4
Métodos híbridos dos elementos de contorno

Neste capítulo, estão apresentados o método híbrido de tensões dos elementos de contorno(MHTEC) [4] e o método híbrido de deslocamentos dos elementos de contorno(MHDEC) [6].

4.1
Aproximações no contorno e no domínio

Do mesmo modo que no MCCEC, nos métodos híbridos dos elementos de contorno os deslocamentos e as forças de superfície são aproximados no contorno Γ pelas Equações (3-12) e (3-13), respectivamente [12].

No domínio Ω, a equação diferencial que governa o problema, expressa na Equação (2-6), é aproximada por

$$\sigma^f_{ji,j} = \sigma^*_{ji,j} + \sigma^b_{ji,j} \quad \text{em} \quad \Omega \tag{4-1}$$

Assim, os deslocamentos, as tensões e as forças de superfície são aproximados, respectivamente, por

$$u^f_i = u^*_i + u^b_i \quad \text{em} \quad \Omega \tag{4-2}$$
$$\sigma^f_{ij} = \sigma^*_{ij} + \sigma^b_{ij} \quad \text{em} \quad \Omega \tag{4-3}$$
$$t^f_i = t^*_i + t^b_i \quad \text{em} \quad \Gamma \tag{4-4}$$

em que u^b_i, σ^b_{ij} e t^b_i constituem uma solução particular qualquer da Equação (3-4) e u^*_i, σ^*_{ij} e t^*_i são a solução fundamental e as tensões e forças de superfície correspondentes, dados pelas Equações (2-19) a (2-21), respectivamente [12]. Tem-se, então, que

$$u^f_i = u^*_{im}\, p^*_m + u^r_{ir}\, C_{rm}\, p^*_m + u^b_i \tag{4-5}$$
$$\sigma^f_{ij} = \sigma^*_{ijm}\, p^*_m + \sigma^b_{ij} \tag{4-6}$$
$$t^f_i = t^*_{im}\, p^*_m + t^b_i \tag{4-7}$$

4.2 Método híbrido de tensões dos elementos de contorno

4.2.1 Equações matriciais que governam o problema

No método híbrido de tensões dos elementos de contorno (MHTEC) [4] aproximam-se tensões σ_{ij}^f no domínio Ω e deslocamentos u_i no contorno Γ, como esquematizado na Figura 4.1.

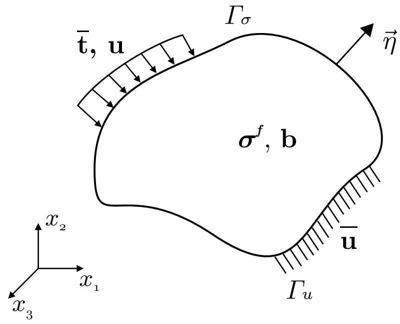

Figura 4.1: Aproximações do método híbrido de tensões dos elementos de contorno

Sua formulação origina-se da variação do potencial de Hellinger-Reissner

$$-\Pi_{HR}(\sigma_{ij}^f, u_i) = \int_\Omega U_0^C(\sigma_{ij}^f)\, d\Omega + \int_\Omega (\sigma_{ji,j}^f + b_i)\, u_i\, d\Omega - \int_\Gamma t_i^f\, u_i\, d\Gamma + \int_{\Gamma_\sigma} \bar{t}_i\, u_i\, d\Gamma \quad (4\text{-}8)$$

em que U_0^C é a energia de deformação complementar. Esse potencial, função dos campos de tensões no domínio e deslocamentos no contorno, pode ser derivado a partir da expressão da energia potencial total estacionária generalizada através de integração por partes e aplicação do teorema da divergência, satisfazendo previamente as Equações (2-5) e (2-9) e considerando

$$U_0^C(\sigma_{ij}^f) = \sigma_{ij}^f\, \epsilon_{ij} - U_0(\epsilon_{ij}) \quad \text{em} \quad \Omega \quad (4\text{-}9)$$

sendo $U_0(\epsilon_{ij})$ a energia de deformação.

