



Márcio Eduardo Matta de Andrade Prado

**Uma análise empírica para a estrutura a termo da taxa de
juros brasileira: usando o algoritmo do filtro de Kalman
para estimar os modelos de Vasicek e Cox, Ingersoll e
Ross**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-
Graduação em Economia da PUC-Rio.

Orientador: Franklin de Oliveira Gonçalves

Rio de Janeiro, abril de 2004



Márcio Eduardo Matta de Andrade Prado

**Uma análise empírica para a estrutura a termo da taxa de
juros brasileira: usando o algoritmo do filtro de Kalman
para estimar os modelos de Vasicek e Cox, Ingersoll e
Ross**

Dissertação apresentada como requisito parcial para
obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-
Graduação em Economia da PUC-Rio. Aprovada pela
Comissão Examinadora abaixo assinada.

Franklin de Oliveira Gonçalves

Orientador

Departamento de Economia PUC-Rio

Walter Novaes

Departamento de Economia PUC-Rio

Marcelo Cunha Medeiros

Departamento de Economia PUC-Rio

João Pontes Nogueira

Coordenador(a) Setorial do Centro de Ciências Sociais - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 14 de abril de 2004

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Márcio Eduardo Matta de Andrade Prado

Graduou-se em Engenharia de Produção pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo em 2001. Ingressou no Programa de Mestrado em Teoria Econômica, classificando-se em segundo lugar. Concentrou-se em Finanças, com ênfase em modelos para a taxa de juros. Atuou como monitor de microeconomia e derivativos.

Ficha Catalográfica

Prado, Márcio Eduardo Matta de Andrade

Uma análise empírica para a estrutura a termo da taxa de juros brasileira : usando o algoritmo do filtro de Kalman para estimar os modelos de Vasicek e Cox, Ingersoll e Ross / Márcio Eduardo Matta de Andrade Prado ; orientador: Franklin Gonçalves. – Rio de Janeiro : PUC, Departamento de Economia, 2004.

121 f. : il. ; 30 cm

Dissertação (mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Economia.

Inclui referências bibliográficas.

1. Economia – Teses. 2. Estrutura a termo da taxa de juros. 3. Filtro de Kalman. 4. Modelo afim. 5. Política monetária. 6. Hipótese das expectativas. I. Gonçalves, Franklin. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Economia. III. Título.

CDD: 330

À minha avó Maria

Agradecimentos

Ao Departamento de Economia da PUC-Rio e aos seus professores, por criarem um ambiente de excelência acadêmica que contribuiu e deve continuar a contribuir e ecoar por um longo tempo no meu caminho tanto profissional quanto acadêmico.

Ao meu orientador Franklin Gonçalves, por ter ministrado o curso de finanças de onde surgiu a idéia para essa dissertação e por ter aceitado me orientar em tema que sempre foi do meu interesse. Aos professores Walter Novaes e Marcelo Medeiros, participantes da Comissão Examinadora, pelos comentários sobre essa dissertação.

Ao professor Juan Pablo Torres-Martínez, pelos excelentes cursos ministrados, em particular o de cálculo estocástico em finanças. Agradeço também ao amigo Juan Pablo pelo inestimável e contínuo apoio com os quais me honrou durante todo esse período de mestrado.

Ao professor Walter Novaes, mestre em sentido amplo, pelos ensinamentos acadêmicos, éticos e pessoais.

Aos amigos cariocas, paulistas, goianos, acima de tudo, brasileiros que me fazem lembrar desse período carioca com saudade, mas, acima de tudo com alegria.

Aos amigos paulistanos, meu irmão Diego, meu primo Thiago, Rodrigo Geraldês, que mesmo de longe me apoiaram e me ajudaram a concluir mais essa etapa no caminho das nossas vidas.

Aos meus pais, Eduardo e Eliane, pelo apoio em todos os sentidos. À minha irmã Renata pelo amor, carinho e alegria.

À Renata, por todo o apoio e incentivo fundamentais durante o mestrado, mas principalmente te agradeço pelo amor que compartilhamos.

Finalmente, ao Governo Brasileiro pelo importante apoio financeiro concedido através da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes).

Resumo

Prado, Márcio Eduardo Matta de Andrade. **Uma análise empírica para a estrutura a termo da taxa de juros brasileira: usando o algoritmo do filtro de Kalman para estimar os modelos de Vasicek e Cox, Ingersoll e Ross.** Rio de Janeiro, 2004. 121p. Dissertação de Mestrado - Departamento de Economia, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A importância da estrutura a termo da taxa de juros dificilmente é exagerada. A estrutura a termo agrega de forma sucinta uma quantidade enorme de informação sobre o estado presente e sobre as expectativas futuras da economia de um país. Nesse trabalho, utilizando técnicas de estimação por filtro de Kalman, estimamos, com dados brasileiros, quatro modelos teóricos da ETTJ, todos casos particulares do modelo afim estudado por Duffie e Kan (1996). Analisamos o resultado de nossas estimações tendo em vista o comportamento histórico da ETTJ brasileira durante o período. Comparamos os modelos entre si, apontando para aqueles que melhor se ajustam aos dados observados. Avaliamos que nossos resultados suportam resultados anteriores de que a hipótese das expectativas não é verificada na ETTJ brasileira.

