

### 3

## Conceitos básicos relacionados à estrutura a termo da taxa de juros

Antes de adentrarmos na descrição teórica da ETTJ e de alguns de seus modelos é importante que clarifiquemos algumas das definições básicas que vamos usar nesse trabalho. Assim, nessa subseção apresentaremos as definições de títulos *zero-coupon*, taxa efetiva (*effective yield*), taxa anualizada (*annualized yield*), *yield spreads*, excesso de retorno, a definição de estrutura a termo observada e teórica, entre outras.

### 3.1.

#### Titulo *zero-coupon*

Esses títulos são títulos de renda fixa que fazem um único pagamento em uma data futura conhecida como data de vencimento do título (ou data de maturidade).

O valor de face do título é o valor do pagamento a ser efetuado na data de vencimento do título. O título é negociado com desconto em relação a esse valor de face. Apesar de o valor de face de um título poder assumir qualquer valor, em nosso trabalho, faremos sempre referência a títulos *zero-coupon* com valor de face de uma unidade monetária. Tal normalização visa apenas padronizar títulos com valores de face diferentes, não tendo, obviamente, qualquer impacto sobre as taxas às quais os títulos são efetivamente negociados. O prazo de um título *zero-coupon*, no instante  $t$ , é o espaço de tempo a transcorrer entre o período  $t$  e a data de vencimento do título. Nas seções empíricas desse trabalho, trabalharemos sempre com prazos anualizados.

### 3.2.

#### A taxa efetiva e a taxa anualizada de um título *zero-coupon*

A taxa efetiva do título (*effective yield*) em um ambiente de tempo contínuo, então, é facilmente calculável através da fórmula:

$$y_{t,T}^{effective} = \frac{FV_{t,T}}{P_{t,T}} = \frac{1}{P_{t,T}} \quad (2)$$

onde:

$y_{t,T}^{effective}$  é o valor da taxa efetiva, em  $t$ , paga por um *zero-coupon* com vencimento em  $T$ ;

$FV_{t,T}$  é o valor de face do título em  $t$ , padronizado para \$1, que será pago em  $T(t < T)$ ;

$p_{t,T}$  é o valor (preço) pelo qual esse título *zero-coupon*, com vencimento em  $T$ , é negociado em  $t$  ( $t < T$ ).

Usualmente, os títulos não são negociados pelos seus preços nem pelas suas taxas efetivas, e, sim por suas taxas anualizadas. Aqui, alertamos o leitor para outra convenção que utilizaremos daqui por diante. Sempre que nos referirmos à taxa à qual um título é negociado, sem quaisquer outras indicações, estaremos fazendo referência às suas taxas anualizadas.

Além disso, as taxas anualizadas de um título dependem da convenção acerca da forma como os juros são compostos. Em um ambiente de juros compostos continuamente, a taxa de juros anualizada de um título com preço de  $p_{t,T}$  (lembramos que o valor de face do título é sempre \$1) será dada por:

$$e^{-y_{t,T}*(T-t)} = p_{t,T} \Leftrightarrow y_{t,T} = -\frac{\log(p_{t,T})}{(T-t)} \Leftrightarrow y_{t,\tau} = -\frac{\log(p_{t,\tau})}{\tau} \quad (3)$$

onde:

$y_{i,T}$  ou  $y_{i,\tau}$  é o valor da taxa anualizada de um *zero-coupon* com vencimento em T e negociado a  $p_{i,T}$  em t ( $T > t$ );

$(T - t) = \tau$  é o valor em unidades anuais do prazo, em t, de um *zero-coupon*.

Em nossa análise, consideramos que os títulos *zero-coupon* estão isentos da possibilidade de calote. Assim, as taxas às quais os títulos estão sendo negociados são indicativas de dois fatores: 1. o valor intertemporal do dinheiro e 2. o risco associado à volatilidade da taxa de juros de curto prazo.

