

5

Métodos híbridos simplificados dos elementos de contorno

Neste capítulo, estão apresentados o método híbrido simplificado de tensões dos elementos de contorno (MHSTEC), o método híbrido simplificado de deslocamentos dos elementos de contorno (MHSDEC) e o método híbrido de malha reduzida dos elementos de contorno (MHMREC).

5.1

Método híbrido simplificado de tensões dos elementos de contorno

5.1.1

Equações matriciais que governam o problema

No método híbrido simplificado de tensões dos elementos de contorno (MSHTEC) [11], realizam-se as mesmas hipóteses de aproximações do MHTEC, ou seja, aproximações de tensões σ_{ij}^f no domínio Ω e deslocamentos u_i no contorno Γ , como esquematizado na Figura 4.1.

Partindo do princípio dos trabalhos virtuais e considerando que a porção do contorno Γ_u será identificada apenas após a formulação matricial do problema, ou seja, $\Gamma_\sigma \equiv \Gamma$ e $\bar{t}_i \equiv t_i$, tem-se que,

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^f \delta \epsilon_{ij} d\Omega = \int_{\Omega} b_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma} t_i \delta u_i d\Gamma \quad (5-1)$$

Considerando as Equações (2-1) e (2-5), integrando o primeiro termo por partes e aplicando o teorema da divergência, chega-se a

$$\int_{\Gamma} t_i^f \delta u_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ji,j}^f \delta u_i d\Omega = \int_{\Omega} b_i \delta u_i d\Omega + \int_{\Gamma} t_i \delta u_i d\Gamma \quad (5-2)$$

Realizando as aproximações pelas Equações (3-12) e (3-13) no contorno e pelas Equações (4-6) e (4-7) no domínio, considerando as Equações (2-27) e (2-28), tem-se que

$$\delta d_n (H_{mn} p_m^* - p_n + p_n^b) = 0 \quad (5-3)$$

em que $H_{mn} \equiv \mathbf{H}$, $p_n \equiv \mathbf{p}$ e $p_n^b \equiv \mathbf{p}^b$ são dados pelas Equações (3-16), (3-39) e (3-40), respectivamente. Assim, para quaisquer δd_n , chega-se à Equação (4-22).

Além das aproximações ilustradas na Figura 4.1, também supõe-se que a Equação (4-5), que expressa os deslocamentos no domínio nos métodos híbridos dos elementos de contorno, também é válida no contorno. Assim, para cada grau de liberdade n , sabendo que as funções u_{is}^r são normalizadas, tem-se que

$$d_n - d_n^b = (U_{nm}^* + W_{nr} C_{rm}) p_m^* \quad \text{ou} \quad \mathbf{d} - \mathbf{d}^b = (\mathbf{U}^* + \mathbf{W} \mathbf{C}) \mathbf{p}^* \quad (5-4)$$

Nessa equação, $U_{nm}^* \equiv \mathbf{U}^*$ é uma matriz simétrica cujos elementos são os deslocamentos u_{im}^* avaliados nos graus de liberdade n . Como essas funções são singulares quando $r = 0$, os elementos de \mathbf{U}^* em que tais funções estão sendo avaliadas no ponto de aplicação de \mathbf{p}^* são indeterminados. A obtenção desses valores indeterminados é apresentada na próxima seção.

Pré-multiplicando a Equação (5-4) por \mathbf{W}^T , considerando a Equação (3-51) e isolando $C_{rm} p_m^*$, chega-se a

$$\mathbf{C}_T \mathbf{p}^* = \mathbf{W}^T (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) - \mathbf{W}^T \mathbf{U}^* \mathbf{p}^* \quad (5-5)$$

em que $\mathbf{C}_T \equiv C_{T_{rm}}$ são as constantes C_{rm} obtidas a partir do critério de que a Equação (4-5) deve ser também válida no contorno.

Substituindo a expressão acima novamente na Equação (5-4) e considerando a Equação (3-55), obtém-se

$$\mathbf{P}_W^\perp \mathbf{U}^* \mathbf{p}^* = \mathbf{P}_W^\perp (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \quad (5-6)$$

O produto $\mathbf{P}_W^\perp \mathbf{U}^*$ é uma matriz singular que transforma forças do sistema interno em deslocamentos admissíveis.

As Equações (5-6) e (4-22) são as expressões matriciais que governam o problema no MHSTEC, a partir das quais se deriva uma matriz de rigidez na Seção 5.1.4. Na Figura 5.1, estão esquematizadas as relações de transformações presentes no MHSTEC entre os parâmetros $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$, \mathbf{p}^* e $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$. Também encontram-se representadas as bases ortonormais dos espaços ortogonais complementares de tais parâmetros.

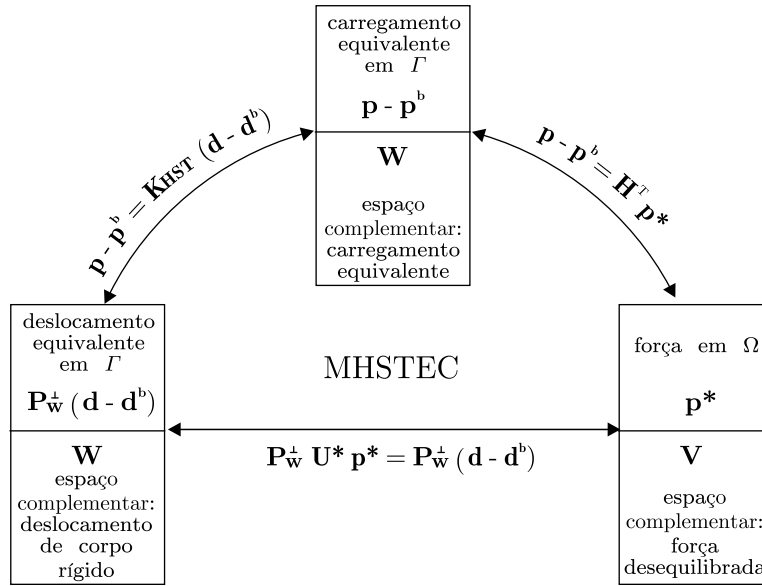


Figura 5.1: Transformações entre os parâmetros presentes no MHSTEC

Comparando com as transformações presentes no MHTEC, esquematizadas na Figura 4.2, nota-se que as equações que relacionam $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$ com \mathbf{d}^* e \mathbf{p}^* com \mathbf{d}^* foram substituídas pela Equação (5-6), que relaciona \mathbf{p}^* com $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$.

**5.1.2
Obtenção dos valores indeterminados de \mathbf{U}^* a partir de \mathbf{V}**

Seja \mathbf{V} a base ortonormal das forças desequilibradas do sistema interno, cuja obtenção está apresentada na Seção 4.2.4. A partir do critério de que a matriz $(\mathbf{U}^* + \mathbf{W} \mathbf{C})$ não deve transformar forças desequilibradas do sistema interno em deslocamentos na Equação (5-4), chega-se a

$$(\mathbf{U}^* + \mathbf{W} \mathbf{C}) \mathbf{V} = (\mathbf{U}^{*T} + \mathbf{W} \mathbf{C}) \mathbf{V} = \mathbf{0} \tag{5-7}$$

através da qual os elementos indeterminados de \mathbf{U}^* podem ser obtidos por mínimos quadrados, desde que \mathbf{C} seja conhecida. A obtenção de \mathbf{C} está apresentada na Seção 5.1.3.

