1}(z))|}{\|F_{j-1}(z)\|}.$$

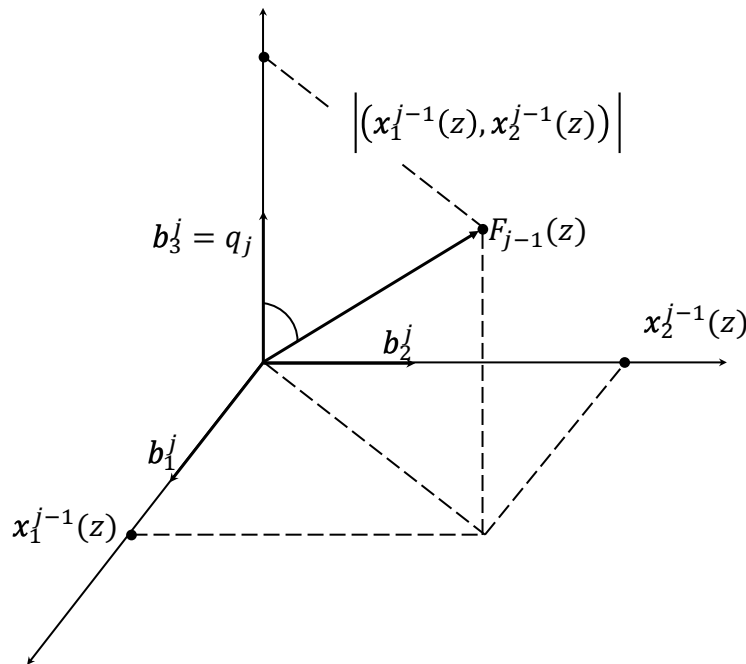


Figura 5.15: F_{j-1} na base B_j .

Daí, se $z \in \overline{\varpi_j}$, então

$$\begin{aligned} \left| (x_1^{j-1}(z), x_2^{j-1}(z)) \right| &= \|F_{j-1}(z)\| \sin \angle(q_j, F_{j-1}(z)) \\ &\leq \|F_{j-1}(z)\| \angle(q_j, F_{j-1}(z)) \\ &\leq \frac{r_6}{\sqrt{N}} \|F_{j-1}(z)\|, \end{aligned}$$

onde esta última desigualdade foi obtida usando (a) da afirmação 5.2, já que estamos assumindo que $\|F_{j-1}(z)\| \geq \frac{1}{\sqrt{N}}$. Assim fica provada a propriedade (VII.1_j). A propriedade (VII.2_j) vem do fato que $\tilde{\phi}_3^j = \tilde{\phi}_3^{j-1}$.

Então, construímos a imersão F_j satisfazendo (I_j)...(VII_j). Como consequência, existe uma família de imersões mínimas conformes, $F_0 \dots F_{2N}$, com N como nas hipóteses, satisfazendo (I_k)...(VII_k), $1 \leq k \leq 2N$.

5.1.3

Propriedades de F_{2N}

Para a construção da imersão Y que prova o lema, vamos primeiro observar algumas propriedades da imersão F_{2N} .

Afirmação 5.3. *A imersão mínima conforme F_{2N} verifica as seguintes propriedades.*

- (a) *Existe $\Omega \in \mathbb{D}$, com $0 \in \Omega$, tal que $(\Omega, d_{F_{2N}})$ é um disco geodésico de raio $\rho + s$ centrado na origem.*
- (b) *$|z| > 1 - \frac{3}{N}$ para todo $z \in \partial\Omega$.*
- (c) *$\|F_k(z) - F_{k-1}(z)\| \leq \frac{5}{N^2}$, para todo $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \varpi_k$, com $1 \leq k \leq 2N$.*
- (d) *$\|F_{2N}(z) - F_0(z)\| \leq \frac{10}{N}$, para todo $z \in \overline{\mathbb{D}} \setminus \bigcup_{i=1}^{2N} \varpi_i$.*
- (e) *$F_{2N}(\Omega) \subset B_R$, onde $R = \sqrt{r^2 + s^2} + \epsilon$.*

Demonstração. Se verificamos (i) e (ii) da proposição 5.2 para $c = \frac{1}{2\sqrt{N}}$, se teria que $d_{F_{2N}}(0, z) \geq \frac{1}{4\sqrt{N}}$, para todo $z \in \mathbb{S}^1$, o que implicaria a existência de um conjunto $\Omega \in \overline{\mathbb{D}}$ tal que $d_{F_{2N}}(0, z) = \frac{1}{4\sqrt{N}}$, para todo $z \in \partial\Omega$. Daí, $d_{F_{2N}}(0, z) \leq \frac{1}{4\sqrt{N}}$, para todo $z \in \overline{\Omega}$. Vamos então mostrar estes itens para a constante c mencionada, isto é,

$$\lambda_{F_{2N}}(z) = \frac{1}{2\sqrt{N}} \quad \forall z \in \overline{\mathbb{D}}, \quad (5.19)$$

$$\lambda_{F_{2N}}(z) = \frac{N^{7/2}}{2} \quad \forall z \in \Omega_N. \quad (5.20)$$

Analogamente a como mostramos (b) na afirmação 5.1, obtemos que

$$\|\phi^{2N}(z)\| \geq r_2 \quad \forall z \in \mathbb{D} \setminus \bigcup_{i=1}^{2N} \varpi_i. \quad (5.21)$$

Por outro lado,

$$\|\phi^{2N}(z)\| \geq \|\phi^j(z)\| - \|\phi^{2N}(z) - \phi^j(z)\|, \quad \text{com } 1 \leq j \leq 2N. \quad (5.22)$$

Seja $z \in \omega_j$, então

$$\begin{aligned} \|\phi^{2N}(z)\| &\geq N^{7/2} - \|\phi^{2N}(z) - \phi^j(z)\| \quad \text{por (III}_j\text{)}, \\ &\geq N^{7/2} - \|\phi^{2N}(z) - \phi^{2N-1}(z)\| - \dots - \|\phi^{j+1}(z) - \phi^j(z)\| \\ &\geq N^{7/2} - \frac{2N - (j+1)}{N^2}, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade se deve a (II_k), com $j+1 \leq k \leq 2N$, porque $\omega_j \subset \varpi_j \in \mathbb{D} \setminus \varpi_k$ para todo $j+1 \leq k \leq 2N$. Daí,

$$\|\phi^{2N}(z)\| \geq N^{7/2} - \frac{2}{N}, \quad \forall z \in \omega_j, \quad \forall 1 \leq j \leq 2N. \quad (5.23)$$

Por outro lado, seja $z \in \varpi_j$, então, usando novamente (5.22), temos que

$$\begin{aligned} \|\phi^{2N}(z)\| &\geq \frac{1}{\sqrt{N}} - \|\phi^{2N}(z) - \phi^j(z)\| \quad \text{por (IV}_j\text{)}, \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{N}} - \|\phi^{2N}(z) - \phi^{2N-1}(z)\| - \dots - \|\phi^{j+1}(z) - \phi^j(z)\| \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{N}} - \frac{2N - (j+1)}{N^2}, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade se deve novamente a (II_k), com $j+1 \leq k \leq 2N$.

Daí,

$$\|\phi^{2N}(z)\| \geq \frac{1}{\sqrt{N}} - \frac{2}{N}, \quad \forall z \in \varpi_j, \quad \forall 1 \leq j \leq 2N. \quad (5.24)$$

Lembrando que

$$\lambda_{F_{2N}}(z) = \frac{\|\phi^{2N}(z)\|}{\sqrt{2}} \quad (5.25)$$

e usando (5.21), obtemos

$$\lambda_{F_{2N}}(z) \geq \frac{r_2}{\sqrt{2}} \quad \forall z \in \mathbb{D} \setminus \bigcup_{i=1}^{2N} \varpi_i$$

e como $N > \frac{1}{2r_2^2}$, então

$$\lambda_{F_{2N}}(z) \geq \frac{1}{2\sqrt{N}} \quad \forall z \in \mathbb{D} \setminus \bigcup_{i=1}^{2N} \varpi_i. \quad (5.26)$$

Por outro lado, usando (5.24) e (5.25), obtemos

$$\lambda_{F_{2N}}(z) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} - \frac{2}{N} \right) \quad \forall z \in \bigcup_{i=1}^{2N} \varpi_i,$$

e como $N \geq 47$, então $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} - \frac{2}{N} \right) \geq \frac{1}{2\sqrt{N}}$, portanto

$$\lambda_{F_{2N}}(z) \geq \frac{1}{2\sqrt{N}} \quad \forall z \in \bigcup_{i=1}^{2N} \varpi_i. \quad (5.27)$$

Juntando (5.26) e (5.27) obtemos (5.19).

Usando (5.23) e (5.25), e que $\frac{1}{\sqrt{2}} \left(N^{7/2} - \frac{2}{N} \right) \geq \frac{1}{2} N^{7/2}$ para $N > 2$, então

$$\lambda_{F_{2N}}(z) \geq \frac{1}{2} N^{7/2} \quad \forall z \in \bigcup_{i=1}^{2N} \omega_i,$$

o que implica (5.20) pois $\Omega_N \subset \bigcup_{i=1}^{2N} \omega_i$. Isto termina a prova de (a).

Para mostrar (b) considere $z \in \partial\Omega$ e suponha, por contradição, que $|z| \leq 1 - \frac{3}{N}$ (ou seja, $z \in \mathbb{D}_{1-\frac{3}{N}}$). Vamos provar que

$$d_{F_{2N}}(0, z) < \rho + \frac{s}{2},$$

o que contradiz (a). Usando a hipóteses dada por (5.3) temos que

$$d_{F_0|_{\mathbb{D}_{1-\frac{3}{N}}}}(0, z) < \rho + \frac{s}{4},$$

portanto existe $\gamma : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{D}_{1-\frac{3}{N}}$, com $\gamma(0) = 0$ e $\gamma(1) = z$, tal que

$$\ell(F_0 \circ \gamma) < \rho + \frac{s}{4} \quad (5.28)$$

Agora,

$$\begin{aligned} \ell(F_{2N} \circ \gamma) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left\| \phi^{2N}(\gamma(t)) \right\| \left\| \gamma'(t) \right\| dt \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left\| \phi^{2N}(\gamma(t)) - \phi^0(\gamma(t)) \right\| \left\| \gamma'(t) \right\| dt + \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \left\| \phi^0(\gamma(t)) \right\| \left\| \gamma'(t) \right\| dt, \end{aligned}$$

e como, $\gamma(t) \in \mathbb{D}_{1-\frac{3}{N}} \subset \overline{\mathbb{D}} \setminus \bigcup_{i=1}^{2N} \varpi_i$ para cada $t \in [0, 1]$, então, aplicando (Π_k) , com $1 \leq k \leq 2N$, obtemos

$$\begin{aligned} \left\| \phi^{2N}(\gamma(t)) - \phi^0(\gamma(t)) \right\| &\leq \left\| \phi^{2N}(\gamma(t)) - \phi^{2N-1}(\gamma(t)) \right\| + \cdots + \left\| \phi^1(\gamma(t)) - \phi^0(\gamma(t)) \right\| \\ &\leq 2N \frac{1}{N^2} = \frac{2}{N}, \end{aligned}$$

portanto

$$\ell(F_{2N} \circ \gamma) \leq \frac{\sqrt{2}}{N} \ell(\gamma) + \ell(F_0 \circ \gamma). \quad (5.29)$$

Por outro lado,

$$\ell(F_0 \circ \gamma) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \|\phi^0(\gamma(t))\| \|\gamma'(t)\| dt \geq \frac{r_2}{\sqrt{2}} \ell(\gamma),$$

pela própria definição de r_2 , logo

$$\ell(\gamma) \leq \frac{\sqrt{2}}{r_2} \ell(F_0 \circ \gamma).$$

Daí, substituindo em (5.29), obtemos

$$\ell(F_{2N} \circ \gamma) \leq \left(\frac{2}{r_2 N} + 1 \right) \ell(F_0 \circ \gamma) \leq \left(\frac{2}{r_2 N} + 1 \right) \left(\rho + \frac{s}{4} \right) < \rho + \frac{s}{2},$$

onde a segunda desigualdade é devido a (5.28) e a última a $N > \frac{2(4\rho+s)}{r_2 s}$. Logo

$$d_{F_{2N}|_{\overline{\Omega}}}(0, z) < \rho + \frac{s}{2},$$

o que é uma contradição, portanto $|z| > 1 - \frac{3}{N}$.

Para provar (c), escolha $z \in \mathbb{D} \setminus \varpi_j$, para algum $1 \leq j \leq 2N$. Então existe $\beta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D} \setminus \varpi_j$, com $\beta(0) = 0$ e $\beta(1) = z$ tal que (veja figura 5.16)

$$\ell(\beta) < 1 + \frac{\pi}{N}. \quad (5.30)$$

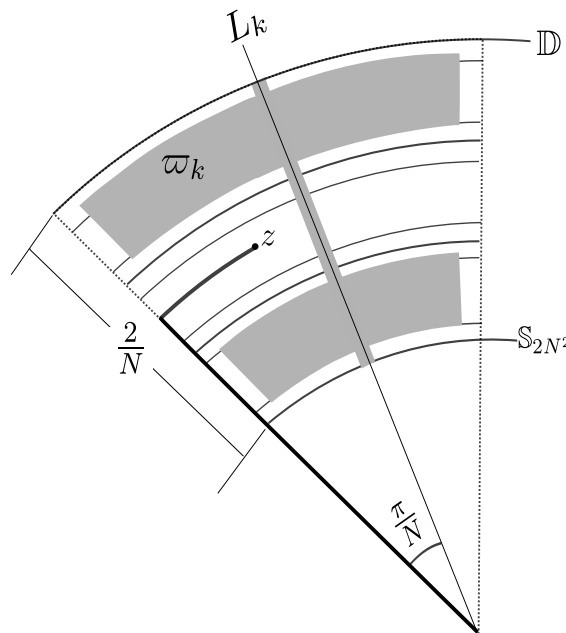


Figura 5.16: Curva em ϖ_k com comprimento menor que $1 + \frac{\pi}{N}$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\|F_j(z) - F_{j-1}(z)\| &= \left\| \sum_{i=1}^3 \left(\Re \int_{\beta} (\phi_i^j(\zeta) - \phi_i^{j-1}(\zeta)) d\zeta \right) e_i \right\| \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left| \int_{\beta} (\phi_i^j(\zeta) - \phi_i^{j-1}(\zeta)) d\zeta \right|^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left(\int_{\beta} |\phi_i^j(\zeta) - \phi_i^{j-1}(\zeta)| |d\zeta| \right)^2} \\
&\leq \ell(\beta) \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left(\max_{\zeta \in \beta} |\phi_i^j(\zeta) - \phi_i^{j-1}(\zeta)| \right)^2} \\
&\leq \ell(\beta) \sqrt{\sum_{i=1}^3 \left(\frac{1}{N^2} \right)^2} \quad \text{por (II}_j\text{)} \\
&< \left(1 + \frac{\pi}{N} \right) \frac{\sqrt{3}}{N^2} \quad \text{por (5.30)} \\
&< \frac{5}{N^2}
\end{aligned}$$

A propriedade (d) é consequência imediata de (c). De fato,

$$\begin{aligned}
\|F_{2N}(z) - F_0(z)\| &\leq \|F_{2N}(z) - F_{2N-1}(z)\| + \cdots + \|F_1(z) - F_0(z)\| \\
&\leq 2N \frac{5}{N^2} \quad \text{por (c), com } 1 \leq j \leq 2N \\
&= \frac{10}{N}.
\end{aligned}$$

Finalmente, vamos mostrar (e). Como cada coordenada de F_{2N} é harmônica, basta mostrar que

$$\|F_{2N}(z)\| \leq R, \quad \forall z \in \partial\Omega, \quad (5.31)$$

pelo princípio do máximo para funções harmônicas (veja corolário B.6.2). Seja

$z \in \partial\Omega$. Suponhamos primeiro que $z \in \mathbb{D} \setminus \bigcup_{i=1}^{2N} \varpi_i$, então

$$\|F_{2N}(z)\| \leq \|F_{2N}(z) - F_0(z)\| + \|F_0(z)\| \leq \frac{10}{N} + \|F_0(z)\| \leq \frac{10}{N} + r,$$

onde a segunda desigualdade se deve a (d) e a última a que estamos assumindo que $X(\mathbb{D}) \subset B_r$, e $F_0(z) = X(z/\xi)$. Como $N > \frac{10}{R-r}$, então temos (5.31).

Vamos supor agora que $z \in \varpi_j$, para algum j . Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{D}$ uma curva⁷ com $\gamma(0) = 0$ e $\gamma(1) = z$, e tal que $\ell(F_{2N} \circ \gamma) = \rho + s$. Sejam $\tilde{z} = \gamma(\tilde{t})$ e $\hat{z} = \gamma(\hat{t})$ onde

⁷A existência de dita curva está garantida pois $(\Omega, d_{F_{2N}})$ é um disco geodésico de raio $\rho + s$ centrado na origem, e $z \in \partial\Omega$.

$$\tilde{t} = \inf \left\{ t \in [0, 1]; \gamma(t) \in \bigcup_{i=1}^{2N} \varpi_i \right\}, \hat{t} = \sup \{ t \in [0, 1]; \gamma(t) \in \partial \varpi_j \}.$$

Vamos definir agora as seguintes curvas

$$\gamma_1(t) = \gamma|_{[0, \tilde{t}]}(t), \gamma_2(t) = \gamma|_{[\tilde{t}, \hat{t}]}(t) \text{ e } \gamma_3(t) = \gamma|_{[\hat{t}, 1]}(t).$$

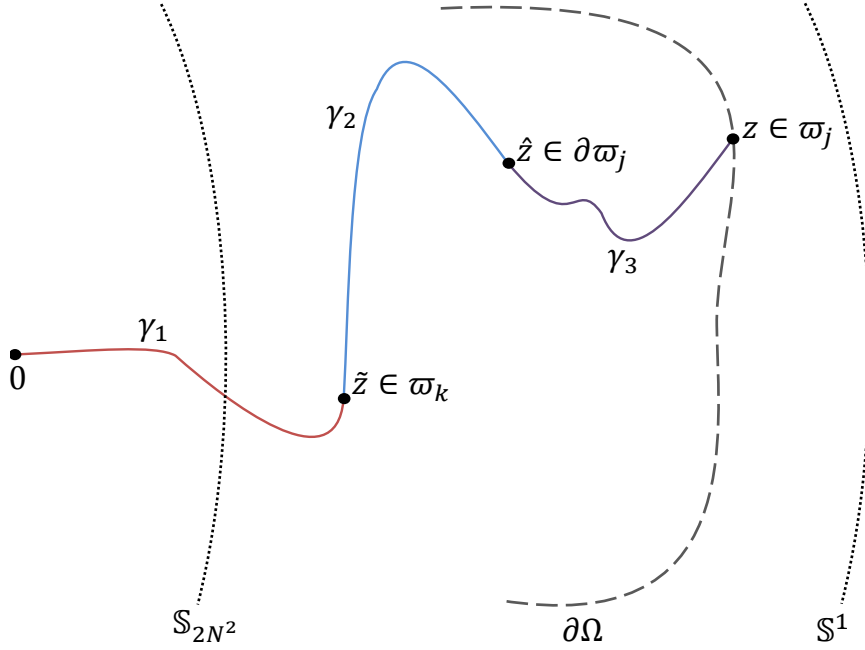


Figura 5.17: Curva que liga a origem a um ponto $z \in \varpi_j$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \ell(F_0 \circ \gamma_1) - \ell(F_{2N} \circ \gamma_1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\tilde{t}} \left(\|\phi^0(\gamma_1(t))\| - \|\phi^{2N}(\gamma_1(t))\| \right) \|\gamma_1'(t)\| dt \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\tilde{t}} \left(\|\phi^0(\gamma_1(t)) - \phi^{2N}(\gamma_1(t))\| \right) \|\gamma_1'(t)\| dt \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\tilde{t}} \left(\|\phi^{2N}(\gamma_1(t)) - \phi^{2N-1}(\gamma_1(t))\| \right. \\ &\quad \left. + \dots + \|\phi^1(\gamma_1(t)) - \phi^0(\gamma_1(t))\| \right) \|\gamma_1'(t)\| dt \\ &< \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2}{N} \ell(\gamma_1), \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é consequência da propriedade (Π_k) , com $1 \leq k \leq 2N$, já que o traço de $\gamma_1(t)$ está contido em $\overline{\mathbb{D}} \setminus \bigcup_{i=1}^{2N} \varpi_i$. Logo,

$$\ell(F_0 \circ \gamma_1) - \ell(F_{2N} \circ \gamma_1) \leq \frac{2}{\sqrt{2}N} \ell(\gamma_1). \quad (5.32)$$

Além disso,

$$\rho + s = \ell(F_{2N} \circ \gamma) \geq \ell(F_{2N} \circ \gamma_1) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\tilde{t}} \|\phi^{2N}(\gamma_1(t))\| \|\gamma_1'(t)\| dt \geq \frac{r_2}{\sqrt{2}} \ell(\gamma_1)$$

por (5.21), daí,

$$\ell(\gamma_1) \leq \sqrt{2} \frac{\rho + s}{r_2}. \quad (5.33)$$

Substituindo (5.33) em (5.32), obtemos

$$\ell(F_0 \circ \gamma_1) - \ell(F_{2N} \circ \gamma_1) \leq \frac{2(\rho + s)}{r_2 N},$$

o que implica

$$\ell(F_{2N} \circ \gamma_1) \geq \ell(F_0 \circ \gamma_1) - \frac{2(\rho + s)}{r_2 N}. \quad (5.34)$$

Seja β o segmento $\beta(t) = (1-t)\tilde{z} + t\frac{\tilde{z}}{|\tilde{z}|}$, $t \in [0, 1]$. Como $\tilde{z} \in \partial\varpi_k$ para algum k , então $\ell(\beta) < \frac{2}{N} + 2t$. Usando que $t < \frac{1}{2N}$, temos

$$\ell(\beta) < \frac{3}{N}. \quad (5.35)$$

Também,

$$\ell(F_0 \circ \beta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \|\phi^0(\beta(t))\| \|\beta'(t)\| dt \leq \frac{r_1}{\sqrt{2}} \ell(\beta)$$

pela própria definição de r_1 . Substituindo (5.35), obtemos

$$\ell(F_0 \circ \beta) < \frac{3r_1}{\sqrt{2}N}. \quad (5.36)$$

Como vale (5.4), então

$$\rho - u < d_{F_0} \left(0, \frac{\tilde{z}}{|\tilde{z}|} \right).$$

Assim,

$$\rho - u < d_{F_0}(0, \tilde{z}) + d_{F_0} \left(\tilde{z}, \frac{\tilde{z}}{|\tilde{z}|} \right) \leq \ell(F_0 \circ \gamma_1) + \ell(F_0 \circ \beta) \leq \ell(F_0 \circ \gamma_1) + \frac{3r_1}{\sqrt{2}N},$$

logo

$$\ell(F_0 \circ \gamma_1) > \rho - u - \frac{3r_1}{\sqrt{2}N}. \quad (5.37)$$

Substituindo (5.37) em (5.34) obtemos

$$\ell(F_{2N} \circ \gamma_1) > \rho - u - \frac{3r_1}{\sqrt{2}N} - \frac{2(\rho + s)}{r_2 N},$$

logo, como $c = \frac{3r_1 r_2 + 2\sqrt{2}(\rho + s)}{\sqrt{2}r_2}$, então

$$\ell(F_{2N} \circ \gamma_1) > \rho - u - \frac{c}{N}. \quad (5.38)$$

Por outro lado,

$$\|F_{2N}(z) - F_{2N}(\hat{z})\| \leq \ell(F_{2N} \circ \gamma_3) \leq \rho + s - \ell(F_{2N} \circ \gamma_1),$$

pois $\ell(F_{2N} \circ \gamma_1) + \ell(F_{2N} \circ \gamma_3) \leq \ell(F_{2N} \circ \gamma) = \rho + s$. Substituindo (5.38) obtemos

$$\|F_{2N}(z) - F_{2N}(\hat{z})\| \leq s + u + \frac{c}{N}. \quad (5.39)$$

Vamos considerar dois casos possíveis.

Caso 1. $\|F_{j-1}(\hat{z})\| \leq \frac{1}{\sqrt{N}}$.

Neste caso temos

$$\begin{aligned} \|F_{j-1}(z)\| &\leq \|F_{2N}(z) - F_{2N}(\hat{z})\| + \|F_{2N}(\hat{z}) - F_{j-1}(\hat{z})\| + \|F_{j-1}(\hat{z})\| \\ &\leq s + u + \frac{c}{N} + \|F_{2N}(\hat{z}) - F_{j-1}(\hat{z})\| + \frac{1}{\sqrt{N}} \text{ por (5.39)} \\ &\leq s + u + \frac{c}{N} + \|F_{2N}(\hat{z}) - F_{j-1}(\hat{z})\| + \cdots + \|F_j(\hat{z}) - F_{j-1}(\hat{z})\| + \frac{1}{\sqrt{N}} \\ &\leq s + u + \frac{c}{N} + (2N - (j - 1)) \frac{5}{N^2} + \frac{1}{\sqrt{N}} \\ &< R \end{aligned}$$

onde a penúltima desigualdade foi obtida aplicando a propriedade (c) já que $\hat{z} \in \partial\varpi_j \subset \mathbb{D} \setminus \varpi_k$, com $j \leq k \leq 2N$, e a última se deve a que $N > \frac{(s+u+c+11)^2}{R^2}$.