Palavras-chave

Estrutura a termo da taxa de juros, filtro de Kalman, modelo afim, hipótese das expectativas.

Abstract

Prado, Márcio Eduardo Matta de Andrade. **An empirical analysis of the Brazilian term structure of interest rates: using the Kalman filter algorithm to estimate the Vasicek and Cox, Ingersoll and Ross models.** Rio de Janeiro, 2004. 121p. MSc Dissertation - Departamento de Economia, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

The importance of the term structure of interest rates is hardly exaggerated. The term structure succinctly summarizes an enormous quantity of information about the actual state and about the future expectations of/ for the economy of a country. Within this work, using Kalman filter estimation techniques, we estimate, with Brazilian data, four different models of the term structure, all particular cases of the affine model studied by Duffie and Kan (1996). We analyze the parameter estimates relating it to the historical behavior of Brazilian data during the sample period. We compare the models among them, choosing the one most successful in fitting the data. Our results support a previous result regarding the non-validity of the expectation hypotheses in the Brazilian term structure.

Keywords

Term-structure of interest rates, Kalman filter, affine-model, expectations hypotheses.

Sumário

1 Introdução	15
2 Motivação e Objetivo	19
2.1. Por que estudar a estrutura a termo da taxa de juros?	19
2.2. O estudo da ETTJ brasileira	21
3 Conceitos básicos relacionados à estrutura a termo da taxa de juros	26
3.1. Título zero-coupon	26
3.2. A taxa efetiva e a taxa anualizada de um título zero-coupon	27
3.3. A ETTJ observada, teórica e interpolada	29
3.4. Yield Spread	32
3.5. O retorno de um título e o excesso de retorno esperado	33
3.6. A taxa forward e a taxa forward instantânea	35
4 Modelos teóricos para a ETTJ	37
4.1. Introdução	37
4.2. Modelos de não-arbitragem	40
4.3. Apreçamento neutro ao risco	40
4.4. Apreçamento de títulos zero-coupon	41
4.5. Um modelo genérico da ETTJ	44
4.6. O modelo afim para a ETTJ	49
4.7. O modelo de Vasicek para a ETTJ	52
4.8. O modelo de CIR para a ETTJ	55
5 O mercado brasileiro de DI futuro e o mercado de swaps	59
5.1. O mercado brasileiro de DI futuro e o mercado de swaps	59
5.2. Taxas de juros compostas e continuamente compostas	61
6 Estimação	63
6.1. Introdução	63

6.2. O modelo de Vasicek na forma de um sistema de espaço de estado em tempo discreto	65
6.3. O filtro de Kalman linear	67
6.4. O modelo de CIR na forma de um sistema de espaço de estado em tempo discreto	72
6.5. O filtro de Kalman não-linear	73
6.6. Experimento de Monte Carlo	74
6.7. Comentário sobre a função de otimização utilizada	76
7 Análise empírica	78
7.1. Análise dos dados de nossa amostra	78
7.2. Resultado das estimações	79
7.3. Capacidade de ajuste e predição dos modelos	82
7.4. Por que o modelo de CIR se ajusta melhor à ETTJ brasileira?	83
7.5. CIR, Vasicek e a hipótese das expectativas	86
7.6. CIR e Vasicek contra um modelo Martingal	87
8 Conclusão	89
9 Referências Bibliográficas	91
10 Apêndice	94
10.1. Apêndice A1	94
10.2. Apêndice A2	101
10.3. Apêndice A3	105
10.4. Apêndice A4	106
10.5. Apêndice A5	108
10.6. Apêndice A6	110
10.7. Apêndice A7	111
10.8. Apêndice A8	112
10.9. Apêndice A9	114
10.10. Apêndice A10	115
10.11. Apêndice A11	120