Para problemas de potencial, a base \mathbf{V} é um vetor e os valores indeterminados de \mathbf{U}^* ocorrem em sua diagonal principal. Considerando, então, que \mathbf{U}^* pode ser decomposta como

$$\mathbf{U}^* = \mathbf{U}_D^* + \mathbf{U}_{CD}^* \quad \text{ou} \quad U_{mn}^* = U_{Dmn}^* + U_{CDmn}^* \tag{5-8}$$

sendo que

$$U_{D_{mn}}^* = \begin{cases} U_{mn}^* & \text{se } m = n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5-9)$$

uma matriz diagonal formada pelos elementos indeterminados de U_{mn}^* , pode-se, então, reescrever a Equação (5-7) como

$$U_{D_{mn}}^* V_n = -(W_{mr} C_{rn} - U_{CD_{mn}}^*) V_n = A_m \quad (5-10)$$

Para cada elemento M de A_m , sabendo que

$$U_{D_{Mn}}^* V_n = U_{D_{MM}}^* V_M = U_{MM}^* V_M \quad (5-11)$$

já que $U_{D_{mn}}^*$ é uma matriz diagonal, obtém-se

$$U_{MM}^* = -\frac{(W_{Mr} C_{rn} - U_{CD_{Mn}}^*) V_n}{V_M} \quad (5-12)$$

sendo que o índice M não realiza soma implícita. Assim, desde que se conheça \mathbf{V} , os valores indeterminados de \mathbf{U}^* podem ser obtidos, para problemas de potencial, pela Equação (5-12) .

Analogamente à obtenção dos valores indeterminados de \mathbf{F} na Seção 4.2.2, para valores muito pequenos ou nulos de \mathbf{V} não é possível obter os valores de indeterminados de \mathbf{U}^* pela Equação (5-12), pois o quociente desta torna-se indeterminado, embora a Equação (5-7) continue válida. Na Seção 5.2.6, é apresentada uma relação alternativa a essa, a partir da qual os elementos indeterminados de \mathbf{U}^* podem ser obtidos mesmo que \mathbf{V} assumam valores muito pequenos ou nulos.

De modo análogo, pode-se obter expressões similares para problemas de elasticidade, para as quais também são verificadas essas indeterminações.

5.1.3 Obtenção de C

As constantes C_{sm} podem ser obtidas pela imposição da ortogonalidade entre a solução fundamental u_i^* e quaisquer deslocamentos de corpo rígido \tilde{c}_i^r , dados por

$$\tilde{c}_i^r = u_{im}^r \tilde{C}_m \quad (5-13)$$

sendo \tilde{C}_m constantes quaisquer. Esse critério pode ser aplicado no domínio ou no contorno [8], em que as expressões

$$\int_{\Omega} u_i^* \tilde{c}_i^r d\Omega = 0 \quad \text{ou} \quad (5-14)$$

$$\int_{\Gamma} u_i^* \tilde{c}_i^r d\Gamma = 0 \quad (5-15)$$

devem ser satisfeitas, respectivamente.

5.1.3.1

Obtenção de C a partir do critério de ortogonalidade de deslocamentos no domínio

A partir do critério de ortogonalidade expresso pela Equação (5-14), substituindo as Equações (2-19) e (5-13), para quaisquer p_m^* e \tilde{C}_m , chega-se a

$$\int_{\Omega} (u_{im}^* + u_{ir}^r C_{rm}) u_{is}^r d\Omega = 0 \quad (5-16)$$

Considerando

$$\mathbf{C}_{\Omega}^* \equiv C_{\Omega sm}^* = \int_{\Omega} u_{im}^* u_{is}^r d\Omega \quad \text{e} \quad (5-17)$$

$$\mathbf{C}_{\Omega}^r \equiv C_{\Omega sr}^r = \int_{\Omega} u_{ir}^r u_{is}^r d\Omega \quad (5-18)$$

na Equação (5-16), tem-se que

$$\mathbf{C}_{\Omega} = -(\mathbf{C}_{\Omega}^r)^{-1} \mathbf{C}_{\Omega}^* \quad (5-19)$$

em que $\mathbf{C}_{\Omega} \equiv C_{\Omega sm}$ são as constantes C_{sm} obtidas a partir do critério expresso na Equação (5-14). Sabendo que as tensões correspondentes a deslocamentos de corpo rígido σ_{ij}^r são nulas e utilizando tensões auxiliares σ_{ijm}^{a*} e σ_{ijr}^{ar} , obtidas de a satisfazer as equações diferenciais

$$\sigma_{jim,j}^{a*} = u_{im}^* \quad \text{em } \Omega \quad \text{e} \quad (5-20)$$

$$\sigma_{jir,j}^{ar} = u_{ir}^r \quad \text{em } \Omega \quad (5-21)$$

respectivamente, pode-se, através de integrações por partes e aplicações do teorema da divergência, reescrever as Equações (5-17) e (5-18) em termos das integrais no contorno [11]

$$C_{\Omega sm}^* = \int_{\Gamma} \sigma_{ijm}^{a*} \eta_j u_{is}^r d\Gamma \quad \text{e} \quad (5-22)$$

$$C_{\Omega_{sr}}^r = \int_{\Gamma} \sigma_{ijr}^{ar} \eta_j u_{is}^r d\Gamma \quad (5-23)$$

5.1.3.2

Obtenção de C a partir de critério do ortogonalidade de deslocamentos no contorno

A partir do critério de ortogonalidade expresso pela Equação (5-15), de modo análogo ao que foi apresentado para o critério de ortogonalidade no domínio, chega-se a

$$\mathbf{C}_{\Gamma} = -(\mathbf{C}_{\Gamma}^r)^{-1} \mathbf{C}_{\Gamma}^* \quad (5-24)$$

em que $\mathbf{C}_{\Gamma} \equiv C_{\Gamma_{sm}}$ são as constantes C_{sm} obtidas a partir do critério expresso na Equação (5-15) e

$$\mathbf{C}_{\Gamma}^* \equiv C_{\Gamma_{sm}}^* = \int_{\Gamma} u_{im}^* u_{is}^r d\Gamma \quad e \quad (5-25)$$

$$\mathbf{C}_{\Gamma}^r \equiv C_{\Gamma_{sr}}^r = \int_{\Gamma} u_{ir}^r u_{is}^r d\Gamma \quad (5-26)$$

Ainda não foi estudado um critério de escolha entre as condições de ortogonalidade no domínio e no contorno. No entanto, baseando-se em resultados de exemplos numéricos, verificou-se que a condição de ortogonalidade no domínio e a condição de ortogonalidade no contorno mostraram-se as mais adequadas para problemas de elasticidade e potencial, respectivamente.

5.1.4

Matriz de rigidez

Substituindo a expressão de \mathbf{p}^* da Equação (5-6) na Equação (4-22), chega-se a

$$\mathbf{K}_{\text{HST}} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \quad (5-27)$$

sendo

$$\mathbf{K}_{\text{HST}} = \mathbf{H}^T (\mathbf{P}_{\mathbf{W}}^{\perp} \mathbf{U}^*)^{(-1)} \mathbf{P}_{\mathbf{W}}^{\perp} \quad (5-28)$$

a matriz de rigidez do MHSTEC.

Deseja-se, então, obter a inversa generalizada $(\mathbf{P}_{\mathbf{W}}^{\perp} \mathbf{U}^*)^{(-1)}$ que realiza a transformação inversa

$$(\mathbf{P}_{\mathbf{W}}^{\perp} \mathbf{U}^*)^{(-1)} \mathbf{P}_{\mathbf{W}}^{\perp} \mathbf{d}^* = \mathbf{P}_{\mathbf{V}}^{\perp} \mathbf{p}^* \quad (5-29)$$

ou seja, que transforma deslocamentos admissíveis em forças equilibradas do sistema interno. Então, a matriz $(\mathbf{P}_{\mathbf{W}}^{\perp} \mathbf{U}^*)^{(-1)}$ pode ser obtida pela resolução do sistema restrito

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{\mathbf{W}}^{\perp} \mathbf{U}^* \mathbf{P}_{\mathbf{V}}^{\perp} \mathbf{p}^* = \mathbf{P}_{\mathbf{W}}^{\perp} \mathbf{d}^* \\ \mathbf{P}_{\mathbf{V}} \mathbf{p}^* = \mathbf{0} \end{cases} \quad (5-30)$$

para $\mathbf{P}_{\mathbf{V}}^{\perp} \mathbf{p}^*$, chegando-se à inversa generalizada restrita ao seu próprio espaço [2]

$$(\mathbf{P}_{\mathbf{W}}^{\perp} \mathbf{U}^*)^{(-1)} = \mathbf{P}_{\mathbf{V}}^{\perp} (\mathbf{P}_{\mathbf{W}}^{\perp} \mathbf{U}^* + \mathbf{P}_{\mathbf{V}})^{-1} \quad (5-31)$$

sendo $(\mathbf{P}_{\mathbf{W}}^{\perp} \mathbf{U}^* + \mathbf{P}_{\mathbf{V}})$ uma matriz não-singular.