Caso 2. $\|F_{j-1}(\hat{z})\| \geq \frac{1}{\sqrt{N}}$.

Seja $F_{2N}^*(z) = x_1^{2N}(z)b_1^{2N} + x_2^{2N}(z)b_2^{2N}$, onde

$$F_{2N}(z) = x_1^{2N}(z)b_1^{2N} + x_2^{2N}(z)b_2^{2N} + x_3^{2N}(z)b_3^{2N}.$$

Então

$$\begin{aligned} &\|F_{2N}^*(z)\| \\ &\leq \|F_{2N}^*(z) + F_{2N}^*(\hat{z})\| + \|F_{2N}^*(\hat{z}) + F_{j-1}^*(\hat{z})\| + \|F_{j-1}^*(\hat{z})\| \\ &\leq s + u + \frac{c}{N} + \|F_{2N}^*(\hat{z}) + F_{j-1}^*(\hat{z})\| + \|F_{j-1}^*(\hat{z})\| \text{ por (5.39),} \\ &\leq s + u + \frac{c}{N} + \|F_{2N}^*(\hat{z}) + F_{2N-1}^*(\hat{z})\| + \cdots + \|F_j^*(\hat{z}) + F_{j-1}^*(\hat{z})\| + \|F_{j-1}^*(\hat{z})\| \\ &\leq s + u + \frac{c}{N} + (2N - (j - 1)) \frac{5}{N^2} + \|F_{j-1}^*(\hat{z})\| \text{ por (c), com } j - 1 \leq k \leq 2N, \\ &\leq s + u + \frac{c}{N} + \frac{10}{N} + \frac{r_6}{\sqrt{N}} \|F_{j-1}(\hat{z})\| \text{ por (VII.1}_j\text{),} \\ &\leq s + u + \frac{c}{N} + \frac{10}{N} + \frac{r_6}{\sqrt{N}} (\|F_{j-1}(\hat{z}) - F_{j-2}(\hat{z})\| + \cdots + \|F_1(\hat{z}) - F_0(\hat{z})\| + \|F_0(\hat{z})\|) \\ &\leq s + u + \frac{c}{N} + \frac{10}{N} + \frac{r_6}{\sqrt{N}} \left((j - 1) \frac{5}{N^2} + \|F_0(\hat{z})\| \right) \text{ por (c), com } 0 \leq k \leq j - 1, \\ &\leq s + u + \frac{c + 10}{N} + \frac{r_6}{\sqrt{N}} \left(\frac{10}{N} + r \right), \end{aligned}$$

daí,

$$\|F_{2N}^*(z)\| \leq s + u + \frac{c'}{\sqrt{N}}, \quad (5.40)$$

pois $c' = c + 10 + r_6(10 + r)$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \|x_3^{2N}(z)b_3^{2N}\| &\leq \|x_3^{2N}(z)b_3^{2N} - x_3^j(z)b_3^{2N}\| + \|x_3^j(z)b_3^{2N} - x_3^{j-1}(z)b_3^{2N}\| \\ &\quad + \|x_3^{j-1}(z)b_3^{2N} - x_3^0(z)b_3^{2N}\| + \|x_3^0(z)b_3^{2N}\| \\ &\leq \|x_3^{2N}(z)b_3^{2N} - x_3^{2N-1}(z)b_3^{2N}\| + \dots + \|x_3^{j+1}(z)b_3^{2N} - x_3^j(z)b_3^{2N}\| \\ &\quad + \|x_3^{j-1}(z)b_3^{2N} - x_3^{j-2}(z)b_3^{2N}\| + \dots + \|x_3^1(z)b_3^{2N} - x_3^0(z)b_3^{2N}\| \\ &\quad + \|x_3^0(z)b_3^{2N}\|^8 \\ &\leq (2N - j)\frac{5}{N^2} + (j - 1)\frac{5}{N^2} + \|x_3^0(z)b_3^{2N}\|, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade é consequência de (c), com $1 \leq k \leq 2N$, $k \neq j$, já que $z \in \omega_j$. Daí,

$$\|x_3^{2N}(z)b_3^{2N}\| < \frac{20}{N} + r. \quad (5.41)$$

Usando o teorema de Pitágoras podemos afirmar que

$$\|F_{2N}(z)\|^2 = \|F_{2N}^*(z)\|^2 + \|x_3^{2N}(z)b_3^{2N}\|^2,$$

assim, substituindo (5.40) e (5.41), obtemos

$$\begin{aligned} \|F_{2N}(z)\| &\leq \sqrt{\left(s + u + \frac{c'}{\sqrt{N}}\right)^2 + \left(\frac{20}{N} + r\right)^2} \\ &= \sqrt{(s + u)^2 + 2(s + u)\frac{c'}{\sqrt{N}} + \frac{c'^2}{N} + \frac{400}{N^2} + \frac{40r}{N} + r^2} \\ &= \sqrt{s^2 + 2su + u^2 + 2(s + u)\frac{c'}{\sqrt{N}} + \frac{c'^2}{N} + \frac{400}{N^2} + \frac{40r}{N} + r^2} \\ &\leq \sqrt{s^2 + r^2} + \sqrt{u^2 + 2su} + \sqrt{\frac{2(s + u)c' + c'^2 + 400 + 40r}{\sqrt{N}}} \\ &\leq \sqrt{s^2 + r^2} + \frac{\epsilon}{2} + \sqrt{\frac{2(s + u)c' + c'^2 + 400 + 40r}{\sqrt{N}}} \text{ por hipóteses.} \end{aligned}$$

Daí, usando o fato de que $N \geq \frac{16(2(s+u)c'+c'^2+400+40r)^2}{\epsilon^4}$, o que implica que $\sqrt{\frac{2(s+u)c'+c'^2+400+40r}{\sqrt{N}}} < \frac{\epsilon}{2}$, obtemos

$$\|F_{2N}(z)\| \leq \sqrt{s^2 + r^2} + \epsilon = R \quad \square$$

⁸Note que $\|x_3^j(z)b_3^{2N} - x_3^{j-1}(z)b_3^{2N}\| = 0$.

5.1.4

Construção da imersão Y e demonstração do Lema Principal

Pelo teorema de Representação conforme de Riemann (veja teorema B.13), existe uma única aplicação conforme $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \Omega$ tal que $\varphi(0) = 0$ e $\varphi'(0) > 0$. Definimos Y como sendo

$$Y(z) = (F_{2N} \circ \varphi)(z).$$

Falta verificar que Y é a imersão que prova o lema. As teses 1, 2, 4 e 5 são imediatas pela própria definição de Y em função de F_{2N} . Falta verificar a 3.

Seja $z_0 \in \mathbb{D}_{1-\epsilon}$, então, como

$$\|Y(z_0) - X(z_0)\| = \|(F_{2N} \circ \varphi)(z_0) - X(z_0)\|,$$

temos que

$$\|Y(z_0) - X(z_0)\| \leq \|F_{2N}(\varphi(z_0)) - F_0(\varphi(z_0))\| + \|F_0(\varphi(z_0)) - F_0(z_0)\| + \|F_0(z_0) - X(z_0)\| \quad (5.42)$$

Pelo lema de Schwarz (veja lema B.1) temos que $|\varphi(z_0)| \leq |z_0| < 1 - \epsilon$, ou seja, $\varphi(z_0) \in \mathbb{D}_{1-\epsilon}$. Como $N > \frac{3}{\epsilon}$, temos que $\mathbb{D}_{1-\epsilon} \subset \mathbb{D}_{1-\frac{3}{N}}$ e, portanto, $\mathbb{D}_{1-\epsilon} \subset \mathbb{D} \setminus \bigcup_{i=1}^{2N} \varpi_i$. Usando (d) da afirmação 5.3 e que $N > \frac{30}{\epsilon}$ obtemos

$$\|F_{2N}(\varphi(z_0)) - F_0(\varphi(z_0))\| \leq \frac{10}{N} < \frac{\epsilon}{3}. \quad (5.43)$$

Para limitar o segundo termo vamos usar a continuidade uniforme de F_0 em \mathbb{D} , então vamos limitar $|\varphi(z_0) - z_0|$. Seja

$$k(z) = \ln \frac{\varphi(z)}{z},$$

Então, como $\varphi(0) = 0$ temos

$$k(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \ln \frac{\varphi(z)}{z} = \ln \varphi'(0),$$

e, portanto, k é holomorfa em \mathbb{D} pois $\varphi'(0) > 0$ (veja corolário B.9.1). Além disso, como $k(0) \in \mathbb{R}$, usando a fórmula de Schwarz (veja corolário B.7.1), temos que

$$k(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re \left(k(e^{i\theta}) \right) \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} d\theta,$$

para todo $z \in \mathbb{D}$. Daí,

$$|k(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \Re \left(k(e^{i\theta}) \right) \right| \left| \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right| d\theta. \quad (5.44)$$

Além disso,

$$\Re \left(k(e^{i\theta}) \right) = \Re \left(\ln \frac{\varphi(e^{i\theta})}{e^{i\theta}} \right) = \ln \left| \frac{\varphi(e^{i\theta})}{e^{i\theta}} \right| = \ln |\varphi(e^{i\theta})|.$$

Por outro lado, como $\varphi(e^{i\theta}) \in \partial\Omega$, então $|\varphi(e^{i\theta})| > 1 - \frac{3}{N}$ por (b) da afirmação 5.3. Logo, $1 - \frac{3}{N} \leq |\varphi(e^{i\theta})| \leq 1$. Daí,

$$\ln \left(1 - \frac{3}{N} \right) \leq \Re k(e^{i\theta}) \leq 0,$$

substituindo em (5.44) obtemos

$$|k(z)| \leq -\ln \left(1 - \frac{3}{N} \right) \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{i\theta} + z}{e^{i\theta} - z} \right| d\theta \leq -\frac{2}{\epsilon} \ln \left(1 - \frac{3}{N} \right),$$

onde a última desigualdade se deve a que $|e^{i\theta} + z| < 2$ e $|e^{i\theta} - z| > \epsilon$. Daí

$$|k(z)| \leq \ln \left(1 - \frac{3}{N} \right)^{-\frac{2}{\epsilon}}. \quad (5.45)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} |e^{k(z)} - 1| &= \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k(z)^n}{n!} - 1 \right| \\ &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k(z)^n}{n!} \right| \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|k(z)|^n}{n!} \\ &= |k(z)| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|k(z)|^{n-1}}{n!} \\ &\leq |k(z)| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|k(z)|^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= |k(z)| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|k(z)|^n}{(n)!} \\ &= |k(z)| e^{|k(z)|} \\ &\leq \ln \left(1 - \frac{3}{N} \right)^{-\frac{2}{\epsilon}} \left(1 - \frac{3}{N} \right)^{-\frac{2}{\epsilon}} \text{ por (5.45),} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left| \frac{\varphi(z)}{z} - 1 \right| \leq \frac{2}{\epsilon} \left| \ln \left(1 - \frac{3}{N} \right) \right| \left(1 - \frac{3}{N} \right)^{-\frac{2}{\epsilon}}$$

que implica

$$|\varphi(z) - z| \leq \frac{2}{\epsilon} \left| \ln \left(1 - \frac{3}{N} \right) \right| \left(1 - \frac{3}{N} \right)^{-\frac{2}{\epsilon}}.$$

Como N foi escolhido de forma tal que $\left| \ln \left(1 - \frac{3}{N} \right) \right| \left(1 - \frac{3}{N} \right)^{-\frac{2}{\epsilon}} \leq \frac{\epsilon}{2} \delta(\epsilon)$ (veja observação 5.1), então

$$|\varphi(z) - z| < \delta(\epsilon),$$

daí, pela continuidade uniforme de F_0 , obtemos

$$\|F_0(\varphi(z_0)) - F_0(z_0)\| < \frac{\epsilon}{3}. \quad (5.46)$$

Substituindo (5.2), (5.43), (5.46) em (5.42) obtemos

$$\|Y(z_0) + X(z_0)\| < \epsilon$$

e, portanto, 3 foi provado. Assim finaliza a prova do Lema.

5.2

Demonstração do Teorema de Nadirashvili

Finalmente vamos ver o contraexemplo às conjecturas de Calabi-Yau e Hadamard. A ideia é construir uma sequência

$$\chi_n = \{X_n, \epsilon_n, \xi_n\},$$

onde $X_n \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\mathbb{D}}, \mathbb{R}^3)$ para cada $n \in \mathbb{N}$ e $X_n : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão mínima conforme, $\{\epsilon_n\}$ é uma sequência decrescente de números reais positivos cujo limite é 0, e $\{\xi_n\}$ é uma sequência crescente de reais positivos convergindo a 1, de forma tal que as seguintes propriedades sejam satisfeitas para todo $n \in \mathbb{N}$.

$$(i_n) \quad X_n(0) = 0.$$

$$(ii_n) \quad (\mathbb{D}, d_{X_n}) \text{ é disco geodésico de raio } \rho_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} \text{ centrado em } 0.$$

$$(iii_n) \quad \frac{2}{3}\rho_{n-1} \leq d_{X_{n-1}}(0, z), \text{ para todo } z \in \mathbb{D}_{\xi_n}.$$

$$(iv_n) \quad X_n(\mathbb{D}) \subset B_{a_n}, \text{ onde } a_1 = 1 \text{ e } a_n = \sqrt{(a_{n-1})^2 + \frac{1}{n^2}} + \epsilon_n.$$

$$(v_n) \quad \epsilon_n < \frac{1}{n^2}.$$

$$(vi_n) \quad \|X_n(z) - X_{n-1}(z)\| < \epsilon_n, \text{ para todo } z \in \overline{\mathbb{D}_{1-\epsilon_n}}.$$

$$(vii_n) \quad \lambda_{X_n}(z) \geq \alpha_n \lambda_{X_{n-1}}(z), \text{ para todo } z \in \overline{\mathbb{D}_{\xi_n}}, \text{ onde } \{\alpha_n\} \text{ é uma sequência de números reais positivos com } \frac{1}{2} < \alpha_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \text{ e tal que } \prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \frac{1}{2}.$$

$$(viii_n) \quad K_{X_n}(z) \leq \alpha_n K_{X_{n-1}}(z).$$

Vamos tomar $\epsilon_1 = \xi_1 = \frac{1}{2}$. A imersão X_1 é obtida como segue. Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ um conjunto simplesmente conexo e $F \in \mathcal{C}^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$ tal que $F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão mínima conforme satisfazendo

- (a) $0 \in \Omega$ e $F(0) = 0$.
- (b) $K_F(z) \neq 0$, para todo $z \in \Omega$.
- (c) (Ω, d_F) é um disco geodésico de raio 1, centrado na origem.

Pelo teorema de Representação conforme de Riemann (veja teorema B.13), existe uma aplicação conforme $\varphi : \mathbb{D} \longrightarrow \Omega$, tal que $\varphi(0) = 0$ e $\varphi'(0) > 0$. Definimos então

$$\begin{aligned} X_1 : \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ z &\longmapsto (F \circ \varphi)(z). \end{aligned}$$

Pela própria definição, vemos que X_1 satisfaz as propriedades (i₁), (iii₁), (iv₁) e (v₁). As outras são recursivas.

Suponhamos agora que temos construídas χ_1, \dots, χ_n e vamos construir χ_{n+1} com ajuda do *Lema Principal*. Tomamos ξ_{n+1} satisfazendo $\xi_n < \xi_{n+1} < 1$, $1 - \frac{1}{n+1} < \xi_{n+1}$ e a propriedade (iii_{n+1}), ou seja,

$$\frac{2}{3}\rho_n \leq d_{X_n}(0, z) \quad \forall z \in \mathbb{D}_{\xi_{n+1}}. \quad (5.47)$$

Isto é possível pois $d_{X_n}(0, z) = \rho_n$ para todo $z \in \mathbb{S}^1$ por (ii_n). Portanto, existe um conjunto $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{D}$, com $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{D}$, tal que $d_{X_n}(0, w) = \frac{2}{3}\rho_n$, para todo $w \in \partial\tilde{\Omega}$. Daí, existe $0 < \xi_{n+1} < 1$ tal que $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{D}_{\xi_{n+1}}$ e, portanto, temos (5.47).

Considere agora uma sequência decrescente de reais positivos convergindo a 0, $\{\hat{\epsilon}_k\}$, verificando $\hat{\epsilon}_k < \epsilon_n$ e $\hat{\epsilon}_k < \frac{1}{(n+1)^2}$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, seja Y_k a imersão mínima conforme que resulta de aplicar o *Lema Principal* para

$$X = X_n, \quad \rho = \rho_n, \quad r = a_n, \quad s = \frac{1}{n+1}, \quad \epsilon = \hat{\epsilon}_k.$$

Ou seja, existe uma imersão Y_k verificando

- (1) $Y(0) = 0$.
- (2) (\mathbb{D}, d_{Y_k}) é um disco geodésico de raio $\rho_n + \frac{1}{n+1} = \rho_{n+1}$ com centro na origem.
- (3) $\|Y_k(z) - X_n(z)\| < \hat{\epsilon}_k, \quad \forall z \in \mathbb{D}_{1-\hat{\epsilon}_k}$.
- (4) $Y_k(\mathbb{D}) \subset B_{R_k}$, onde $R_k = \sqrt{a_n^2 + \frac{1}{(n+1)^2}} + \hat{\epsilon}_k$.
- (5) $K_{Y_k}(z) \neq 0, \quad \forall z \in \mathbb{D}$.

Vamos verificar que $Y_k \rightarrow X_n$ nos compactos de \mathbb{D} quando $k \rightarrow \infty$. De fato, seja $K \subset \mathbb{D}$ um compacto, então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \mathbb{D}_{1-\hat{\epsilon}_{k_0}}$. Como $\{\hat{\epsilon}_k\}$ é decrescente, $K \subset \mathbb{D}_{1-\hat{\epsilon}_{k_0}} \subset \mathbb{D}_{1-\hat{\epsilon}_k}$, para todo $k \geq k_0$. Por (3) temos que

$$\|Y_k(z) - X_n(z)\| < \hat{\epsilon}_k, \quad \forall z \in K, \quad \forall k \geq k_0.$$

Como consequência de harmonicidade das coordenadas, as derivadas parciais de primeira e segunda ordem de Y_k convergem uniformemente às derivadas parciais de X_n em cada compacto de \mathbb{D} (veja teorema B.14). Portanto, $\lambda_{Y_k} \rightarrow \lambda_{X_n}$ e $K_{Y_k} \rightarrow K_{X_n}$ quando $k \rightarrow \infty$ uniformemente em cada compacto de \mathbb{D} . Então, existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{aligned} \lambda_{Y_{k_1}}(z) &\geq \alpha_{n+1} \lambda_{X_n}(z), \\ K_{Y_{k_1}}(z) &\leq \alpha_{n+1} K_{X_n}(z), \end{aligned}$$

já que $\alpha_{n+1} < 1$. Escolhemos então $X_{n+1} = Y_{k_1}$ e $\epsilon_{n+1} = \hat{\epsilon}_{k_1}$. Logo, se satisfazem as propriedades (vii_{n+1}) e (viii_{n+1}).

Vamos mostrar as restantes propriedades. A propriedade (i_{n+1}) é consequência de $Y_{k_1}(0) = 0$. A propriedade (ii_{n+1}) vem de (2) para $k = k_1$. A propriedade (iii_{n+1}) foi assumida nas hipóteses. A (iv_{n+1}) vem de (4) com $k = k_1$, já que $\hat{\epsilon}_k = \epsilon_{n+1}$. A propriedade (v_{n+1}) vem das hipóteses, ou seja, $\epsilon_{n+1} = \hat{\epsilon}_{k_1} < \frac{1}{(n+1)^2}$. Finalmente, (vi_{n+1}) vem de (3) para $k = k_1$. Portanto, podemos supor a existência da sequência χ_n satisfazendo (i_n), ..., (viii_n), para todo $n \in \mathbb{N}$.

Vamos provar agora que $\{X_n\}$ é uniformemente de Cauchy sobre os compactos de \mathbb{D} . Seja $K \subset \mathbb{D}$ um compacto, novamente, existe um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \mathbb{D}_{1-\hat{\epsilon}_{k_0}} \subset \mathbb{D}_{1-\hat{\epsilon}_k}$, para todo $k \geq k_0$. Seja $n > m > k_0$, e $z \in K$, então

$$\begin{aligned} \|X_n(z) - X_m(z)\| &\leq \|X_n(z) - X_{n-1}(z)\| + \cdots + \|X_{m+1}(z) - X_m(z)\| \\ &\leq \epsilon_n + \cdots + \epsilon_{m+1} \quad \text{por (vi}_j\text{), com } m+1 \leq i \leq n \\ &< \sum_{i=m+1}^n \frac{1}{i^2} \quad \text{por (v}_j\text{), com } m+1 \leq i \leq n. \end{aligned}$$

Daí, pela convergência da serie $\sum_{i=0}^{\infty} \epsilon_i$, X_n é uniformemente de Cauchy em K e, portanto, uniformemente limitada. Assim, existe uma subsequência que converge uniformemente sobre os compactos de \mathbb{D} pelo princípio da compacidade (veja Teorema B.15). Vamos chamar a subsequência de $\{X_n\}$ e vamos verificar que o seu limite, X , prova o teorema.

X é imersão conforme

Como a convergência é uniforme sobre os compactos de \mathbb{D} , então $\lambda_{X_n}(z) \rightarrow \lambda(z)$. Seja $z \in \mathbb{D}$ e seja $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset \mathbb{D}_{1-\epsilon_{k_0}} \subset \mathbb{D}_{1-\epsilon_k}$, para todo $k \geq k_0$, então,

$$\begin{aligned}\lambda_{X_k}(z) &\geq \alpha_k \lambda_{X_{k-1}}(z) \\ &\geq \alpha_k \cdots \alpha_{k_0+1} \lambda_{X_{k_0}}(z) \text{ por (vii}_j), k_0 \leq j \leq k \\ &\geq \alpha_k \cdots \alpha_1 \lambda_{X_{k_0}}(z) \text{ porque } \alpha_n < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Pasando ao limite obtemos $\lambda(z) \geq \frac{1}{2} \lambda_{X_{k_0}}(z) > 0$.

Como

$$\left\langle \frac{\partial X_n}{\partial u_i}(z), \frac{\partial X_n}{\partial u_i}(z) \right\rangle \rightarrow \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_i}(z), \frac{\partial X}{\partial u_i}(z) \right\rangle,$$

então, X é conforme e $\lambda_X(z) = \lambda(z) > 0$.

 X é uma imersão mínima

Isto é devido à proposição 2.8 já que X é uma imersão conforme cujas coordenadas são funções harmônicas.

 $X(\mathbb{D}) \in \mathbb{R}^3$ é um conjunto limitado

Para provar isto vamos verificar que a sequência $\{a_n\}$ é limitada.

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= \sqrt{a_n^2 + \frac{1}{(n+1)^2}} + \epsilon_{n+1} \\ &\leq \sqrt{a_n^2 + \frac{1}{(n+1)^2}} + \frac{1}{(n+1)^2} \text{ por (v}_{n+1}) \\ &\leq \sqrt{a_n^2 + \frac{1}{n^2}} + \frac{1}{n^2} \\ &\leq \sqrt{a_n^2 + \frac{2a_n}{n^2}} + \frac{1}{n^2} \text{ porque } a_n > a_1 = 1, \forall n \in \mathbb{N}, \\ &\leq \sqrt{a_n^2 + \frac{2a_n}{n^2} + \frac{1}{n^4}} + \frac{1}{n^2} \\ &= \sqrt{\left(a_n + \frac{1}{n^2}\right)^2} + \frac{1}{n^2}\end{aligned}$$

ou seja,

$$a_{n+1} \leq a_n + \frac{2}{n^2}, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Daí,

$$a_{n+1} \leq a_n + \frac{2}{n^2} \leq a_{n-1} + \frac{2}{(n-1)^2} + \frac{2}{n^2} \leq a_1 + 2 \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2} \leq a_1 + 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2} = 1 + 2 \frac{\pi^2}{6}.$$

Portanto, $a_n \leq 5$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Passando ao limite, $X(\mathbb{D}) \subset B_5$.