Variando a Equação (4-8) e considerando que a porção do contorno Γ_u será identificada apenas após a formulação matricial do problema, ou seja,

$\Gamma_\sigma \equiv \Gamma$ e $\bar{t}_i \equiv t_i$, tem-se que

$$-\delta\Pi_{HR}(\sigma^f_{ij}, u_i) = \int_\Omega \delta U_0^C(\sigma^f_{ij})\, d\Omega + \int_\Omega \delta\sigma^f_{ji,j}\, u_i\, d\Omega +$$
$$\int_\Omega (\sigma^f_{ji,j} + b_i)\,\delta u_i\, d\Omega - \int_\Gamma \delta t^f_i\, u_i\, d\Gamma - \int_\Gamma t^f_i\,\delta u_i\, d\Gamma + \int_\Gamma t_i\,\delta u_i\, d\Gamma \quad (4\text{-}10)$$

Sabendo que

$$\delta U_0^C(\sigma^f_{ij}) = \delta\sigma^f_{ij}\epsilon^f_{ij} = \delta\sigma^f_{ij}u^f_{i,j} \quad (4\text{-}11)$$

e realizando as aproximações pelas Equações (3-12) e (3-13) no contorno e pelas Equações (4-5) a (4-7) no domínio, através de integração por partes e aplicação do teorema da divergência, chega-se à expressão para o primeiro termo integral da Equação (4-10)

$$\int_\Omega \delta U_0^C(\sigma^f_{ij})\, d\Omega = \delta p^*_m \Bigg[\left(\int_\Gamma t^*_{im}\, u^*_{in}\, d\Gamma - \int_\Omega \sigma^*_{jim,j}\, u^*_{in}\, d\Omega\right) p^*_n +$$
$$\left(\int_\Gamma t^*_{im}\, u_{in}\, d\Gamma - \int_\Omega \sigma^*_{jim,j}\, u_{in}\, d\Omega\right) d^b_n +$$
$$c^r_i \left(\int_\Gamma t^*_{im} d\Gamma - \int_\Omega \sigma^*_{jim,j} d\Omega\right)\Bigg] \quad (4\text{-}12)$$

Considerando as Equações (2-27) e (2-28), chega-se então a

$$\int_\Omega \delta U_0^C(\sigma^f_{ij})\, d\Omega = \delta p^*_m (F_{mn}\, p^*_n + H_{mn}\, d^b_n) \quad (4\text{-}13)$$

sendo

$$\mathbf{F} \equiv F_{mn} = \int_\Gamma t^*_{im}\, u^*_{in}\, d\Gamma + u^*_{mn} \quad (4\text{-}14)$$

e H_{mn} dada pela Equação (3-16).

Para os demais termos da Equação (4-10), obtém-se

$$\int_\Omega \delta\sigma^f_{ji,j}\, u_i\, d\Omega - \int_\Gamma \delta t^f_i\, u_i\, d\Gamma = -\delta p^*_m\, H_{mn}\, d_n \quad (4\text{-}15)$$
$$\int_\Omega (\sigma^f_{ji,j} + b_i)\,\delta u_i\, d\Omega - \int_\Gamma t^f_i\,\delta u_i\, d\Gamma = \delta d_m\, (-H_{nm}\, p^*_n - p^b_m) \quad (4\text{-}16)$$
$$\int_\Gamma t_i\,\delta u_i\, d\Gamma = \delta d_m\, p_m \quad (4\text{-}17)$$

sendo

$$p_m = \int_\Gamma t_i\, u_{im}\, d\Gamma \quad \text{e} \quad (4\text{-}18)$$
$$p^b_m = \int_\Gamma t^b_i\, u_{im}\, d\Gamma \quad (4\text{-}19)$$

carregamentos nodais equivalentes.

