

4

Modelos teóricos para a ETTJ

4.1.

Introdução

No capítulo 3, descrevemos e exemplificamos a ETTJ observada e alguns conceitos a ela relacionados. Nesta seção, vamos descrever a teoria por trás dos modelos da ETTJ. Os modelos teóricos da ETTJ são derivados usualmente com base em argumentos de não-arbitragem e/ ou de equilíbrio.

O clássico modelo de CIR, por exemplo, é um trabalho seminal na derivação de modelos teóricos com base em argumentos de equilíbrio. Modelos derivados por argumentos de equilíbrio como CIR necessitam de especificações para a função de produção da economia e para a função de utilidade dos consumidores (normalmente, trata-se de um consumidor representativo) – em trabalhos relacionados à ETTJ essas especificações são usualmente funções estocásticas em que a incerteza é modelada a partir de um movimento browniano.

Da resolução desse problema de equilíbrio, obtém-se a equação estocástica que determina a dinâmica da taxa de curto prazo e/ ou livre de risco da economia (que é a taxa de juros de equilíbrio dessa economia). Somente, a partir daí, é que se pode obter uma forma funcional para a ETTJ. A necessidade da resolução de todo um problema de equilíbrio como pré-requisito para a obtenção da ETTJ mostra que a resolução desses modelos de equilíbrio pode se tornar bastante trabalhosa.

Por essa razão, a literatura teórica atual tem se baseado fundamentalmente no estudo de modelos obtidos por argumentos de não-arbitragem.

A razão para isso é a maior simplicidade de tais modelos, afinal eles prescindem da resolução de um modelo de equilíbrio para a obtenção da taxa livre

de risco. Além disso, como explicamos abaixo, os modelos de não-arbitragem “incluem” os modelos de equilíbrio.

Os modelos derivados por argumentos de não-arbitragem necessitam basicamente de 3 ingredientes fundamentais:

1. Especificam-se equações diferenciais estocásticas para cada um dos fatores da economia²⁰.
2. Especifica-se uma função que determina a dinâmica da taxa de curto prazo da economia a partir dos fatores da economia;
3. Especifica-se uma forma funcional para o preço do risco de mercado²¹ – como veremos o preço do risco de mercado dá a medida da aversão ao risco dos agentes. Além disso, como veremos, o preço do risco de mercado está relacionado à forma pela qual mudamos a medida de probabilidade de um mundo com risco para a medida de probabilidade de um mundo sem risco

A partir daí, acoplado à hipótese de não-arbitragem, obtém-se um funcional²² para a ETTJ que associa a cada vencimento, dada a taxa de juros de curto prazo em determinado instante, uma taxa de juros.

Um exemplo desse *approach* é Dai e Singleton (2000), onde a partir de diversas especificações diferentes para as equações estocásticas que regem os fatores da economia²³ e da hipótese da existência de uma medida de probabilidade neutra ao risco²⁴, os autores estudam, para diversos modelos, as equações de apreçamento dos títulos *zero-coupon*²⁵ e as estimações dos modelos, sem fazer

²⁰ Em modelos unifatoriais, a taxa de curto prazo é o único fator da economia. Assim não há necessidade de se especificar uma função que determine a taxa de curto prazo a partir dos fatores da economia ou, de outra forma, a função que determina a taxa de curto prazo a partir do fator único é a função identidade.

²¹ Market price of risk.

²² Esse funcional é obtido a partir de técnicas de cálculo estocástico como o lema de Ito. Uma referência importante para esse e outros resultados é Oksendal (1998).

²³ Nessa literatura, fator e taxa de curto prazo são intercambiáveis. A diferença fundamental é que em modelos de 1 fator, o fator único é usualmente chamado de taxa de curto prazo.

²⁴ A hipótese de existência de uma medida neutra ao risco é equivalente à hipótese de não-arbitragem.

²⁵ A equação 3, no capítulo 3, mostra a ligação entre o preço dos *zero-coupons* e a ETTJ.

qualquer referência a argumentos de equilíbrio que envolvam consumidores, firmas e/ ou problemas de otimização.

Mas, afinal, perde-se algo ao se abandonar os modelos baseados em equilíbrio? Talvez em intuição econômica, afinal os parâmetros de um modelo baseado em equilíbrio são parâmetros de funções de produção ou de funções de utilidade, o que clarifica bastante a sua interpretação econômica. Entretanto como Heath, Jarrow e Morton (1992) aponta, as equações estocásticas dos fatores especificadas exogenamente em um modelo derivado por não-arbitragem podem ser obtidas da resolução de um modelo de equilíbrio. Ou seja, ao invés de solucionarmos todo o problema de equilíbrio para que obtenhamos a dinâmica da taxa de curto prazo r_t , podemos simplesmente especificar r_t exogenamente de forma consistente com o r_t que teria sido obtido da solução do problema de equilíbrio e iniciar desse ponto o nosso estudo da ETTJ. Nesse sentido, a literatura de modelos baseados em não-arbitragem (com suas mais diferentes especificações para os processos estocásticos) inclui a literatura de modelos de equilíbrio²⁶.