Desde que os elementos indeterminados de \mathbf{U}^* possam ser obtidos com resíduo nulo segundo o procedimento apresentado na Seção 5.1.2, a Equação (5-7) é válida. Assim, considerando também as Equações (4-35) e (3-67), pode-se reescrever a Equação (5-28) como

$$\mathbf{K}_{\text{HST}} = \mathbf{H}^T (\mathbf{P}_{\mathbf{W}}^{\perp} \mathbf{U}^* + \mathbf{P}_{\mathbf{V}})^{-1} \mathbf{P}_{\mathbf{W}}^{\perp} \quad (5-32)$$

5.1.5

Propriedades de ortogonalidade e consistência das equações matriciais

As propriedades de ortogonalidade de \mathbf{H} e $\mathbf{p} - \mathbf{p}^b$ estão apresentadas nas Seções 3.5.1 e 4.2.5.2. A consistência da Equação (4-22) está apresentada na Seção (4.2.5.4).

5.1.5.1

Propriedade de ortogonalidade de $\mathbf{P}_{\mathbf{W}}^{\perp} \mathbf{U}^*$

Desde que os elementos indeterminados de \mathbf{U}^* possam ser obtidos com resíduo nulo segundo o procedimento apresentado na Seção 5.1.2, pré-multiplicando a Equação (5-7) por $\mathbf{P}_{\mathbf{W}}^{\perp}$ e considerando a Equação (3-57), tem-se que

$$\mathbf{P}_{\mathbf{W}}^{\perp} \mathbf{U}^* \mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (5-33)$$

ou seja, a matriz $\mathbf{P}_{\mathbf{W}}^{\perp} \mathbf{U}^*$ não realiza transformações sobre forças desequilibradas do sistema interno. Caso o resíduo não seja nulo, essa propriedade tende a ser satisfeita como o aumento da discretização do contorno.

Considerando a Equação (3-57), tem-se também que

$$\mathbf{U}^{*T} \mathbf{P}_{\mathbf{W}}^{\perp} \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (5-34)$$

5.1.5.2

Propriedades de ortogonalidade de \mathbf{K}_{HST}

Considerando as Equações (3-57) e (3-66), tem-se que

$$\mathbf{K}_{\text{HST}} \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad (5-35)$$

$$\mathbf{K}_{\text{HST}}^T \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (5-36)$$

ou seja, a matriz \mathbf{K}_{HST} não realiza transformações sobre deslocamentos de corpo rígido.

5.1.5.3

Consistência de $\mathbf{P}_{\mathbf{W}}^{\perp} \mathbf{U}^* \mathbf{p}^* = \mathbf{P}_{\mathbf{W}}^{\perp} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$

Considerando a Equação (3-57), tem-se que ambas as parcelas da Equação (5-6) são ortogonais a \mathbf{W}^T à esquerda.

5.1.5.4

Consistência de $\mathbf{K}_{\text{HST}} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = (\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$

Considerando as Equações (5-36) e (4-47), tem-se que ambas as parcelas da Equação (5-27) são ortogonais a \mathbf{W}^T à esquerda.

5.1.6

Avaliação dos campos de deslocamentos e de tensões no domínio

Os deslocamentos e tensões no domínio nos métodos MHTEC e MHSTEC podem ser calculados a partir das Equações (4-5) e (4-6), respectivamente, em que $p_m^* \equiv \mathbf{p}^*$ pode ser obtido a partir da Equação (4-21) ou (4-22) para o MHTEC e a partir da Equação (4-22) ou (5-6). Tem-se, então, que

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{F}^{(-1)} \mathbf{H} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \quad (5-37)$$

$$\mathbf{p}^* = (\mathbf{H}^T)^{(-1)} (\mathbf{p} - \mathbf{p}^b) \quad (5-38)$$

$$\mathbf{p}^* = (\mathbf{P}_{\mathbf{W}}^{\perp} \mathbf{U}^*)^{(-1)} \mathbf{P}_{\mathbf{W}}^{\perp} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \quad (5-39)$$

sendo $\mathbf{F}^{(-1)}$ dada pela Equação (4-40) e $(\mathbf{P}_{\mathbf{W}}^{\perp} \mathbf{U}^*)^{(-1)}$ dada pela Equação (5-31).

A inversa $(\mathbf{H}^T)^{(-1)}$ é a matriz que realiza a transformação

$$(\mathbf{H}^T)^{(-1)} (\mathbf{p} - \mathbf{p}^b) = \mathbf{P}_{\mathbf{V}}^{\perp} \mathbf{p}^* \quad (5-40)$$

ou seja, que transforma carregamento nodal equivalente em forças equilibradas do sistema interno. Então, considerando a Equação (3-67), a matriz $(\mathbf{H}^T)^{(-1)}$ pode se obtida pela resolução do sistema restrito

$$\begin{cases} \mathbf{H}^T \mathbf{P}_V^\perp \mathbf{p}^* = \mathbf{H}^T \mathbf{p}^* = (\mathbf{p} - \mathbf{p}^b) \\ \mathbf{P}_V \mathbf{p}^* = \mathbf{0} \end{cases} \quad (5-41)$$

para $\mathbf{P}_V^\perp \mathbf{p}^*$, chegando-se à inversa generalizada restrita ao seu próprio espaço [2]

$$(\mathbf{H}^T)^{(-1)} = \mathbf{P}_V^\perp (\mathbf{H}^T + \mathbf{P}_V)^{-1} \quad (5-42)$$

sendo $(\mathbf{H}^T + \mathbf{P}_V)$ uma matriz não-singular.

Como a matriz inversa $\mathbf{F}^{(-1)}$ já é obtida quando do cálculo da matriz de rigidez do MHTEC, utiliza-se a Equação (5-37) para a obtenção de \mathbf{p}^* . Analogamente, no MHSTEC utiliza-se a Equação (5-39).

Na Equação (4-5), o produto $\mathbf{C} \mathbf{p}^*$ deve ser obtido pela Equação (5-5).

Esse modo de avaliar deslocamentos e tensões no domínio também pode ser utilizado no MCCEC, sendo, então, que tais campos não são mais considerados satisfeitos exatamente em Γ , mas aproximadamente pelas Equações (4-5) e (4-6). Nesse caso, as constantes C_{rm} são dadas pela Equação (3-32) e \mathbf{p}^* pela Equação (5-38). Uma outra expressão para \mathbf{p}^* é apresentada na Seção 4.3.6

5.1.7

Obtenção dos valores indeterminados de \mathbf{F} e \mathbf{U}^* a partir da relação $\mathbf{H} \mathbf{U}^* \approx \mathbf{F}$

Pré-multiplicando a Equação (5-6) por \mathbf{H} , considerando as Equações (5-31) e (3-66), tem-se que

$$\mathbf{H} \mathbf{U}^* \mathbf{p}^* = \mathbf{H} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \quad (5-43)$$

Comparando com a Equação (4-21), chega-se à expressão

$$\mathbf{H} \mathbf{U}^* \approx \mathbf{F} \quad (5-44)$$

através da qual, por mínimos quadrados, pode-se obter os valores indeterminados das matrizes \mathbf{F} e \mathbf{U}^* .