Assim, reescrevendo a Equação (4-10), chega-se a

$$-\delta\Pi_{HR} = \delta p_m^* \left[F_{mn}\, p_n^* - H_{mn}\,(d_n - d_n^b)\right] + \delta d_m \left[-H_{nm}\, p_n^* + (p_m - p_m^b)\right] \quad (4\text{-}20)$$

da qual, aplicando-se o princípio da estacionariedade do potencial, para quaisquer δp_m^* e δd_m, obtém-se

$$\mathbf{F}\,\mathbf{p}^* = \mathbf{H}\,(\mathbf{d} - \mathbf{d^b}) \quad (4\text{-}21)$$

$$\mathbf{H}^T\,\mathbf{p}^* = \mathbf{p} - \mathbf{p^b} \quad (4\text{-}22)$$

As Equações (4-21) e (4-22) são as expressões matriciais que governam o problema no MHTEC, a partir das quais se deriva uma matriz de rigidez na Seção 4.2.3.

A matriz $\mathbf{F}$, simétrica por construção, realiza uma transformação de flexibilidade sobre forças equilibradas $\mathbf{p}^*$ do sistema interno. Como ambas as funções t_{im}^* e u_{in}^* são singulares para $r = 0$, dado pela Equação (2-31), os elementos de $\mathbf{F}$ em que tais funções estão sendo avaliadas no ponto de aplicação de $\mathbf{p}^*$ são indeterminados pela Equação (4-14). A obtenção desses valores é apresentada na próxima seção.

Na Figura 4.2, estão esquematizadas as relações de transformações presentes no MHTEC entre os parâmetros $(\mathbf{d} - \mathbf{d^b})$, $\mathbf{d}^*$, $\mathbf{p}^*$ e $(\mathbf{p} - \mathbf{p^b})$. Também encontram-se representadas as bases ortonormais dos espaços ortogonais complementares de tais parâmetros.