X é uma imersão completa

Vamos mostrar que, para toda curva $\beta : [0, \ell(\beta)) \rightarrow \mathbb{D}$ divergente e parametrizada pelo comprimento de arco, $\ell(X \circ \beta) = \infty$. Sem perda de generalidade podemos supor que $\beta(0) = 0$, que $\beta(1) = w \in \mathbb{S}^1$ e que $t_n \in [0, \ell(\beta))$ é tal que $w_n = \beta(t_n) \in \mathbb{S}_{\xi_{n+1}}$. Então,

$$\begin{aligned} \ell(X \circ \beta) &= \int_0^{\ell(\beta)} \lambda_X(\beta(t)) dt \\ &\geq \int_0^{t_n} \lambda_X(\beta(t)) dt \\ &\geq \frac{1}{2} \int_0^{t_n} \lambda_{X_n}(\beta(t)) dt \text{ por (vii}_j), n \leq j \leq n+k \\ &\geq \frac{1}{2} d_{X_n}(0, w_n) \\ &\geq \frac{1}{3} \rho_n \text{ por (iii}_{n+1}). \end{aligned}$$

A condição é satisfeita porque $\{\rho_n\}$ é divergente.

X tem curvatura Gaussiana estritamente negativa

Seja $z \in \mathbb{D}$, então existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z \in \mathbb{D}_{\xi_{k_0}} \subset \mathbb{D}_{\xi_k}$, para todo $k \geq k_0$.

Assim,

$$\begin{aligned} K_{X_k}(z) &\leq \alpha_k K_{X_{k-1}}(z) \\ &\leq \alpha_k \alpha_{k-1} \cdots \alpha_{k_0+1} K_{X_{k_0}}(z) \text{ por (viii}_j), k_0 \leq j \leq k \\ &\leq \alpha_k \alpha_{k-1} \cdots \alpha_1 K_{X_{k_0}}(z) \text{ porque } \alpha_n < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Passando ao limite

$$K_X(z) \leq \frac{1}{2} K_{X_{k_0}}(z) < 0.$$

Combinando estas afirmações vemos que X é a imersão prova o teorema.

Referências Bibliográficas

- [1] L. Euler, *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudeates sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti.*, Opera omnia, 1744.
- [2] J. L. Lagrange, *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima e les minima des formules intégrales indéfinies*, Miscellanea Taurinensia **2** (1760).
- [3] J. B. M. C. Meusnier, *Mémoire sur la courbure des surfaces*, Acad. Sci. Paris **10** (1776).
- [4] H. F. Scherk, *Bemerkung über der kleinste fläche innerhalb gegebener grenzen*, J. reine angew. Math **13** (1834), 185–208.
- [5] K. Weierstrass, *Über die flächen, deren mittlere krümmung überall gleich null ist*, Ber. Akad. Wiss. Berlin (1866), 612–625.
- [6] A. Enneper, *Analytisch-geometrische untersuchungen*, Z. Math. Phys. **9** (1864), 96–125.
- [7] R. Osserman, *A survey of minimal surfaces*, Dover Publications, Inc., 1986.
- [8] E. Calabi, *Problems in differential geometry*, Proc. of the United States-Japan Seminar in Differential Geometry, Kyoto, Japan (1965).
- [9] S. T. Yau, *Problem section, seminar on differential geometry*, Ann. of Math. Studies **102** (1982), 669–706.
- [10] L. P. Jorge e F. Xavier, *A complete minimal surface in \mathbb{R}^3 between two parallel planes*, Annals of Mathematics **112** (1980), no. 1, 203–206.
- [11] H. Rosenberg e E. Toubiana, *A cylindrical type complete minimal surface in a slab of \mathbb{R}^3* , Bulletin des Sciences Mathématiques **3** (1987), 241–245.

- [12] N. Nadirashvili, *Hadamard's and Calabi-Yau's conjectures on negatively curved and minimal surfaces*, *Inventiones mathematicae* **126** (1996), 457–465.
- [13] F. Martín e S. Morales, *A complete bounded minimal cylinder in \mathbb{R}^3* , *Michigan Math. J.* **47** (2000), no. 3, 499–514.
- [14] M. P. do Carmo, *Geometria riemanniana*, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008.
- [15] T. H. Colding e W. P. Minicozzi, *A course in minimal surfaces*, Graduate studies in mathematics, American Mathematical Society, 2011.
- [16] L. Bers, *Riemann surfaces*, New York University, Institute of Mathematical Sciences, 1958.
- [17] R. Sá Earp e E. Toubiana, *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann*, Collection Enseignement des mathématiques, Cassini, 2009.
- [18] F. J. López e A. Ros, *On embedded complete minimal surfaces of genus zero*, *J. Differential Geometry* **33** (1991), 293–300.
- [19] H. Rosenberg, *Intersection of minimal surfaces of bounded curvature*, *Bulletin des Sciences Mathématiques* **121** (2001), no. 2, 161–168.
- [20] A. Huber, *On subharmonic functions and differential geometry in the large*, *Commentarii Mathematici Helvetici* **32** (1957-1958).
- [21] L. P. Jorge e W. Meeks, *The topology of complete minimal surface of finite total gaussian curvature*, *Topology* **22** (1983), no. 2, 203–221.
- [22] D. Hoffman e W. Meeks, *The strong halfspace theorem for minimal surfaces*, *Inventiones mathematicae* **101** (1990), 373–377.
- [23] T. H. Colding e W. P. Minicozzi, *The Calabi conjectures for embedded surfaces*, *Annals of Mathematics* **167** (2008), no. 2, 211–243.
- [24] P. Collin e H. Rosenberg, *Notes sur la démonstration de N. Nadirashvili des conjectures de Hadamard et Calabi-Yau*, *Bulletin des sciences mathématiques* **123** (1999), 563–575.
- [25] S. Morales, *Acotación en superficies minimales completas*, Tesis de Licenciatura (2000).

- [26] M. P. do Carmo, *Geometria diferencial de curvas e superfícies*, Sociedade Brasileira de Matemática, Reading, Massachusetts, 2012.
- [27] J. Hadamard, *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **4** (1898), 27–73.
- [28] R. Osserman, *Global properties of minimal surfaces in E^3 and E^n* , Annals of Mathematics **80** (1964), no. 2, 340–364.
- [29] L.V. Ahlfors, *Complex analysis: an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*, International series in pure and applied mathematics, McGraw-Hill, 1979.
- [30] L.V. Ahlfors, *Conformal invariants: topics in geometric function theory*, Higher Mathematics Series, McGraw-Hill, 1973.
- [31] E. M. Stein e R. Shakarchi, *Complex analysis*, Princeton lectures in analysis, Princeton University Press, 2010.
- [32] U. Dierkes, S. Hildebrandt, A. Küster, e O. Wohlrab, *Minimal Surfaces I*, Springer-Verlag, 1992.
- [33] D. Gilbarg e N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001.
- [34] W. Rudin, *Principles of mathematical analysis*, International series in pure and applied mathematics, McGraw-Hill, 1976.

Índice Remissivo

- analítica, função, 164
- aplicação normal de Gauss, 139
- arco
 - comprimento de, 128
 - parametrização pelo, 128
- área de uma região da superfície, 137
- Bernstein, teorema de, 42
- catenoide, 23
- Cauchy
 - desigualdade de, 160
 - fórmula integral de, 158
 - generalizada, 159
- Cauchy-Riemann, equações de, 149
- completa, imersão, 46
- completa, superfície, 146
- complexa
 - derivada, 148
 - função, 148
 - polo de uma, 168
 - zero de uma, 167
- comprimento
 - de arco, 128
 - parametrização pelo, 128
 - de uma curva, 126
- conforme
 - imersão, 27
- conjugada harmônica, função, 150
- coordenada, vizinhança, 130
- coordenadas
 - isotérmicas, 28
 - locais, sistema de, 130
- curva
 - comprimento de uma, 126
 - curvatura geométrica da, 129
 - de classe C^k , 126
 - divergente, 46
 - fechada, 152
 - parametrizada, 126
 - regular, 126
 - reparametrização de uma, 128
 - retificável, 127
 - simples, 152
 - suave, 126
 - traço da, 126
 - vetor curvatura da, 129
 - vetor normal unitário à, 129
 - vetor tangente à, 126
- curvatura
 - gaussiana, 144
 - geométrica da curva, 129
 - média, 144
 - vetor, 144
 - normal, 142
 - total, 146
- curvaturas principais, 143
- dados de Weierstrass, 54
- derivada complexa, 148

- desenvolvimento de Taylor de uma
 - função holomorfa, 163
- desigualdade de Cauchy, 160
- disco geodésico, 27
- distância
 - em uma superfície, 146
 - induzida, 27
- divergente, curva, 46
- EDP das superfícies mínimas, 38
- Enneper, superfície de, 20
- Enneper-Weierstrass
 - representação de, 48
- equações de Cauchy-Riemann, 149
- estereográfica, projeção, 131
- exemplo
 - de Jorge-Xavier, 67
 - de Nadirashvili, 79
 - de Rosenberg-Toubiana, 71
- fechada, curva, 152
- forma fundamental
 - primeira, 136
 - segunda, 141
- função
 - analítica, 164
 - complexa
 - polo de uma, 168
 - primitiva de uma, 153
 - zero de uma, 167
 - diferenciável, gráfico de uma, 19
 - harmônica, 149
 - conjugada, 150
 - holomorfa, 148
 - desenvolvimento de Taylor de uma, 163
 - meromorfa, 169
- fórmula
 - de Poisson para funções harmônicas, 161
- de Schwarz, 163
- integral de Cauchy, 158
 - generalizada, 159
- Gauss, aplicação normal de, 139
- gaussiana, curvatura, 144
- geodésico, disco, 27
- gráfico
 - de uma função diferenciável, 19
 - inteiro, 42
- harmônica, função, 149
 - conjugada, 150
- helicóide, 24
- holomorfa, função, 148
- imersa, superfície, 18
- imersão, 18
 - completa, 46
 - conforme, 27
 - mínima, 32
- induzida
 - distância, 27
 - métrica, 27
- inteiro, gráfico, 42
- isotérmicas, coordenadas, 28
- isotérmicos, parâmetros, 28
- Jorge-Xavier, exemplo de, 67
- laplaciano complexo, operador, 152
- lema de Schwarz, 165
- López-Ros, transformação de, 57
- mergulho, 18
- meromorfa, função, 169
- máximo, princípio do,
 - para funções harmônicas, 161
 - para funções holomorfas, 160
- média, curvatura, 144
- métrica
 - induzida, 27

- sobre a superfície, 135
- mínima
 - imersão, 32
 - superfície, 32
- mínimas, EDP das superfícies, 38
- Nadirashvili, exemplo de, 79
- normal
 - curvatura, 142
 - da superfície, variação, 31
 - de Gauss, aplicação, 139
- operador de Weingarten, 140
- operador laplaciano complexo, 152
- orientação da superfície, 139
- orientável, superfície, 139
- parametrizada
 - curva, 126
 - superfície, 18
- parametrização pelo comprimento de
 - arco, 128
- parâmetros isotérmicos, 28
- plano tangente à superfície, 134
- Poisson
 - para funções harmônicas, fórmula de, 161
- polo de uma função complexa, 168
- primeira forma fundamental, 136
- primitiva de uma função complexa, 153
- principais, curvaturas, 143
- princípio
 - do máximo
 - para funções harmônicas, 161
 - para funções holomorfas, 160
 - do prolongamente analítico, 166
- projeção estereográfica, 131
- regular, curva, 126
- reparametrização de uma curva, 128
- representação de Enneper-Weierstrass, 48
- retificável, curva, 127
- Riemann, teorema de representação conforme de Riemann, 170
- Rosenberg-Toubiana, exemplo de, 71
- Runge, teorema de, 170
- Scherk
 - superfície de, 39
- Schwarz
 - fórmula de, 163
 - lema de, 165
- segunda forma fundamental, 141
- simples, curva, 152
- sistema de coordenadas locais, 130
- suave, curva, 126
- superfície
 - área de uma região da, 137
 - completa, 146
 - de Enneper, 20
 - de revolução, 23
 - de Scherk, 39
 - distância em uma, 146
 - imersa, 18
 - mergulhada, 18
 - métrica sobre a, 135
 - mínima, 32
 - orientação da, 139
 - orientável, 139
 - parametrizada, 18
 - plano tangente à, 134
 - regrada, 24
 - regular, 130
 - variação normal da, 31
 - vetor normal à, 138
 - vetor tangente à, 134
- superfícies mínimas, EDP das, 38
- tangente

- vetor
 - à curva, 126
 - à superfície, 134
 - à superfície, plano, 134
- teorema
 - de Bernstein, 42
 - de representação conforme de Riemann, 170
 - de Runge, 170
- total, curvatura, 146
- transformação de López-Ros, 57
- traço da curva, 126
- variação normal da superfície, 31
- vetor
 - curvatura
 - da curva, 129
 - média, 144
 - normal unitário
 - à curva, 129
 - à superfície, 138
 - tangente
 - à curva, 126
 - à superfície, 134
- vizinhança coordenada, 130
- Weierstrass
 - dados de, 54
- Weingarten, operador de, 140
- zero de uma função complexa, 167

A

Noções de Geometria Diferencial

O objetivo deste apêndice é relembrar os conceitos básicos de geometria diferencial que foram usados para o desenvolvimento deste trabalho.

A.1

Curvas Parametrizadas em \mathbb{R}^3

Definição A.1. Uma *curva parametrizada* no espaço \mathbb{R}^3 é uma aplicação $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. A imagem $\alpha([a, b]) \subset \mathbb{R}^3$ é chamada de *traço da curva*. Dizemos que α é uma *curva de classe \mathcal{C}^k* se suas componentes são de classe \mathcal{C}^k em (a, b) . No caso que $k = \infty$ dizemos que β é uma *curva suave*.

Sem perda de generalidade para os nossos resultados posteriores, só vamos considerar curvas parametrizadas suaves¹.

Definição A.2. Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva parametrizada suave, o vetor $\alpha'(t) = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t), \alpha'_3(t))$ é chamado de *vetor tangente à curva* (ou *vetor velocidade da curva*) α em t .

No caso em que o vetor tangente em t seja não nulo, temos uma reta tangente bem definida que passa pelo ponto $\alpha(t)$ e tem como vetor diretor o vetor $\alpha'(t)$.

Definição A.3. Uma curva suave $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ é chamada de *curva regular* se $\alpha'(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$.

Restringiremos o nosso estudo a curvas regulares.

Definição A.4. Dada uma curva regular $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, denotamos por P uma partição de $[a, b]$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, e $\ell(\alpha, P)$ o comprimento do polígono inscrito em $\alpha([a, b])$ com vértices em $\alpha(t_i)$ (veja figura A.1). Definimos o *comprimento da curva* α como sendo

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \ell(\alpha, P) \quad \text{onde} \quad \|P\| = \max_{1 \leq i \leq n} (t_i - t_{i-1}).$$

¹Os resultados deste apêndice são válidos para curvas seccionalmente de classe \mathcal{C}^1 .

Observação. Se $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é apenas contínua, este limite pode ser finito ou infinito. No caso que seja finito dizemos que α é uma *curva retificável*. Existem curvas parametrizadas não retificáveis, por exemplo, a curva plana

$$\alpha(t) = \begin{cases} (t, t \sin(\frac{1}{t})) & \text{se } t \neq 0, \\ (0, 0) & \text{se } t = 0, \end{cases}$$

com $t \in [0, a]$ não é retificável (veja [34]).

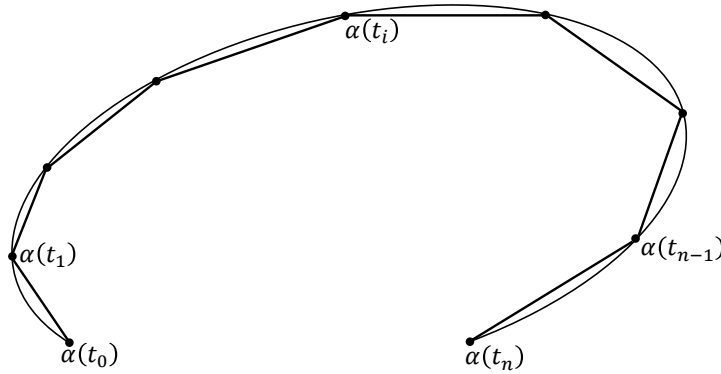


Figura A.1: Polígono inscrito na curva $\alpha(t)$ com vértices em $\alpha(t_i)$.

As curvas suaves são retificáveis. Mais precisamente temos a seguinte proposição.

Proposição A.1. *Seja $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva suave. Então o comprimento da curva α é*

$$\ell(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(u)\| du.$$

Demonstração. Consideremos uma partição P de $[a, b]$, $\|P\|$ e $\ell(\alpha, P)$ como na definição A.4. Seja $\epsilon > 0$, então, pela caracterização da integral como limite de somas de Riemann, $\exists \delta' > 0$ tal que se $\|P\| < \delta'$ então

$$\left| \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt - \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \|\alpha'(t_i)\| \right| < \frac{\epsilon}{2}. \quad (\text{A.1})$$

Além disso, como α é suave, é uniformemente contínua em $[a, b]$, logo existe $\delta'' > 0$ tal que se $|r - s| < \delta''$, então

$$\|\alpha'(r) - \alpha'(s)\| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}.$$

Sejam $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ e

$$S = \left| \sum_{i=1}^n \|\alpha(t_i) - \alpha(t_{i-1})\| - \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \|\alpha'(t_i)\| \right|,$$

então, se $\|P\| < \delta$, usando a desigualdade do valor médio, obtemos

$$\begin{aligned} S &= \left| \sum_{i=1}^n \sup_{s_i \in [t_i, t_{i-1}]} \|\alpha'(s_i)\| (t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \sup_i \|\alpha'(t_i)\| \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1}) \sup_{s_i \in [t_i, t_{i-1}]} \|\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i)\| \right| \\ &< (b - a) \cdot \frac{\epsilon}{2(b - a)} = \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Somando e subtraindo $\int_a^b \|\alpha'(t)\| ds$ em S , obtemos

$$\left| \sum_{i=1}^n \|\alpha'(t_{i-1}) - \alpha'(t_i)\| - \int_a^b \|\alpha'(t)\| ds - \left(\sum_{i=1}^n (t_{i-1} - t_i) \|\alpha'(t_i)\| - \int_a^b \|\alpha'(t)\| ds \right) \right| \leq \frac{\epsilon}{2},$$

donde,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n \|\alpha'(t_{i-1}) - \alpha'(t_i)\| - \int_a^b \|\alpha'(t)\| ds \right| &\leq \frac{\epsilon}{2} + \left| \left(\sum_{i=1}^n (t_{i-1} - t_i) \|\alpha'(t_i)\| - \int_a^b \|\alpha'(t)\| ds \right) \right| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} \\ &= \epsilon. \end{aligned}$$

Portanto, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $\|P\| \leq \delta$ então

$$\left| \int_a^b \|\alpha'(t)\| ds - \ell(\alpha, P) \right| < \epsilon,$$

Assim,

$$\ell(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| ds. \quad \square$$

Observação. Note que a curva não precisa ser suave, basta que seja uma curva seccionalmente \mathcal{C}^1 . Neste caso a prova precisa da propriedade aditiva da integral.

Definição A.5. Dado $t_0 \in [a, b]$, definimos o *comprimento de arco* de uma curva regular $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, a partir do ponto t_0 como sendo,

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du. \quad (\text{A.2})$$

Neste caso, temos uma função que a cada $t \in [a, b]$ associa o comprimento da curva α restrita ao intervalo $[t_0, t]$.

Definição A.6. Dada uma curva regular $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dizemos que α está *parametrizada pelo comprimento de arco* se $\|\alpha'(t)\| = 1$ para cada $t \in [a, b]$.

Definição A.7. Seja $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular. Dizemos que uma curva $\gamma : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma *reparametrização da curva* α , se existe um difeomorfismo $\phi : [c, d] \longrightarrow [a, b]$ tal que $\gamma(r) = (\alpha \circ \phi)(r)$ para todo $r \in [c, d]$.

Proposição A.2. *Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular, então existe uma reparametrização $\beta : [0, \ell(\alpha)] \rightarrow \mathbb{R}^3$ da curva α pelo comprimento de arco.*

Demonstração. Consideremos a função

$$\begin{aligned} s : [a, b] &\longrightarrow [0, \ell(\alpha)] \\ t &\longmapsto \int_a^t \|\alpha'(u)\| du, \end{aligned}$$

então $s'(t) = \|\alpha'(t)\| > 0 \forall t \in [a, b]$ por ser α uma curva regular. Assim a função s possui uma inversa diferenciável $s^{-1}(r) = t$. Portanto, a curva

$$\begin{aligned} \beta : [0, \ell(\alpha)] &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ r &\longmapsto \alpha \circ s^{-1}(r), \end{aligned}$$

é tal que

$$\beta'(r) = \alpha'(t)(s^{-1})'(r) = \frac{\alpha'(t)}{s'(t)}, \quad (\text{A.3})$$

portanto $\|\beta'(r)\| = 1 \forall r \in [0, \ell(\alpha)]$. Logo β é a curva desejada. \square

Definição A.8. Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Definimos o *vetor de curvatura da curva* como sendo o vetor $\alpha''(s)$, e o número $k(s) = \|\alpha''(s)\|$ é dito de *curvatura geométrica da curva* α em s .

Observação. No caso de que uma curva $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ esteja parametrizada pelo comprimento de arco, vemos que o vetor $\alpha''(s)$ é normal a $\alpha'(s)$. De fato, como $\|\alpha'(s)\|^2 = \langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1$, para todo $s \in [a, b]$, então, derivando esta equação, obtemos $\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle = 0$, para todo $s \in [a, b]$. Nos pontos onde $k(s) \neq 0$ fica bem definido um vetor unitário $n(s)$ na direção de $\alpha''(s)$ pela equação

$$\alpha''(s) = k(s)n(s). \quad (\text{A.4})$$

Dado que $\alpha''(s)$ é normal à curva em $\alpha(s)$, $n(s)$ é também normal à curva em $\alpha(s)$.

Definição A.9. Quando $k(s) \neq 0$, o vetor $n(s)$ da equação (A.4) é chamado de *vetor normal unitário à curva* no ponto $\alpha(s)$.

A.2

Superfícies em \mathbb{R}^3

Existem várias formas de definir uma superfície em \mathbb{R}^3 . Se queremos considerar tanto propriedades globais (tais como a orientação), como locais das superfícies, a melhor forma é defini-las como um conjunto em \mathbb{R}^3 satisfazendo determinadas propriedades.

Definição A.10. Um subconjunto $S \subset \mathbb{R}^3$ é dito de *superfície regular* em \mathbb{R}^3 se, para cada $p \in S$, existem uma vizinhança V de p em \mathbb{R}^3 e uma aplicação $X : \Omega \rightarrow V \cap S$ de um conjunto aberto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sobre $V \cap S$ tal que

- (i) X é diferenciável (suave).
- (ii) $X : \Omega \rightarrow V \cap S$ é um homeomorfismo.
- (iii) Para cada $q \in \Omega$, a diferencial $(dX)_q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é injetiva².

A aplicação X é chamada uma *parametrização* ou um *sistema de coordenadas locais* em uma vizinhança de p . A vizinhança $V \cap S$ é chamada uma *vizinhança coordenada* de p .

Se X está dada por

$$X(u_1, u_2) = (x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2), x_3(u_1, u_2)), \quad (u_1, u_2) \in \Omega,$$

as funções $x_1(u_1, u_2)$, $x_2(u_1, u_2)$ e $x_3(u_1, u_2)$ tem derivadas parciais contínuas de todas as ordens em Ω . Daí, como a matriz da aplicação linear dX_q nas bases canônicas de \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 é a matriz jacobiana da transformação X , ou seja,

$$J = \left(\frac{\partial x_i}{\partial u_j} \right)_{ij} \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2,$$

onde denotamos por $\frac{\partial X}{\partial u_j}$ o vetor $\left(\frac{\partial x_1}{\partial u_j}, \frac{\partial x_2}{\partial u_j}, \frac{\partial x_3}{\partial u_j} \right)$, com $j = 1, 2$, podemos ter como definição equivalente de regularidade a propriedade de $\frac{\partial X}{\partial u_i}$ e $\frac{\partial X}{\partial u_j}$ serem linearmente independentes, ou que $\frac{\partial X}{\partial u_i} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_j} \neq 0$, ou que um dos determinantes

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)}, \quad \frac{\partial(x_1, x_3)}{\partial(u_1, u_3)}, \quad \frac{\partial(x_2, x_3)}{\partial(u_2, u_3)},$$

seja diferente de zero em q .

Exemplo A.1 (O plano). O plano é a superfície regular mais elementar. Uma parametrização global para esta superfície está dada por

$$\begin{aligned} X : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u_1, u_2) &\longmapsto (u_1, u_2, au_1 + bu_2), \end{aligned} \tag{A.5}$$

assim

$$\frac{\partial X}{\partial u_1} = (1, 0, a) \tag{A.6}$$

$$\frac{\partial X}{\partial u_2} = (0, 1, b) \tag{A.7}$$

²Esta é a condição de regularidade.

que são, obviamente, linearmente independentes.