Para problemas de potencial, considerando a decomposição das matrizes \mathbf{U}^* e \mathbf{F} pelas Equações (5-8) e (4-24), pode-se reescrever a Equação

(5-44) como

$$H_{np} U_{D_{pm}}^* - F_{D_{nm}} = F_{CD_{nm}} - H_{np} U_{CD_{pm}}^* = A_{nm} \quad (5-45)$$

Para cada coluna M de A_{nm} , já que as matrizes $U_{D_{nm}}^*$ e $F_{D_{nm}}$ são diagonais, tem-se que

$$U_{D_{nM}}^* = \delta_{nM} U_{MM}^* \quad (5-46)$$

$$F_{D_{nM}} = \delta_{nM} F_{MM} \quad (5-47)$$

em que

$$\delta_{nM} = \begin{cases} 1 & \text{se } n = M \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5-48)$$

sendo que o índice M não realiza soma implícita.

Então, sabendo que $H_{np} \delta_{pM} \equiv H_{nM}$, pode-se reescrever a Equação (5-45) como

$$H_{nM} U_{MM}^* - \delta_{nM} F_{MM} = A_{nM} \quad (5-49)$$

em que

$$A_{nM} = F_{CD_{nM}} - H_{np} U_{CD_{pM}}^* \quad (5-50)$$

Resolvendo por mínimos quadrados para U_{MM}^* e F_{MM} , sabendo que $H_{nM} \delta_{nM} \equiv H_{MM}$, obtém-se o sistema de equações possível e determinado

$$\begin{bmatrix} H_{nM} H_{nM} & -H_{MM} \\ -H_{MM} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_{MM}^* \\ F_{MM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_{nM} A_{nM} \\ -A_{MM} \end{pmatrix} \quad (5-51)$$

Assim, mesmo que \mathbf{V} assuma valores muito pequenos ou nulos e os quocientes da Equações (4-28) e (5-12) se tornem indeterminados, pode-se obter os elementos indeterminados de \mathbf{F} e \mathbf{U}^* pela resolução do sistema de equações da Equação (5-51). De modo análogo, sistemas de equações possíveis e determinados também podem ser obtidos para problemas de elasticidade a partir da Equação (5-44).

5.2

Método híbrido simplificado de deslocamentos dos elementos de contorno

5.2.1

Equações matriciais que governam o problema

No método híbrido simplificado de deslocamentos dos elementos de contorno (MSHDEC) [14] realizam-se as mesmas aproximações do MHDEC, ou seja, aproximações de deslocamentos u_i^f no domínio Ω e deslocamentos u_i e forças de superfície t_i no contorno Γ , como esquematizado na Figura 4.3.

Partindo da expressão do resíduo ponderado dos deslocamentos no contorno e considerando que a porção do contorno Γ_u será identificada apenas após a formulação matricial do problema, ou seja, $\Gamma_\sigma \equiv \Gamma$ e $\bar{t}_i \equiv t_i$, tem-se que

$$\int_{\Gamma} \delta t_i (u_i^f - u_i) d\Gamma = 0 \quad (5-52)$$

Realizando as aproximações pelas Equações (3-12) e (3-13) no contorno e pela Equação (4-5) no domínio, chega-se a

$$\delta t_l [(G_{lm} + R_{lr} C_{rm}) p_m^* - L_{lm} (d_m - d_m^b)] = 0 \quad (5-53)$$

em que $G_{lm} \equiv \mathbf{G}$, $R_{lr} \equiv \mathbf{R}$ e $L_{lm} \equiv \mathbf{L}$ são dadas pelas Equações (3-17), (3-21) e (3-41), respectivamente. Assim, para qualquer δt_l , chega-se à Equação (4-57) que, como já apresentado para o MHDEC na Seção 4.3.1, pode ser reescrita como a Equação (4-61) a partir do critério expresso na Equação (3-31).

Além das aproximações ilustradas na Figura 4.3, também supõe-se que a Equação (4-7), que expressa as forças de superfície no domínio nos métodos híbridos dos elementos de contorno, também é válida no contorno. Assim, para cada grau de liberdade de forças de superfície l , tem-se que

$$T_{lm}^* p_m^* = t_l - t_l^b \quad \text{ou} \quad \mathbf{T}^* \mathbf{p}^* = \mathbf{t} - \mathbf{t}^b \quad (5-54)$$

Nessa equação, os elementos de $T_{lm}^* \equiv \mathbf{T}^*$ são as forças de superfície t_{im}^* avaliadas nos graus de liberdade l . Como essas funções são singulares quando $r = 0$, os elementos de \mathbf{T}^* em que tais funções estão sendo avaliadas no ponto de aplicação de \mathbf{p}^* são indeterminados. A obtenção desses valores indeterminados é apresentada na próxima seção. Nota-se que a matriz \mathbf{T}^* é retangular sempre que a técnica de adição de graus de liberdade for utilizada a fim de representar descontinuidades de fluxo normal e forças de superfície no contorno, para problemas de potencial e elasticidade, respectivamente.

Como na Equação (4-61) apenas as forças de superfície equilibradas são transformadas, pode-se também projetá-las na Equação (5-54), che-

gando a

$$\mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{T}^* \mathbf{p}^* = \mathbf{P}_Z^\perp (\mathbf{t} - \mathbf{t}^b) \quad (5-55)$$

As Equações (5-55), (4-61) e (3-44) são as expressões matriciais que governam o problema no MHSDEC, a partir das quais se deriva uma matriz de rigidez na Seção 5.2.3.

Na Figura 5.2, estão esquematizadas as relações de transformações presentes no MHSDEC entre os parâmetros $\mathbf{P}_W^\perp (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$, $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$, $\mathbf{P}_Z^\perp (\mathbf{t} - \mathbf{t}^b)$, \mathbf{p}^* e $\tilde{\mathbf{d}}$. Também encontram-se representadas as bases ortonormais dos espaços ortogonais complementares de tais parâmetros.