Outro ponto importante na defesa do uso de modelos de não-arbitragem foi também levantado por HJM (1992). CIR (1985) critica os modelos de não-arbitragem com um exemplo, em seu artigo seminal, de que a especificação aparentemente lógica para o preço do risco de mercado, em um modelo desse tipo, pode levar a resultados inconsistentes e oportunidades de arbitragem. HJM (1992) argumenta, entretanto, que, desde que, as especificações para a dinâmica da taxa de curto prazo (ou dos fatores) e para o preço do risco de mercado sejam consistentes²⁷, modelos de não-arbitragem levam a ETTJ's consistentes, ou seja, ETTJ's que não apresentam oportunidades de arbitragem e que, por isso, são consistentes com algum modelo de equilíbrio subjacente, ainda que não nos interesse saber qual é esse modelo exatamente.

²⁶ O termo “incluir” significa que as equações de apreçamento dos *zero-coupon* e de seus valores contingentes, obtidas a partir de um modelo de equilíbrio podem ser obtidas através de um modelo de não-arbitragem, desde que especifiquemos os processos estocásticos dos fatores do modelo de não-arbitragem com base nos fatores que teriam sido obtidos através do modelo de equilíbrio.

²⁷ No caso afirm, por exemplo, essa consistência implica que o *market price of risk* tome forma afirm.

Em nosso trabalho, vamos estimar modelos clássicos de cada um dos ramos da literatura. Vasicek é o modelo clássico da literatura de não-arbitragem e CIR é o modelo clássico da literatura de equilíbrio. Entretanto, como os modelos de não-arbitragem “incluem” os modelos de equilíbrio, nas próximas seções em que descrevemos a teoria por trás dos modelos, vamos nos limitar a descrição da teoria dos modelos de não-arbitragem.

4.2. Modelos de não-arbitragem

O arcabouço teórico utilizado na resolução dos modelos de não-arbitragem faz uso da moderna teoria de apreçamento de ativos em tempo contínuo. Dado o fato histórico que tal teoria se desenvolveu, muitas vezes, de forma desconectada a partir de campos distintos do conhecimento, ela recebe algumas denominações diferentes. Teoria de apreçamento de ativos por medida martingal equivalente em tempo contínuo, teoria de apreçamento de ativos por neutralidade ao risco²⁸ e/ ou teoria de apreçamento de ativos por não-arbitragem. Apesar das denominações distintas, o fundamental é que, a não ser por pequenas técnicas que fogem do escopo desse trabalho, a existência de uma medida martingal equivalente, a existência de uma medida de probabilidade neutra ao risco e a inexistência de arbitragem são totalmente equivalentes. Nessa seção, vamos nos focar na tradição da teoria que enfatiza a existência de uma medida de probabilidade neutra ao risco como forma de apreçar ativos.

4.3. Apreçamento neutro ao risco

Vamos tratar a teoria de apreçamento de ativos por neutralidade ao risco²⁹ como uma caixa preta, atendo-nos somente às implicações fundamentais dessa teoria para nossos propósitos. Os capítulos 5 e 6 de Duffie (2001) são referência para as principais demonstrações dos mais importantes resultados da teoria.

²⁸ A razão pela qual tal teoria é chamada neutra ao risco advém do fato que sob a medida equivalente, os investidores demandam como retorno esperado de qualquer ativo o retorno esperado da taxa livre de risco. Ou seja, sob essa medida de probabilidade, esses investidores se tornam “indiferentes” ao risco.

²⁹ A partir de agora, vamos nos referir à teoria como teoria de apreçamento por neutralidade ao risco, acreditamos que essa denominação seja a mais intuitiva.

Os títulos *zero-coupon* são apreçados usualmente através de uma medida de probabilidade neutra ao risco – que chamaremos de Q . Como o nome sugere, sob essa medida artificial de probabilidade, o apreçamento neutro ao risco de ativos é válido. Isso significa que, sob essa medida, os investidores demandam o mesmo retorno esperado de qualquer ativo na economia, independentemente de seu risco.

Sob a medida de probabilidade física, que chamaremos P , os agentes demandam uma compensação pelo risco. Assim para ativos mais “arriscados”, espera-se um retorno esperado maior. A medida de probabilidade física P é a medida de probabilidade que está, de fato, ligada ao mundo real. Isso significa que os dados que observamos no mundo real foram, ao menos por hipótese, de fato, gerados a partir de processos ligados à medida P e, não à medida Q . A medida de probabilidade neutra ao risco Q é uma medida de probabilidade artificial, sendo que o termo artificial significa que os processos sob essa medida não têm necessariamente relação com os processos que de fato se realizam no mundo real (estes, como afirmado anteriormente, estão ligados à medida física P).

Normalmente, as medidas de probabilidade P e Q não coincidem, uma exceção é observada quando temos agentes neutros ao risco na economia, afinal com agentes neutros ao risco não há compensação por risco no mundo real, e, portanto, a medida P e a medida Q devem coincidir. A ligação entre P e Q é dada por uma função de mudança da medida de probabilidade, que está intimamente ligada à função que chamamos de preço do risco de mercado.

4.4. **Apreçamento de títulos *zero-coupon***

Em qualquer modelo teórico da ETTJ em tempo contínuo, toma-se como dado um processo para a taxa de juros de curto prazo que vamos denominar r_t ³⁰. Essa taxa é a taxa livre de risco da economia. Se um investidor investe \$1 em t a

³⁰ Na verdade, em modelos multifatoriais, tomam-se como dadas as dinâmicas dos diferentes fatores da economia que se combinam, formando a taxa de juros de curto prazo. Em modelos unifatoriais, o fator único da economia é a taxa de curto prazo e/ou livre de risco.

essa taxa, e continua reinvestindo os ganhos, até o período $T > t$, então o investidor terá como retorno desse investimento:

$$\exp\left(\int_t^{t+\tau} r_u du\right) \quad (7)$$

Considere um *zero-coupon* que paga \$1 em T e vencimento no período T .