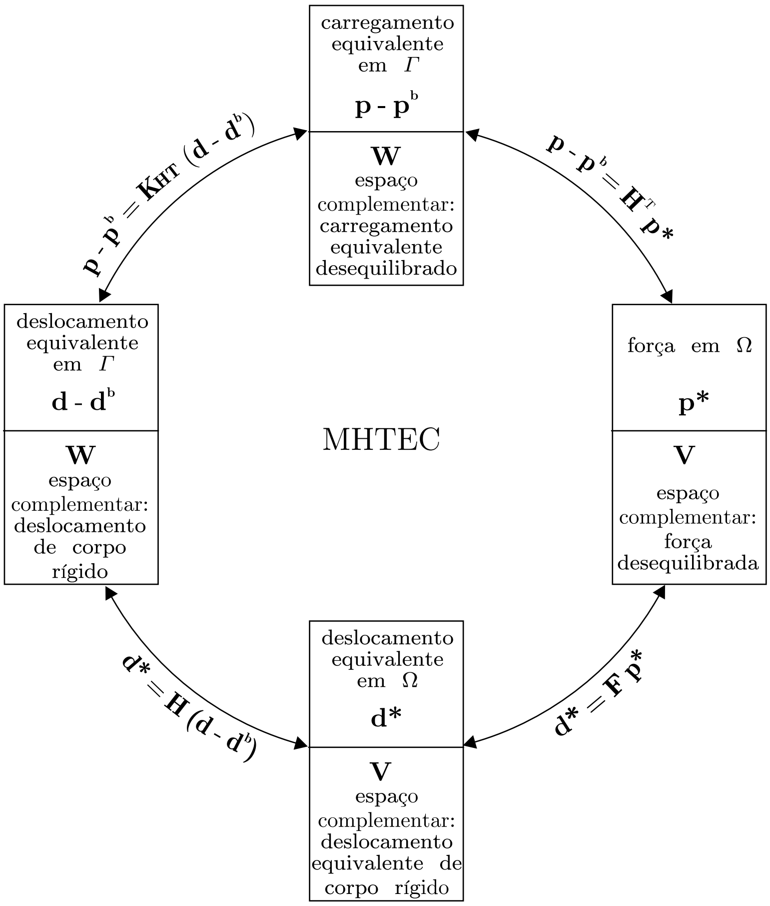

Figura 4.2: Transformações entre os parâmetros presentes no MHTEC

Nota-se que a Equação (4-21) expressa uma relação de compatibilidade de deslocamentos, em que as matrizes $\mathbf{H}$ e $\mathbf{F}$ transformam valores em deslocamentos equivalentes $\mathbf{d}^*$ de um sistema interno. A Equação (4-22) expressa uma relação de equilíbrio de forças, em que a matriz $\mathbf{H}^T$ transforma forças equilibradas $\mathbf{p}^*$ do sistema interno em carregamento nodal equivalente.

4.2.2
Obtenção dos valores indeterminados de $\mathbf{F}$ a partir de $\mathbf{V}$

Seja $\mathbf{V}$ a base ortonormal das forças desequilibradas $\mathbf{p}^*$ do sistema interno, já apresentada na Seção 3.5.1. Considerando a Equação (3-67) e a simetria de $\mathbf{F}$, para que a Equação (4-21) seja consistente à esquerda tem-se que

$$\mathbf{F}\,\mathbf{V} = \mathbf{F}^T\,\mathbf{V} = \mathbf{0} \tag{4-23}$$

ou seja, forças desequilibradas do sistema interno não devem ser transformadas em deslocamentos equivalentes do sistema interno. Assim, os elementos indeterminados de $\mathbf{F}$ podem ser obtidos pela resolução da Equação (4-23) por mínimos quadrados.

Para problemas de potencial, a base $\mathbf{V}$ é um vetor e os valores indeterminados de $\mathbf{F}$ ocorrem em sua diagonal principal. Considerando, então, que $\mathbf{F}$ pode ser decomposta como

$$\mathbf{F} = \mathbf{F_D} + \mathbf{F_{CD}} \quad \text{ou} \quad F_{mn} = F_{D_{mn}} + F_{CD_{mn}} \tag{4-24}$$

sendo que

$$F_{D_{mn}} = \begin{cases} F_{mn} & \text{se } m = n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{4-25}$$

é uma matriz diagonal formada pelos elementos indeterminados de F_{mn}, pode-se, então, reescrever a Equação (4-23) como

$$F_{D_{mn}} V_n = -F_{CD_{mn}} V_n = A_m \tag{4-26}$$

Para cada elemento M de A_m, sabendo que

$$F_{D_{Mn}} V_n = F_{D_{MM}} V_M = F_{MM} V_M \tag{4-27}$$

já que $F_{D_{mn}}$ é uma matriz diagonal, obtém-se

$$F_{MM} = -\frac{F_{CD_{Mn}} V_n}{V_M} \tag{4-28}$$

sendo que o índice M não realiza soma implícita. Assim, desde que se conheça $\mathbf{V}$, os valores indeterminados de $\mathbf{F}$ para problemas de potencial podem ser obtidos pela Equação (4-28) .

No entanto, V_M pode adquirir valores muito pequenos ou nulos nos graus de liberdade M posicionados em concavidades e em contornos internos de domínios multiplamente conexos. Nesses casos, verifica-se que tanto A_M como V_M são muito pequenos ou nulos e portanto, o quociente da Equação (4-28) torna-se indeterminado, impossibilitando então a obtenção dos elementos F_{MM} por essa expressão, apesar da Equação (4-23) continuar válida. Esta indeterminação também pode ocorrer em alguns problemas envolvendo material com gradação funcional, em que V_M troca de sinal ao longo do contorno e portanto, também pode apresentar valores muito pequenos ou nulos.