Lista de Figuras

Figura 1: ETTJ observada em um dia hipotético	29
Figura 2: ETTJ observada (completa) em um dia hipotético	30
Figura 3: Yield spread (6 meses e 1 ano) no dia 21-Dez-2000	33
Figura 4: Taxa anualizada versus forward rate	36
Figura 5: Valor de λ implicado pelo modelo unifatorial de Vasicek	84
Figura 6: Valor de λ implicado pelo modelo unifatorial de CIR	85
Figura 7: Valor do preço do risco de mercado implicado pelo modelo unifatorial de CIR	85
Figura 8: Vasicek 1 fator – CDI o/n	106
Figura 9: CIR 1 fator – CDI o/n	106
Figura 10: Vasicek 2 fatores– CDI o/n	106
Figura 11: CIR 2 fatores– CDI o/n	106
Figura 12: Vasicek 1 fator – swap 30d	106
Figura 13: CIR 1 fator – swap 30d	106
Figura 14: Vasicek 2 fatores– swap 30d	106
Figura 15: CIR 2 fatores– swap 30d	106
Figura 16: Vasicek 1 fator – swap 360d	107
Figura 17: CIR 1 fator – swap 360d	107
Figura 18: Vasicek 2 fatores– swap 360d	107
Figura 19: CIR 2 fatores– swap 360d	107
Figura 20: Vasicek 1 fator – CDI o/n	108
Figura 21: CIR 1 fator – CDI o/n	108
Figura 22: Vasicek 2 fatores– CDI o/n	108
Figura 23: CIR 2 fatores– CDI o/n	108
Figura 24: Vasicek 1 fator – swap 60d	108
Figura 25: CIR 1 fator – swap 60d	108
Figura 26: Vasicek 2 fatores– swap 60d	108
Figura 27: CIR 2 fatores– swap 60d	108
Figura 28: Vasicek 1 fator – swap 360d	109
Figura 29: CIR 1 fator – swap 360d	109

Figura 30: Vasicek 2 fatores– swap 360d	109
Figura 31: CIR 2 fatores– swap 360d	109
Figura 32: Vasicek 1 fator – esperado	110
Figura 33: CIR 1 fator – esperado	110
Figura 34: Vasicek 2 fatores – esperado	110
Figura 35: CIR 2 fatores – esperado	110
Figura 36: Excesso de retorno realizado	110
Figura 37: Vasicek 1 fator	111
Figura 38: CIR 1 fator	111
Figura 39: Vasicek 2 fatores	111
Figura 40: CIR 2 fatores	111
Figura 41: Vasicek 1 fator	111
Figura 42: CIR 1 fator	111
Figura 43: Vasicek 2 fatores	111
Figura 44: CIR 2 fatores	111
Figura 45: Vasicek	112
Figura 46: CIR	112
Figura 47: Vasicek	112
Figura 48: CIR	112
Figura 49: Vasicek	112
Figura 50: CIR	112
Figura 51: Vasicek	113
Figura 52: CIR	113
Figura 53: Vasicek	113
Figura 54: CIR	113
Figura 55: Vasicek	113
Figura 56: CIR	113
Figura 57: Taxas ETTJ	114
Figura 58: Taxas forward	114

Lista de Tabelas

Tabela 1: ETTJ observada em um dia hipotético	29
Tabela 2: Experimento de Monte Carlo	76
Tabela 3: Parâmetros estimados para o modelo de Vasicek (2000 a 2004)	94
Tabela 4: Parâmetros estimados para o modelo de CIR (2000 a 2004)	94
Tabela 5: Parâmetros estimados para o modelo de Vasicek (2000)	95
Tabela 6: Parâmetros estimados para o modelo de CIR (2000)	95
Tabela 7: Parâmetros estimados para o modelo de Vasicek (2001)	96
Tabela 8: Parâmetros estimados para o modelo de CIR (2001)	96
Tabela 9: Parâmetros estimados para o modelo de Vasicek (2002)	97
Tabela 10: Parâmetros estimados para o modelo de CIR (2002)	97
Tabela 11: Parâmetros estimados para o modelo de Vasicek (2003/04)	98
Tabela 12: Parâmetros estimados para o modelo de CIR (2003/04)	98
Tabela 13: Estabilidade dos parâmetros de Vasicek nas subamostras (2000-01-02-03)	99
Tabela 14: Estabilidade dos parâmetros de CIR nas subamostras (2000-01-02-03)	100
Tabela 15: Variáveis de estado filtradas - modelo de Vasicek (2000 a 2004)	101
Tabela 16: Variáveis de estado preditas - modelo de Vasicek (2000 a 2004)	102
Tabela 17: Variáveis de estado filtradas - modelo de CIR (2000 a 2004)	103
Tabela 18: Variáveis de estado preditas - modelo de CIR (2000 a 2004)	104
Tabela 19: Diferença entre taxas observadas e modelo de Vasicek 1 fator (2000 a 2004)	105
Tabela 20: Diferença entre taxas observadas e modelo de CIR 1 fator (2000 a 2004)	105
Tabela 21: Diferença entre taxas observadas e modelo Vasicek 2 fatores	

(2000 a 2004)	105
Tabela 22: Diferença entre taxas observadas e modelo CIR 2 fatores (2000 a 2004)	105
Tabela 23: Diferença entre taxas observadas e modelo martingal (2000 a 2004)	105
Tabela 24: Média das taxas	114
Tabela 25: Desvio padrão das taxas	114
Tabela 26: Yield spread médios	114
Tabela 27: Taxas forward médias	114