Em T , tal título valerá obviamente \$1, mas qual seu valor em um período $t < T$?

Para chegar a essa resposta, repetimos o mais importante resultado da teoria de apreçamento por neutralidade ao risco:

“A taxa de retorno esperada de qualquer ativo, sob a medida de probabilidade neutra ao risco, é igual à taxa de retorno esperada da taxa de juros sem risco da economia, a taxa de curto prazo”.

A partir desse resultado, temos a igualdade abaixo:

$$E_t^Q \left[\frac{1}{p_{t,\tau}} \right] = E_t^Q \left[\exp\left(\int_t^{t+\tau} r_u du\right) \right] \quad (8)$$

onde,

$E_t^Q \left[\frac{1}{p_{t,\tau}} \right]$, é o retorno esperado, sob a medida Q , de um *zero-coupon* em t

com prazo τ ;

$E_t^Q \left[\exp\left(\int_t^{t+\tau} r_u du\right) \right]$, é o retorno esperado, sob a medida Q , de um investimento no ativo livre de risco da economia., feito em t , e mantido durante o prazo τ .

Reajustando a expressão acima, temos:

$$p_{t,\tau} = E_t^Q \left[\exp\left(\int_t^{t+\tau} -r_u du\right) * 1 \right] \quad (9)$$

A equação acima define a estrutura a termo teórica dos preços dos títulos *zero-coupon*. Dado um determinado instante t , temos o valor de $p_{t,\tau}$ que nos fornece o preço, em t , do título que paga \$1 em $t+\tau$. Variando-se τ , $0 < \tau < \infty$, temos os preços dos títulos para todos os vencimentos/ maturidades possíveis. A partir do preço de um *zero-coupon* podemos obter a taxa de juros anualizada à que o título é negociado e, assim, temos também a ETTJ teórica, que é dada pela equação abaixo (vide equação 3):

$$y_{t,\tau} = -\frac{\log(p_{t,\tau})}{\tau} \quad (10)$$

onde,

$y_{t,\tau}$, é a taxa anualizada, em t , de um *zero-coupon* com vencimento $t+\tau$;

$p_{t,\tau}$, é o preço de um *zero-coupon* em t e com vencimento em $t+\tau$;

τ , é o prazo, em unidades ano, do título.

A filosofia para a resolução de qualquer modelo derivado por não-arbitragem é esta. Especifica-se uma equação para a taxa livre de risco da economia (ou para os fatores) e resolve-se a expressão (9) ou, equivalentemente, a expressão (10). As características diferenciadas de cada modelo surgem das diferentes especificações para a taxa livre de risco (ou fatores) e das diferentes especificações para o preço do risco de mercado que afeta a dinâmica dos fatores sob à medida neutra ao risco. Nos últimos anos, a especificação mais popular nessa literatura tem sido a especificação afim – que foi estudada por Duffie e Kan (1996). A razão do nome afim vem do fato que solucionando a expressão (10), a ETTJ é dada como uma função afim dos fatores da economia, tomando a forma:

$$y_{t,\tau} = A(\cdot) + B(\cdot) \cdot x_t \quad (11)$$

onde $A(\cdot)$ e $B(\cdot)$ são funções dos parâmetros dos fatores e do preço do risco de mercado do modelo.

Uma das razões da popularidade de tal especificação é o fato de ela incluir como casos particulares modelos clássicos da literatura como Vasicek, CIR, Merton e outros. Dada a natureza de caso geral do modelo afim, vamos estudá-lo na seção 4.6. Assim como vamos estudar também os modelos que vamos estimar: o modelo de Vasicek e o modelo de CIR. Mas, antes, aprofundamos as idéias dessa seção com a apresentação de um modelo genérico da ETTJ e sua solução.

4.5. Um modelo genérico da ETTJ

Como introduzimos na seção anterior, um modelo da ETTJ se constitui de três ingredientes fundamentais:

A. uma especificação para a dinâmica dos fatores da economia sob a medida P ou a medida Q ;

B. Uma função que tenha como *inputs* os fatores da economia e como *output* a taxa livre de risco da economia;

C. uma função para a mudança de medida de probabilidade que possibilite “levar” os processos na medida de probabilidade física P para a medida de probabilidade neutra ao risco Q - a mudança de medida nos permite “levar” o processo dos fatores para a medida P ou Q indiscriminadamente (a mudança de medida carrega uma estreita ligação com a variável denominada preço do risco de mercado, que mede a compensação pelo risco);

No caso de modelos unifatoriais, o fator único da economia é a taxa livre de risco e, assim, o ingrediente 2 acima é a função de identidade já que o único fator da economia é a própria taxa livre de risco. Em modelos multifatoriais, os vários fatores se combinam através de uma função para formar a taxa livre de risco.

Assim, um modelo genérico para a ETTJ toma a seguinte forma:

A. A dinâmica para os fatores x_t da economia, $x_t \in \mathbb{R}^n$ (n indica o número de fatores), é dada por um processo markoviano³¹ que resolve a equação diferencial estocástica abaixo:

$$dx_t = \mu_x(x_t)dt + \sigma_x(x_t)dW_t \quad (12)$$

onde:

$\mu_x(x_t)$, é o *drift* da equação acima (trata-se de um vetor $n \times 1$);

$\sigma_x(x_t)$, é o termo difusão da equação acima (trata-se de uma matriz $n \times n$);

x_t , é o vetor de fatores para essa economia (trata-se de um vetor $n \times 1$);

W_t , é um vetor de n movimentos brownianos, sendo que todos são ortogonais entre si.