De modo análogo ao apresentado, pode-se obter expressões similares à Equação (4-28) para problemas de elasticidade, para as quais também são verificadas essas indeterminações.

Na Seção 5.1.7, é apresentada uma relação alternativa à Equação (4-23), a partir da qual os elementos indeterminado de $\mathbf{F}$ podem ser obtidos mesmo quando existem valores muito pequenos ou nulos em $\mathbf{V}$.

4.2.3 Matriz de rigidez

Substituindo a expressão de $\mathbf{p}^*$ da Equação (4-21) na Equação (4-22), chega-se a

$$\mathbf{K_{HT}}\,(\mathbf{d}-\mathbf{d^b}) = \mathbf{p}-\mathbf{p^b} \tag{4-29}$$

sendo

$$\mathbf{K_{HT}} = \mathbf{H}^T\,\mathbf{F}^{(-1)}\,\mathbf{H} \tag{4-30}$$

a matriz de rigidez do MHTEC, simétrica por construção. A matriz $\mathbf{F}^{(-1)}$ é obtida a seguir.

Considere $\mathbf{V} \equiv V_{mr}$ uma base ortonormal do espaço das forças desequilibradas do sistema interno, tal que

$$\mathbf{V}^T\,\mathbf{V} = \mathbf{I} \tag{4-31}$$

Pode-se, portanto, definir um projetor ortogonal idempotente único para o espaço das forças desequilibradas do sistema auxiliar

$$\mathbf{P_V} = \mathbf{V}\,\mathbf{V}^T \tag{4-32}$$

de propriedades conhecidas

$$\mathbf{P_V}\,\mathbf{P_V} = \mathbf{P_V} \tag{4-33}$$

$$\mathbf{P_V}\,\mathbf{V} = \mathbf{V} \tag{4-34}$$

Supondo o espaço das forças equilibradas ortogonal e complementar ao espaço das forças desequilibradas, tem-se que

$$\mathbf{P}_\mathbf{V}^\perp = \mathbf{I}-\mathbf{P_V} = \mathbf{I}-\mathbf{V}\,\mathbf{V}^T \tag{4-35}$$

sendo $\mathbf{P}_\mathbf{V}^\perp$ o projetor ortogonal do espaço das forças equilibradas do sistema interno, de propriedades conhecidas

$$\mathbf{P}_\mathbf{V}^\perp\,\mathbf{P}_\mathbf{V}^\perp = \mathbf{P}_\mathbf{V}^\perp \tag{4-36}$$

$$\mathbf{P}_\mathbf{V}^\perp\,\mathbf{V} = \mathbf{0} \tag{4-37}$$

Deseja-se, então, obter a inversa generalizada $\mathbf{F}^{(-1)}$ que realiza a transformação inversa

$$\mathbf{F}^{(-1)}\,\mathbf{d}^* = \mathbf{P}_{\mathbf{V}}^{\perp}\,\mathbf{p}^* \tag{4-38}$$

ou seja, que transforma deslocamentos equivalentes em forças equilibradas no sistema interno. Então, a matriz $\mathbf{F}^{(-1)}$ pode ser obtida pela resolução do sistema restrito

$$\begin{cases} \mathbf{F}\,\mathbf{P}_{\mathbf{V}}^{\perp}\,\mathbf{p}^* = \mathbf{d}^* \\ \mathbf{P}_{\mathbf{V}}\,\mathbf{p}^* = \mathbf{0} \end{cases} \tag{4-39}$$

para $\mathbf{P}_{\mathbf{V}}^{\perp}\,\mathbf{p}^*$, chegando-se à inversa generalizada restrita ao seu próprio espaço

$$\mathbf{F}^{(-1)} = \mathbf{P}_{\mathbf{V}}^{\perp}\,(\mathbf{F}\,\mathbf{P}_{\mathbf{V}}^{\perp} + \mathbf{P}_{\mathbf{V}})^{-1} \tag{4-40}$$

ou inversa de Bott-Duffin [2], sendo $(\mathbf{F}\,\mathbf{P}_{\mathbf{V}}^{\perp} + \mathbf{P}_{\mathbf{V}})$ uma matriz simétrica positiva definida.