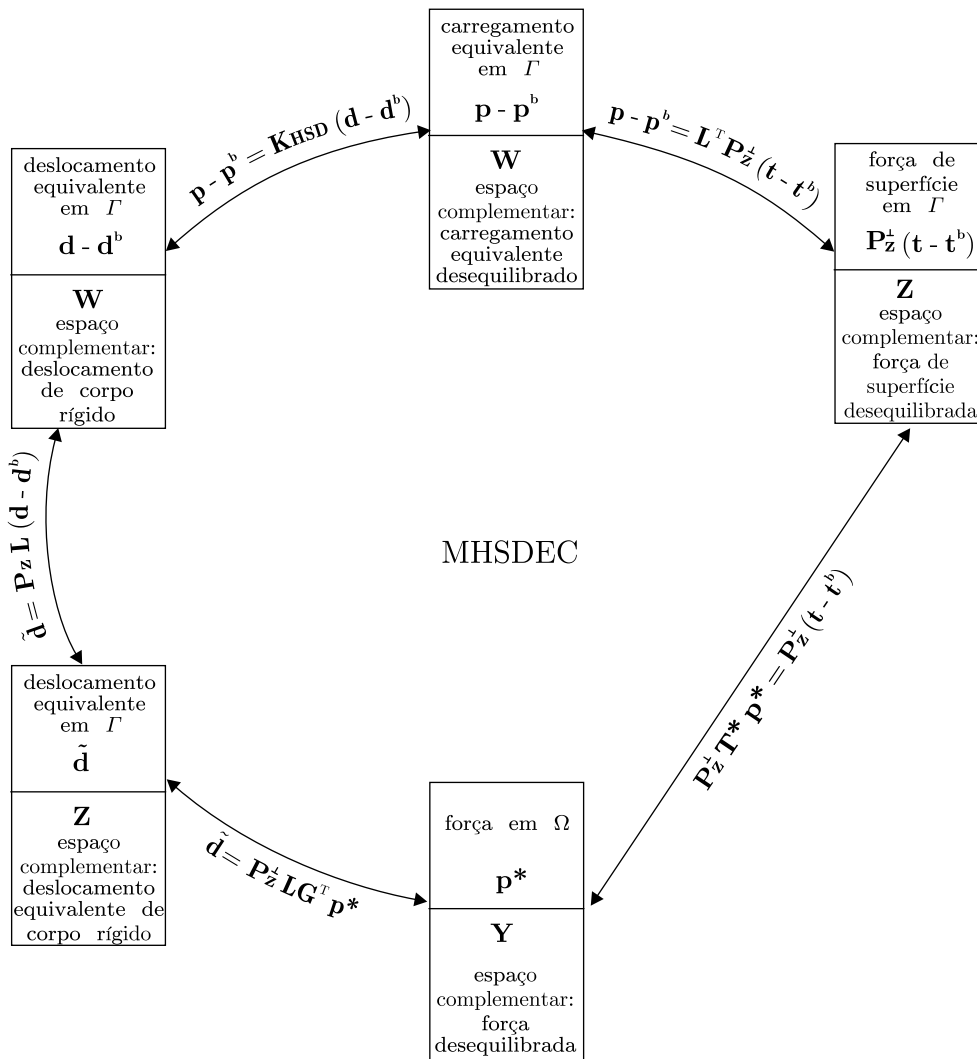


Figura 5.2: Transformações entre os parâmetros presentes no MHSDEC

Comparando as transformações presentes no MHDEC, esquematizadas na Figura 4.4, nota-se que as equações que relacionam \mathbf{p}^* com \mathbf{d}^* e $\mathbf{P}_Z^\perp (\mathbf{t} - \mathbf{t}^b)$ com \mathbf{d}^* foram substituídas pela Equação (5-55), que relaciona \mathbf{p}^* com $\mathbf{P}_Z^\perp (\mathbf{t} - \mathbf{t}^b)$.

5.2.2

Obtenção dos valores indeterminados de \mathbf{T}^* a partir de \mathbf{Y}

Seja \mathbf{Y} a base ortonormal das forças desequilibradas do sistema interno, cuja obtenção está apresentada na Seção 4.3.4. A partir do critério de que a matriz \mathbf{T}^* não deve transformar forças desequilibradas do sistema interno em forças de superfície desequilibradas na Equação (5-55), chega-se a

$$\mathbf{T}^* \mathbf{Y} = \mathbf{0} \quad (5-56)$$

através da qual os elementos indeterminados de \mathbf{T}^* podem ser obtidos por mínimos quadrados.

Para problemas de potencial, a base \mathbf{Y} é um vetor e cada linha de \mathbf{T}^* possui um elemento indeterminado. Assim, em cada coluna de \mathbf{T}^* pode haver um ou dois elementos indeterminados.

Considere que \mathbf{T}^* pode ser decomposta como

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{T}_D^* + \mathbf{T}_{CD}^* \quad \text{ou} \quad T_{lm}^* = T_{Dlm}^* + T_{CDlm}^* \quad (5-57)$$

sendo que

$$T_{Dlm}^* = \begin{cases} T_{lm}^* & \text{se } l \text{ e } m \text{ referem ao mesmo nó} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5-58)$$

é uma matriz formada pelos elementos indeterminados de T_{lm}^* . Pode-se, então, reescrever a Equação (5-57) como

$$T_{Dlm}^* Y_m = -T_{CDlm}^* Y_m = A_l \quad (5-59)$$

Para cada elemento L de A_l e seu correspondente nó M , sabendo que

$$T_{D_{Lm}}^* Y_m = T_{D_{LM}}^* Y_M = T_{LM}^* Y_M \quad (5-60)$$

obtem-se

$$T_{LM}^* = -\frac{T_{CD_{LM}}^* Y_m}{Y_M} \quad (5-61)$$

sendo que os índices M e L não realizam soma implícita. Assim, desde que se conheça \mathbf{Y} , os valores indeterminados de \mathbf{T}^* podem ser obtidos para problemas de potencial pela Equação (5-61).

Analogamente ao MHDEC, para valores nulos ou muito pequenos de \mathbf{Y} não é possível obter os valores de indeterminados de \mathbf{T}^* pela Equação (5-61), pois o quociente desta torna-se indeterminado, embora a Equação (5-56)

permaneça válida. Na Seção 5.2.6, é apresentada uma relação alternativa a essa, a partir da qual se espera que os elementos indeterminados de \mathbf{T}^* possam ser obtidos mesmo que \mathbf{Y} assumam valores muito pequenos ou nulos.

De modo análogo, pode-se obter expressões similares para problemas de elasticidade, para as quais também são verificadas essas indeterminações.

5.2.3

Matriz de rigidez

Isolando \mathbf{p}^* da Equação (4-61), $\mathbf{P}_Z^\perp (\mathbf{t} - \mathbf{t}^b)$ na Equação (5-55) e substituindo na Equação (3-44), chega-se a

$$\mathbf{K}_{\text{HSD}} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \quad (5-62)$$

onde

$$\mathbf{K}_{\text{HSD}} = \mathbf{L}^T \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{T}^* (\mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{G}^T)^{(-1)} \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L} \quad (5-63)$$

é a matriz de rigidez do MHDEC, para $(\mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{G}^T)^{(-1)}$ dada pela Equação (4-75).

Se os valores indeterminados de \mathbf{T}^* forem obtidos com resíduo nulo pela Equação (5-56) e considerando a Equação (4-78), pode-se então reescrever a Equação (5-63) como

$$\mathbf{K}_{\text{HSD}} = \mathbf{L}^T \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{T}^* \mathbf{P}_Z^\perp [(\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp)^{(-1)}]^T \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L} \quad (5-64)$$

5.2.4

Propriedades de ortogonalidade e consistência das equações matriciais

As propriedades de ortogonalidade de $\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp$, $\mathbf{L}^T \mathbf{P}_Z^\perp$ e $\mathbf{p} - \mathbf{p}^b$ estão apresentadas nas Seções 3.5.2, 3.5.3 e 3.5.4, respectivamente. A consistência das Equações (4-61) e (3-44) estão apresentadas nas Seções 4.3.5.4 e 3.5.4.

5.2.4.1

Propriedade de ortogonalidade de \mathbf{T}^*

Desde que os elementos indeterminados de \mathbf{T}^* possam ser obtidos com resíduo nulo segundo o procedimento apresentado na Seção 5.2.2, a Equação (5-56) é válida, ou seja, a matriz \mathbf{T}^* não realiza transformações sobre forças desequilibradas do sistema interno. Caso o resíduo não seja nulo, essa propriedade tende a ser satisfeita como o aumento da discretização do contorno.

5.2.4.2

Propriedades de ortogonalidade de \mathbf{K}_{HSD}

Considerando a Equação (3-71), tem-se que

$$\mathbf{K}_{\text{HSD}} \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad (5-65)$$

$$\mathbf{K}_{\text{HSD}}^T \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (5-66)$$

ou seja, a matriz \mathbf{K}_{HSD} não realiza transformações sobre deslocamentos de corpo rígido.

5.2.4.3

Consistência de $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} \mathbf{T}^* \mathbf{p}^* = \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} (\mathbf{t} - \mathbf{t}^b)$

Considerando a Equação (3-28), tem-se que ambas as parcelas da Equação (5-55) são ortogonais a \mathbf{Z}^T à esquerda.

5.2.4.4

Consistência de $\mathbf{K}_{\text{HSD}} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = (\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$

Considerando as Equações (5-66) e (3-74), tem-se que ambas as parcelas da Equação (5-62) são ortogonais a \mathbf{W}^T à esquerda.