Se um investidor compra um título *zero-coupon* em t e o mantém até o vencimento em T ( $t < T$ ), ele receberá \$1 no dia do pagamento. Não há risco nessa operação, entretanto ele estará com seu capital indisponível entre o período t e o período T, ele demanda uma remuneração por isso – chamamos esse fator de valor intertemporal do dinheiro<sup>12</sup>.

Além disso, se o investidor considera a possibilidade de se desfazer do título antes de seu vencimento, ele está exposto ao risco de que variações na taxa de juros de curto prazo alterem o valor de revenda do título. Um título que paga \$1 em T, pode valer menos, em  $t < T$ , caso ocorram aumentos na taxa de juros de curto prazo. Esse é o risco associado à volatilidade da taxa de juros. É importante salientar que, em nenhuma dessas situações, o investidor está exposto ao risco associado à saúde financeira do emissor.

O investidor não leva em conta, em sua análise, a possibilidade de não receber o valor de face do título no vencimento. Essa é a razão pela qual a ETTJ de uma economia é normalmente obtida através das taxas às quais são negociadas os títulos do governo e, não, pelas taxas a que são negociados títulos de empresas, pois o governo de um país é, normalmente, considerado o emissor de risco zero. O governo não dá calote.

---

<sup>12</sup> Em poucas palavras, uma unidade monetária em t tem valor diferente de uma unidade monetária em T ( $t < T$ ).

Discutiremos o quão realista é esta hipótese de que os títulos emitidos pelo governo não apresentem possibilidade de calote para caso brasileiro no capítulo 5.

### 3.3. A ETTJ observada, teórica e interpolada

Dado um conjunto das taxas de juros às quais são negociados os títulos *zero-coupon* para diferentes vencimentos/ maturidades de um governo, obtém-se a ETTJ para essa economia. A ETTJ observada para essa economia é o conjunto de pares ordenados (taxa de juros, maturidade) dos títulos *zero-coupon* emitidos pelo governo. Suponha que em determinado dia, o governo de algum país tivesse títulos *zero-coupon* negociados às taxas expostas na tabela abaixo:

| # Dias | Taxa   | # Dias | Taxa   |
|--------|--------|--------|--------|
| 1      | 19,05% | 210    | 18,93% |
| 30     | 18,88% | 240    | 19,02% |
| 60     | 18,83% | 273    | 19,15% |
| 91     | 18,80% | 301    | 19,24% |
| 120    | 18,79% | 330    | 19,35% |
| 150    | 18,82% | 364    | 19,52% |

Tabela 1: ETTJ observada em um dia hipotético<sup>13</sup>

A ETTJ observada pode ser melhor visualizada no gráfico abaixo:

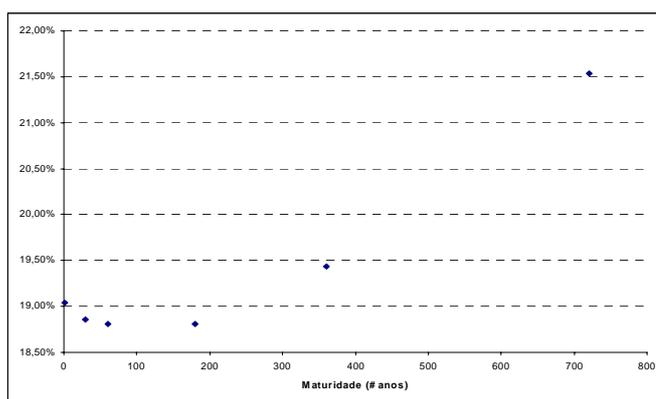


Figura 1: ETTJ observada em um dia hipotético

Como vemos no gráfico acima, por diversas razões<sup>14</sup>, o governo não emite títulos para todas as maturidades possíveis e, ainda que emitisse, todos esses

<sup>13</sup> Na verdade, esses são os dados da ETTJ brasileira para o dia 18 de fevereiro de 2002.