O processo x_t é markoviano e homogêneo no tempo, pois $\mu_x(x_t)$ e $\sigma_x(x_t)$ dependem exclusivamente do valor de x_t (markoviano) e não de seus valores passados (markoviano). Além disso, o processo x_t independe do valor de t , por isso, é chamado homogêneo no tempo. Em todos os modelos que estudamos nesse trabalho, os fatores são não correlacionados, logo $\sigma_x(x_t)$ é sempre uma matriz diagonal.

B. A taxa de juros livre de risco r_t é uma função dos fatores da economia x_t , assim temos:

$$r_t = r_t(x_t) \quad (13)$$

Algumas condições técnicas garantem que qualquer função que tenha como parâmetro um processo de Ito também seja um processo de Ito. Assim r_t , que tem como parâmetro o processo de Ito x_t também é um processo de Ito.

³¹ O processo de x_t é um processo de Ito. Ver Oksendal (1998) para referências sobre processos de Ito.

C. Função para a mudança da medida de probabilidade entre P e Q. Essa função captura o ajuste ao risco necessário para sairmos de um mundo com aversão ao risco para um mundo com neutralidade ao risco. A função para a mudança de probabilidade é caracterizada pela densidade de probabilidade ξ_t ³². A equação diferencial estocástica abaixo caracteriza essa densidade:

$$\frac{d\xi_t}{\xi_t} = \sigma_\xi(x_t) dW_t \quad (14)$$

$$\xi_0 = 1$$

Da equação (3) temos:

$$y_{t,\tau} = - \frac{\log(E_t^Q \left[\exp\left(\int_t^{t+\tau} -r_u(x_u) du\right) * 1 \right])}{\tau} \quad (15)$$

logo a solução $y_{t,\tau}$ ³³, que nos fornece a ETTJ, é uma função da taxa livre de risco r_t e, portanto, dos fatores x_t da economia, mas para chegarmos à solução de $y_{t,\tau}$ é necessário que calculemos o valor esperado, sob a medida neutra ao risco Q, de uma expressão que depende de x_t . Para isso, temos que obter o processo x_t sob à medida neutra ao risco.

A partir da definição para a densidade ξ_t , as condições de Novikov e o teorema de Girsanov (ver apêndice D de Duffie (2001)) garantem que o processo W_t^* definido por

$$dW_t^* = dW_t - \sigma_\xi(x_t)' dt \quad (16)$$

seja um movimento browniano sob a medida Q.

³² Essa densidade é um processo martingal estritamente positivo, garantindo que eventos com probabilidade zero sob a medida P também tenham probabilidade zero sob a medida Q. Para maiores detalhes sobre essa função densidade ver o apêndice E de Duffie (2001).

Substituindo (16) em (12), obtemos a dinâmica dos fatores x_t sob à medida neutra ao risco Q :

$$dx_t = \mu_x^*(x_t)dt + \sigma_x^*(x_t)dW_t^* \quad (17)$$

onde,

$\mu_x(x_t) = (\mu_x^*(x_t) - \sigma_x^*(x_t)\sigma_x^*(\xi_t)') + \sigma_x^*(x_t)dW_t$ é o *drift* do novo processo sob Q ; e

$\sigma(x_t) = \sigma_x^*(x_t)$ é a difusão³⁴.

Assim, as expressões (13), (15) e (17) definem a ETTJ ($y_{t,\tau}$) no instante t como uma função dos fatores x_t ³⁵, em t , e do prazo para o qual se deseja calcular a taxa do título *zero-coupon*, qual seja, $\tau = (T-t)$. Equivalentemente, (9), (13) e (17) definem a estrutura a termo dos preços dos títulos *zero-coupon*. Temos que o preço dos títulos é uma função da taxa de curto prazo que por sua vez é uma função dos fatores, ou seja:

$$p_{t,\tau} = p(r_t(x_t), \tau) = p(x_t, \tau) \quad (18)$$

Dadas algumas condições técnicas sobre a função p , podemos pelo lema de Ito³⁶ obter a equação diferencial estocástica que descreve a dinâmica de p . A função p também será um processo de Ito, markoviano e homogêneo no tempo. A dinâmica de p será dada por:

$$\frac{dp(x_t, \tau)}{p(x_t, \tau)} = \mu_p(x_t, \tau)dt + \sigma_p(x_t, \tau)dW_t \quad (19)$$

³³ Atenção à mudança de notação $y_{t,T}(\cdot) = y_{t,\tau}(\cdot)$, onde $\tau = T - t$.

³⁴ O fato da difusão se manter igual é conhecido como o Princípio da Invariância. Ver apêndice D de Duffie (2001).

³⁵ Os fatores da economia são também chamados de estados da economia.

³⁶ Para referência sobre cálculo estocástico, em particular, sobre o lema de Ito ver Oksendal (1998).

onde,

$$\mu_p(x, \tau) = -\frac{p_\tau(x, \tau)}{p(x, \tau)} + \frac{p_x(x, \tau)}{p(x, \tau)} \mu_x(x) + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\sigma(x) \sigma(x)' \frac{p_{xx}(x, \tau)}{p(x, \tau)} \right] \text{ é o drift}$$

da nova equação e $p_\tau(x, \tau)$, $p_{xx}(x, \tau)$ e $p_x(x, \tau)$ denotam as derivadas parciais da função p .