5.2.5

Avaliação dos campos de deslocamentos e de tensões no domínio

Como já foi apresentado para o MHDEC, na Seção 4.3.6, os deslocamentos e tensões no domínio podem ser calculados a partir das Equações (4-86) e (4-6), respectivamente, em que $p_m^* \equiv \mathbf{p}^*$ pode ser obtido pela Equação (4-88).

5.2.6

Obtenção dos valores indeterminados de \mathbf{F} e \mathbf{T}^* a partir da relação $\mathbf{G} \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} \mathbf{T}^* \approx \mathbf{F}$

Isolando $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} (\mathbf{t} - \mathbf{t}^b)$ na Equação (4-58) e comparando com a Equação (5-55), chega-se à expressão

$$\mathbf{T}^* \approx (\mathbf{G} \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp})^{(-1)} \mathbf{F} \quad (5-67)$$

ou seja,

$$\mathbf{G} \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} \mathbf{T}^* \approx \mathbf{F} \quad (5-68)$$

através da qual, por mínimos quadrados, pode-se obter os valores indeterminados das matrizes \mathbf{F} e \mathbf{T}^* .

Para problemas de potencial, considerando a decomposição das matrizes \mathbf{F} e \mathbf{T}^* pelas Equações (5-57) e (4-24) e chamando $\mathbf{G} \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} \equiv \tilde{\mathbf{G}}$, pode-se reescrever a Equação (5-68) como

$$\tilde{G}_{nl} T_{D_{lm}}^* - F_{D_{nm}} = F_{CD_{nm}} - \tilde{G}_{nl} T_{CD_{lm}}^* = A_{nm} \quad (5-69)$$

Para cada coluna M de A_{nm} , já que as matrizes $T_{D_{lm}}^*$ e $F_{D_{nm}}$ são diagonais, tem-se que

$$T_{D_{lM}}^* = \delta_{lQ} T_{QM}^* \quad (5-70)$$

$$F_{D_{nM}} = \delta_{nM} F_{MM} \quad (5-71)$$

em que δ_{nM} é dado pela Equação (5-48) e

$$\delta_{lQ} = \begin{cases} 1 & \text{se } l \text{ e } Q \text{ referem-se ao mesmo grau de liberdade} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (5-72)$$

sendo que o índice Q refere-se aos elementos indeterminados de T_{lm}^* e juntamente com M , não realiza soma implícita.

Então, sabendo que $\tilde{G}_{nl} \delta_{lQ} \equiv \tilde{G}_{nQ}$, pode-se reescrever a Equação (5-69) como

$$\tilde{G}_{nQ} T_{QM}^* - \delta_{nM} F_{MM} = A_{nM} \quad (5-73)$$

em que

$$A_{nM} = F_{CD_{nM}} - \tilde{G}_{nl} T_{CD_{lM}}^* \quad (5-74)$$

Resolvendo por mínimos quadrados para T_{QM}^* e F_{MM} , sabendo que $\tilde{G}_{nQ} \delta_{nM} \equiv \tilde{G}_{MQ}$, obtém-se os sistemas de equações possíveis e determinados

$$\begin{bmatrix} \tilde{G}_{nQ} \tilde{G}_{nQ} & -\tilde{G}_{MQ} \\ -\tilde{G}_{MQ} & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_{QM}^* \\ F_{MM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{G}_{nQ} A_{nM} \\ -A_{MM} \end{pmatrix} \quad (5-75)$$

para as colunas M de T_{lm}^* que possuem somente um elemento indeterminado

de índice correspondente q e

$$\begin{bmatrix} \tilde{G}_{nQ_1} & \tilde{G}_{nQ_1} & \tilde{G}_{nQ_1} & \tilde{G}_{nQ_2} & -\tilde{G}_{MQ_1} \\ \tilde{G}_{nQ_1} & \tilde{G}_{nQ_2} & \tilde{G}_{nQ_2} & \tilde{G}_{nQ_2} & -\tilde{G}_{MQ_2} \\ -\tilde{G}_{MQ_1} & & -\tilde{G}_{MQ_2} & & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_{Q_1M}^* \\ T_{Q_2M}^* \\ F_{MM} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{G}_{nQ_1} A_{nM} \\ \tilde{G}_{nQ_2} A_{nM} \\ -A_{MM} \end{pmatrix} \quad (5-76)$$

para as colunas M de T_{lm}^* que possuem dois elementos indeterminados de índices correspondentes Q_1 e Q_2 , os quais não realizam soma implícita.

Assim, mesmo que \mathbf{Y} assuma valores muito pequenos ou nulos e os quocientes da Equações (4-63) e (5-61) se tornem indeterminados, espera-se que os elementos indeterminados de \mathbf{F} e \mathbf{T}^* possam ser obtidos pela resolução dos sistemas de equações nas Equações (5-75) e (5-76). No entanto, como está apresentado no Capítulo 6, essa relação não é verificada numericamente.

5.3

Método híbrido de malha reduzida dos elementos de contorno

5.3.1

Equações matriciais que governam o problema

O método híbrido de malha reduzida dos elementos de contorno (MHMREC) [14, 15] supõe que as Equações (4-5) e (4-7), que expressam os deslocamentos e as forças de superfície no domínio nos métodos híbridos dos elementos de contorno, também são válidas no contorno. Então, como apresentado nas Seções 5.1.1 e 5.2.1, chega-se às Equações (5-6) e (5-55).

Essas equações, juntamente com a Equação (3-44), são as expressões matriciais que governam o problema no MHMREC, a partir das quais se deriva uma matriz de rigidez na Seção 5.3.3

Na Figura 5.3, estão esquematizadas as relações de transformações presentes no MHMREC entre os parâmetros $\mathbf{P}_{\mathbf{W}}^\perp (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$, $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$, $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^\perp (\mathbf{t} - \mathbf{t}^b)$ e \mathbf{p}^* . Também encontram-se representadas as bases ortonormais dos espaços ortogonais complementares de tais parâmetros.