títulos não seriam negociados todos os dias, somente alguns deles. Temos, então, uma ETTJ incompleta, significando com isso que para várias maturidades/vencimentos não temos a taxa de juros associada. Se o conjunto dos títulos emitidos cobrisse a totalidade dos vencimentos possíveis, então teríamos uma ETTJ completa para esse dia, ou seja, taxas associadas a qualquer vencimento possível. Uma ETTJ completa, até o prazo de um ano, tomaria a seguinte forma:

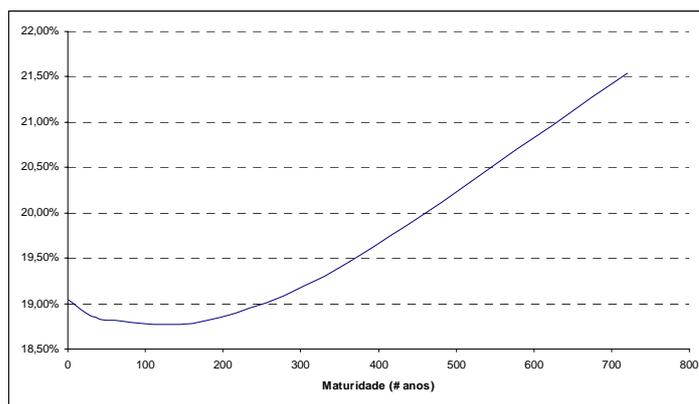


Figura 2: ETTJ observada (completa) em um dia hipotético

Usualmente, a ETTJ observada não é completa. No entanto, para os participantes do mercado de títulos é importante ter a capacidade de associar a qualquer maturidade a taxa de juros que vigoraria caso um título do governo tivesse sido negociado naquele vencimento, ou seja, é importante ter a capacidade de se obter uma ETTJ completa ou, ao menos, uma boa aproximação dessa.

De forma geral, existem duas formas principais para que obtenhamos aproximações de uma ETTJ completa.

A forma mais usual de se aproximar taxas não observadas é a interpolação. As técnicas de interpolação são as mais variadas. Normalmente, utilizam-se polinômios com formas conhecidas (como os de Legendre ou Bernstein) como funções que ligam o prazo de vencimento à taxa de juros. Não há um modelo teórico por trás desse *approach*. Supõe-se que a ETTJ pode ser explicada por uma função  $f$  (normalmente, essa função é um polinômio). Estimam-se, então, os

---

<sup>14</sup> Criar liquidez em mercado secundário de títulos, investidores que possuam preferência por vencimentos específicos são algumas das razões pelas quais o governo escolhe emitir uma

coeficientes da função (polinômio) que melhor se ajustam às taxas de fato observadas no mercado. Na prática, o grau do polinômio é escolhido de forma que as taxas calculadas a partir do polinômio para os vencimentos observados (os chamados “vértices”) tenham ajuste perfeito às taxas, de fato, observadas. De posse desses coeficientes, é possível, dado que conhecemos a forma funcional da função/polinômio, se obter a taxa de juros associada à qualquer maturidade/vencimento. A ETTJ obtida com esse método é chamada ETTJ interpolada. Alguns trabalhos importantes estudam a ETTJ interpolada. Entre eles, citamos Almeida (2001).

A outra forma de se aproximar uma ETTJ completa é através de um modelo estrutural e/ ou teórico para a ETTJ<sup>15</sup>. Tais modelos teóricos, como veremos à frente (Capítulo 4), são funcionais, que para qualquer instante do tempo  $t$ , fornecem a taxa de juros associada a qualquer vencimento desejado<sup>16</sup>. Nesse sentido, eles executam uma ação muito similar à executada pelos polinômios na interpolação. É preciso, entretanto, salientar as diferenças entre o trabalho de estimação de um modelo teórico da ETTJ e um trabalho de interpolação da ETTJ observada. Um modelo teórico da ETTJ é derivado a partir de uma equação diferencial estocástica para os fatores da economia<sup>17</sup> que, por hipóteses de equilíbrio ou não arbitragem, geram um funcional<sup>18</sup> que explica a dinâmica da ETTJ ao longo do tempo como função desses fatores da economia. Um modelo teórico calibrado ou estimado não tem porque se ajustar perfeitamente à ETTJ observada da economia<sup>19</sup>, afinal, o modelo impõe uma série de restrições tanto em relação à dinâmica dos fatores/ estados (que formam a taxa de curto prazo) como

---

maior concentração de dívida em determinados vencimentos. Cox, Ingersoll e Ross (1981) é uma excelente referência na discussão de algumas dessas teorias relacionadas à ETTJ.