Exemplo A.2 (A esfera). Vamos mostrar que a esfera \mathbb{S}^2 é uma superfície regular usando a projeção estereográfica, π , que está definida da seguinte maneira. Denotemos por N o polo norte da esfera. Por cada ponto $p = (x_1, x_2, x_3)$ em $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ traçamos a reta r que une p e N , e fazemos corresponder o ponto q da interseção dessa reta com o plano $x_3 = 0$ (veja figura A.2), ou seja, a interseção da reta

$$r(t) = N + t(p - N) = (tx_1, tx_2, 1 + t(x_3 - 1))$$

com o plano $x_3 = 0$. Daí $t = \frac{1}{1 - x_3}$ e, portanto, $q = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right)$. Isto é

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right).$$

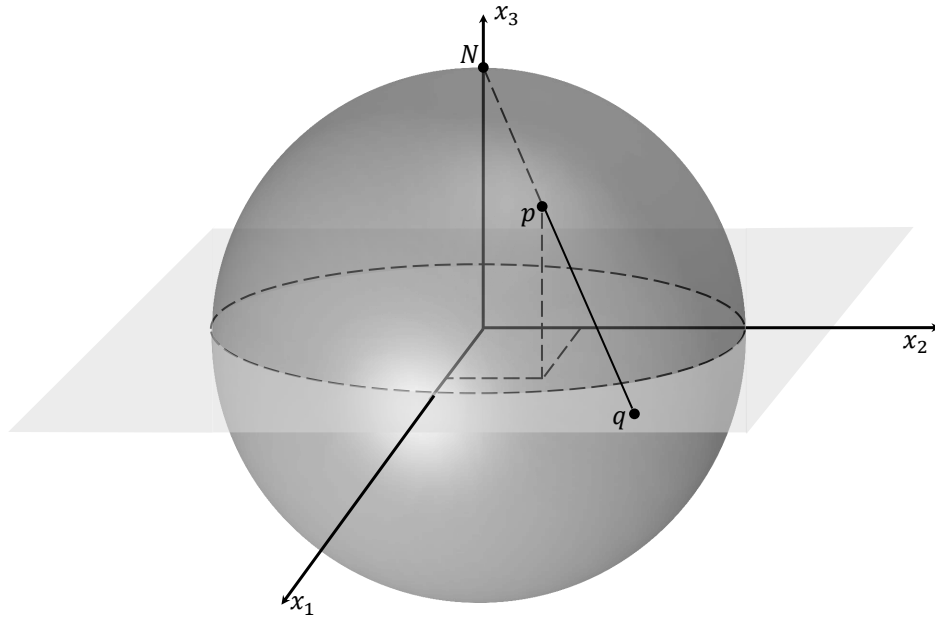


Figura A.2: Projeção estereográfica desde o polo norte.

Além disso esta aplicação é um homeomorfismo entre $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ e o plano. De fato, tem uma inversa que determinamos de forma análoga. Seja $q = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, então a reta que une q e N está dada por

$$r(t) = N + t(q - N) = (tu_1, tu_2, 1 - t).$$

Fazendo a interseção desta reta com \mathbb{S}^2 temos

$$t^2 u_1^2 + t^2 u_2^2 + (1 - t)^2 = 1,$$

onde

$$t = \frac{2}{1 + u_1^2 + u_2^2}.$$

Portanto a inversa é

$$\pi^{-1}(q) = X(u_1, u_2) = \left(\frac{2u_1}{1 + u_1^2 + u_2^2}, \frac{2u_2}{1 + u_1^2 + u_2^2}, \frac{u_1^2 + u_2^2 - 1}{1 + u_1^2 + u_2^2} \right)$$

que é diferenciável. Vamos provar que a diferencial é injetiva.

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u_1} &= \left(\frac{2(1 + u_1^2 + u_2^2) - 4u_1^2}{(1 + u_1^2 + u_2^2)^2}, \frac{-4u_1u_2}{(1 + u_1^2 + u_2^2)^2}, \frac{2u_1(1 + u_1^2 + u_2^2) - 2u_1(u_1^2 + u_2^2 - 1)}{(1 + u_1^2 + u_2^2)^2} \right) \\ &= \left(\frac{2(1 - u_1^2 + u_2^2)}{(1 + u_1^2 + u_2^2)^2}, \frac{-4u_1u_2}{(1 + u_1^2 + u_2^2)^2}, \frac{4u_1}{(1 + u_1^2 + u_2^2)^2} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial X}{\partial u_1} &= \left(\frac{-4u_1u_2}{(1 + u_1^2 + u_2^2)^2}, \frac{2(1 + u_1^2 + u_2^2) - 4u_2^2}{(1 + u_1^2 + u_2^2)^2}, \frac{2u_2(1 + u_1^2 + u_2^2) - 2u_2(u_1^2 + u_2^2 - 1)}{(1 + u_1^2 + u_2^2)^2} \right) \\ &= \left(\frac{-4u_1u_2}{(1 + u_1^2 + u_2^2)^2}, \frac{2(1 + u_1^2 - u_2^2)}{(1 + u_1^2 + u_2^2)^2}, \frac{4u_2}{(1 + u_1^2 + u_2^2)^2} \right), \end{aligned}$$

assim,

$$\frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2} = \frac{4}{(1 + u_1^2 + u_2^2)^4} \left(-2u_1(1 + u_1^2 + u_2^2), -2u_2(1 + u_1^2 + u_2^2), 1 - (u_1^2 + u_2^2)^2 \right),$$

portanto

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\|^2 \\ &= \frac{16}{(1 + u_1^2 + u_2^2)^8} \left(4u_1^2(1 + u_1^2 + u_2^2)^2 + 4u_2^2(1 + u_1^2 + u_2^2)^2 + \left(1 - (u_1^2 + u_2^2)^2 \right)^2 \right) \\ &= \frac{16}{(1 + u_1^2 + u_2^2)^8} \left((4u_1^2 + 4u_2^2)(1 + u_1^2 + u_2^2)^2 + 1 - 2(u_1^2 + u_2^2)^2 + 2(u_1^2 + u_2^2)^4 \right) \\ &= \frac{16}{(1 + u_1^2 + u_2^2)^8} \left((u_1^2 + u_2^2)^4 + 4(u_1^2 + u_2^2)^3 + 6(u_1^2 + u_2^2)^2 + 1 \right) \\ &= \frac{16}{(1 + u_1^2 + u_2^2)^4}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\left\| \frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\| = \frac{4}{(1 + u_1^2 + u_2^2)^2} \quad (\text{A.8})$$

que é sempre positivo. Então X satisfaz as três condições da definição A.10 e, portanto, é uma parametrização. Analogamente definimos a projeção estereográfica desde o polo sul, tendo uma outra parametrização definida por

$$Y(u_1, u_2) = \left(\frac{2u_1}{1 + u_1^2 + u_2^2}, \frac{2u_2}{1 + u_1^2 + u_2^2}, \frac{1 - u_1^2 - u_2^2}{1 + u_1^2 + u_2^2} \right).$$

Estas duas parametrizações cobrem a esfera, portanto é uma superfície regular em \mathbb{R}^3 .

Observação A.1. Seja $\pi : \mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ a projeção estereográfica desde o polo norte. Vamos ver qual é a imagem por π de um círculo horizontal na esfera. Ou seja, vamos considerar o conjunto

$$A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S}^2; x_3 = c\},$$

onde $-1 < c < 1$ é uma constante. Então

$$\pi(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1-c}, \frac{x_2}{1-c} \right)$$

e, portanto,

$$|\pi(x_1, x_2, x_3)| = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1-c)^2} = \frac{1-c^2}{(1-c)^2}.$$

Logo, $\pi(A)$ é um círculo centrado na origem e de raio $\frac{1-c^2}{(1-c)^2}$.

Observação A.2. A projeção estereográfica pode ser definida desde qualquer $P \in S$. Neste caso, escolhemos uma base ortonormal $\{e_1, e_2, e_3\}$ de \mathbb{R}^3 , tal que $e_3 = P$, ou seja, estamos projetando no plano que passa pela origem e cujo vetor normal é o vetor P . Assim, se $p = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, então

$$q = \pi(p) = \frac{x_1}{1-x_3}e_1 + \frac{x_2}{1-x_3}e_2.$$

Um fato interessante das superfícies regulares é que localmente são o gráfico de uma função diferenciável.

Proposição A.3. *Seja S uma superfície regular e $p \in S$. Então existe uma vizinhança W de p , tal que W é o gráfico de uma função diferenciável.*

Demonstração. Seja $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma parametrização de S em $p = X(q)$. Como S é regular em q , podemos supor, sem perda de generalidade, que $\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(u_1, u_2)} \neq 0$. Seja

$$\begin{aligned} F : \quad \Omega &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u_1, u_2) &\longmapsto (x_1(u_1, u_2), x_2(u_1, u_2)). \end{aligned}$$

Então a derivada de F no ponto q é um isomorfismo. Logo, pelo teorema da função inversa, existe vizinhança U de q tal que $F|_U : U \longrightarrow V = F(U)$ é um difeomorfismo. Assim $(X \circ (F|_U)^{-1})(x_1, x_2)$ é diferenciável. Portanto a função

$$\begin{aligned} f : \quad V &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2) &\longmapsto (x_3 \circ (F|_U)^{-1})(x_1, x_2) \end{aligned}$$

é diferenciável e $X|_U(U) = \{(x_1, x_2, f(x_1, x_2)); (x_1, x_2) \in V\} = \text{Gr}(f)$.

A.3

Plano Tangente à Superfície

Definição A.11. Sejam S uma superfície regular e $p \in S$. Entendemos por *vetor tangente à superfície* no ponto p , o vetor tangente $\alpha'(0)$ de uma curva parametrizada suave $\alpha : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow S$, tal que $\alpha(0) = p$. O conjunto de todos os vetores tangentes é chamado de *plano tangente à superfície* no ponto p , e é denotado por $T_p S$.

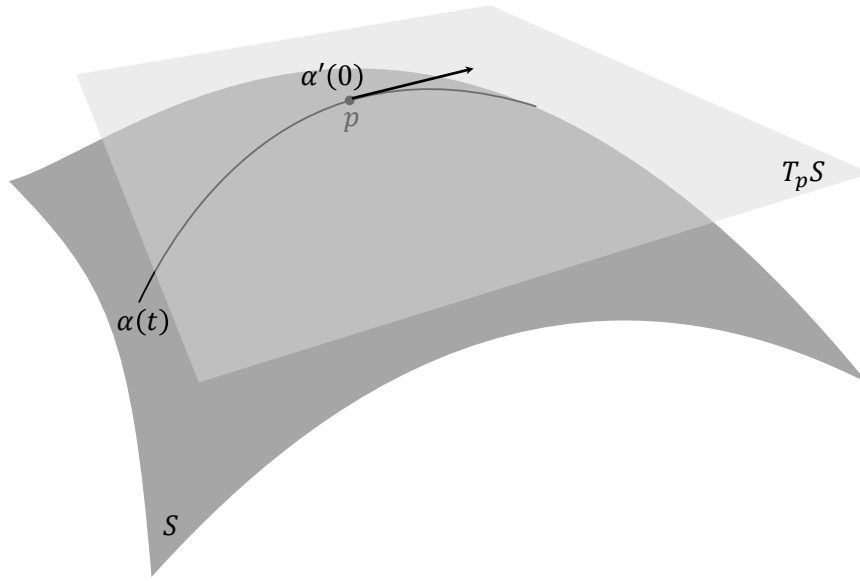


Figura A.3: Plano tangente à superfície num ponto.

É dizer, em cada ponto de uma superfície regular temos associado um plano como pode ser apreciado na figura A.3.

Observação A.3. Note que, neste caso, podemos restringir o intervalo $[-\epsilon, \epsilon]$ de forma tal que o traço de α esteja numa vizinhança coordenada. Assim, sempre existe uma única curva $\beta : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \Omega$ tal que $(X \circ \beta)(t) = \alpha(t) \forall t \in [-\epsilon, \epsilon]$, onde X é uma parametrização da superfície em p . Sempre que seja conveniente vamos ver um vetor tangente a S em p como sendo $(X \circ \beta)'(0)$ sem fazer maiores comentários.

Para que esta definição de plano tangente faça sentido devemos mostrar que o conjunto dos vetores tangentes é um subespaço vetorial de dimensão dois.

Proposição A.4. Sejam S uma superfície regular e $p \in S$. Então o conjunto de todos os vetores tangentes a S no ponto p constitui um subespaço vetorial de dimensão 2.

Demonstração. Sabemos que um vetor tangente v a S em p é o vetor tangente a uma curva $\alpha : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow S$, satisfazendo que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Pela observação anterior, temos que v é o vetor $(X \circ \beta)'(0)$, onde $\beta : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \Omega$ e $(X \circ \beta)(t) = \alpha(t)$, $\beta(0) = q$ e $X(q) = p$. Ou seja,

$$\alpha'(0) = (X \circ \beta)'(0) = \frac{\partial X}{\partial u_1}(q)\beta'_1(0) + \frac{\partial X}{\partial u_2}(q)\beta'_2(0).$$

Por conveniência escreveremos

$$(X \circ \beta)'(0) = \beta'_1(0)\frac{\partial X}{\partial u_1} + \beta'_2(0)\frac{\partial X}{\partial u_2} \quad (\text{A.9})$$

sabendo que $\frac{\partial X}{\partial u_i}$ estão avaliadas em q . Como $\beta'_1(0)$ e $\beta'_2(0)$ tomam valores arbitrários, segue que o conjunto de vetores tangentes consiste em todas as combinações lineares dos vetores $\frac{\partial X}{\partial u_1}$ e $\frac{\partial X}{\partial u_2}$. Mas como S é regular, esses vetores são linearmente independentes, daí o subespaço gerado por eles tem dimensão 2. \square

Proposição A.5. *Sejam $X : \Omega \rightarrow S$ uma parametrização de uma superfície regular num ponto $X(q) \in S$. O subespaço vetorial $dX_q(\mathbb{R}^2)$, coincide com o plano tangente a S em $p = X(q)$.*

Demonstração. Primeiramente notemos que $dX_q(\mathbb{R}^2)$ é um subespaço vetorial de dimensão 2 já que dX_q é injetiva. Seja $v \in T_p S$, então $v = (X \circ \beta)'(0)$ para alguma curva $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Omega$ com $\beta(0) = q$. Pela própria definição da aplicação diferencial temos que $v = dX_q(\beta'(0))$ que pertence a $dX_q(\mathbb{R}^2)$.

Reciprocamente, seja $v = dX_q(w)$, onde $w = (w_1, w_2) \in \mathbb{R}^2$. Seja a curva $\beta : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \Omega$ dada por

$$\beta(t) = tw + q,$$

então $(X \circ \beta)(t) = X(tw + q)$, logo,

$$(X \circ \beta)'(0) = w_1 \frac{\partial X}{\partial u_1} + w_2 \frac{\partial X}{\partial u_2}$$

que pertence a $T_p S$ pela própria definição do plano tangente. \square

A.4

Primeira forma fundamental

Seja S uma superfície regular em \mathbb{R}^3 . Podemos ver como o produto interno natural de \mathbb{R}^3 induz em cada plano tangente $T_p S$ um produto interno que indicaremos por $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$ e chamaremos de *métrica sobre a superfície*, e que é, por definição, o produto interno dos vetores em $T_p S$ como vetores de \mathbb{R}^3 , ou seja, dados $v, w \in T_p S$, então $\langle v, w \rangle_p = \langle v, w \rangle$.

Como o produto interno é uma forma bilinear e simétrica, temos associada uma forma quadrática que é a seguinte:

$$\begin{aligned} I_p : T_p S &\longrightarrow \mathbb{R} \\ w &\longmapsto \langle w, w \rangle_p = \|w\|^2. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Definição A.12. Seja S uma superfície regular. A forma quadrática I_p definida por (A.10), é chamada a *primeira forma fundamental* de S em $p \in S$.

A partir de agora escreveremos $I(w)$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pois fica claro que estão referidas a um ponto. Seja $X : \Omega \longrightarrow S$ uma parametrização da superfície em $p \in S$. Para achar a matriz da forma quadrática I em p , avaliamos o produto interno na base $\left\{ \frac{\partial X}{\partial u_1}, \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\}$ de $T_p S$. Daí, a matriz desta forma quadrática é

$$g = (g_{ij}) \text{ onde } g_{ij} = \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_i}, \frac{\partial X}{\partial u_j} \right\rangle, \quad i, j = 1, 2.$$

Além disso, o determinante de g está dado por

$$\det g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \left\| \frac{\partial X}{\partial u_1} \right\|^2 \left\| \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\|^2 - \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_1}, \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\rangle^2 = \left\| \frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\|^2. \quad (\text{A.11})$$

A importância da primeira forma fundamental vem do fato de que, se conhecemos I , podemos fazer medidas sobre a superfície sem fazer referência ao espaço \mathbb{R}^3 . Por exemplo, seja $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma curva regular, então o comprimento de arco de α a partir do ponto t_0 é

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(u)\| du = \int_{t_0}^t \sqrt{I(\alpha'(u))} du,$$

e o ângulo θ entre os vetores $\frac{\partial X}{\partial u_1}$ e $\frac{\partial X}{\partial u_2}$ associados à parametrização X é

$$\cos \theta = \frac{\left\langle \frac{\partial X}{\partial u_1}, \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\rangle}{\left\| \frac{\partial X}{\partial u_1} \right\| \left\| \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\|} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}} \sqrt{g_{22}}}. \quad (\text{A.12})$$

A.4.1

Área de uma região na superfície

Uma outra questão métrica que pode ser tratada com a primeira forma fundamental é a área de uma região limitada da superfície. Vamos nos restringir a regiões contidas em uma vizinhança coordenada.

Definição A.13. Sejam S uma superfície regular e R uma região limitada de S que está contida em uma vizinhança coordenada de uma parametrização

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$, com $R = X(\Delta)$. O número positivo

$$A(R) = \iint_{\Delta} \sqrt{\det(g)} du_1 du_2 \quad (\text{A.13})$$

é chamado de *área da região* Δ .

Vamos dar uma interpretação geométrica da área. Para isto consideremos a Δ como sendo um retângulo em Ω e consideremos também a função $\left\| \frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\|$ definida em Ω e que representa a área do paralelogramo gerado pelos vetores $\frac{\partial X}{\partial u_1}$ e $\frac{\partial X}{\partial u_2}$.

Vamos fazer uma partição de Δ em um número finito de retângulos cujos lados sejam paralelos aos eixos, usando as curvas

$$\begin{aligned} u_1 &= \delta_1, u_1 = \delta_2, \dots, u_1 = \delta_n, \quad \delta_i \in \mathbb{R} \quad \forall 1 \leq i \leq n, \\ u_2 &= \beta_1, u_2 = \beta_2, \dots, u_2 = \beta_m, \quad \beta_j \in \mathbb{R} \quad \forall 1 \leq j \leq m. \end{aligned}$$

A continuação (veja figura A.4) substituímos cada retângulo limitado por

$$u_1 = \delta_{i-1}, u_1 = \delta_i, u_2 = \epsilon_{j-1}, u_2 = \epsilon_j,$$

pelo paralelogramos retilíneo no plano tangente a S no ponto $p_{ij} = X(q_{ij})$, donde $q_{ij} = (\delta_{i-1}, \epsilon_{j-1})$, ou seja, o paralelogramos em $T_{p_{ij}}S$ determinado pelos vetores $dX_{q_{ij}}(v)$ e $dX_{q_{ij}}(w)$, com $v = (\delta_i - \delta_{i-1}, 0)$ e $w = (0, \epsilon_j - \epsilon_{j-1})$.

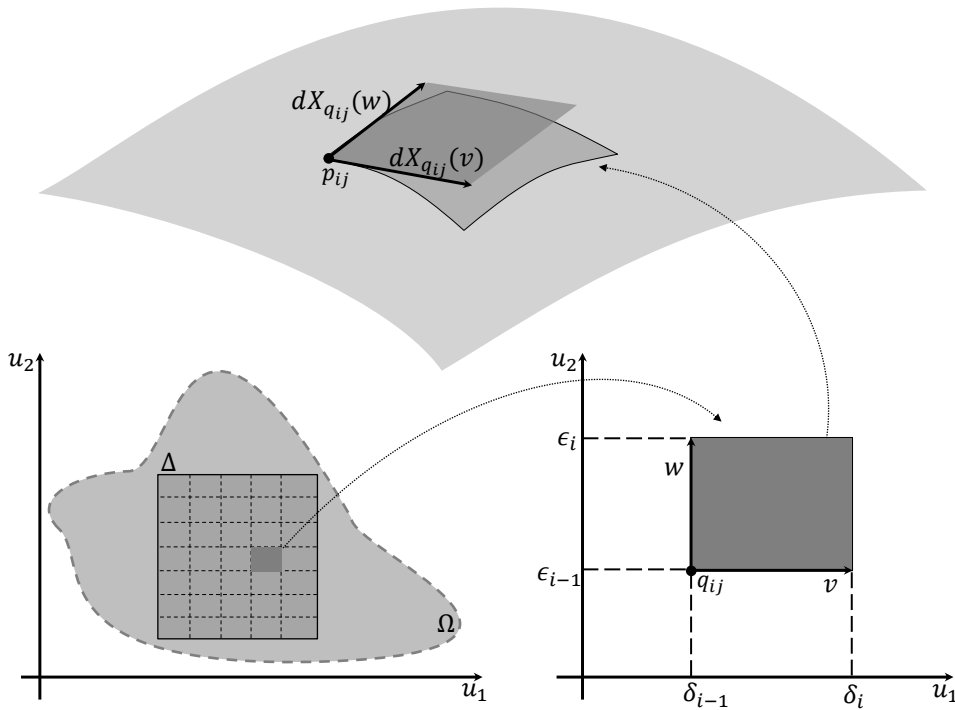


Figura A.4: Área do paralelogramo retilíneo em $T_{p_{ij}}S$.

Vamos chamar agora q_{ij} de q e p_{ij} de p para facilitar a notação. Assim, $dX_q(v) = (\delta_i - \delta_{i-1}) \frac{\partial X}{\partial u_1}(q)$ e $dX_q(w) = (\epsilon_j - \epsilon_{j-1}) \frac{\partial X}{\partial u_2}(q)$, que são ambos tangentes aos lados do retângulo curvilíneo na superfície determinado pelas imagens das retas, e que os aproximam em comprimento. Logo, aproximamos a área de cada retângulo curvilíneo pela área desses paralelogramos que está dada por

$$a_{ij} = \left\| (\delta_i - \delta_{i-1}) \frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge (\epsilon_j - \epsilon_{j-1}) \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\| = (\delta_i - \delta_{i-1})(\epsilon_j - \epsilon_{j-1}) \left\| \frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\|.$$

Como $\frac{\partial X}{\partial u_1}$ e $\frac{\partial X}{\partial u_2}$ são linearmente independentes, então $\frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2} \neq 0$. Fazendo uso da equação (A.11), obtemos,

$$\left\| \frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\| = \sqrt{\det(g)}, \quad (\text{A.14})$$

assim

$$a_{ij} = (\delta_i - \delta_{i-1})(\epsilon_j - \epsilon_{j-1}) \sqrt{\det(g)}.$$

Fazendo a soma das áreas de todos esses paralelogramos obtemos

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sqrt{\det(g(\delta_{i-1}, \epsilon_{j-1}))} (\delta_i - \delta_{i-1})(\epsilon_j - \epsilon_{j-1})$$

que é uma aproximação da área de R . A área de R será, de fato, o limite quando os diâmetros dos retângulos da partição tendem a zero. Como a função $\sqrt{\det(g)}$ é contínua em Ω , então é integrável. Logo, a soma em questão tem limite igual à integral da função $\sqrt{\det(g)}$ em Δ , e dizer,

$$A(R) = \iint_{\Delta} \sqrt{\det(g)} du_1 du_2. \quad (\text{A.15})$$

De forma geral, se Δ não for um retângulo a área de $X(\Delta)$ também está dada por (A.15).

A.5

Segunda forma fundamental

Definição A.14. Sejam S uma superfície regular e v um vetor de \mathbb{R}^3 . Dizemos que v é um *vetor normal à superfície* em um ponto p , se ele é ortogonal a $T_p S$.

Uma vez fixada uma parametrização $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ em $p \in S$, podemos ver que N será normal à superfície em p se, e somente se, é simultaneamente ortogonal a $\frac{\partial X}{\partial u_1}$ e $\frac{\partial X}{\partial u_2}$, então podemos definir a escolha de um vetor normal unitário em cada ponto $p \in X(\Omega)$, como segue

$$N = \frac{\frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2}}{\left\| \frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\|}. \quad (\text{A.16})$$

Assim, obtemos uma aplicação diferenciável $N : X(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^3$ que nem sempre é possível estender de maneira diferenciável sobre toda a superfície como, por exemplo, na faixa de Möbius. De maneira geral, se U é um conjunto aberto em S e $N : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação diferenciável que associa a cada $p \in U$ um vetor normal unitário em p , dizemos que N é um campo diferenciável de vetores normais unitários em U .

Definição A.15. Dizemos que uma superfície regular é uma *superfície orientável* se ela admite um campo diferenciável de vetores normais unitários definidos sobre toda a superfície. A escolha de um tal campo N é chamada de *orientação da superfície*.