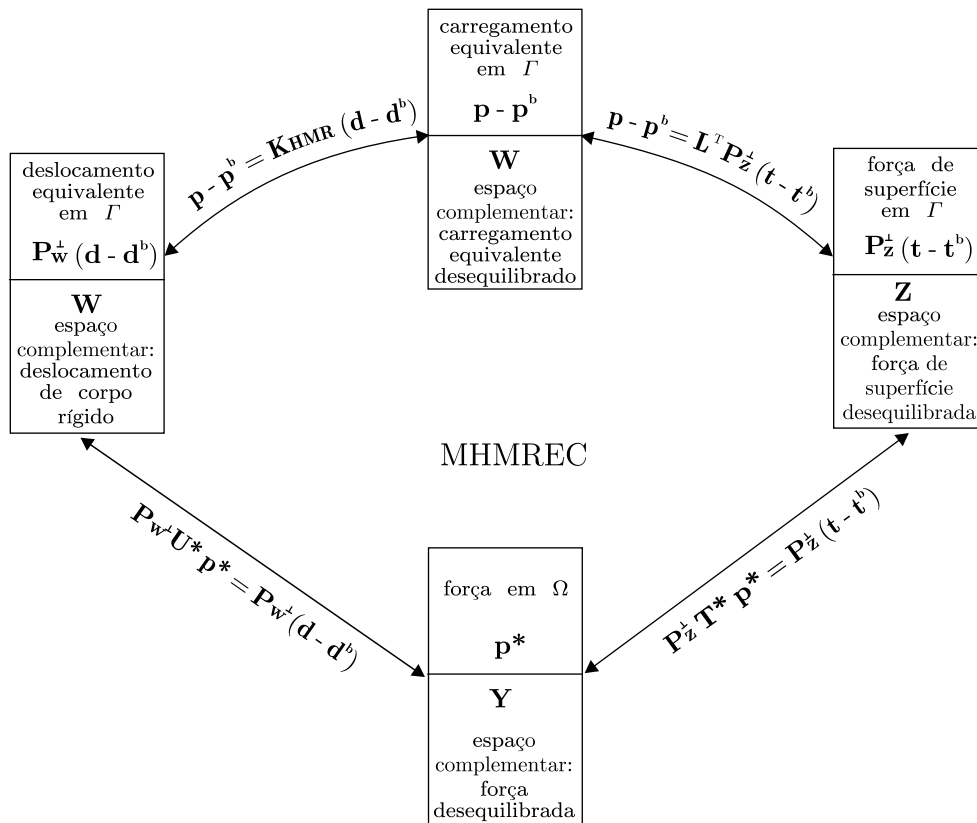


Figura 5.3: Transformações entre os parâmetros presentes no MHMREC

Comparando as transformações presentes no MHSDEC, esquematizadas na Figura 5.2, nota-se que as equações que relacionam $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$ com $\tilde{\mathbf{d}}$ e \mathbf{p}^* com $\tilde{\mathbf{d}}$ foram substituídas pela Equação (5-6), que relaciona \mathbf{p}^* com $\tilde{\mathbf{d}}$.

5.3.2

Obtenção dos valores indeterminados de \mathbf{U}^* e \mathbf{T}^* a partir de \mathbf{V} e \mathbf{Y}

Os valores indeterminados de \mathbf{U}^* e \mathbf{T}^* podem ser obtidos a partir do critério de que, como já apresentado nas Seções 5.1.2 e 5.2.2, a matriz $(\mathbf{U}^* + \mathbf{W}\mathbf{C})$ não deve transformar forças desequilibradas do sistema interno em deslocamentos na Equação (5-4) e a matriz \mathbf{T}^* não deve transformar forças desequilibradas do sistema interno em forças de superfície desequilibradas na Equação (5-54). Assim, pode-se utilizar as Equações

$$(\mathbf{U}^* + \mathbf{W}\mathbf{C})\mathbf{V} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{T}^*\mathbf{V} = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad (5-77)$$

$$(\mathbf{U}^* + \mathbf{W}\mathbf{C})\mathbf{Y} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad \mathbf{T}^*\mathbf{Y} = \mathbf{0} \quad (5-78)$$

Para problemas de potencial, em que as bases \mathbf{V} e \mathbf{Y} são vetores e cada linha de \mathbf{U}^* e \mathbf{T}^* possuem um elemento indeterminado, chega-se a

expressões análogas às apresentadas nas Seções 5.1.2 e 5.2.2 que tornam-se um quociente indeterminado para valores muito pequenos ou nulos de \mathbf{V} ou \mathbf{Y} .

Nas Seções 5.3.6 e 5.3.7 são apresentadas relações alternativas a essas, a partir das quais se espera que os elementos indeterminados de \mathbf{U}^* e \mathbf{T}^* possam ser obtidos mesmo que \mathbf{V} e \mathbf{Y} assumam valores muito pequenos ou nulos.

5.3.3

Matriz de rigidez

Substituindo as expressões de $\mathbf{P}_Z^\perp (\mathbf{t} - \mathbf{t}^b)$ da Equação (5-55) e de \mathbf{p}^* da Equação (5-6) na Equação (3-44), chega-se a

$$\mathbf{K}_{\text{HMR}} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \quad (5-79)$$

sendo

$$\mathbf{K}_{\text{HMR}} = \mathbf{L}^T \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{T}^* (\mathbf{P}_W^\perp \mathbf{U}^*)^{(-1)} \mathbf{P}_W^\perp \quad (5-80)$$

a matriz de rigidez do MHMREC.

A inversa generalizada $(\mathbf{P}_W^\perp \mathbf{U}^*)^{(-1)}$, de modo análogo ao apresentado na Seção 5.1.4 e a depender do critério escolhido na seção anterior, é dada por

$$(\mathbf{P}_W^\perp \mathbf{U}^*)^{(-1)} = \mathbf{P}_V^\perp (\mathbf{P}_W^\perp \mathbf{U}^* + \mathbf{P}_V)^{-1} \quad \text{ou} \quad (5-81)$$

$$(\mathbf{P}_W^\perp \mathbf{U}^*)^{(-1)} = \mathbf{P}_Y^\perp (\mathbf{P}_W^\perp \mathbf{U}^* + \mathbf{P}_Y)^{-1} \quad (5-82)$$

sendo $(\mathbf{P}_W^\perp \mathbf{U}^* + \mathbf{P}_V)$ e $(\mathbf{P}_W^\perp \mathbf{U}^* + \mathbf{P}_Y)$ matrizes não-singulares.

Desde que os elementos indeterminados de \mathbf{U}^* e \mathbf{T}^* possam ser obtidos com resíduo nulo segundo os procedimentos apresentados na seção anterior, as Equações (5-77) ou (5-78) são válidas. Assim, considerando também as Equações (4-35) e (3-33), pode-se reescrever a Equação (5-80) como

$$\mathbf{K}_{\text{HMR}} = \mathbf{L}^T \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{T}^* (\mathbf{P}_W^\perp \mathbf{U}^* + \mathbf{P}_V)^{-1} \mathbf{P}_W^\perp \quad \text{ou} \quad (5-83)$$

$$\mathbf{K}_{\text{HMR}} = \mathbf{L}^T \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{T}^* (\mathbf{P}_W^\perp \mathbf{U}^* + \mathbf{P}_Y)^{-1} \mathbf{P}_W^\perp \quad (5-84)$$

5.3.4

Propriedades de ortogonalidade e consistência das equações matriciais

As propriedades de ortogonalidade de $\mathbf{P}_W^\perp \mathbf{U}^*$, \mathbf{T}^* , $\mathbf{L}^T \mathbf{P}_Z^\perp$ e $\mathbf{p} - \mathbf{p}^b$ estão apresentadas nas Seções 5.1.5.1, 5.2.4.1, 3.5.3 e 3.5.4. A consistência

das Equações (5-6), (5-55) estão apresentadas nas Seções 5.1.5.3 e 5.2.4.3.

5.3.4.1

Propriedades de ortogonalidade de \mathbf{K}_{HMR}

Considerando as Equações (3-71) e (3-57), tem-se que

$$\mathbf{K}_{\text{HMR}} \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad (5-85)$$

$$\mathbf{K}_{\text{HMR}}^T \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (5-86)$$

ou seja, a matriz \mathbf{K}_{HMR} não realiza transformações sobre deslocamentos de corpo rígido.

5.3.4.2

Consistência de $\mathbf{K}_{\text{HMR}} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = (\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$

Considerando as Equações (5-86) e (3-74), tem-se que ambas as parcelas da Equação (5-79) são ortogonais a \mathbf{W}^T à esquerda.

5.3.5

Avaliação dos campos de deslocamentos e de tensões no domínio

Os deslocamentos e tensões no domínio podem ser calculados a partir das Equações (4-5) e (4-6), respectivamente, em que $p_m^* \equiv \mathbf{p}^*$ é dado por Equação (4-88). Na Equação (4-5), o produto $\mathbf{C} \mathbf{p}^*$ deve ser obtido a partir da Equação (5-5).

5.3.6

Obtenção dos valores indeterminados de \mathbf{U}^* a partir da relação $\mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L} \mathbf{U}^* \approx \mathbf{G}^T$

Pré-multiplicando a Equação (5-6) por $\mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L}$ e considerando as Equações (3-71) e (3-57), chega-se a

$$\mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L} \mathbf{U}^* \mathbf{p}^* = \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \quad (5-87)$$

Comparando a equação acima com a Equação (4-61), chega-se à expressão

$$\mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L} \mathbf{U}^* \approx \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{G}^T \quad (5-88)$$

através da qual, por mínimos quadrados, pode-se obter os valores indeterminados da matriz \mathbf{U}^* .