Desde que os elementos indeterminados de $\mathbf{F}$ possam ser obtidos segundo os procedimentos apresentados na Seção 4.2.2, a Equação (4-23) é válida. Assim, considerando também as Equações (4-35) e (3-67), pode-se reescrever a Equação (4-30) como

$$\mathbf{K_{HT}} = \mathbf{H^T}\,(\mathbf{F} + \mathbf{P_V})^{\mathbf{-1}}\,\mathbf{H} \tag{4-41}$$

4.2.4
Obtenção da base de forças desequilibradas do sistema interno V

Como já apresentado na Seção 3.5.1, a base do espaço das forças $\mathbf{V}$ do sistema interno pode ser obtida a partir da Equação (3-67), ou seja, pela obtenção do espaço nulo de $\mathbf{H}^T$.

Supondo que os parâmetros $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p^b}$ representam as mesmas grandezas físicas que $\mathbf{p}^*$, tem-se que

$$\text{posto}(\widetilde{\mathbf{V}}) = \text{posto}(\mathbf{W}) \tag{4-42}$$

sendo $\widetilde{\mathbf{V}}$ uma base qualquer, não necessariamente normalizada do espaço das forças desequilibradas do sistema interno. Assim, supondo também que as bases ortonormais $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ pertencem a espaços não-ortogonais, pode-se obter $\mathbf{W}$ pela projeção $\widetilde{\mathbf{V}}$ no espaço dos deslocamentos de corpo rígido, ou seja,

$$\mathbf{P_W}\,\widetilde{\mathbf{V}} = \mathbf{W} \tag{4-43}$$

Então, considerando também a Equação (3-67), a base $\widetilde{\mathbf{V}}$ pode ser obtida pela resolução do sistema de equações

$$(\mathbf{H}^T + \mathbf{P_W})\,\widetilde{\mathbf{V}} = \mathbf{W} \tag{4-44}$$

sendo $(\mathbf{H}^T + \mathbf{P_W})$ uma matriz não-singular. A base $\mathbf{V}$ pode então também ser obtida pela normalização de $\widetilde{\mathbf{V}}$.

4.2.5 Propriedades de ortogonalidade e consistência das equações matriciais

As propriedades de ortogonalidade de $\mathbf{H}$ estão apresentadas na Seção 3.5.1, nas Equações (3-66) e (3-67).

4.2.5.1 Propriedade de ortogonalidade de $\mathbf{F}$

Desde que os elementos indeterminados de $\mathbf{F}$ possam ser obtidos com resíduo nulo segundo o procedimento apresentado na Seção 4.2.2, a propriedade de ortogonalidade expressa na Equação (4-23) é válida, ou seja, a matriz simétrica $\mathbf{F}$ não realiza transformações sobre forças desequilibradas do sistema interno. Caso o resíduo não seja nulo, essa propriedade tende a ser satisfeita como o aumento da discretização do contorno.

4.2.5.2 Propriedades de ortogonalidade de $\mathbf{K_{HT}}$ e $\mathbf{p} - \mathbf{p^b}$

Considerando a Equação (3-66) na Equação (4-30), tem-se que

$$\mathbf{K_{HT}}\,\mathbf{W} = \mathbf{0} \quad \text{e} \tag{4-45}$$

$$\mathbf{K}^T_{\mathbf{HT}}\,\mathbf{W} = \mathbf{0} \tag{4-46}$$

ou seja, a matriz $\mathbf{K_{HT}}$ não realiza transformações sobre deslocamentos de corpo rígido.