Vamos assumir que as superfícies com as quais estamos trabalhando são orientáveis. Neste caso temos uma aplicação diferenciável que associa a cada $p \in S$ um vetor na esfera (veja figura A.5). A aplicação assim definida é conhecida como *aplicação normal de Gauss* ou simplesmente de *aplicação de Gauss*.

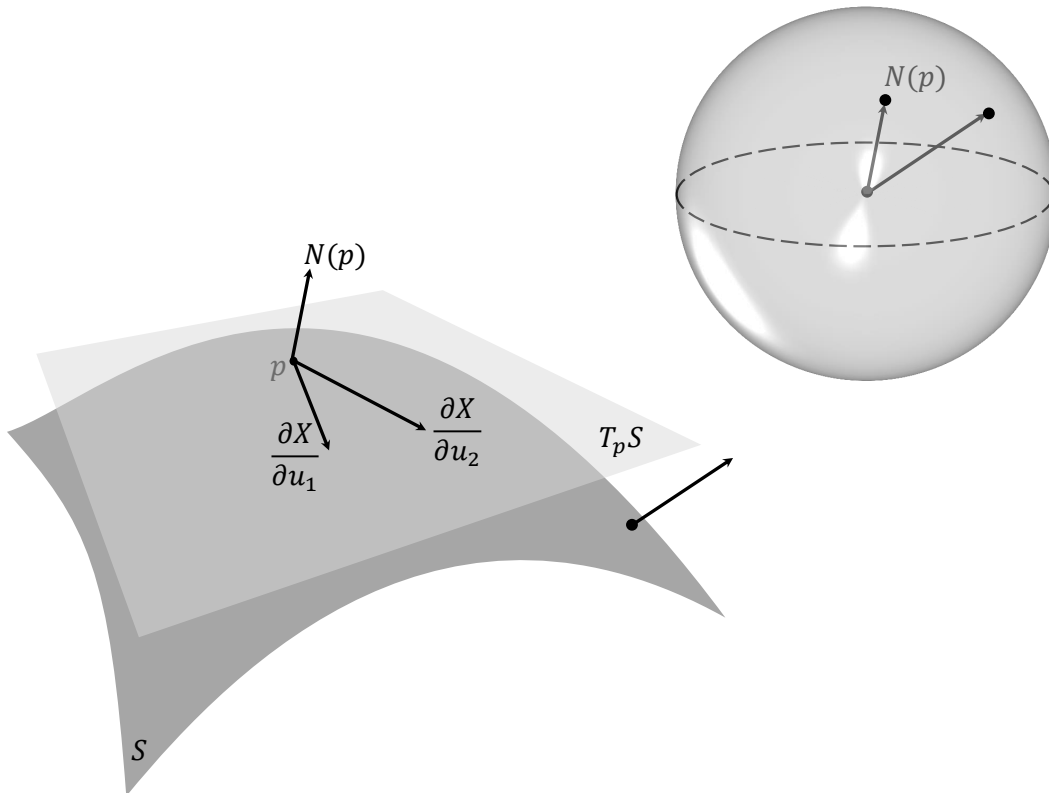


Figura A.5: Aplicação Normal de Gauss.

Observação. Note que, fixada uma parametrização X em $p = X(q)$, temos

$$N = \frac{1}{\sqrt{\det(g)}} \left(\frac{\partial X}{\partial u_1} \wedge \frac{\partial X}{\partial u_2} \right) \quad (\text{A.17})$$

devido à equação (A.14).

Exemplo A.3 (Vetor normal ao plano). No exemplo A.1 vimos que $\frac{\partial X}{\partial u_1}$ e $\frac{\partial X}{\partial u_2}$ estão dados por (A.6) e (A.7), respectivamente. Assim, neste caso, N é constante e sua expressão é

$$N = \frac{(-a, -b, 1)}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}}.$$

A única superfície cujo vetor normal é constante ao longo da superfície é o plano.

A.5.1

Operador de Weingarten

A aplicação N é diferenciável e sua diferencial, por definição, está dada por

$$\begin{aligned} dN_p : T_p S &\longrightarrow T_{N(p)} \mathbb{S}^2 \\ v &\longmapsto \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (N \circ \alpha)(t), \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

onde α é uma curva em S tal que $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Como os espaços vetoriais $T_p S$ e $T_{N(p)} \mathbb{S}^2$ são os mesmos, então dN_p pode ser vista como uma aplicação linear em $T_p S$.

Definição A.16. Sejam S uma superfície regular e $p \in S$. A aplicação linear $-dN_p : T_p S \longrightarrow T_p S$ é chamada de *operador de Weingarten* de S em p .

Vamos ver o operador de Weingarten em coordenadas locais. Sejam $X : \Omega \longrightarrow S$ uma parametrização da superfície em $p \in S$, (u_1, u_2) em Ω e $\alpha(t) = (X \circ \beta)(t)$. Então

$$\begin{aligned} dN_p(v) &= dN_p \left(\beta'_1(0) \frac{\partial X}{\partial u_1} + \beta'_2(0) \frac{\partial X}{\partial u_2} \right) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} N(\beta_1(t), \beta_2(t)) \\ &= \beta'_1(0) \frac{\partial N}{\partial u_1} + \beta'_2(0) \frac{\partial N}{\partial u_2} \end{aligned}$$

Em particular,

$$\frac{\partial N}{\partial u_1} = dN_p \left(\frac{\partial X}{\partial u_1} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial u_2} = dN_p \left(\frac{\partial X}{\partial u_2} \right). \quad (\text{A.19})$$

Proposição A.6. *O operador de Weingarten é uma aplicação linear autoadjunta.*

Demonstração. Seja $X : \Omega \rightarrow S$ uma parametrização da superfície em p . Basta provar que para a base $\left\{ \frac{\partial X}{\partial u_1}, \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\}$ se satisfaz

$$\left\langle dN_p \left(\frac{\partial X}{\partial u_1} \right), \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_1}, dN_p \left(\frac{\partial X}{\partial u_2} \right) \right\rangle,$$

mas, como vale (A.19), temos que provar

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial u_1}, \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_1}, \frac{\partial N}{\partial u_2} \right\rangle. \quad (\text{A.20})$$

Dado que

$$\left\langle N, \frac{\partial X}{\partial u_j} \right\rangle = 0, \quad (\text{A.21})$$

então $\frac{\partial}{\partial u_i} \left\langle N, \frac{\partial X}{\partial u_j} \right\rangle = 0$ e, portanto,

$$\left\langle \frac{\partial N}{\partial u_i}, \frac{\partial X}{\partial u_j} \right\rangle = - \left\langle N, \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle, \quad (\text{A.22})$$

logo vale (A.20). \square

Da proposição temos que $\langle -dN_p(v), w \rangle$ é uma forma bilinear simétrica e, portanto, podemos associar uma forma quadrática.

Definição A.17. A forma quadrática II_p definida em $T_p S$ por

$$II_p(v) = -\langle dN_p(v), v \rangle, \quad (\text{A.23})$$

é chamada de *segunda forma fundamental*.

A matriz da segunda forma fundamental em p é

$$b = (b_{ij}), \quad \text{onde } b_{ij} = \left\langle N, \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle.$$

Observação. Notemos que, fazendo uso da equação (A.17) e da definição de produto vetorial temos que

$$b_{ij} = \frac{\det \left(\frac{\partial X}{\partial u_1}, \frac{\partial X}{\partial u_2}, \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} \right)}{\sqrt{\det(g)}}. \quad (\text{A.24})$$

Proposição A.7. *Sejam S uma superfície regular e $p \in S$. Então a matriz da aplicação de Weingarten em p é $A = g^{-1}b$, onde g é a matriz da primeira forma fundamental e b a matriz da segunda forma fundamental em p .³*

³Note que somente podemos garantir que A e b sejam iguais numa base ortonormal.

Demonstração. Seja $X : \Omega \rightarrow S$ uma parametrização da superfície em p . Para encontrar a matriz A da aplicação de Weingarten na base $\left\{ \frac{\partial X}{\partial u_1}, \frac{\partial X}{\partial u_2} \right\}$ vamos escrever a imagem por $-dN_p$ dos vetores desta base como combinação linear da própria base, ou seja,

$$-dN_p \left(\frac{\partial X}{\partial u_j} \right) = -\frac{\partial N}{\partial u_j} = \sum_{k=1}^2 a_{kj} \frac{\partial X}{\partial u_k}, \quad (\text{A.25})$$

sendo então $A = (a_{ij})$ a matriz da aplicação de Weingarten. Por outro lado,

$$b_{ij} = \left\langle N, \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j} \right\rangle = \left\langle -\frac{\partial N}{\partial u_j}, \frac{\partial X}{\partial u_i} \right\rangle = \sum_{k=1}^2 a_{kj} \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_k}, \frac{\partial X}{\partial u_i} \right\rangle = \sum_{k=1}^2 g_{ik} a_{kj},$$

onde a segunda igualdade se deve a (A.22) e a terceira a (A.25). Portanto, $b = gA$, donde $A = g^{-1}b$. \square

A.6

Outras quantidades geométricas

Definição A.18. Sejam S uma superfície regular e $p \in S$. Sejam também $v \in T_p S$ um vetor unitário e $\alpha : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow S$ uma curva na superfície parametrizada pelo comprimento de arco tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$. Definimos como *curvatura normal* no ponto p na direção de v o valor

$$k_n(v) = \langle \alpha''(0), N \rangle. \quad (\text{A.26})$$

Geometricamente podemos ver isto na figura A.6.

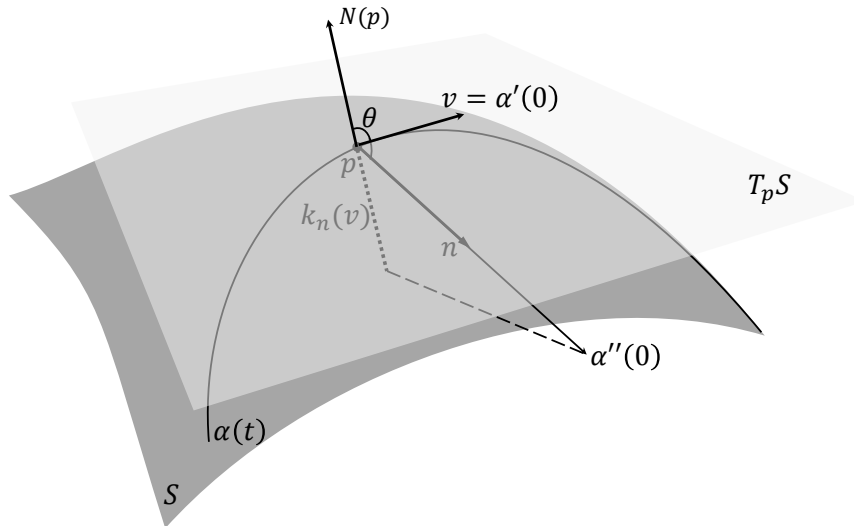


Figura A.6: Curvatura normal.

Para ver que a curvatura normal está bem definida vamos escrever esse produto interno em coordenadas locais. Seja $X : \Omega \rightarrow S$ uma parametrização da superfície em p . Sabemos que existe uma curva $\beta : [-\epsilon, \epsilon] \rightarrow \Omega$ tal que

$\alpha(s) = (X \circ \beta)(s)$, para todo $s \in [a, b]$. Então

$$\frac{d(X \circ \beta)}{ds}(s) = \frac{\partial X}{\partial u_1}(\beta(s))\beta'_1(s) + \frac{\partial X}{\partial u_2}(\beta(s))\beta'_2(s) = \sum_{i=1}^2 \beta'_i(s) \frac{\partial X}{\partial u_i}(\beta(s)),$$

onde $\frac{\partial X}{\partial u_1}$ e $\frac{\partial X}{\partial u_2}$ estão avaliadas em $\beta(s)$. Daí,

$$\begin{aligned} \alpha''(s) &= \frac{d^2(X \circ \beta)}{ds^2} \\ &= \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u_1^2}(\beta(s))\beta'_1(s) + \frac{\partial^2 X}{\partial u_1 \partial u_2}(\beta(s))\beta'_2(s) \right) \beta'_1(s) + \frac{\partial X}{\partial u_1}(\beta(s))\beta''_1(s) \\ &\quad + \left(\frac{\partial^2 X}{\partial u_2 \partial u_1}(\beta(s))\beta'_1(s) + \frac{\partial^2 X}{\partial u_2^2}(\beta(s))\beta'_2(s) \right) \beta'_2(s) + \frac{\partial X}{\partial u_2}(\beta(s))\beta''_2(s) \\ &= \sum_{i=1}^2 \beta''_i(s) \frac{\partial X}{\partial u_i} + \sum_{i,j=1}^2 \beta'_i(s)\beta'_j(s) \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j}. \end{aligned}$$

Fazendo o produto interno de $\alpha''(s)$ com o vetor normal unitário à superfície obtemos,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d^2(X \circ \beta)}{ds^2}, N \right\rangle &= \sum_{i=1}^2 \beta'_i(s) \left\langle \frac{\partial X}{\partial u_i}, N \right\rangle + \sum_{i,j=1}^2 \beta'_i(s)\beta'_j(s) \left\langle \frac{\partial^2 X}{\partial u_i \partial u_j}, N \right\rangle \\ &= \sum_{i,j=1}^2 b_{ij}(\beta(s))\beta'_i(s)\beta'_j(s), \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

e avaliando em $t = 0$ temos

$$\left\langle \frac{d^2(X \circ \beta)}{ds^2}(0), N \right\rangle = \sum_{i,j=1}^2 b_{ij}(\beta(0))\beta'_i(0)\beta'_j(0). \quad (\text{A.28})$$

Ou seja, a curvatura normal depende somente do ponto q e do vetor $\beta'(0)$ que é único pois dX_q é injetiva. Note também que $II(v) = k_n(v)$ neste caso que o vetor é unitário.

Observação. Note que o sinal da curvatura normal depende do vetor N .

Se variamos v obtemos as quantidades

$$k_1 = \min_v k_n(v) \quad e \quad k_2 = \max_v k_n(v).$$

Definição A.19. O mínimo e o máximo da curvatura normal, k_1 e k_2 respectivamente, são chamados de *curvaturas principais* de S no ponto p .

Exemplo A.4. Podemos ver que se S é o plano, então $k_1 = k_2 = 0$ pois, como qualquer curva nesse caso é uma curva plana, o vetor de curvatura está no plano, logo $k_n(v) = 0 \forall v \in T_p S, \forall p \in S$.

Observação A.4. Na proposição A.6 mostramos que a aplicação de Weingarten é uma aplicação linear autoadjunta. De álgebra sabemos que isto implica a existência de uma base ortonormal $\{e_1, e_2\}$ de $T_p S$, e $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tal que

$$-dN_p(e_1) = \lambda_1 e_1, \quad \text{e} \quad -dN_p(e_2) = \lambda_2 e_2,$$

e λ_1 e λ_2 são os autovalores da matriz A da aplicação de Weingarten. Além disso, λ_1 e λ_2 são o mínimo e o máximo, respectivamente, da forma quadrática $\langle -dN_p(v), v \rangle = II_p(v)$ restrita ao círculo unitário de $T_p S$ que, como já vimos, coincide com $k_n(v)$. Assim, k_1 e k_2 , são os autovalores da matriz A da aplicação de Weingarten.

Definição A.20. A metade da soma das curvaturas principais

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2},$$

é chamada de *curvatura média* de S no ponto p , e o vetor $\mathbf{H} = HN$ é chamado de *vetor curvatura média*. O produto das mesmas

$$K = k_1 k_2,$$

é chamado de *curvatura gaussiana*.

Observação. Podemos ver que o sentido do vetor curvatura média não depende do sentido de N pois se mudamos o sentido deste, também muda o sinal da curvatura média e, portanto, o sentido de \mathbf{H} permanece invariante.

Proposição A.8. A curvatura média está dada, em termos da primeira e segunda forma fundamental, por

$$H = \frac{g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12}}{2 \det(g)}, \quad (\text{A.29})$$

e a curvatura gaussiana por

$$K = \frac{\det(b)}{\det(g)}. \quad (\text{A.30})$$

Demonstração. Pela observação A.4 sabemos que as curvaturas principais são as raízes do polinômio

$$\det(A - \lambda I) = 0. \quad (\text{A.31})$$

Em particular, como A é uma matriz de ordem 2, podemos escrever (A.31) na forma

$$\lambda^2 - \text{tr}(A)\lambda + \det(A) = 0,$$

donde $\text{tr}(A)$ é o traço de A . Usando a fórmula do discriminante para encontrar as raízes e, tomando em conta que $k_1 \leq k_2$, temos que,

$$k_1 = \frac{\text{tr}(A) - \sqrt{D}}{2} \quad \text{e} \quad k_2 = \frac{\text{tr}(A) + \sqrt{D}}{2}, \quad (\text{A.32})$$

donde $D = (-\text{tr}(A))^2 - 4 \det(A)$. Assim,

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = \frac{\text{tr}(A)}{2}.$$

Como

$$g^{-1} = \frac{1}{\det(g)} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix},$$

temos que,

$$A = g^{-1}b = \frac{1}{\det(g)} \begin{pmatrix} g_{22}b_{11} - g_{12}b_{12} & g_{22}b_{12} - g_{12}b_{22} \\ g_{11}b_{12} - g_{12}b_{11} & g_{11}b_{22} - g_{12}b_{12} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.33})$$

daí,

$$\text{tr}(A) = \frac{1}{\det(g)} (g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12}),$$

portanto,

$$H = \frac{g_{11}b_{22} + g_{22}b_{11} - 2g_{12}b_{12}}{2 \det(g)}.$$

Por outro lado, usando (A.32), a curvatura gaussiana está dada por

$$\begin{aligned} K &= \frac{(\text{tr}(A) - \sqrt{D})(\text{tr}(A) + \sqrt{D})}{4} \\ &= \text{tr}(A)^2 - D \\ &= \frac{\text{tr}(A)^2 - \text{tr}(A)^2 + 4 \det(A)}{4} \\ &= \det(A) \\ &= \frac{\det(b)}{\det(g)}. \end{aligned} \quad \square$$

Proposição A.9. *Sejam S uma superfície regular e $p \in S$. Se X é uma parametrização em p na qual $\frac{\partial X}{\partial u_1}$ e $\frac{\partial X}{\partial u_2}$ são ortogonais, então a curvatura gaussiana está dada por*

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left(\frac{\partial}{\partial u_1} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{\partial(g_{22})}{\partial u_1} \right) + \frac{\partial}{\partial u_2} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{\partial(g_{11})}{\partial u_2} \right) \right) \quad (\text{A.34})$$

Demonstração. A prova pode ser encontrada em [26]. \square

Como consequência temos um resultado muito importante.

Teorema A.1 (Egregium de Gauss). *A curvatura gaussiana K é uma característica intrínseca da superfície.*

Definição A.21. Sejam S uma superfície regular e D um domínio tal que $\overline{D} \subset \Omega$. Vamos supor que D está contido numa vizinhança coordenada de uma parametrização $X : \Omega \rightarrow S$ compatível com a orientação de S . Definimos como *curvatura total* da superfície sobre D à expressão

$$\iint_D K dS, \quad (\text{A.35})$$

onde dS é o elemento infinitesimal de área sobre a superfície (veja (A.13)), ou seja, $dS = \sqrt{\det(g)} du_1 du_2$, com $(u_1, u_2) \in D$.

Observação. Se K não muda de sinal sobre Ω , tem sentido em escrever

$$\iint_\Omega K dS. \quad (\text{A.36})$$

A.7

Superfícies regulares completas

Para definir o que é uma superfície completa precisamos enunciar a seguinte proposição.

Proposição A.10. *Seja S uma superfície regular conexa, então para quaisquer dois pontos p e q na superfície, existe uma curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow S$ tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$. Além disso, a função definida por*

$$\begin{aligned} d : S \times S &\rightarrow \mathbb{R} \\ (p, q) &\mapsto \inf \{ \ell(\alpha); \alpha : [0, 1] \rightarrow S, \alpha(0) = p, \alpha(1) = q \} \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$

é uma distância sobre a superfície.

Demonstração. A prova pode ser encontrada em [26]. □

Isto nos diz que podemos ver a superfície como um espaço métrico para a distância definida por (A.37).

Definição A.22. Seja S uma superfície regular. Dizemos que S é uma *superfície completa* se é completa como espaço métrico para a distância dada em (A.37).

Teorema A.2 (Hopf-Rinow). *Sejam S uma superfície regular e $p \in S$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Os limitados e fechados de S são compactos.*
2. *S é completa como espaço métrico.*

3. Existe uma sequência de compactos $K_n \subset S$, $K_n \subset \text{int } K_{n+1}$ e $\bigcup_n K_n = S$, tais que se $p_n \notin K_n$ então $d(p, p_n) \rightarrow \infty$.

Além disso, cada uma das afirmações acima implica que

4. Para todo $q \in S$ existe uma geodésica γ ligando p a q com $\ell(\gamma) = d(p, q)$.

Demonstração. A prova pode ser encontrada em [14]. □

B

Noções de Análise Complexo e o Teorema de Runge

Os objetivos deste apêndice são introduzir os conceitos básicos de análise complexa usados no trabalho e provar o teorema de Runge no qual estão baseados os capítulos 4 e 5.

B.1

Funções holomorfas

A teoria de funções de uma variável complexa generaliza o cálculo ao domínio complexo \mathbb{C} . A diferenciação e integração tem novos significados, mas, ao mesmo tempo, é muito restringido. Mais precisamente, somente as funções holomorfas podem ser diferenciadas ou integradas. Ao longo do capítulo vamos denotar por $z = u_1 + iu_2$, $f(z) = w_1(z) + iw_2(z)$ uma função complexa onde w_1 e w_2 são funções reais nas variáveis u_1 e u_2 e $\Omega \in \mathbb{C}$ representa um domínio.

Definição B.1. Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ onde Ω é um aberto de \mathbb{C} . Dizemos que f é uma *função holomorfa* se existe

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} \quad (\text{B.1})$$

em todo ponto z de Ω . No caso que exista, será chamado de *derivada complexa* e será denotada por $f'(z)$.

Exemplo B.1 (Polinômios). Para cada $n \in \mathbb{N}$, a função $f(z) = z^n$ é holomorfa em \mathbb{C} e sua derivada é $f'(z) = nz^{n-1}$ para cada $z \in \mathbb{C}$. Podemos verificar que as mesmas propriedades de linearidade são válidas para derivadas complexas, portanto um outro exemplo de funções holomorfas são os polinômios complexos, ou seja, as funções da forma

$$p(z) = a_0 + a_1z + \cdots + a_nz^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Exemplo B.2. A função $f(z) = \frac{1}{z^n}$ é uma função holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $f'(z) = -\frac{n}{z^{n+1}}$ para cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

B.2

Equações de Cauchy-Riemann

Proposição B.1 (Equações de Cauchy-Riemann). *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa em Ω , $f(z) = w_1(z) + iw_2(z)$. Então*

$$\frac{\partial w_1}{\partial u_1} = \frac{\partial w_2}{\partial u_2} \quad e \quad \frac{\partial w_1}{\partial u_2} = -\frac{\partial w_2}{\partial u_1}, \quad \text{em } \Omega. \quad (\text{C-R})$$

Demonstração. O limite em (B.1) deve ser o mesmo independente da forma em que h se aproxime de zero. Se h se aproxima de zero pelo eixo real, então a parte imaginária é zero, e usando (B.1) temos que a derivada é

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w_1(u_1 + h, u_2) + iw_2(u_1 + h, u_2) - w_1(u_1, u_2) - iw_2(u_1, u_2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w_1(u_1 + h, u_2) - w_1(u_1, u_2)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{w_2(u_1 + h, u_2) - w_2(u_1, u_2)}{h}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$f'(z) = \frac{\partial w_1}{\partial u_1} + i \frac{\partial w_2}{\partial u_1}. \quad (\text{B.2})$$

Por outro lado, se h se aproxima de zero pelo eixo imaginário, então a parte real é zero, isto é, $h = ik$ com $k \in \mathbb{R}$, portanto,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{k \rightarrow 0} \frac{w_1(u_1, u_2 + k) + iw_2(u_1, u_2 + k) - w_1(u_1, u_2) - iw_2(u_1, u_2)}{ik} \\ &= -i \left(\lim_{k \rightarrow 0} \frac{w_1(u_1, u_2 + k) - w_1(u_1, u_2)}{k} + i \lim_{k \rightarrow 0} \frac{w_2(u_1, u_2 + k) - w_2(u_1, u_2)}{k} \right) \\ &= -i \left(\frac{\partial w_1}{\partial u_2} + i \frac{\partial w_2}{\partial u_2} \right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$f'(z) = \frac{\partial w_2}{\partial u_2} - i \frac{\partial w_1}{\partial u_2}. \quad (\text{B.3})$$

Igualando as partes reais e imaginárias de (B.2) e (B.3), respectivamente, obtemos as equações (C-R). \square

Observação B.1. Usando a equação (B.2) temos que

$$|f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial w_1}{\partial u_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial u_1} \right)^2 = \frac{\partial w_1}{\partial u_1} \frac{\partial w_2}{\partial u_2} - \frac{\partial w_1}{\partial u_2} \frac{\partial w_2}{\partial u_1},$$

esta última igualdade devido às equações de Cauchy-Riemann. Logo, o determinante do jacobiano da função f é $|f'(z)|^2$.