Intuitivamente a expressão $\frac{dp(x, \tau)}{p(x, \tau)}$ representa a variação instantânea do preço do título sobre o preço do título, ou seja, a variação na taxa paga pelo título. Sendo assim, $\mu_p(x, \tau)$ pode ser interpretado como a taxa esperada de retorno instantânea, em t , do *zero-coupon* com prazo τ . Se estamos sob à medida neutra ao risco Q , então, para que não exista oportunidade de arbitragem, a taxa esperada de retorno instantânea de um título qualquer tem que ser igual à taxa livre de risco instantânea da economia r_t . Com esse argumento intuitivo, chega-se à condição fundamental através da qual resolve-se a equação para o valor de $p(t, \tau)$, qual seja:

$$\mu_p(x, \tau) = r(x) \quad (20)$$

Além disso, sabemos que um título *zero-coupon* com prazo zero tem valor igual a seu valor de face, ou seja, 1. Logo, para qualquer que seja x , temos:

$$p(x, 0) = 1 \quad (21)$$

Assim, as expressões (19), (20) e (21) nos fornecem uma equação diferencial parcial. Resolvendo-se essa equação obtém-se a solução para o valor de $p(t, \tau)$, ou seja, obtém-se a estrutura a termo do preço dos títulos *zero-coupon*. Utilizando-se a equação (10), obtém, então, a ETTJ. O sistema, a partir do qual se obtém a ETTJ, é dado por:

$$-\frac{p_\tau(x, \tau)}{p(x, \tau)} + \frac{p_x(x, \tau)}{p(x, \tau)} \mu_x(x) + \frac{1}{2} \text{tr} \left[\sigma(x) \sigma(x)' \frac{p_{xx}(x, \tau)}{p(x, \tau)} \right] = r(x)$$

$$p(x, 0) = 1 \quad (22)$$

$$y_{t,\tau} = -\frac{\log(p_{t,\tau})}{\tau}$$

Algumas especificações para x_t geram soluções analíticas fechadas para $p(x, \tau)$. Alguns modelos com soluções analíticas fechadas são, por exemplo, Vasicek e CIR. Outras especificações geram soluções quase-fechadas como o modelo afim de Duffie e Kan. Várias outras especificações não geram nem uma coisa nem outra e são necessários métodos numéricos³⁷ para a obtenção da solução para $p(x, \tau)$ ou, equivalentemente, a solução para $y_{t,\tau}$. A partir de agora, vamos estudar formas funcionais específicas desse modelo geral. Em particular o modelo afim de Duffie e Kan e dois de seus casos particulares: Vasicek e CIR.

4.6. O modelo afim para a ETTJ

Como afirmamos anteriormente, em um modelo para a ETTJ, as especificações para a dinâmica dos fatores e a especificação para o preço do risco de mercado definem as características dos modelos.

Considere a dinâmica genérica para o processo dos fatores de uma economia dada por:

$$dx_t = \mu_x(x_t)dt + \sigma_x(x_t)dW_t \quad (23)$$

³⁷ Wilmott (1998) é uma referência para o estudo de métodos numéricos utilizados na solução de equações diferenciais parciais.

No modelo afim de n fatores, o valor *drift* e difusão da equação acima são

$$\mu_x(x) = \begin{bmatrix} \kappa^{(1)}(x^{(1)} - \theta^{(1)}) \\ \kappa^{(2)}(x^{(2)} - \theta^{(2)}) \\ \vdots \\ \kappa^{(n)}(x^{(n)} - \theta^{(n)}) \end{bmatrix}$$

dados por:

$$\sigma_x^2(x) = \begin{bmatrix} \alpha^{(1)} + \beta^{(1)}x^{(1)} & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & \alpha^{(2)} + \beta^{(2)}x^{(2)} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \cdot & 0 & \alpha^{(n)} + \beta^{(n)}x^{(n)} \end{bmatrix}$$

$$\text{onde } \alpha = \begin{bmatrix} \alpha^{(1)} \\ \alpha^{(2)} \\ \vdots \\ \alpha^{(n)} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta^{(1)} \\ \beta^{(2)} \\ \vdots \\ \beta^{(n)} \end{bmatrix}, \kappa = \begin{bmatrix} \kappa^{(1)} \\ \kappa^{(2)} \\ \vdots \\ \kappa^{(n)} \end{bmatrix} \text{ e } \theta = \begin{bmatrix} \theta^{(1)} \\ \theta^{(2)} \\ \vdots \\ \theta^{(n)} \end{bmatrix} \text{ são os parâmetros a}$$

serem escolhidos para essa especificação.

O preço do risco de mercado para modelo afim de n fatores é dado por:

$$\sigma_\xi = \begin{bmatrix} \lambda^{(1)} \sqrt{\alpha^{(1)} + \beta^{(1)}x^{(1)}} \\ \lambda^{(2)} \sqrt{\alpha^{(2)} + \beta^{(2)}x^{(2)}} \\ \vdots \\ \lambda^{(n)} \sqrt{\alpha^{(n)} + \beta^{(n)}x^{(n)}} \end{bmatrix}, \text{ onde } \lambda = \begin{bmatrix} \lambda^{(1)} \\ \lambda^{(2)} \\ \vdots \\ \lambda^{(n)} \end{bmatrix} \text{ é o parâmetro a ser escolhido}$$

nessa especificação.