<sup>15</sup> De fato, é através desse “método” que vamos obter uma ETTJ completa nesse trabalho.

<sup>16</sup> De forma mais específica, esses modelos se constituem de uma equação para a dinâmica da taxa de curto prazo e outra equação que liga a taxa de curto prazo às taxas associadas a vencimentos mais longos. Chamamos tais modelos anteriormente de *fully-specified models* da ETTJ.

<sup>17</sup> No modelo de 1 fator, esse fator é normalmente associado à taxa de juros de curto prazo e/ ou livre do risco da economia.

<sup>18</sup> Funcional no sentido matemático como uma função de funções. Afinal, um modelo teórico da ETTJ normalmente fornece uma expressão que, para cada período do tempo  $t$ , fornece uma função que associa a cada maturidade  $T$  uma taxa de juros.

<sup>19</sup> A literatura teórica tem procurado desenvolver modelos que possam se ajustar totalmente à ETTJ observada. O modelo seminal é sem dúvida o de Heath, Jarrow e Morton (1992) que modela as taxas *forward* da ETTJ e não a taxa de curto prazo.

em relação às correlações entre as várias taxas de mais longo prazo que formam a ETTJ a cada período do tempo. A ETTJ obtida através de um modelo é chamada ETTJ teórica.

Em termos de ajuste às taxas observadas, a interpolação é mais flexível, pois desde que se use uma função de interpolação de grau suficientemente alto é possível garantir o ajuste da estrutura interpolada à estrutura observada. Entretanto, como a interpolação de uma ETTJ não está associada a argumentos de equilíbrio ou não-arbitragem, os resultados, assim obtidos, admitem oportunidades de arbitragem, uma propriedade não desejável em qualquer modelo que procure dar preço a diferentes ativos ou explicar a dinâmica temporal de uma ETTJ.

O uso de modelos teóricos da ETTJ garante a consistência dos resultados com hipóteses de não-arbitragem, além disso, vários dos parâmetros desses modelos carregam interesse *per se*, como o preço de risco do mercado e a taxa de juros de longo prazo da economia. Esses modelos, entretanto, dadas as restrições que eles impõem, não garantem que as taxas teóricas sejam idênticas às taxas de fato observadas. Tal fato tem impedido, muitas vezes, o uso mais amplo na indústria financeira desses modelos, pois os agentes de mercado demandam antes de tudo que o seu modelo da ETTJ se ajuste perfeitamente às taxas observadas no mercado.

### **3.4. Yield Spread**

O *yield spread* mede a diferença nas taxas entre dois títulos com vencimentos diferentes. Em geral, esses dois títulos podem ser de quaisquer maturidades. Entretanto, nesse trabalho, sempre vamos nos referir ao *yield spread* como uma medida da diferença entre a taxa de curto prazo e a taxa de um outro título de maturidade mais longa, qual seja:

$$s_{t,T} = y_{t,T} - r_t \quad (4)$$

$s_{t,T}$  é o *yield spread*, no período t, entre a taxa de um *zero-coupon* com vencimento em T e a taxa de curto prazo;

$y_{t,T}$  é o valor da taxa anualizada de um *zero-coupon* com vencimento em T;

$r_t$  é o valor da taxa livre de risco ou taxa de curto prazo da economia.