Definição B.2. Seja $w : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com segundas derivadas parciais contínuas em Ω . Dizemos que w é uma *função harmônica* se satisfaz a equação de Laplace, isto é

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial u_2^2} = 0 \quad \text{em } \Omega. \quad (\text{B.4})$$

Exemplo B.3. Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = w_1(z) + iw_2(z)$. Mais adiante vamos mostrar que se f é uma função holomorfa, então tem derivadas de todas as ordens e, portanto, as mesmas são holomorfas. Isto implica que as funções w_1 e w_2 são suaves, em particular, existem as segundas derivadas de w_1 e w_2 e são contínuas em Ω . Usando as equações (C-R) vemos que w_1 e w_2 são funções harmônicas. Neste caso dizemos que w_2 é uma *função harmônica conjugada* de w_1 .

Vamos mostrar agora que o recíproco da proposição B.1 é verdadeiro.

Proposição B.2. *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definida por $f(z) = w_1(z) + iw_2(z)$, onde w_1 e w_2 são funções com derivadas parciais contínuas em Ω . Assuma que w_1 e w_2 satisfazem as equações de Cauchy-Riemann. Então f é uma função holomorfa em Ω .*

Demonstração. De análise sabemos que, como w_1 e w_2 são funções cujas derivadas parciais são contínuas em Ω , podemos escrever

$$\begin{aligned} w_1(u_1 + h_1, u_2 + h_2) - w_1(u_1, u_2) &= \frac{\partial w_1}{\partial u_1} h_1 + \frac{\partial w_1}{\partial u_2} h_2 + r_1 \\ w_2(u_1 + h_1, u_2 + h_2) - w_2(u_1, u_2) &= \frac{\partial w_2}{\partial u_1} h_1 + \frac{\partial w_2}{\partial u_2} h_2 + r_2, \end{aligned}$$

onde

$$\lim_{\|(h_1, h_2)\| \rightarrow 0} \frac{r_1}{\|(h_1, h_2)\|} \quad \text{e} \quad \lim_{\|(h_1, h_2)\| \rightarrow 0} \frac{r_2}{\|(h_1, h_2)\|} = 0,$$

assim

$$\begin{aligned} &f(z + h_1 + ih_2) - f(z) \\ &= w_1(u_1 + h_1, u_2 + h_2) + iw_2(u_1 + h_1, u_2 + h_2) - w_1(u_1, u_2) - iw_2(u_1, u_2) \\ &= \frac{\partial w_1}{\partial u_1} h_1 + \frac{\partial w_1}{\partial u_2} h_2 + r_1 + i \left(\frac{\partial w_2}{\partial u_1} h_1 + \frac{\partial w_2}{\partial u_2} h_2 + r_2 \right) \\ &= \frac{\partial w_1}{\partial u_1} h_1 - \frac{\partial w_2}{\partial u_1} h_2 + \frac{\partial w_2}{\partial u_1} h_1 i + \frac{\partial w_1}{\partial u_2} h_2 i + r_1 + ir_2 \quad \text{por (C-R)} \\ &= \left(\frac{\partial w_1}{\partial u_1} + i \frac{\partial w_2}{\partial u_1} \right) (h_1 + ih_2) + r_1 + ir_2, \end{aligned}$$

logo,

$$\lim_{h_1 + ih_2 \rightarrow 0} \frac{f(z + h_1 + ih_2) - f(z)}{h_1 + ih_2} = \frac{\partial w_1}{\partial u_1}(z) + i \frac{\partial w_2}{\partial u_1}(z), \quad \forall z \in \Omega,$$

portanto f é holomorfa em Ω . □

B.3

O Operador Laplaciano Complexo

Vamos ver agora as funções holomorfas de um outro ponto de vista. Introduzindo as variáveis $z = u_1 + iu_2$ e $\bar{z} = u_1 - iu_2$, vemos que

$$u_1 = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \quad \text{e} \quad u_2 = -\frac{i}{2}(z - \bar{z}).$$

Vamos supor que as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial u_1}$ e $\frac{\partial f}{\partial u_2}$ existem e vamos definir os seguintes operadores complexos

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u_1} - i \frac{\partial f}{\partial u_2} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial u_1} + i \frac{\partial f}{\partial u_2} \right). \quad (\text{B.5})$$

Proposição B.3. *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função definida por $f(z) = w_1(z) + iw_2(z)$ e denotemos por \bar{f} a função conjugada de f , ou seja, $\bar{f} = w_1(z) - iw_2(z)$. Então*

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} \quad (\text{B.6})$$

Demonstração.

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial f}{\partial u_1} + i \frac{\partial f}{\partial u_2} = \frac{\partial w_1}{\partial u_1} + i \frac{\partial w_2}{\partial u_1} + i \left(\frac{\partial w_1}{\partial u_2} + i \frac{\partial w_2}{\partial u_2} \right), \quad (\text{B.7})$$

daí

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial w_1}{\partial u_1} - \frac{\partial w_2}{\partial u_2} + i \left(\frac{\partial w_2}{\partial u_1} + \frac{\partial w_1}{\partial u_2} \right). \quad (\text{B.8})$$

Por outro lado

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial u_1} - i \frac{\partial \bar{f}}{\partial u_2} = \frac{\partial w_1}{\partial u_1} - i \frac{\partial w_2}{\partial u_1} - i \left(\frac{\partial w_1}{\partial u_2} - i \frac{\partial w_2}{\partial u_2} \right), \quad (\text{B.9})$$

donde

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \frac{\partial w_1}{\partial u_1} - \frac{\partial w_2}{\partial u_2} - i \left(\frac{\partial w_2}{\partial u_1} + \frac{\partial w_1}{\partial u_2} \right). \quad (\text{B.10})$$

De (B.8) e (B.10) se obtém o desejado. \square

Proposição B.4. *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função de classe C^1 definida por $f(z) = w_1(z) + iw_2(z)$. Então f é holomorfa se, e somente se,*

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0 = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} \text{ em } \Omega.$$

Demonstração. Se f é holomorfa, então, como vale (C-R), (B.8) e (B.10) temos que $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0$. Reciprocamente, se $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0$ então por (B.8) ou (B.10) vale (C-R), portanto f é holomorfa pela proposição B.2. \square

Observação. Podemos escrever as derivadas parciais de w_1 e w_2 com respeito a u_1 e u_2 em função de z e \bar{z} , tomando em conta que $\frac{\partial z}{\partial u_1} = 1 = \frac{\partial \bar{z}}{\partial u_1}$ e $\frac{\partial z}{\partial u_2} = i = -\frac{\partial \bar{z}}{\partial u_2}$. Isto é,

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} = \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \quad (\text{B.11})$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_2} = i \left(\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) \quad (\text{B.12})$$

Proposição B.5. *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ e denotemos também por Δ o laplaciano complexo, ou seja $\Delta f = \Delta w_1 + i\Delta w_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2}$, então*

$$\Delta f = 4 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right).$$

Demonstração. Diferenciando (B.11) com respeito a u_1 obtemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_1^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z},$$

e diferenciando (B.12) com respeito a u_2 obtemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u_2^2} = i \frac{\partial}{\partial z} \left(i \frac{\partial f}{\partial z} - i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) - i \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(i \frac{\partial f}{\partial z} - i \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z}^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z}.$$

Somando estas equações obtemos o resultado. \square

B.4

Integrais Complexas

A generalização mais imediata de uma integral real é definir a integral de uma função complexa $f(t) = w_1(t) + iw_2(t)$, contínua sobre um intervalo $[a, b]$, da seguinte maneira

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b w_1(t) dt + i \int_a^b w_2(t) dt. \quad (\text{B.13})$$

Esta integral tem quase todas as propriedades da integral real.

As definições sobre curvas parametrizadas em \mathbb{C} são análogas às dadas na definição A.1 do capítulo A com a única diferença que a imagem da aplicação está em \mathbb{C} . Além disso, precisamos da seguinte definição.

Definição B.3. Uma curva parametrizada $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ é chamada de *curva fechada* se $\beta(a) = \beta(b)$, e é chamada de *curva simples* se a igualdade ocorre somente neste pontos (ou seja, o traço não se autointercepta).

Seja $\beta : [a, b] \longrightarrow \Omega$ uma curva de classe \mathcal{C}^1 . Se a função f é contínua em Ω , então é contínua sobre os pontos $z = \beta(t)$, com $t \in [a, b]$ e podemos definir

$$\int_{\beta} f(z)dz = \int_a^b f(\beta(t))\beta'(t)dt. \quad (\text{B.14})$$

Esta integral tem um propriedade aditiva óbvia. Suponha agora que β é uma curva seccionalmente de classe \mathcal{C}^1 , ou seja, o traço de β é a união de traços de curvas de classe \mathcal{C}^1 , β_1, \dots, β_n . Então a correspondente integral satisfaz

$$\int_{\beta} f(z)dz = \sum_{k=1}^n \int_{\beta_k} f(z)dz.$$

Por esta razão todas as curvas parametrizadas que vamos considerar serão de classe \mathcal{C}^1 sobre um intervalo da reta¹.

Definição B.4. Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua. Chamamos *primitiva* de f em Ω toda função holomorfa F tal que $F'(z) = f(z)$, $\forall z \in \Omega$.

Observação. Note que para funções complexas a continuidade da função não garante necessariamente a existência de uma primitiva, pois o teorema fundamental do cálculo não necessariamente pode ser aplicado, mas sim existe a integral de f ao longo de uma curva β pois é o número complexo definido por (B.13) e (B.14).

Proposição B.6 (Regra de Barrow). *Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua e $\beta : [a, b] \longrightarrow \Omega$ uma curva seccionalmente \mathcal{C}^1 . Se existe primitiva F de f em Ω , então*

$$\int_{\beta} f(z)dz = F(z_b) - F(z_a),$$

onde $z_a = \beta(a)$ e $z_b = \beta(b)$. Em particular, se β é uma curva fechada, a integral é zero.

Demonstração. Vamos supor que β é diferenciável pois se for seccionalmente de classe \mathcal{C}^1 , usamos a propriedade aditiva da integral. Se $F(z) = W_1(z) + iW_2(z)$ é primitiva de f em Ω então $F'(z) = f(z)$, logo

$$\frac{d}{dt}F(\beta(t)) = f(\beta(t))\beta'(t).$$

Por outro lado,

$$\frac{d}{dt}F(\beta(t)) = \frac{d}{dt}W_1(\beta(t)) + i\frac{d}{dt}W_2(\beta(t)),$$

¹Todos os argumentos deste apêndice valem para curvas seccionalmente de classe \mathcal{C}^1 .

portanto

$$f(\beta(t))\beta'(t) = \frac{d}{dt}W_1(\beta(t)) + i\frac{d}{dt}W_2(\beta(t)).$$

Daí,

$$\begin{aligned} \int_{\beta} f(z)dz &= \int_a^b f(\beta(t))\beta'(t)dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt}W_1(\beta(t))dt + i \int_a^b \frac{d}{dt}W_2(\beta(t))dt \\ &= W_1(\beta(b)) - W_1(\beta(a)) + i(W_2(\beta(b)) - W_2(\beta(a))) \quad \text{pelo TFC} \\ &= W_1(\beta(b)) + iW_2(\beta(b)) - (W_1(\beta(a)) + iW_2(\beta(a))) \\ &= F(z_b) - F(z_a). \end{aligned} \quad \square$$

A importância desta proposição é que, no caso de uma função ter uma primitiva, a integral não depende da escolha do caminho ligando z_a e z_b . Neste caso uma notação mais conveniente seria

$$\int_{z_a}^{z_b} f(z)dz.$$

Por outro lado, se temos hipóteses adicionais à continuidade podemos ter um teorema análogo. O seguinte passo é saber sob que condições uma função $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ admite uma primitiva. Quando for o caso f é dita de *função integrável*.

Teorema B.1 (TFC para funções de variável complexa). *Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua.*

1. *Se existe alguma função $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ satisfazendo*

$$F(z) - F(z_0) = \int_{\beta} f(\zeta)d\zeta,$$

para todo $z \in \Omega$ e $z_0 \in \Omega$ fixado, e para toda curva $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ de classe \mathcal{C}^1 , tal que $\beta(a) = z_0$ e $\beta(b) = z$, então F é uma primitiva de f em Ω (é dizer, F é holomorfa e $F' = f$).

2. *Se $\int_{\beta} f(z)dz = 0$ para toda curva fechada e de classe \mathcal{C}^1 em Ω , então existe primitiva de f em Ω , ou seja f é integrável (e vale a recíproca pela proposição B.6).*

Demonstração. Para provar 1 vamos mostrar que $F'(z)$ existe para todo $z \in \Omega$ e é igual a $f(z)$. Para cada $z \in \Omega$ tomemos um disco D com centro em z contido em Ω . Seja $w \in D$, $w \neq z$. Seja $\beta(t)$ uma curva qualquer em Ω ligando z_0 e z e seja $\gamma(t) = (1-t)z + tw$, $t \in [0, 1]$ o segmento que liga z e w . Então a curva $\beta + \gamma$ liga z_0 e w . Logo

$$\begin{aligned} F(z) - F(w) &= \int_{\beta} f(z) dz - \int_{\beta+\gamma} f(z) dz \\ &= - \int_{\gamma} f(z) dz \\ &= - \int_0^1 f(z + t(w - z)) (w - z) dt \end{aligned}$$

portanto

$$\frac{F(z) - F(w)}{z - w} = \int_0^1 f(z + t(w - z)) dt.$$

Pasando ao limite,

$$\lim_{w \rightarrow z} \frac{F(z) - F(w)}{z - w} = \lim_{w \rightarrow z} \int_0^1 f(z + t(w - z)) dt = \int_0^1 f(z) dt,$$

onde a última igualdade é consequência da continuidade uniforme de $f \circ \gamma$ em $[0, 1]$. Daí, $F'(z) = f(z)$ como desejado.

Para provar 2 vamos notar que se a hipótese é satisfeita, então a função

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$$

está bem definida para cada z em Ω pois a integral não depende do caminho escolhido entre z_0 e z . De fato, se β e γ são duas curvas em Ω , ligando z a w , então $\beta - \gamma$ é uma curva fechada em Ω , logo pela hipótese se tem

$$\int_{\beta-\gamma} f(\zeta) d\zeta = 0,$$

ou seja

$$\int_{\beta} f(\zeta) d\zeta = \int_{\gamma} f(\zeta) d\zeta.$$

Logo

$$F(z) - F(z_0) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta = \int_{\beta} f(\zeta) d\zeta$$

para toda curva β ligando z_0 e z . Isto é, F satisfaz as hipóteses em 1 e, portanto, é uma primitiva de f , ou seja, $F'(z) = f(z)$ para cada $z \in \Omega$. \square

Teorema B.2. *Seja $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfa em Ω . Então*

$$\int_{\beta} f(z) dz = 0$$

para toda curva $\beta : [a, b] \longrightarrow \Omega$ simples, fechada e cujo interior² esteja contido em Ω .

²Por interior de uma curva simples fechada entendemos a região que está limitada pela curva.

Demonstração. Seja $\beta(t) = \beta_1(t) + i\beta_2(t)$, $t \in [a, b]$, uma curva simples e cujo interior está contido em Ω . Então o interior define uma região simplesmente conexa em Ω e a função $f(z) = w_1(z) + iw_2(z)$ é contínua nos pontos sobre e no interior da curva. Vamos supor que β está orientada no sentido anti-horário, e que w_1 e w_2 são de classe³ \mathcal{C}^2 em Ω . Assim,

$$\begin{aligned} \int_{\beta} f(z)dz &= \int_a^b f(\beta(t))\beta'(t)dt \\ &= \int_a^b (w_1(\beta(t)) + iw_2(\beta(t))) (\beta_1'(t) + i\beta_2'(t)) dt \\ &= \int_{\beta} w_1 du_1 - w_2 du_2 + i \int_{\beta} w_2 du_1 + w_1 du_2 \\ &= \iint_{\text{int } \beta} \left(-\frac{\partial w_2}{\partial u_1} - \frac{\partial w_1}{\partial u_2} \right) du_1 du_2 + i \iint_{\text{int } \beta} \left(\frac{\partial w_1}{\partial u_1} - \frac{\partial w_2}{\partial u_2} \right) du_1 du_2, \end{aligned}$$

esta última igualdade é consequência do teorema de Green. O resultado segue pois, se f é holomorfa em Ω , w_1 e w_2 satisfazem (C-R). \square

Teorema B.3 (Cauchy). *Seja f uma função holomorfa num domínio simplesmente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$. Então*

$$\int_{\beta} f(z)dz = 0$$

para toda curva fechada $\beta : [a, b] \rightarrow \Omega$. Ou seja, f é integrável em Ω .

Demonstração. A prova pode ser encontrada em [29]. \square

Corolário B.3.1. *Toda função holomorfa é localmente integrável.*

Demonstração. Seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Como para cada $z \in \Omega$, existe uma vizinhança simplesmente conexa V_z , então, pelo teorema B.3 f é integrável em V_z . \square

Observação B.2. Podemos ver que, dependendo da topologia do domínio, uma função holomorfa nem sempre é integrável. De fato, consideremos a função $f(z) = \frac{1}{z}$ holomorfa em $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ que não é um domínio simplesmente conexo. Seja $\beta(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$ uma parametrização do círculo unitário, então

$$\int_{\beta} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{\beta'(t)}{\beta(t)} dt = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}} dt = 2\pi i.$$

Teorema B.4. *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio simplesmente conexo. Então toda função harmônica em Ω é a parte real de uma função holomorfa em Ω .*

³Na verdade estas funções são suaves devido ao fato de que toda função holomorfa é infinitamente diferenciável, como veremos mais adiante.

Demonstração. Seja $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função harmônica. Seja $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definida por $g(z) = 2\frac{\partial v}{\partial \bar{z}}$. Daí, como v é harmônica, então $2\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial v}{\partial z} = 0$ pela proposição B.5. Portanto, usando a proposição B.4, g é holomorfa em Ω . Como Ω é simplesmente conexo, o teorema B.3 garante a existência de uma primitiva f de g em Ω dada por

$$f(z) = v(z_0) + \int_{z_0}^z g(\zeta) d\zeta, \quad \forall z \in \Omega,$$

onde $z_0 \in \Omega$ está fixado. Fazendo contas simples obtemos

$$f(z) = v(z_0) + \int_{z_0}^z \frac{\partial v}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial v}{\partial u_2} du_2 + i \int_{z_0}^z -\frac{\partial v}{\partial u_2} du_1 + \frac{\partial v}{\partial u_1} du_2.$$

A primeira das integrais anteriores é igual a $v(z) - v(z_0)$ pois o seu integrando é dv . Por outro lado, como a integral não depende do caminho ligando z_0 e z , temos que a função

$$v^*(z) = \int_{z_0}^z -\frac{\partial v}{\partial u_2} du_1 + \frac{\partial v}{\partial u_1} du_2$$

está bem definida e satisfaz $\frac{\partial v^*}{\partial u_1} = -\frac{\partial v}{\partial u_2}$ e $\frac{\partial v^*}{\partial u_2} = \frac{\partial v}{\partial u_1}$. Por tanto v^* é a conjugada harmônica de v , logo a função $v(z) + iv^*(z)$ é uma função holomorfa em Ω cuja parte real é $v(z)$. \square

Observação B.3. Note que a função v^* da prova anterior é única a menos constantes. De fato, se w e \tilde{w} são duas conjugadas harmônicas de v , então $v + iw$ e $v + i\tilde{w}$ são holomorfas, logo a diferença $i(w - \tilde{w})$ é holomorfa, portanto as derivadas parciais de $w - \tilde{w}$ são zero, donde $w - \tilde{w}$ é constante em Ω .

Nem sempre as funções harmônicas tem conjugada harmônica, por exemplo, se $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, então a função harmônica $v(z) = \log |z|$ não possui conjugada harmônica em Ω , pois não é possível definir um ramo holomorfo do logaritmo⁴ em Ω . Mas sempre é possível encontrar uma conjugada harmônica numa vizinhança de cada ponto pois toda função holomorfa é localmente integrável.

B.4.1

Fórmula Integral de Cauchy e algumas consequências

Lemma 1. *Seja β uma curva simples, fechada, e tal que $z_0 \in \text{int } \beta$. Então*

$$\int_{\beta} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i \quad (\text{B.15})$$

⁴As funções elementares complexas podem ser estudadas em [29].

Demonstração. Seja $\beta : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ contendo z_0 no seu interior. Definamos

$$h(t) = \int_a^t \frac{\beta'(s)}{\beta(s) - z_0} ds.$$

Seja agora

$$g(t) = e^{-h(t)} (\beta(t) - z_0),$$

então,

$$g'(t) = e^{-h(t)} (-h'(t)(\beta(t) - z_0) + \beta'(t)) = e^{-h(t)} \left(-\frac{\beta'(t)}{\beta(t) - z_0} (\beta(t) - z_0) + \beta'(t) \right),$$

logo $g' \equiv 0$ e, portanto g é constante igual a $g(a) = \beta(a) - z_0$, donde

$$e^{h(t)} = \frac{\beta(t) - z_0}{\beta(a) - z_0}.$$

Como β é simples e fechada, $e^{h(b)} = e^{h(a)} = 1$, portanto $h(b) = 2\pi i$. Logo

$$h(b) = \int_a^b \frac{\beta'(t)}{\beta(t) - z_0} dt = 2\pi i. \quad \square$$

Teorema B.5 (Fórmula Integral de Cauchy). *Seja Ω um domínio e f holomorfa em Ω . Então*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (\text{B.16})$$

para toda curva β simples e fechada cujo interior está em Ω e para todo $z \in \text{int } \beta$.

Demonstração. Como f é contínua em z_0 por ser holomorfa, então para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|z - z_0| < \delta$, então $|f(z) - f(z_0)| < \frac{\epsilon}{2\pi}$. Seja $\beta_0(t) = z_0 + r_0 e^{it}$, com $t \in [0, 2\pi]$, tal que r_0 é suficientemente pequeno para que este círculo esteja contido em $\text{int } \beta$. Vamos supor também que $r_0 < \delta$.

A função

$$F(z) = \frac{f(z)}{z - z_0},$$

é holomorfa sobre os pontos da curva β_0 e em $\text{int } \beta_0 \setminus \{z_0\}$. Vamos orientar β e β_0 no sentido anti-horário, fazendo um corte que chamamos de γ . Então

$$\int_{\beta + \gamma + \beta_0 - \gamma} F(\zeta) d\zeta = 0$$

pelo teorema de Cauchy. Isto implica que

$$\int_{\beta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\beta_0} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \int_{\beta_0} \frac{f(z_0)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{\beta_0} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Mas a primeira das integrais é igual a $2\pi i f(z_0)$ porque vale (B.15). Por outro lado,

$$\left| \int_{\beta_0} \frac{f(\zeta) - f(z_0)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \int_{\beta_0} \frac{|f(\zeta) - f(z_0)|}{|\zeta - z|} |d\zeta| < \frac{\epsilon}{2\pi r_0} \int_{\beta_0} |d\zeta| = \epsilon.$$

Como isto vale para qualquer $\epsilon > 0$, então esta integral deve ser zero e, portanto,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\beta} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta,$$

Isto implica (B.16) pois $z_0 \in \Omega$ é qualquer. \square

A importância desta fórmula é que mostra que o valor de uma função holomorfa numa região está determinada para toda a região por seus valores na fronteira. Isto implica que uma vez que a função está definida para a fronteira não temos liberdade de mudar o valor da função nos pontos interiores.

Corolário B.5.1 (Fórmula Integral de Cauchy Generalizada). *Seja Ω um domínio e f holomorfa em Ω . Então existem as derivadas de todas as ordens de f em Ω . Mais precisamente,*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\beta} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad (\text{B.17})$$

para toda curva β simples, fechada e cujo interior está em Ω , e para todo $z \in \text{int } \beta$.