A expressão $\lambda^{(i)} \sqrt{\alpha^{(i)} + \beta^{(i)}x^{(i)}}$ é o preço do risco de mercado associado ao fator $x^{(i)}$.

Como vemos o *drift* e o quadrado da difusão são funções afins da variável de estado.

Além disso, a função que determina a taxa livre de risco a partir dos fatores também é especificada de forma a ser afim nos fatores:

$$r_t = A_0 + B_0' x_t \quad (24)$$

Solucionando a equação parcial diferencial (22) para esse modelo, obtém-se como solução para ETTJ uma expressão, que também é afim nos fatores da economia, qual seja:

$$y_{t,\tau} = A(\tau)/\tau + B(\tau)/\tau \cdot x_t \quad (25)$$

onde $A(\tau)$ e $B(\tau)$ são solução de um sistema de equações diferenciais ordinárias – conhecidas como equações de Ricatti -, dado por:

$$\begin{aligned} \frac{dA(\tau)}{d\tau} &= A_0 - (\kappa^* \mu^*)' B(\tau) - \frac{1}{2} \sum_i \sum_j B_i(\tau) B_j(\tau) \alpha^{(i,j)} (\sigma_x^{(i,j)})^2 \\ \frac{dB(\tau)}{d\tau} &= B_0 + (\kappa^*)' B(\tau) - \frac{1}{2} \sum_i \sum_j B_i(\tau) B_j(\tau) \beta^{(i,j)} (\sigma_x^{(i,j)})^2 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\text{Onde: } \kappa^* = \kappa - \sqrt{\sigma_x} \cdot \lambda \cdot \beta \text{ e } \kappa^* \mu^* = \kappa \theta + \sqrt{\sigma_x} \cdot \lambda \cdot \alpha.$$

A solução para a ETTJ - $y_{t,\tau}$ - não tem, nesse modelo afim, forma fechada. Para calcularmos a taxa de um título *zero-coupon* - dados os parâmetros do modelo, dada sua maturidade e dado o valor dos fatores da economia - é necessário que calculemos o valor de $A(\tau)$ e $B(\tau)$ numericamente por algum método que ache solução para sistemas de equações diferenciais ordinárias. Essa é a maior dificuldade em se estimar o modelo afim, pois é necessário implementar algum método numérico que resolva o sistema (26) acima. Como veremos nas próximas seções, os casos particulares do modelo afim – Vasicek e CIR – apresentam forma fechada para a solução de $A(\tau)$ e $B(\tau)$, o que facilita bastante o trabalho de estimação.

Outra função interessante advinda do modelo afim é o excesso de retorno esperado de um título *zero-coupon* com prazo τ (ver capítulo 3) sobre a taxa livre

de risco. No modelo afim descrito acima, o retorno esperado instantâneo de um *zero-coupon* com prazo τ , é dado por:

$$\mu_{p(t,\tau)} = r + \frac{1}{p(t,\tau)} \frac{\partial p(t,\tau)}{\partial x_t} \sigma_x \sigma_\xi = r + \frac{\partial y(t,\tau)}{\partial x_t} \sigma_x \sigma_\xi = r + \sum_i \lambda_i (\alpha_i + \beta_i' x) B_i(\tau) \quad (27)$$

Na expressão acima, vemos com mais clareza porque σ_ξ é chamado preço do risco de mercado. O retorno esperado instantâneo do título $p(t,\tau)$ é proporcional à quantidade de risco do título associada a variações inesperadas nos fatores (por isso, também chamados de fatores de risco), quais sejam, $\frac{\partial y(t,\tau)}{\partial x_t} \sigma_x$.

Mas essa quantidade de risco é multiplicada pelo fator σ_ξ , que, intuitivamente fornece o preço do risco em termos de rendimento adicional esperado requerido (ou seja, o excesso de retorno esperado).

O excesso de retorno esperado instantâneo sobre a taxa livre de risco desse título é, então, dado por:

$$e_{p(\tau)} = \frac{1}{p(\cdot)} \frac{\partial p(\cdot)}{\partial x_t} \sigma_x \sigma_\xi = \sum_i \lambda_i (\alpha_i + \beta_i' x) B_i(\tau) \quad (28)$$

4.7.

O modelo de Vasicek para a ETTJ

Vasicek é um caso particular do modelo afim descrito na seção anterior. Nesse modelo os parâmetros α , β , A_0 e B_0 , descritos na seção anterior, assumem valores específicos. Como o modelo de um fator é uma simplificação do modelo de dois fatores, apresentamos abaixo o modelo de dois fatores de Vasicek.