Supondo que os carregamentos nodais equivalentes $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p^b}$ são obtidos pelas Equações (4-18) e (4-19) a partir de forças de superfície autoequilibradas, tem-se que

$$(\mathbf{p} - \mathbf{p^b})^T\,\mathbf{W} = \mathbf{0} \tag{4-47}$$

4.2.5.3
Consistência de $\mathbf{F}\,\mathbf{p}^* = \mathbf{H}\,(\mathbf{d} - \mathbf{d^b})$

Considerando a propriedade de ortogonalidade de $\mathbf{F}$ apresentada na Seção 4.2.5.1 e a Equação (3-67), tem-se que ambas as parcelas da Equação (4-21) são ortogonais a $\mathbf{V}^T$ à esquerda se o resíduo da Equação (4-23) for nulo.

4.2.5.4
Consistência de $\mathbf{H}^T\,\mathbf{p}^* = \mathbf{p} - \mathbf{p^b}$

Considerando as Equações (2-17) e (4-47), tem-se que ambas as parcelas da Equação (4-22) são ortogonais a $\mathbf{W}^T$ à esquerda.

4.2.5.5
Consistência de $\mathbf{K_{HT}}\,(\mathbf{d} - \mathbf{d^b}) = (\mathbf{p} - \mathbf{p^b})$

Considerando as Equações (4-45) a (4-47), tem-se que ambas as parcelas da Equação (4-29) são ortogonais a $\mathbf{W}^T$ à esquerda.

4.2.6
Avaliação dos campos de deslocamentos e de tensões no domínio

A obtenção de deslocamentos e tensões no domínio no MHTEC é feita de modo análogo ao MHSTEC e está apresentada na Seção 5.1.6.

4.3
Método híbrido de deslocamentos dos elementos de contorno

4.3.1
Equações matriciais que governam o problema

No método híbrido de deslocamentos dos elementos de contorno (MHDEC) [6], aproximam-se deslocamentos u_i^f no domínio Ω e deslocamentos u_i e forças de superfície t_i no contorno Γ, como esquematizado na Figura 4.3.

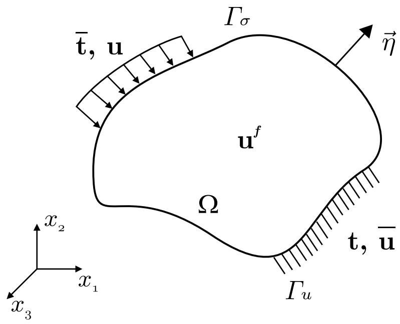

Figura 4.3: Aproximações do método híbrido de deslocamentos dos elementos de contorno

Sua formulação origina-se da variação do potencial

$$\Pi_{HD}(u_i^f, u_i, t_i) = \int_\Omega U_0(\epsilon_{ij}^f)\, d\Omega - \int_\Omega b_i\, u_i^f\, d\Omega - \int_{\Gamma_\sigma} \bar{t}_i\, u_i\, d\Gamma - \int_\Gamma t_i\, (u_i^f - u_i)\, d\Gamma \qquad (4\text{-}48)$$

em que U_0 é a energia de deformação.

Variando a Equação (4-48) e considerando que a porção do contorno Γ_u será identificada apenas após a formulação matricial do problema, ou seja, $\Gamma_\sigma \equiv \Gamma$ e $\bar{t}_i \equiv t_i$, tem-se que

$$\delta\Pi_{HD}(u_i^f, u_i, t_i) = \int_\Omega \delta U_0(\epsilon_{ij}^f)\, d\Omega - \int_\Omega b_i\, \delta u_i^f\, d\Omega - \int_\Gamma \delta t_i\, (u_i^f - u_i)\, d\Gamma - \int_\Gamma t_i\, \delta u_i^f\, d\Gamma \qquad (4\text{-}49)$$