Dessa forma, o conceito de *yield spread* será uma medida da inclinação da ETTJ em determinado período do tempo t. Como discutiremos mais à frente, a inclinação da ETTJ está associada ao risco de mercado e à taxa de longo prazo para a economia.

Veja o gráfico abaixo, com alguns *yield spreads* para a ETTJ brasileira do dia 21 de dezembro de 2000.

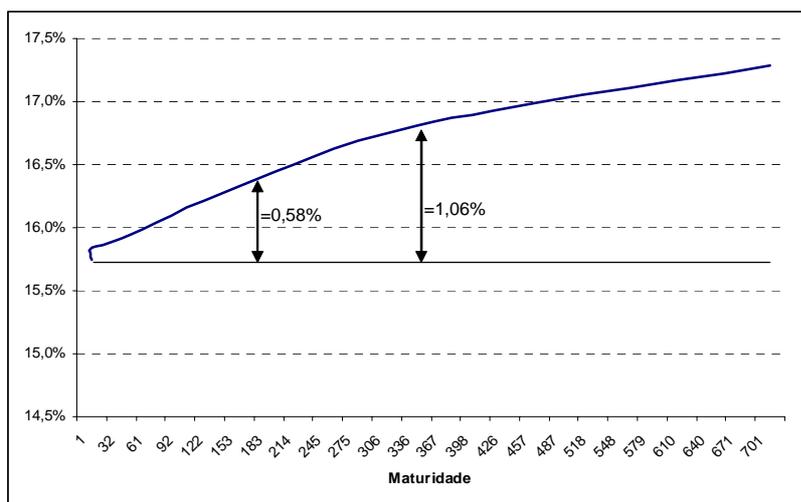


Figura 3: *Yield spread* (6 meses e 1 ano) no dia 21-Dez-2000

### 3.5.

#### O retorno de um título e o excesso de retorno esperado

Vimos que títulos *zero-coupon* têm as mais variadas taxas de retorno anualizadas e maturidades. Entretanto, precisamos estabelecer com clareza qual o retorno de um título para o investidor. Como para qualquer outro ativo, esse retorno depende simplesmente do preço pago pelo investidor na compra do título (relacionado à taxa a que o título era negociado no momento da compra) e o preço pelo qual o investidor vendeu o título (relacionado à taxa a que o título era negociado no momento da venda).

Se o investidor compra um título e o mantém até o vencimento, então, seu retorno total será igual à taxa efetiva (*effective yield*) do título no momento da compra; e, seu retorno anualizado será igual à taxa anualizada no momento da compra.

Entretanto, o investidor não necessariamente compra e mantém um título em carteira até o vencimento. Ele pode comprar um título de maturidade mais longa e mantê-lo por tempo inferior ao da maturidade do título, por exemplo. Nesse caso, considere  $R_{t,s,T}$  como a taxa anualizada de retorno de um título com maturidade em T quando é comprado em t e vendido em s ( $t < s < T$ ):

$$\frac{P_{s,T-(s-t)}}{P_{t,T}} = e^{R_{t,s,T} * (s-t)} \quad (5)$$

onde:

$R_{t,s,T}$ , retorno anualizado do investimento;

$P_{s,T-(s-t)}$ , preço de um título *zero-coupon* comprado em s com vencimento em (T-s-t);

$P_{t,T}$ , preço de um título *zero-coupon* comprado em t com vencimento em T;

(s-t), duração do investimento em anos.

É importante notar que o retorno desse investimento,  $R_{t,s,T}$ , só é apurado no período s, ou seja, em t, quando o investidor decidiu pelo investimento, ele não sabe quanto será seu retorno. Em teoria, um investidor que decidiu investir em um título de maturidade mais longa, por um determinado período, espera receber um adicional de rendimento em relação ao que seria o seu retorno caso ele investisse no ativo livre de risco da economia. Esse adicional de rendimento esperado é chamado de excesso de retorno esperado e, em princípio, é crescente com a maturidade do título. Como veremos no capítulo 4, os modelos teóricos da ETTJ fornecem uma expressão para o cálculo do excesso de retorno esperado de um título *zero-coupon* de longo prazo.