Para problemas de potencial, considerando a decomposição da matriz \mathbf{U}^* pela Equação (5-8) e chamando $\mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L} \equiv \tilde{\mathbf{L}}$ e $\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp \equiv \tilde{\mathbf{G}}$, pode-se reescrever a Equação (5-88) como

$$\tilde{L}_{lp} U_{D_{pm}}^* = \tilde{G}_{ml} - \tilde{L}_{lp} U_{CD_{pm}}^* = A_{lm} \quad (5-89)$$

Para cada coluna M de A_{nm} , considerando a Equação (5-46) e sabendo que $\tilde{L}_{lp} \delta_{pM} \equiv \tilde{L}_{lM}$, pode-se reescrever a equação acima como

$$\tilde{L}_{lM} U_{MM}^* = A_{lM} \quad (5-90)$$

em que

$$A_{lM} = \tilde{G}_{Ml} - \tilde{L}_{lp} U_{CD_{pM}}^* \quad (5-91)$$

sendo que o índice M não realiza soma implícita. Resolvendo por mínimos quadrados, chega-se à expressão

$$U_{MM}^* = \frac{\tilde{L}_{lM} \tilde{G}_{Ml} - \tilde{L}_{lM} \tilde{L}_{lp} U_{CD_{pM}}^*}{\tilde{L}_{lM} \tilde{L}_{lM}} \quad (5-92)$$

Assim, mesmo que \mathbf{V} e \mathbf{Y} assumissem valores muito pequenos ou nulos, espera-se que os elementos indeterminados de \mathbf{U}^* possam ser obtidos pela Equação (5-92). No entanto, como está apresentado no Capítulo 6, essa relação não é verificada numericamente.

5.3.7

Obtenção dos valores indeterminados de \mathbf{T}^* a partir da relação $\mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L}^T \mathbf{T}^* \approx \mathbf{H}^T$

Pré-multiplicando a Equação (5-54) por $\mathbf{L}^T \mathbf{P}_Z^\perp$ e considerando a Equação (3-44), chega-se a

$$\mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L} \mathbf{U}^* \mathbf{p}^* = \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) \quad (5-93)$$

Comparando a equação acima com a Equação (4-22), chega-se à expressão

$$\mathbf{L}^T \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{T}^* \approx \mathbf{H}^T \quad (5-94)$$

através da qual, por mínimos quadrados, pode-se obter os valores indeterminados da matriz \mathbf{T}^* .

Para problemas de potencial, considerando a decomposição da matriz \mathbf{T}^* pela Equação (5-57) e chamando $\mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L} \equiv \tilde{\mathbf{L}}$, pode-se reescrever a Equação (5-94) como

$$\tilde{L}_{ln} T_{D_{lm}}^* = H_{nm} - \tilde{L}_{ln} T_{CD_{lm}}^* = A_{nm} \quad (5-95)$$

Para cada coluna M de A_{nm} , considerando a Equação (5-70) e sabendo que $\tilde{L}_{ln} \delta_{lQ} \equiv \tilde{L}_{Qn}$, pode-se reescrever a equação acima como

$$\tilde{L}_{Qn} T_{Q_M}^* = A_{nM} \quad (5-96)$$

em que

$$A_{nM} = -\tilde{L}_{ln} T_{CD_{lM}}^* \quad (5-97)$$

sendo que o índice Q refere-se aos elementos indeterminados de T_{lm}^* e juntamente com M , não realiza soma implícita.

Então, resolvendo a Equação (5-96) por mínimos quadrados para as colunas M de T_{lm}^* que possuem somente um elemento indeterminado de índice correspondente Q , chega-se à expressão

$$T_{Q_M}^* = -\frac{\tilde{L}_{Qn} \tilde{L}_{ln} T_{CD_{lM}}^*}{\tilde{L}_{Qn} \tilde{L}_{Qn}} \quad (5-98)$$

e resolvendo, por mínimos quadrados, para as colunas M de T_{lm}^* que possuem dois elementos indeterminados de índices correspondentes Q_1 e Q_2 , os quais não realizam soma implícita, chega-se ao sistema de equações possível e determinado

$$\begin{bmatrix} \tilde{L}_{Q_1n} \tilde{L}_{Q_1n} & \tilde{L}_{Q_1n} \tilde{L}_{Q_2n} \\ \tilde{L}_{Q_2n} \tilde{L}_{Q_1n} & \tilde{L}_{Q_2n} \tilde{L}_{Q_2n} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} T_{Q_1M}^* \\ T_{Q_2M}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{L}_{Q_1n} A_{nM} \\ \tilde{L}_{Q_2n} A_{nM} \end{pmatrix} \quad (5-99)$$

Assim, mesmo que \mathbf{V} e \mathbf{Y} assumam valores nulos, espera-se que os elementos indeterminados de \mathbf{T}^* possam ser obtidos pelas Equações (5-98) e (5-99). No entanto, como está apresentado no Capítulo 6, essa relação não é verificada numericamente.

5.3.8

Aplicação do MHMREC

Para problemas de elastostática e de potencial em regime permanente, não há vantagens no uso desse método quando comparado com os demais

apresentados, já que envolve a integração das matrizes \mathbf{H} , \mathbf{G} e \mathbf{L} , além da obtenção de \mathbf{U}^* e \mathbf{T}^* .

No entanto, considere um problema de elastodinâmica, governado pela equação diferencial

$$\sigma_{ji,j} + \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + b_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (5-100)$$

sendo ρ a massa específica do corpo e t o tempo. Considerando uma análise no domínio da frequência, as funções u_{im}^* da solução fundamental para esse tipo de problema pode ser expressa como

$$u_{im}^* = u_{0im}^* + u_{\omega im}^* \quad \text{em } \Omega \quad (5-101)$$

em que u_{0im}^* são as funções singulares referentes ao problema estático e $u_{\omega i}^*$ são funções polinomiais dependentes da frequência ω .

Assim, as matrizes \mathbf{H} e \mathbf{T}^* podem decompostas como

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_\omega \quad (5-102)$$

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{T}_0^* + \mathbf{T}_\omega^* \quad (5-103)$$

Considere, então, a resolução desse problema pelo MHMREC. A matriz de rigidez expressa na Equação (5-80) pode ser reescrita como

$$\mathbf{K}_{\text{HMR}} = \mathbf{L}^T \mathbf{P}_Z^\perp (\mathbf{T}_0^* + \mathbf{T}_\omega^*) (\mathbf{P}_W^\perp \mathbf{U}^*)^{(-1)} \mathbf{P}_W^\perp \quad (5-104)$$

Apesar da relação expressa na Equação (5-94) se verificar numericamente para \mathbf{T}_ω^* , mostra-se inválida para \mathbf{T}_0^* . Assim, substituindo essa relação para \mathbf{T}_0^* na Equação (5-104), chega-se a

$$\mathbf{K}_{\text{HMR}} = (\mathbf{H}_0^T + \mathbf{L}^T \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{T}_\omega^*) (\mathbf{P}_W^\perp \mathbf{U}^*)^{(-1)} \mathbf{P}_W^\perp \quad (5-105)$$

Desse modo, para a análise de um problema no domínio da frequência, a utilização da Equação (5-105) em substituição à Equação (5-104) elimina a necessidade do cálculo da matriz \mathbf{H}_ω^T para cada ω . Em substituição, já que a matriz $\mathbf{L}^T \mathbf{P}_Z^\perp$ não é dependente da frequência e portanto pode ser calculada apenas uma vez, deve-se obter apenas a matriz \mathbf{T}_ω^* , a qual não envolve integração nem singularidades e é obtida diretamente pela avaliação das funções $t_{\omega il}^*$.