Demonstração. A prova é por indução, onde o caso $n = 1$ é a fórmula integral de Cauchy. Vamos supor que f tem derivadas até ordem $n - 1$ e

$$f^{(n-1)}(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\beta} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta.$$

Então

$$\frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\beta} f(\zeta) \frac{1}{h} \left(\frac{1}{(\zeta - z - h)^n} - \frac{1}{(\zeta - z)^n} \right) d\zeta. \quad (\text{B.18})$$

Como vale a fórmula

$$A^n - B^n = (A - B) (A^{n-1} + A^{n-2}B + \cdots + AB^{n-2} + B^{n-1}),$$

fazendo $A = \frac{1}{(\zeta - z - h)^n}$ e $B = \frac{1}{(\zeta - z)^n}$, obtemos

$$\left(\frac{1}{(\zeta - z - h)^n} - \frac{1}{(\zeta - z)^n} \right) = \frac{h (A^{n-1} + A^{n-2}B + \cdots + AB^{n-2} + B^{n-1})}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}.$$

Substituindo em (B.18) obtemos

$$\frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\beta} f(\zeta) \frac{A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + AB^{n-2} + B^{n-1}}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} d\zeta$$

e passando ao limite quando $h \rightarrow 0$ temos

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} &= \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\beta} f(\zeta) \left(\frac{1}{(\zeta - z)^2} \right) \left(\frac{n}{(\zeta - z)^{n-1}} \right) d\zeta \\ &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\beta} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \end{aligned} \quad \square$$

Corolário B.5.2 (Desigualdade de Cauchy). *Se f é uma função holomorfa sobre um domínio Ω que contém um disco fechado D com centro em z_0 e raio r , então*

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! \sup_{w \in \partial D} |f(w)|}{r^n}. \quad (\text{B.19})$$

Demonstração. Parametrizando o círculo por $\beta(t) = z_0 + re^{it}$, com $t \in [0, 2\pi]$, e aplicando a fórmula de Cauchy generalizada para $f^{(n)}(z)$ obtemos

$$|f^{(n)}(z)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{it})}{(re^{it})^{n+1}} rie^{it} dt \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + re^{it})|}{r^n} dt. \quad \square$$

Observação B.4. Para qualquer compacto $K \in \Omega$ temos uma desigualdade análoga à desigualdade de Cauchy. De fato, existe um recobrimento finito de K por discos fechados, D_1, \dots, D_n , e em cada D_i vale (B.19). Daí,

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n!M}{r^n}, \quad (\text{B.20})$$

onde $M = \max_{1 \leq i \leq n} \sup_{w \in \partial D_i} |f(w)|$.

Teorema B.6 (Princípio do Máximo para funções holomorfas). *Seja $f(z)$ uma função holomorfa não constante num domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$, então $|f(z)|$ não atinge o máximo em Ω .*

Demonstração. Suponha que $|f|$ atinge um máximo $z_0 \in \Omega$. Seja $r > 0$ tal que o círculo com centro em z_0 e raio r esteja contido em Ω . Vamos parametrizar este círculo por $\beta(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$. Usando a fórmula integral de Cauchy obtemos a chamada *fórmula da média*,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt, \quad (\text{B.21})$$

logo,

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt. \quad (\text{B.22})$$

Mas como z_0 é máximo para $|f|$ então

$$|f(z_0 + re^{it})| \leq |f(z_0)|,$$

e como f não é constante, a desigualdade ocorre para um t_0 e, portanto, para um intervalo por continuidade, isto é

$$|f(z_0 + re^{it})| < |f(z_0)|, \quad \forall t \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon],$$

o que implica que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt < |f(z_0)|$$

que contradiz (B.22). \square

Uma outra forma de mostrar o princípio do máximo é usando o fato de que as funções holomorfas não constantes são aplicações abertas (veja [29]).

Corolário B.6.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio e f uma função contínua em $\overline{\Omega}$ e holomorfa em Ω . Então o máximo de $|f|$ é atingido em $\partial\Omega$.*

Demonstração. Como f é contínua em $\overline{\Omega}$, $|f|$ atinge um máximo z_0 neste conjunto, mas não pode estar em Ω pelo princípio do máximo, logo $z_0 \in \partial\Omega$. \square

Corolário B.6.2 (Princípio do máximo para funções harmônicas). *Seja $v(z)$ uma função harmônica não constante num domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$, então v não atinge o máximo em Ω .*

Demonstração. Como v é harmônica, então ela é localmente a parte real de uma função holomorfa f . Seja

$$g(z) = e^{f(z)},$$

assim

$$|g(z)| = e^{v(z)}.$$

Se v atinge um máximo z_0 em Ω , então a função $|g|$ atinge um máximo, logo g seria constante. Daí, $g' = f'(z)e^{f(z)} = 0 \quad \forall z \in V$, o que implica que $f'(z) = 0$ para todo $z \in V$, ou seja f é constante e, consequentemente, v . \square

Teorema B.7 (Fórmula de Poisson para funções harmônicas). *Seja u uma função harmônica em $\overline{\mathbb{D}_R}$. Então*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{it}) \Re \left(\frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} \right) dt, \quad (\text{B.23})$$

para todo $z \in \mathbb{D}_R$.

Demonstração. Vamos definir a seguinte transformação

$$\begin{aligned} T : \mathbb{D} &\longrightarrow \mathbb{D}_R \\ w &\longmapsto \zeta = \frac{R(Rw + z)}{R + \bar{z}w}. \end{aligned}$$

Então T é conforme e sua derivada é

$$T'(w) = \frac{R(R^2 - |z|^2)}{(R + \bar{z}w)^2}. \quad (\text{B.24})$$

Além disso, cálculos simples mostram que

$$w = \frac{R(\zeta - z)}{R^2 - \bar{z}\zeta}. \quad (\text{B.25})$$

Consideremos a função harmônica definida em \mathbb{D} por $v(w) = (u \circ T)(w)$. Como $T(0) = z$, então aplicando a fórmula da média (B.21) à função v temos que

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(T(e^{i\theta})) d\theta. \quad (\text{B.26})$$

Mas $\zeta = T(w)$, então $d\zeta = T'(w)dw$. Substituindo a expressão (B.25) para w na expressão para $T'(w)$ (B.24) obtemos

$$T'(w(\zeta)) = \frac{R(R^2 - |z|^2)}{\left(R + \bar{z} \frac{R(\zeta - z)}{R^2 - \bar{z}\zeta}\right)^2} = \frac{(R^2 - \bar{z}\zeta)^2}{R(R^2 - |z|^2)},$$

daí, $dw = \frac{R(R^2 - |z|^2)}{(R^2 - \bar{z}\zeta)^2} d\zeta$. Vamos parametrizar os círculos \mathbb{D} e \mathbb{D}_R por $w = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, e $\zeta = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, respectivamente. Então $dw = ie^{i\theta} d\theta$, avaliando na fórmula para w (B.25) temos

$$dw = \frac{R(Re^{it} - z)}{R^2 - \bar{z}e^{it}} d\theta.$$

Logo,

$$\frac{R(Re^{it} - z)}{R^2 - \bar{z}e^{it}} d\theta = \frac{R^2(R^2 - |z|^2)}{(R^2 - \bar{z}e^{it})} e^{it} dt,$$

donde

$$\begin{aligned} d\theta &= \frac{R^2(R^2 - |z|^2)}{(R^2 - \bar{z}e^{it})} \cdot \frac{R^2 - \bar{z}e^{it}}{R(Re^{it} - z)} e^{it} dt \\ &= \frac{e^{it} R(R^2 - |z|^2)}{(R^2 - \bar{z}e^{it})(Re^{it} - z)} dt \\ &= \frac{(R^2 - |z|^2)}{(Re^{-it} - \bar{z})(Re^{it} - z)} dt \\ &= \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{it} - z|^2} dt. \end{aligned}$$

Substituindo em (B.26) obtemos

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{it}) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{it} - z|^2} dt. \quad (\text{B.27})$$

Por outro lado,

$$\frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} = \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} \cdot \frac{Re^{-it} - \bar{z}}{Re^{-it} - \bar{z}} = \frac{R^2 - |z|^2 + 2i \Im(\bar{z} Re^{it})}{|Re^{it} - z|^2}.$$

Daí,

$$\frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{it} - z|^2} = \Re \left(\frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} \right). \quad (\text{B.28})$$

Substituindo em (B.27) obtemos (B.23). \square

Observação. No teorema acima a função u não precisa ser harmônica em $\overline{\mathbb{D}_R}$. Basta que seja harmônica em \mathbb{D}_R e contínua em $\overline{\mathbb{D}_R}$. De fato, se $0 < r < 1$, então u é harmônica em \mathbb{D}_{rR} e podemos aplicar o resultado anterior. Isto é

$$u(rz) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(rRe^{it}) \Re \left(\frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} \right) dt.$$

Como u é uniformemente contínua em $\overline{\mathbb{D}_R}$, podemos passar ao limite para obter

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{it}) \Re \left(\frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} \right) dt.$$

Corolário B.7.1 (Fórmula de Schwarz). *Seja f uma função holomorfa em \mathbb{D}_R e contínua em $\overline{\mathbb{D}}$. Então, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re(f(Re^{it})) \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} dt + ic, \quad (\text{B.29})$$

para todo $z \in \mathbb{D}_R$. Além disso, $c = 0$ se, e somente se, $f(0) \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja $u = \Re(f)$. Então, pelo teorema anterior,

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{it}) \Re \left(\frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} \right) dt,$$

ou seja,

$$u(z) = \Re \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{it}) \frac{Re^{it} + z}{Re^{it} - z} dt \right).$$

Como a conjugadas harmônicas de u são iguais a menos de uma constante imaginária, o resultado segue. Por outro lado,

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re(f(Re^{it})) dt + ic. \quad \square$$

Teorema B.8 (Desenvolvimento de Taylor de uma função holomorfa).

Suponha que f é uma função holomorfa sobre um domínio Ω e seja $z_0 \in \Omega$. Seja D um disco com centro em z_0 e tal que $\bar{D} \subset \Omega$. Então,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \forall z \in D, \quad (\text{B.30})$$

onde os coeficientes estão dados por

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Demonstração. Sejam $C = \partial D$ e $z \in D$ qualquer. Então

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{\frac{1}{\zeta - z_0}}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{\left(1 + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right) + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^2 + \dots\right)}{\zeta - z_0}.$$

Então podemos escrever a fórmula integral de Cauchy (B.16) como

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left(1 + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right) + \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^2 + \dots\right) d\zeta.$$

Note que, como $\zeta \in C$ e $z \in D$, $\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} = r < 1$ e, portanto, o integrando é uma série⁵ uniformemente convergente em C . Logo, podemos trocar a soma com a integral, daí

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)(z - z_0)}{(\zeta - z_0)^2} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)(z - z_0)^2}{(\zeta - z_0)^3} d\zeta + \dots$$

Usando o fato de que $(z - z_0)$ é constante em cada integrando e a fórmula de Cauchy generalizada (B.17) obtemos o resultado. \square

Este resultado diz que se f é uma função holomorfa em um domínio Ω , então é uma *função analítica*, ou seja, para cada ponto $z \in \Omega$, existe um disco D suficientemente pequeno contido em Ω , tal que a função é igual ao desenvolvimento de Taylor em D .

Teorema B.9. Sejam Ω um domínio simplesmente conexo e f uma função holomorfa em $\Omega \setminus \{z_0\}$. Se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z) = 0, \quad (\text{B.31})$$

então existe uma função holomorfa $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $F(z) = f(z)$ para todo $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$.

⁵Para um estudo das series complexas veja [29].

Demonstração. Seja

$$g(z) = \begin{cases} (z - z_0)^2 f(z) & \text{se } z \neq z_0, \\ 0 & \text{se } z = z_0. \end{cases}$$

Logo, usando a hipótese, temos que

$$\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = 0,$$

portanto g é holomorfa em Ω e $g'(z_0) = 0$. Usando o corolário B.8, e o fato de que $g(z_0) = 0$ e $g'(z_0) = 0$, então

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n,$$

com $|z - z_0| < r$ e r suficientemente pequeno. Assim,

$$g(z) = (z - z_0)^2 h(z),$$

onde $h(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^{n-2}$ e $|z - z_0| < r$. Logo,

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \neq z_0, \\ h(z) & \text{se } |z - z_0| < r, \end{cases}$$

é uma função holomorfa em Ω e o resultado segue. \square

A função F deste teorema é chamada de *extensão holomorfa* de f a todo Ω . Neste caso dizemos que f é holomorfa em todo Ω .

Corolário B.9.1. *Sejam Ω um domínio simplesmente conexo e f uma função holomorfa em $\Omega \setminus \{z_0\}$. Se f é limitada numa vizinhança de z_0 ⁶, então f possui uma extensão holomorfa a todo Ω .*

Demonstração. Se f é limitada numa vizinhança de z_0 , então vale (B.31) que é a hipótese do teorema B.9. \square

Lema B.1 (Schwarz). *Seja $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfa, tal que $f(0) = 0$ e $|f(z)| \leq 1 \forall z \in \mathbb{D}$. Então*

$$(i) \quad |f(z)| \leq |z|, \text{ para todo } z \in \mathbb{D}.$$

$$(ii) \quad |f'(0)| \leq 1.$$

$$(iii) \quad \text{Se existe } z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\} \text{ tal que } |f(z_0)| = |z_0|, \text{ então } f(z) = \lambda z, \text{ com } |\lambda| = 1.$$

⁶Neste caso z_0 é chamado de *singularidade removível*.

Demonstração. Definamos função

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{se } z \neq 0, \\ f'(0) & \text{se } z = 0, \end{cases}$$

Então, como $\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = f'(0)$, g é holomorfa em \mathbb{D} pelo corolário B.9.1. Seja $r < 1$, então g é holomorfa em $\overline{\mathbb{D}_r}$ e, portanto, atinge um máximo z_0 , que está em $\partial \mathbb{D}_r$ pelo princípio do máximo. Seja $z \in \mathbb{D}_r$, então

$$|g(z)| \leq |g(z_0)| = \frac{|f(z_0)|}{|z_0|} = \frac{|f(z_0)|}{r}.$$

Logo, se $r \rightarrow 1$, temos que $|g(z)| \leq |f(z_0)| \leq 1$, para todo $z \in \mathbb{D}$. Daí, $|f(z)| \leq |z|$, para todo $z \in \mathbb{D}$ e, portanto, $|g(0)| = |f'(0)| \leq 1$. Por outro lado, se existe $z_0 \in \mathbb{D}$ tal que $|f(z_0)| = |z_0|$, então a função g atinge um máximo em z_0 , portanto é constante pelo princípio do máximo, ou seja $|f(z)| = |z|$, para todo $z \in \mathbb{D}$. \square

Teorema B.10 (Princípio do prolongamento analítico). *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio e f uma função holomorfa em Ω . Então as seguintes afirmações são equivalentes*

1. $f(z) = 0 \forall z \in \Omega$.
2. Existe $z_0 \in \Omega$ tal que $f^{(k)}(z_0) = 0 \forall k = 0, 1, \dots$
3. Existe uma vizinhança U de z_0 tal que $f(z) = 0$, para todo $z \in U$.

Demonstração. É obvio que 1 implica 2. Agora, $2 \implies 3$ é consequência direta da representação de f em series de Taylor. De fato, vamos supor que existe $z_0 \in \Omega$ tal que $f^{(k)}(z_0) = 0 \forall k = 0, 1, \dots$. Como existe uma vizinhança U tal que

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k, \quad \forall z \in U,$$

então $f(z) = 0$ para todo $z \in U$. Para mostrar $3 \implies 1$ vamos definir o conjunto

$$W = \{z \in \Omega; \exists \text{ vizinhança } V_z \text{ de } z \text{ com } f|_{V_z} \equiv 0\}$$

que é não vazio porque estamos assumindo 3. Este conjunto é aberto pela própria definição, vamos mostrar então que é fechado. Seja $\{z_n\}$ uma sequência em W tal que $z_n \rightarrow w \in \Omega$, então para cada k temos que $f^k(z_n) \rightarrow f^k(w)$ pela continuidade de f em Ω . Daí $f^k(w) = 0$, para cada $k \in \mathbb{N}$ porque $z_n \in W$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Ou seja, vale a condição 2, e como mostramos que $2 \implies 3$,

existe uma vizinhança V_w de w tal que $f|_{V_w} \equiv 0$, o que implica que $w \in W$. Isto é, W é fechado, e portanto, $W = \Omega$ pois Ω é conexo. Então $f(z) = 0$, para todo $z \in \Omega$. \square

B.4.2

Zeros e polos

Definição B.5. Seja f uma função definida num domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Dizemos que um ponto $z_0 \in \Omega$ é um zero de f se $f(z_0) = 0$.

Teorema B.11. Suponha que f é uma função holomorfa em um domínio Ω que não é identicamente nula. Seja z_0 um zero de f , então existem um único $n \in \mathbb{N}$, uma vizinhança U de z_0 e uma função p holomorfa e que não se anula em U , tal que

$$f(z) = p(z)(z - z_0)^n, \quad \forall z \in U.$$

Demonstração. Como f é holomorfa em Ω , então existe um disco $D \subset \Omega$ com centro em z_0 , tal que vale o desenvolvimento de Taylor (B.30) num disco D com centro em z_0 e contido em Ω . Do teorema B.10 vemos que existe $n \geq 1$ tal que $f^{(k)}(z_0) = 0$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, e $f^{(n)}(z_0) \neq 0$. Além disso, $a_0 = f(z_0) = 0$, então, para cada $z \in D$, temos

$$f(z) = \sum_{i=n}^{\infty} a_i(z - z_0)^i = (z - z_0)^n \sum_{i=n}^{\infty} a_i(z - z_0)^{i-n}.$$

Seja $p(z) = \sum_{i=n}^{\infty} a_i(z - z_0)^{i-n}$ que é holomorfa em D . Por outro lado, como $a_n \neq 0$, então $p(z_0) \neq 0$. Como p é contínua em z_0 , existe uma vizinhança U de z_0 tal que p não se anula em U . Finalmente, vamos mostrar que o n encontrado é único. Suponhamos por contradição que existe um $m \neq n$ tal que $f(z) = q(z)(z - z_0)^m$ em alguma vizinhança V onde q é holomorfa e não se anula. Então, existe uma vizinhança $W \subset U \cap V$ tal que

$$f(z) = q(z)(z - z_0)^m = p(z)(z - z_0)^n \quad \text{em } W.$$

Vamos supor, sem perda de generalidade, que $n > m$, então

$$q(z) = p(z)(z - z_0)^{n-m} \quad \text{em } W \setminus \{z_0\}.$$

Pasando ao limite quando $z \rightarrow z_0$, vemos que, pela continuidade de q em z_0 , $q(z_0) = 0$ o que é uma contradição. Logo $m = n$. \square

O número n é chamado de *ordem do zero*.

Corolário B.11.1. *Os zeros de uma função holomorfa e não nula em um domínio Ω , são pontos isolados em Ω .*

Demonstração. Seja z_0 um zero de f de ordem n , então, pelo teorema B.11, existe uma vizinhança V de z_0 tal que

$$f(z) = (z - z_0)^n p(z), \quad \forall z \in V.$$

Logo, o único zero de f em V é z_0 . □

Definição B.6. Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio, $z_0 \in \Omega$ e f uma função holomorfa em $\Omega \setminus \{z_0\}$. Dizemos que z_0 é um *polo*⁷ de f se

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty. \quad (\text{B.32})$$

Teorema B.12. *Suponha que f é uma função holomorfa em um domínio $\Omega \setminus \{z_0\}$ que não é identicamente nula, e z_0 é um polo de f . Então existem um único $n \in \mathbb{N}$, uma vizinhança U de z_0 e uma função q holomorfa e que não se anula em U , tal que*

$$f(z) = \frac{q(z)}{(z - z_0)^n}, \quad \forall z \in U \setminus \{z_0\}.$$

Demonstração. Seja

$$F(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)} & \text{se } z \neq z_0, \\ 0 & \text{se } z = z_0. \end{cases}$$

Como

$$\lim_{z \rightarrow z_0} F(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$$

pois z_0 é polo de f , então F é holomorfa em Ω pelo corolário B.9.1. Como z_0 é zero de F , então existem um único $n \in \mathbb{N}$, uma vizinhança U de z_0 e uma função p holomorfa e que não se anula em U tal que

$$F(z) = p(z)(z - z_0)^n, \quad \forall z \in U,$$

pelo teorema B.11. Daí,

$$f(z) = \frac{q(z)}{(z - z_0)^n}, \quad \forall z \in U,$$

onde $q(z) = \frac{1}{p(z)}$. □

⁷Os polos também são singularidades de funções complexas. Além das singularidades removíveis e os polos estão as singularidades essenciais (veja [29]).

O número n é chamado de *ordem do polo*.

Definição B.7. Seja $g : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dizemos que g é uma *função meromorfa* se é holomorfa em $\Omega \setminus \Gamma$, onde Γ é um conjunto de pontos isolados e cada um desses pontos é um polo de f .

Exemplo B.4 (Funções racionais). Vamos considerar funções racionais, ou seja, funções da forma

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

onde P e Q são polinômios que não tem fatores em comum. Então os zeros de Q são os polos de R .

Para um quociente aplicamos as mesmas regras de derivação real. Logo, sua derivada é

$$R'(z) = \frac{P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)}{Q(z)^2} \quad (\text{B.33})$$

e existe somente quando $Q(z) \neq 0$. Considerando também R' como uma função racional, vemos que os polos da mesma são os polos de R , mas a ordem aumenta em 1.

Por outro lado seja $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ o plano complexo união um ponto que denotaremos por ∞ e que chamaremos de plano complexo estendido. Então R tomará o valor infinito em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ nos zeros de Q , portanto pode ser considerada como uma função em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, definindo

$$R(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} R(z).$$

Mas esta definição não determinará a ordem de um zero ou polo em ∞ , para isto vamos considerar a função

$$\begin{aligned} \tilde{R} : \mathbb{C}^\infty &\rightarrow \mathbb{C}^\infty \\ z &\mapsto R\left(\frac{1}{z}\right), \end{aligned}$$

definindo $\tilde{R}(0) = R(\infty)$. Usando a notação

$$R(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_n z^n},$$

obtemos

$$\tilde{R}(z) = z^{m-n} \frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n}.$$

Daí, temos que se $m > n$, então ∞ será um zero de ordem $m - n$ de R , se $m < n$ será um polo de ordem $n - m$ de R , e se $n = m$

$$R(\infty) = \frac{a_n}{b_n} \notin \{0, \infty\}.$$

B.5

Outros teoremas importantes

Vamos ver outros teoremas que foram usados no trabalho mas que somente vamos enunciar.

Teorema B.13 (Representação conforme de Riemann). *Seja $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio simplesmente conexo que é diferente de \mathbb{C} . Então, fixado $z_0 \in \Omega$, existe um único mapeamento conforme $F : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$ tal que $F(z_0) = 0$ e $F'(z_0) > 0$.*

Demonstração. A prova pode ser encontrada em [29]. \square

Teorema B.14. *Seja u uma função harmônica em Ω e seja $K \subset \Omega$ um conjunto compacto. Então*

$$\sup_{z \in K} |D^n u(z)| \leq M \sup_{z \in \Omega} |u(z)|,$$

onde M é uma constante que depende de K e de n .

Demonstração. A prova pode ser encontrada em [33]. \square

Como consequência imediata temos o seguinte teorema.

Teorema B.15 (Princípio da compacidade). *Toda sequência de funções harmônicas sobre um domínio Ω uniformemente limitada possui uma subsequência que converge uniformemente sobre os compactos de Ω a uma função harmônica.*

Demonstração. A prova pode ser encontrada em [33]. \square

B.6

Teorema de Runge e consequências

Sabemos que toda função real, contínua sobre um intervalo fechado pode ser aproximada uniformemente por polinômios, resultado conhecido como Teorema de Representação de Weierstrass (veja [30]). Com isto em mente, poderíamos questionar-nos sobre a possibilidade de aproximar uniformemente cada função holomorfa numa vizinhança de um conjunto compacto K por polinômios. A resposta é, em geral, negativa. Por exemplo, sabemos que

$$\int_{\mathbb{S}^1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{S}^1} p(z) dz = 0,$$

onde p é um polinômio arbitrário. Logo, a função $f(z) = \frac{1}{z}$ não pode ser aproximada por polinômios no conjunto compacto \mathbb{S}^1 . Porém, o teorema de Runge garante a aproximação de toda função holomorfa numa vizinhança de

um compacto K por funções racionais cujos polos estão fora do conjunto. Esta aproximação é dada por polinômios desde que o complementar de K seja conexo. Note que, no exemplo anterior, o complementar de \mathbb{S}^1 não é conexo.

Teorema B.16 (de Runge). *Toda função holomorfa numa vizinhança de um conjunto compacto K pode ser aproximada uniformemente em K por funções racionais cujos polos estão em $\mathbb{C} \setminus K$. Além disso, se o complementar for conexo, a aproximação é dada por polinômios.*

A chave da prova vem dada por um lema de representação por integral que é consequência da fórmula integral de Cauchy.

Lemma 2. *Sejam f uma função holomorfa num conjunto aberto Ω e $K \subset \Omega$ um conjunto compacto. Então existem segmentos $\gamma_1, \dots, \gamma_n$ em $\Omega \setminus K$ tal que*

$$f(z) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad \forall z \in K. \quad (\text{B.34})$$

Demonstração. Como K é compacto e $\mathbb{C} \setminus \Omega$ é fechado, então $d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega) > 0$. Seja $d = c d(K, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ onde $c < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Vamos fazer uma partição de \mathbb{C} em quadrados de comprimento d com lados paralelos aos eixos coordenados. Seja $\mathcal{Q} = \{Q_1, \dots, Q_M\}$ a coleção finita dos quadrados que interceptam K , cujas fronteiras, ∂Q_i , estão orientadas positivamente. Finalmente sejam $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ os lados dos quadrados que não pertencem a dois quadrados adjacentes em \mathcal{Q} (veja figuras B.1 e B.2).