### 3.6.

#### A taxa *forward* e a taxa *forward* instantânea

Títulos com diferentes vencimentos podem ser combinados de forma a se obter um retorno garantido no futuro. Através da compra e venda a descoberto de títulos, é possível, no período  $t$ , iniciar um investimento em  $t$  que irá pagar \$1 em  $T$  ( $t < s < T$ ) ao investidor. A taxa de retorno desse investimento é chamada taxa *forward*.

Essa taxa pode ser entendida como a taxa de um investimento feito em  $t$ , mas que irá vigorar entre  $s$  e  $T$ , ( $t < s < T$ ), sendo que o investidor recebe uma unidade monetária nesse último período. O procedimento para se obter tal investimento é o que segue:

1. Querendo garantir o pagamento de \$1 em  $T$ , o investidor compra, em  $t$ , um título com vencimento em  $T$  por  $p_{t,T}$  ;

2. Como o investidor quer iniciar seu investimento somente em  $s$ , ele vende uma quantidade de títulos com vencimento em  $s$ , de forma a obter o valor  $p_{t,T}$  gasto na compra do outro título. Como o título com vencimento em  $s$  custa  $p_{t,s}$ , o investidor vende  $p_{t,T} / p_{t,s}$  unidades do título com vencimento em  $s$ ;

3. Assim, ele desembolsa zero, pois desembolsa  $p_{t,T}$  em títulos com vencimento em  $T$ , mas recebe  $p_{t,T}$  por títulos vendidos com vencimento em  $s$ . O retorno de tal investimento é dado por:

$$\frac{1}{(p_{t,s} / p_{t,T})} = e^{f_{t,s,T} * (T-t)} \quad (6)$$

onde:

$f_{t,s,T}$ , é a taxa *forward* contratado em  $t$  e que vigorará entre  $s$  e  $T$ ;

$T-s$ , é o período em anos para o qual a taxa *forward* estará ativa.

A taxa *forward* instantânea em  $s$  é a taxa *forward* quando  $T$  tende a  $s$  (ou seja,  $s - T \rightarrow 0$ ).

O gráfico abaixo exemplifica a relação entre a taxa *forward* e a taxa anualizada na ETTJ brasileira de 19 de setembro de 2001.

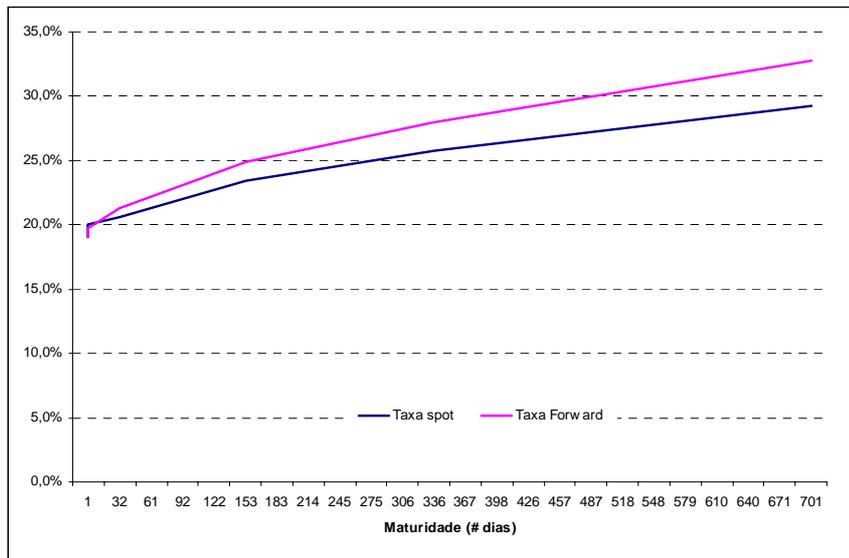


Figura 4: Taxa anualizada versus *forward rate*