No modelo Vasicek os parâmetros α e β do modelo afim assumem valores específicos, quais sejam, $\alpha = \begin{bmatrix} \sigma^{(1)} \\ \sigma^{(2)} \end{bmatrix}$ e $\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Nesse caso, a dinâmica do fator x_t , sob à medida física P , passa ser dada por:

$$d \begin{bmatrix} x_t^{(1)} \\ x_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa^{(1)} & \kappa^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta^{(1)} - x_t^{(1)} \\ \theta^{(2)} - x_t^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma^{(1)} & 0 \\ 0 & \sigma^{(2)} \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} W_t^{(1)} \\ W_t^{(2)} \end{bmatrix} \quad (29)$$

As variáveis A_0 e B_0 também assumem valores específicos, quais sejam:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } B_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nesse caso, basta verificar que a relação entre o fator x_t e a taxa livre de risco r_t é dada pela relação:

$$r_t = x_t^{(1)} + x_t^{(2)} \quad (30)$$

Uma característica interessante dessa especificação é que, no caso do modelo de Vasicek com somente um fator $x_t^{(2)} = 0$, temos $r_t = x_t^{(1)}$, a taxa de juros r_t é formada por um processo que tem tendência a sempre retornar a um valor determinado θ que é, por isso, interpretado como o valor de equilíbrio para a taxa de curto prazo/ livre de risco.

No caso do modelo de dois fatores, r_t é formada pela soma de dois processos com essa característica. A soma dos valores $\theta = \theta^{(1)} + \theta^{(2)}$ é então interpretada como um valor de equilíbrio para a taxa de curto prazo no caso de dois fatores.

O valor incerteza de r_t é modelada através de um movimento browniano W_t e a intensidade dos choques sobre r_t é controlada pela matriz σ , que é constante ao longo do tempo. Ou seja, o processo da taxa r_t é homocedástico e a matriz de volatilidade instantânea do processo é dada por σ .

A variável κ controla a velocidade com que os fatores $x_t^{(1)}$ e $x_t^{(2)}$ retornam ao seu valor de longo prazo, qual seja, $\theta^{(1)}$ e $\theta^{(2)}$.

Valores positivos de κ indicam que o processo tende de fato a reverter para seu valor de equilíbrio e, portanto, $x_t^{(1)}$ e $x_t^{(2)}$ são processos estacionários e r_t é um processo estacionário.

Com $\kappa < 0$, o processo é não-estacionário, uma propriedade bastante indesejável para a taxa de curto prazo da economia.

Dados os valores que α e β assumem no modelo de Vasicek, a expressão para o preço do risco de mercado é dada por:

$$\sigma_{\xi} = \begin{bmatrix} \lambda^{(1)} \\ \lambda^{(2)} \end{bmatrix} \quad (31)$$

A resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias (26), nesse caso específico de Vasicek, tem solução fechada. Os valores de A e B são dados por:

$$A(\tau) = \ln \left[\frac{\exp(\gamma * (B(\tau) - (\tau)) - \sigma^2 * B(\tau)^2)}{4 * \kappa} \right] \quad , \text{ para } i=1,2 \quad (32)$$

$$B(\tau) = \left[\frac{(1 - \exp(-\kappa * \tau))}{\kappa} \right]$$

onde:

$$\gamma^{(i)} = \theta^{(i)} + \frac{\sigma^{(i)} * \lambda^{(i)}}{\kappa^{(i)}} - \frac{(\sigma^{(i)})^2}{2 * (\kappa^{(i)})^2}, \text{ para } i=1,2.$$

Temos então:

$$A(\tau) = A^1(\tau) + A^2(\tau) \quad (33)$$

$$B(\tau) = B^1(\tau) + B^2(\tau)$$

Repetimos a expressão para a ETTJ, que é dada, então, por:

$$y_{t,\tau} = A(\tau)/\tau + B(\tau)/\tau \cdot x_t$$

O excesso de retorno de título *zero-coupon* com prazo τ é dado, então, por:

$$e_{p(t,\tau)} = \lambda^{(1)} \sigma^{(1)} B^{(1)}(\tau) + \lambda^{(2)} \sigma^{(2)} B^{(2)}(\tau) \quad (34)$$

Agora, temos ainda mais claro do porquê $\sigma_\xi = \lambda$ ser chamado preço do risco de mercado. Afinal, como discutimos no capítulo 3, títulos com prazos mais longos são mais arriscados que a taxa de livre de risco, por isso, espera-se que os investidores demandem uma compensação por esse risco. Uma das maneiras de se medir essa compensação pelo risco é o excesso de retorno que se espera que títulos mais longos realizem sobre investimentos na taxa de curto prazo. Como vemos, esse excesso de retorno é obtido multiplicando-se o preço do risco de mercado, ou seja, o preço de risco pela “quantidade de risco” que é medido por $B(\tau)$ que mede a correlação do preço/ taxa do título *zero-coupon* com a volatilidade associada ao fator x_t .

O modelo de um fator de Vasicek é obtido facilmente a partir da descrição do modelo de 2 fatores, bastando para isso que todas os parâmetros e variáveis com índice (2) sejam igualadas a zero.

4.8.

O modelo de CIR para a ETTJ

CIR é outro caso particular do modelo afim descrito na seção anterior. Como fizemos na seção anterior, apresentamos o modelo de CIR de dois fatores, a partir do qual pode-se facilmente inferir o modelo de um fator.