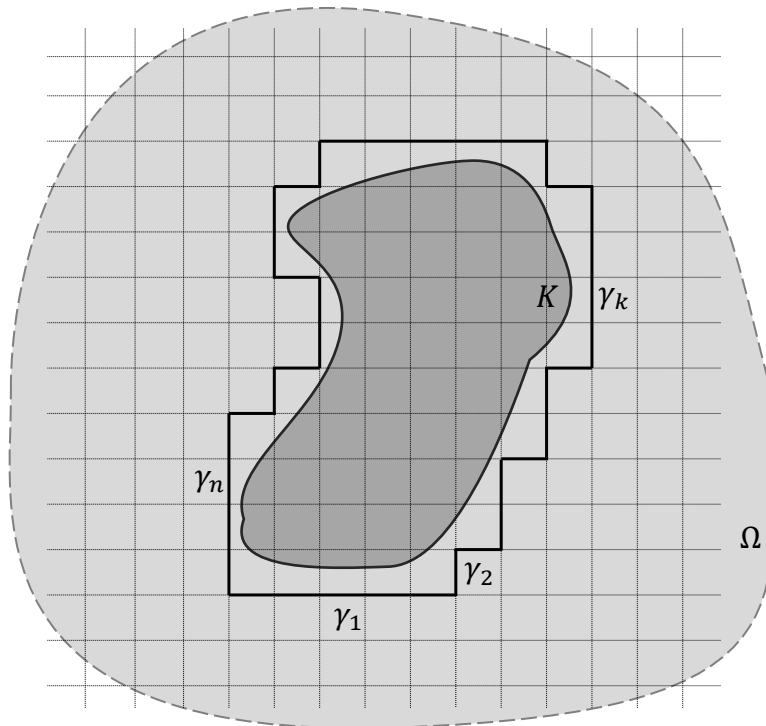
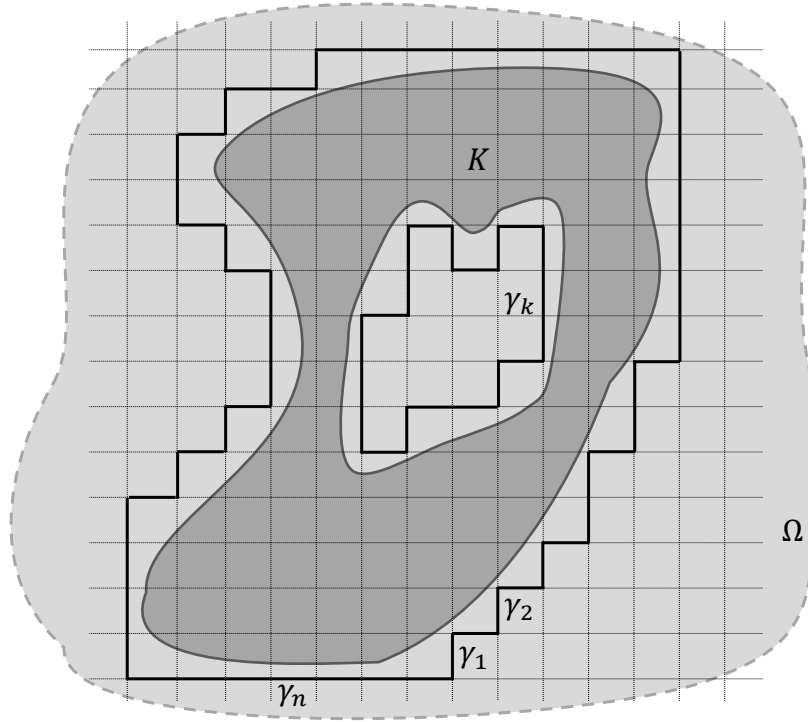


Figura B.1: A união dos segmentos γ_n quando K é simplesmente conexo.


 Figura B.2: A união dos segmentos γ_n quando K não é simplesmente conexo.

Note que a escolha de d garante que para cada n , $\gamma_n \subset \Omega$, e $\gamma_n \cap K = \emptyset$, pois se for o caso, γ_n iria pertencer a dois quadrados adjacentes.

Seja $z \in K$ e $z \notin \partial Q_i$, $\forall Q_i \in \mathcal{Q}$, então $z \in Q_j$ para algum j . Logo,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_m} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \begin{cases} f(z) & \text{se } m = j, \\ 0 & \text{se } m \neq j. \end{cases}$$

pelo teorema de Cauchy. Portanto,

$$f(z) = \sum_{m=1}^M \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial Q_m} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Mas se Q_i e Q_j são adjacentes, a integral sobre os lados comuns são tomados em direções opostas, logo as integrais ao longo do lado de adjacência tem sinais opostos sobre a mesma curva e, portanto, se eliminam o que estabelece

$$f(z) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \forall z \in K, \quad z \notin \partial Q_i, \quad \forall Q_i \in \mathcal{Q}. \quad (\text{B.35})$$

A continuidade garante que isto vale para todo $z \in K$. De fato, suponha que $z \in \partial Q_j$, então $z \notin \gamma_n, \forall n$ pois $\gamma \in \mathbb{C} \setminus \{K\}$, portanto existe uma sequência $\{z_n\}$ em $K \setminus \bigcup_n \partial Q_n$ tal que $z_n \rightarrow z$, logo

$$f(z) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_k} d\zeta = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad \square$$

A primeira parte do teorema é uma consequência do seguinte lema.

Lemma 3. *Para cada segmento γ contido em $\Omega \setminus K$, existe uma sequência de funções racionais cujos polos estão em γ e que aproxima a integral*

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

uniformemente em K .

Demonstração. Vamos supor que γ já é uma parametrização do segmento, ou seja, o segmento está parametrizado por $\gamma(t)$ com $t \in [0, 1]$. Seja

$$\begin{aligned} F : \gamma([0, 1]) \times K &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (w, z) &\longmapsto \frac{f(w)}{w - z}. \end{aligned}$$

É claro que F é holomorfa pois $\gamma([0, 1]) \in \Omega \setminus K$, então F é uniformemente contínua em $\gamma([0, 1]) \times K$ por ser compacto, logo, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para cada (w_1, z) e (w_2, z) em $\gamma([0, 1]) \times K$ temos que

$$|w_1 - w_2| < \delta \implies |F(w_1, z) - F(w_2, z)| < \frac{\epsilon}{\ell(\gamma)}.$$

Como γ é uniformemente contínua em $[0, 1]$, existe $\delta' > 0$ tal que

$$|t_1 - t_2| < \delta' \implies |\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| < \delta.$$

Consideremos a partição $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = 1$ de $[0, 1]$, onde $|t_k - t_{k-1}| < \delta'$ e sejam $w_k = \gamma(t_k)$, $\forall 1 \leq k \leq n$. Seja

$$R(z) = \sum_{k=1}^n F(w_k, z)(w_k - w_{k-1}) = \sum_{k=1}^n \frac{f(w_k)}{w_k - z} (w_k - w_{k-1}) \quad (\text{B.36})$$

que é uma função racional cujos polos estão em γ^8 . Então,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - R(z) &= \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \sum_{k=1}^n \frac{f(w_k)}{w_k - z} (w_k - w_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} \gamma'(t) dt - \sum_{k=1}^n \frac{f(w_k)}{w_k - z} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t) dt \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} \gamma'(t) dt - \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{f(w_k)}{w_k - z} \gamma'(t) dt \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \left(\frac{f(\gamma(t))}{\gamma(t) - z} \gamma'(t) dt - \frac{f(w_k)}{w_k - z} \gamma'(t) dt \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} (F(\gamma(t), z) - F(w_k, z)) \gamma'(t) dt, \end{aligned}$$

⁸Note que R é uma soma de Riemann.

portanto

$$\left| \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - R(z) \right| < \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{\epsilon}{\ell(\gamma)} |\gamma'(t)| dt = \epsilon. \quad \square$$

Consequentemente, usando o lema 3, vemos que cada integral

$$\int_{\gamma_n} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

em (B.34) pode ser aproximada por uma função racional cujos polos estão em γ_n , como f é uma soma finita destas integrais pelo lema 2, então fica provada a primeira parte do teorema de Runge. Para provar a segunda parte precisamos do seguinte lema.

Lemma 4. *Se $\mathbb{C} \setminus \{K\}$ é conexo e $z_0 \notin K$, então a função*

$$\frac{1}{z - z_0}$$

pode ser aproximada uniformemente em K por polinômios.

Demonstração. Seja z_1 um ponto que está fora de um disco suficientemente grande centrado na origem e que contém K . Então

$$\frac{1}{z - z_1} = -\frac{1}{z_1} \frac{1}{1 - \frac{z}{z_1}} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{z^n}{z_1^{n+1}},$$

onde a serie converge uniformemente para $z \in K$. As somas parciais desta série são polinômios em $\frac{1}{z - z_1}$ em K . Isto implica que qualquer potência de $\frac{1}{z - z_1}$ pode ser aproximada por polinômios uniformemente em K . Então é suficiente provar que $\frac{1}{z - z_0}$ pode ser aproximado uniformemente em K por polinômios em $\frac{1}{z - z_1}$. Como $\mathbb{C} \setminus \{K\}$ é conexo e aberto, existe um caminho γ tal que $\gamma(0) = z_0$ e $\gamma(1) = z_1$. Seja $\rho = \frac{1}{2}d(K, \gamma) > 0$. Sejam $\{w_0, \dots, w_n\}$ em γ tal que $w_0 = z_0$, $w_n = z_1$, e $|w_k - w_{k-1}| < \rho$ para cada $1 \leq k \leq n$.

Afirmamos que se w é um ponto em γ e w' é qualquer outro ponto com $|w - w'| < \rho$, então $\frac{1}{z - w}$ pode ser aproximado uniformemente em K por polinômios em $\frac{1}{z - w'}$. Para ver isto note que

$$\frac{1}{z - w} = \frac{1}{z - w'} \frac{1}{1 - \frac{w - w'}{z - w'}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w - w')^n}{(z - w')^{n+1}}$$

e, como a soma converge uniformemente para cada $z \in K$, a aproximação por somas parciais prova a afirmação. Este resultado nos permite ir de z_0 a z_1 pelos pontos $w_k \in \gamma$ para encontrar que $\frac{1}{z - z_0}$ pode ser aproximado uniformemente em K por polinômios em $\frac{1}{z - z_1}$. \square

A segunda parte do teorema segue deste lema, pois $\frac{1}{w_k - z}$ pode ser aproximada por polinômios quando $\mathbb{C} \setminus K$ é conexo, daí a função R do lema 3 que está definida por (B.36) e, portanto, a função holomorfa f . Assim fica provado o teorema de Runge.

B.6.1

Consequências do Teorema de Runge

O seguinte lema foi um dos fatos surpreendentes que introduziram Jorge-Xavier para provar seu teorema e que também foi usado por Rosenberg-Toubiana no seu trabalho. Fazemos a prova aqui por ser uma consequência do teorema de Runge.

Lema B.2. *Sejam \mathbb{D}_c o disco de raio c centrado na origem e $\{D_n\}$ uma sequência de discos fechados centrados na origem verificando:*

1. $D_n \subset \overset{\circ}{D}_{n+1}$,
2. $\bigcup_n D_n = \mathbb{D}_c$.

Seja também $\{K_n\}$ uma sequência de compactos verificando:

1. $K_n \subset D_n \forall n \in \mathbb{N}$,
2. $K_n \cap D_{n-1} = \emptyset \forall n \in \mathbb{N}$,
3. $\mathbb{C} \setminus K_n$ é conexo.

Então, dada uma função holomorfa f definida num entorno de $\bigcup_n K_n$ e $\epsilon > 0$, existe uma função holomorfa h em \mathbb{D}_c tal que

$$|f(z) - h(z)| < \epsilon \forall z \in \bigcup_n K_n. \quad (\text{B.37})$$

Demonstração. Seja $\epsilon > 0$, vamos definir uma sequência de polinômios pelo seguinte processo. Como K_1 é compacto e $\mathbb{C} \setminus K_1$ é conexo, então o teorema de Runge garante a existência de um polinômio p_1 verificando

$$|p_1(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2} \forall z \in K_1.$$

Como $K_2 \cap D_1 = \emptyset$, então existe U_1 e V_2 vizinhanças de D_1 e K_2 respectivamente tal que $U_1 \cap V_2 = \emptyset$. Seja

$$f_2(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \in V_2, \\ p_1(z) & \text{se } z \in U_1. \end{cases}$$

Logo, f_2 é uma função holomorfa em $U_1 \cup V_2$ por ser holomorfa em cada componente conexa. Como $D_1 \cup K_1$ é compacto e $\mathbb{C} \setminus (D_1 \cup K_2)$ é conexo,

então novamente pelo teorema de Runge, existe um polinômio p_2 tal que $|f_2(z) - p_2(z)| < \frac{\epsilon}{4} \forall z \in D_1 \cup K_2$, que implica

$$|p_2(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{4} \forall z \in K_2$$

$$|p_2(z) - p_1(z)| < \frac{\epsilon}{4} \forall z \in D_1.$$

Aplicando sucessivamente o teorema de Runge vemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$, existe um polinômio verificando

$$|p_n(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2^n} \forall z \in K_n \quad (\text{B.38})$$

$$|p_n(z) - p_{n-1}(z)| < \frac{\epsilon}{2^n} \forall z \in D_{n-1}. \quad (\text{B.39})$$

Vamos provar agora que a sequência $\{p_n\}$ é uniformemente de Cauchy sobre os compactos de \mathbb{D}_c . Sejam $K \subset \mathbb{D}_c$ um compacto, e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset D_{n_0}$, $n_0 > 1$. Então $K \subset D_n$ para todo $n \geq n_0$. Sejam $m \geq n \geq n_0$ e $z \in K$, então

$$\begin{aligned} |p_m(z) - p_n(z)| &\leq |p_m(z) - p_{m-1}(z)| + \cdots + |p_{n+1}(z) - p_n(z)| \\ &\leq \frac{\epsilon}{2^m} + \frac{\epsilon}{2^{m-1}} + \cdots + \frac{\epsilon}{2^n} \text{ por (B.39),} \\ &= \epsilon \left(\frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^{m-1}} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right). \end{aligned}$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ é de Cauchy, a sequência p_n é uniformemente de Cauchy sobre os compactos de \mathbb{D}_c e, portanto, converge uniformemente a uma função h holomorfa em \mathbb{D}_c em cada subconjunto compacto. Daí, para o ϵ dado e para cada conjunto compacto $K \subset \mathbb{D}_c$, existe um $n_K \in \mathbb{N}$ tal que

$$|p_n(z) - h(z)| < \frac{\epsilon}{2}, \forall n \geq n_K, \forall z \in K. \quad (\text{B.40})$$

Finalmente, seja $z \in \bigcup_n K_n$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $z \in K_{n_0}$. Se $n > n_{K_{n_0}}$, então, usando (B.38) e (B.40), obtemos

$$|f(z) - h(z)| \leq |f(z) - p_n(z)| + |p_n(z) - h(z)| < \epsilon$$

portanto

$$|f(z) - h(z)| < \epsilon \quad \forall z \in \bigcup_n K_n. \quad \square$$

A seguinte proposição foi essencial no trabalho de Nadirasvilli para provar seu teorema e é um análogo ao lema B.2 introduzido por Jorge-Xavier. Este resultado também foi provado nesta seção por ser consequência do teorema de Runge.

Proposição B.7. *Sejam K_1 e K_2 dois compactos disjuntos em $\overline{\mathbb{D}}$ cujos complementares são conexos em \mathbb{C} . Dados $\tau > 1$ e uma função meromorfa $g : \mathbb{D}_\xi \rightarrow \mathbb{C}$, onde $\xi > 1$, e tal que $g'(z) \neq 0$ para todo $z \in \overline{\mathbb{D}}$, existe uma função holomorfa $h : \mathbb{D}_\eta \rightarrow \mathbb{C}$, onde $\eta > 1$, verificando*

$$1. |h(z) - 1| \leq \frac{1}{\tau}, \forall z \in K_1.$$

$$2. |h(z) - \tau| \leq \frac{1}{\tau}, \forall z \in K_2.$$

$$3. \left(\frac{g}{h}\right)'(z) \neq 0, \forall z \in \overline{\mathbb{D}}.$$

$$4. h(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{D}_\eta.$$

Demonstração. A função holomorfa h vai ser construída da forma $e^{P(z)}$, onde P vai ser uma função holomorfa, o que vai garantir 4. Como K_1 e K_2 são compactos e $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, existem vizinhanças U_1 e U_2 de K_1 e K_2 , respectivamente, tal que $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Então a função

$$f(z) = \begin{cases} 0 & \text{se } z \in U_1, \\ \ln \tau & \text{se } z \in U_2, \end{cases}$$

é holomorfa em $U_1 \cup U_2$ por ser holomorfa em cada componente conexa. Sejam $\tilde{K}_1 \subset U_1$ e $\tilde{K}_2 \subset U_2$ dois compactos tal que $K_1 \subset \tilde{K}_1$ e $K_2 \subset \tilde{K}_2$, então para cada $\epsilon > 0$ existe um polinômio p_ϵ tal que

$$|p_\epsilon(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2}, \forall z \in \tilde{K}_1 \cup \tilde{K}_2, \quad (\text{B.41})$$

isto é,

$$|p_\epsilon(z)| < \frac{\epsilon}{2}, \forall z \in \tilde{K}_1, \quad (\text{B.42})$$

$$|p_\epsilon(z) - \ln \tau| < \frac{\epsilon}{2}, \forall z \in \tilde{K}_2. \quad (\text{B.43})$$

É fácil ver, pela continuidade da função exponencial, que a função e^{p_ϵ} verifica 1 e 2, mas não podemos garantir a condição 3.

Seja

$$g_\epsilon(z) = p'_\epsilon(z) - \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

A função g_ϵ pode ter zeros em $\overline{\mathbb{D}}$, mas podemos supor que os zeros não estão em $K_1 \cup K_2$, já que $\frac{g'}{g}$ não se anula em $\overline{\mathbb{D}}$ e que, como p_ϵ converge uniformemente a uma função constante quando $\epsilon \rightarrow 0$ por (B.41) em $\tilde{K}_1 \cup \tilde{K}_2$, então sua derivada converge uniformemente a zero em cada subconjunto compacto de $\tilde{K}_1 \cup \tilde{K}_2$ pela desigualdade de Cauchy (veja (B.20)), o que implica que g_ϵ converge uniformemente a $-\frac{g'}{g}$ em $K_1 \cup K_2$ e a mesma não se anula neste conjunto.

Seja K uma vizinhança compacta de $K_1 \cup K_2$ de forma tal que

- K seja conexo por caminhos e $\mathbb{C} \setminus K$ seja conexo,
- K não contém zeros de g_ϵ ,
- ∂K não contém polos de g_ϵ .

Afirmção B.1. *Dado $\delta_1 \geq 0$, existe função meromorfa \hat{g} sobre \mathbb{D}_η , como $1 < \eta < \xi$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

(a) $\hat{g} - g_\epsilon$ é holomorfa em \mathbb{D}_η .

(b) $|\hat{g}(z) - g_\epsilon(z)| < \delta_1, \forall z \in K$.

(c) $\hat{g}(z) \neq 0, \forall z \in \overline{\mathbb{D}}$.

Vamos ver que, supondo verdadeira a afirmação, concluímos a prova da proposição. De fato, devido à propriedade (a), temos uma primitiva de $\hat{g} - g_\epsilon$ e, portanto, a função

$$P(z) = p_\epsilon(z) + \int_{z_0}^z \hat{g}(\zeta) - g_\epsilon(\zeta) d\zeta. \quad (\text{B.44})$$

está bem definida. De (B.44) obtemos

$$|P(z) - f(z)| < |p_\epsilon(z) - f(z)| + \int_{z_0}^z |\hat{g}(\zeta) - g_\epsilon(\zeta)| |d\zeta|.$$

Usando a propriedade (b), escolhemos δ_1 suficientemente pequeno tal que

$$\int_{z_0}^z |\hat{g}(\zeta) - g_\epsilon(\zeta)| |d\zeta| < \frac{\epsilon}{2},$$

e como $|p_\epsilon(z) - f(z)| < \frac{\epsilon}{2}$, obtemos

$$|P(z) - f(z)| < \epsilon, \forall z \in K_1 \cup K_2.$$

Novamente, pela continuidade da exponencial, com ϵ suficientemente pequeno, temos

$$|e^{P(z)} - e^{f(z)}| < \frac{1}{\tau}, \forall z \in K_1 \cup K_2,$$

ou seja,

$$|e^{P(z)} - 1| < \frac{1}{\tau}, \forall z \in K_1 \quad \text{e} \quad |e^{P(z)} - \tau| < \frac{1}{\tau}, \forall z \in K_2,$$

que são as teses 1 e 2, respectivamente. Por outro lado,

$$P'(z) = p'_\epsilon(z) + \hat{g}(z) - g_\epsilon(z) = \hat{g}(z) + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

o, equivalentemente,

$$\frac{P'(z)g(z) - g'(z)}{g(z)} = \hat{g}(z).$$

Daí,

$$P'(z)g(z) - g'(z) \neq 0, \forall z \in \overline{\mathbb{D}}$$

pela propriedade (c). Assim obtemos a tese 3 dado que

$$\left(\frac{g}{e^P}\right)'(z) = \frac{g'(z) - g(z)P'(z)}{e^{P(z)}}.$$

Para terminar a prova da proposição temos que mostrar a afirmação B.1. Seja $1 < \eta < \xi$, tal que \mathbb{D}_η contém um número finito z_1, \dots, z_n de polos da função g_ϵ . Mas estes polos são os zeros e polos de $\frac{g'}{g}$, portanto são polos de ordem um. Assim, a função

$$\begin{aligned} \varphi: \mathbb{D}_\eta &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto g_\epsilon(z) \prod_{i=1}^n (z - z_i) \end{aligned}$$

é holomorfa e não tem zeros numa vizinhança simplesmente conexa W de K que não contém nenhum z_i , portanto possui um logaritmo holomorfo em W , isto é, existe uma função, $\hat{\varphi}$, satisfazendo

$$e^{\hat{\varphi}} = \varphi(z), \forall z \in W. \quad (\text{B.45})$$

Sejam p um polinômio verificando

$$p(z_i) = \hat{\varphi}(z_i), \quad 1 \leq i \leq n, \quad (\text{B.46})$$

e

$$\begin{aligned} \hat{f}: W &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{\hat{\varphi}(z) - p(z)}{\prod_{i=1}^n (z - z_i)}. \end{aligned}$$

Então \hat{f} é holomorfa e como K é um compacto com complementar conexo, então para δ_2 dado (que será escolhido depois), existe um polinômio q tal que

$$|\hat{f}(z) - q(z)| < \frac{\delta_2}{\max_{z \in K} \left\{ \prod_{i=1}^n |z - z_i| \right\}}$$

pelo teorema de Runge. Substituindo \hat{f} obtemos

$$|\hat{\varphi}(z) - p(z) - q(z) \prod_{i=1}^n (z - z_i)| < \delta_2, \quad \forall z \in K. \quad (\text{B.47})$$

Finalmente definimos a função \hat{g} em \mathbb{D}_η por

$$\hat{g}(z) = \frac{e^{p(z)+q(z) \prod_{i=1}^n (z - z_i)}}{\prod_{i=1}^n (z - z_i)}.$$

Resta verificar que a mesma satisfaz (a), (b) e (c) da afirmação B.1. Fazendo contas obtemos que

$$\hat{g}(z) - g_\epsilon(z) = \frac{e^{p(z)+q(z) \prod_{i=1}^n (z - z_i)}}{\prod_{i=1}^n (z - z_i)} - \varphi(z) = \frac{e^{p(z)+q(z) \prod_{i=1}^n (z - z_i)}}{\prod_{i=1}^n (z - z_i)} - e^{\hat{\varphi}(z)},$$

onde a última igualdade se deve a (B.45). Esta é uma função holomorfa em \mathbb{D}_η pois cada z_k , $1 \leq k \leq n$, é um zero do numerador devido a (B.46). Além disso,

$$|\hat{g} - g_\epsilon(z)| = \left| e^{p(z)+q(z) \prod_{i=1}^n (z - z_i)} - e^{\hat{\varphi}(z)} \right| \left| \frac{1}{\prod_{i=1}^n (z - z_i)} \right|.$$

Usando novamente a continuidade da função exponencial obtemos que, para δ_1 dado, existe um δ_2 , tal que se

$$|p(z) + q(z) \prod_{i=1}^n (z - z_i) - \hat{\varphi}(z)| < \delta_2,$$

então

$$\left| e^{p(z)+q(z) \prod_{i=1}^n (z - z_i)} - e^{\hat{\varphi}(z)} \right| \left| \max_{z \in K} \frac{1}{\prod_{i=1}^n (z - z_i)} \right| < \delta_1,$$

daí

$$|\hat{g}(z) - g_\epsilon(z)| < \delta_1, \quad \forall z \in K.$$

Obviamente a função \hat{g} não se anula em $\overline{\mathbb{D}}$. Assim finalizamos a prova da afirmação B.1 e, portanto, da proposição. \square