No modelo de CIR as variáveis α e β do modelo afim assumem como valores específicos $\alpha = \begin{bmatrix} \sigma^{(1)} \\ \sigma^{(2)} \end{bmatrix}$ e $\beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Nesse caso, a dinâmica dos fatores passa ser dada por:

$$d \begin{bmatrix} x_t^{(1)} \\ x_t^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \kappa^{(1)} & \kappa^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta^{(1)} - x_t^{(1)} \\ \theta^{(2)} - x_t^{(2)} \end{bmatrix} dt + \begin{bmatrix} \sigma^{(1)} & 0 \\ 0 & \sigma^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{x_t^{(1)}} \\ \sqrt{x_t^{(2)}} \end{bmatrix} d \begin{bmatrix} W_t^{(1)} \\ W_t^{(2)} \end{bmatrix} \quad (35)$$

No modelo de CIR as variáveis A_0 e B_0 também assumem valores específicos, quais sejam:

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } B_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nesse caso, basta verificar que a relação entre o fator x_t e a taxa livre de risco r_t é a dada pela relação de identidade:

$$r_t = x_t^{(1)} + x_t^{(2)} \quad (36)$$

As interpretações para os valores de θ e κ são idênticas às interpretações desses modelos no modelo de Vasicek. É interessante notar que o processo para os fatores $x_t^{(1)}$ e $x_t^{(2)}$ não é mais homocedástico e, sim, heterocedástico, dado o fato que a volatilidade instantânea de tais processos é dada pela matriz

$$\begin{bmatrix} \sigma^{(1)} \sqrt{x_t^{(1)}} & 0 \\ 0 & \sigma^{(2)} \sqrt{x_t^{(2)}} \end{bmatrix} \text{ que depende do nível dos fatores } x_t^{(1)} \text{ e } x_t^{(2)}. \text{ Essa}$$

modificação na equação que define a dinâmica de $x_t^{(1)}$ e $x_t^{(2)}$ gera uma importante restrição aos valores que $x_t^{(1)}$ e $x_t^{(2)}$ podem assumir. Os valores de $x_t^{(1)}$ e $x_t^{(2)}$ nunca são negativos. Intuitivamente, isso ocorre pelo fato de que quando o valor de $x_t^{(1)}$ e $x_t^{(2)}$ está próximo de zero, ainda que os choques advindos dos movimentos brownianos sejam muito negativos, esse choque é multiplicado pela raiz dos fatores (que é um número muito pequeno para $x_t^{(1)}$ e $x_t^{(2)}$ pequenos) se torna bastante pequeno, impossibilitando que $x_t^{(1)}$ e $x_t^{(2)}$ ultrapassem a fronteira do zero.

Em poucas palavras, quando $x_t^{(1)}$ e $x_t^{(2)}$ estão próximos a zero, os choques se tornam extremamente pequenos. De fato, caso as variáveis assumam o valor zero, os choques se extinguem e a única força agindo sobre os fatores é a parte determinística da equação (35) que “empurra” os fatores em direção aos valores positivos de $\theta^{(1)}$ e $\theta^{(2)}$, afastando-os novamente do zero.

Dados os valores que α e β assumem no modelo de CIR, a expressão para o preço do risco de mercado é dada por:

$$\sigma_{\xi} = \begin{bmatrix} -\lambda^{(1)} \sqrt{x_t^{(1)}} \\ -\lambda^{(2)} \sqrt{x_t^{(2)}} \end{bmatrix} \quad (37)$$

O interessante dessa especificação para o preço do risco de mercado é o fato de que o prêmio de risco de mercado está relacionado ao nível dos fatores da economia. Intuitivamente, temos que, em ambientes com taxas de curto prazo altas, o prêmio de risco é mais alto.

A resolução do sistema de equações diferenciais ordinárias (26), nesse caso específico de CIR, tem solução fechada. Os valores de A e B são dados por:

$$A^{(i)}(\tau) = \ln \left[\left(\frac{2\gamma^{(i)} e^{(\kappa^{(i)} + \lambda^{(i)} + \gamma^{(i)}) \cdot (\tau/2)}}{(\kappa^{(i)} + \lambda^{(i)} + \gamma^{(i)}) (e^{\gamma^{(i)} \cdot \tau} - 1) + 2\gamma^{(i)}} \right)^{2\kappa^{(i)} \theta^{(i)} / \sigma^{(i)2}} \right] \quad , \quad \text{para } i=1,2.$$

$$B^{(i)}(\tau) = \left[\frac{2(e^{\gamma^{(i)} \cdot \tau} - 1)}{(\kappa^{(i)} + \lambda^{(i)} + \gamma^{(i)}) \cdot (e^{\gamma^{(i)} \cdot \tau} - 1) + 2\gamma^{(i)}} \right] \quad (38)$$

onde:

$$\gamma^{(i)} = \left[(\kappa^{(i)} + \lambda^{(i)})^2 + 2\sigma^{(i)2} \right]^{1/2}, \text{ para } i=1,2.$$

Temos então:

$$\begin{aligned} A(\tau) &= A^1(\tau) + A^2(\tau) \\ B(\tau) &= B^1(\tau) + B^2(\tau) \end{aligned} \quad (39)$$

Repetimos a expressão para a ETTJ, que é dada, então, por:

$$y_{t,\tau} = A(\tau) / \tau + B(\tau) / \tau \cdot x_t$$

O excesso de retorno de título *zero-coupon* com prazo τ é dado, então, por:

$$e_{p(t,\tau)} = -\lambda^{(1)} \sigma^{(1)} x_t^{(1)} B^{(1)}(\tau) - \lambda^{(2)} \sigma^{(2)} x_t^{(2)} B^{(2)}(\tau) \quad (40)$$

Como o preço do risco de mercado é dependente do nível dos fatores (de risco), o excesso de retorno demandado é também proporcional ao nível dos fatores da economia.

O modelo de um fator de CIR é obtido facilmente a partir da descrição do modelo de 2 fatores, bastando para isso que todas os parâmetros e variáveis com índice (2) sejam igualadas a zero.