Sabendo que

$$\delta U_0(\epsilon_{ij}^f) = \sigma_{ij}^f \delta\epsilon_{ij}^f = \sigma_{ij}^f \delta u_{i,j}^f \qquad (4\text{-}50)$$

e realizando as aproximações pelas Equações (3-12) e (3-13) no contorno e pelas Equações (4-5) a (4-7) no domínio, através de integração por partes e aplicação do teorema da divergência, chega-se a

$$\int_\Omega \delta U_0(\epsilon_{ij}^f)\, d\Omega - \int_\Omega b_i\, \delta u_i^f\, d\Omega = \delta p_m^* \left[\left(\int_\Gamma t_{in}^*\, u_{im}^*\, d\Gamma - \int_\Omega \sigma_{jin,j}^*\, u_{im}^*\, d\Omega \right) p_n^* + \left(\int_\Gamma t_{il}\, (u_{im}^* + u_{ir}^r\, C_{rm})\, d\Gamma \right) t_l^b + c_i^r \left(\int_\Gamma t_{in}^* d\Gamma - \int_\Omega \sigma_{jin,j}^* d\Omega \right) \right] \qquad (4\text{-}51)$$

Do mesmo modo que no MCCEC, a Equação (3-10) também não é válida e não pode ser desprezada pois, devido à aproximação do campo de forças de superfície, existem forças desequilibradas que realizam trabalho sobre deslocamentos de corpo rígido.

Considerando as Equações (2-27) e (2-28), chega-se a

$$\int_{\Omega} \delta U_0(\epsilon_{ij}^f)\, d\Omega - \int_{\Omega} b_i\, \delta u_i^f\, d\Omega = \delta p_m^* \left[F_{nm}\, p_n^* + (G_{ml} + C_{mr}\, R_{rl})\, t_l^b\right] \quad (4\text{-}52)$$

sendo $F_{nm} \equiv \mathbf{F}$, $G_{ml} \equiv \mathbf{G}$ e $R_{rl} \equiv \mathbf{R}$ dadas pelas Equações (4-14), (3-17) e (3-21), respectivamente.

Para as demais parcelas da Equação (4-49), obtém-se

$$\int_{\Gamma} \delta t_i\, (u_i^f - u_i)\, d\Gamma = \delta t_l \left[(G_{lm} + R_{lr}\, C_{rm})\, p_m^* - L_{lm}\, (d_m - d_m^b)\right] \quad (4\text{-}53)$$

$$\int_{\Gamma} t_i\, \delta u_i^f\, d\Gamma = \delta p_m^*\, (G_{ml} + C_{mr}\, R_{rl})\, t_l \quad (4\text{-}54)$$

sendo $L_{lm} \equiv \mathbf{L}$ dada pela Equação (3-41).

Assim, reescrevendo a Equação (4-49), chega-se a

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{HD} = \delta p_m^* \left[F_{nn}\, p_n^* - (G_{ml} + C_{mr}\, R_{rl})\, (t_l - t_l^b)\right] + \\ \delta t_l \left[(G_{lm} + R_{lr}\, C_{rm})\, p_m^* - L_{lm}\, (d_m - d_m^b)\right] \end{aligned} \quad (4\text{-}55)$$

da qual, aplicando-se o princípio da estacionariedade do potencial, para quaisquer δp_m^* e δt_l, obtém-se

$$\mathbf{F}\, \mathbf{p}^* = (\mathbf{G} + \mathbf{C}^T\, \mathbf{R}^T)\, (\mathbf{t} - \mathbf{t^b}) \quad (4\text{-}56)$$

$$(\mathbf{G}^T + \mathbf{R}\, \mathbf{C})\, \mathbf{p}^* = \mathbf{L}(\mathbf{d} - \mathbf{d^b}) \quad (4\text{-}57)$$

A Equação (4-56) expressa uma relação de compatibilidade de deslocamentos, em que as matrizes $\mathbf{F}$ e $(\mathbf{G}+\mathbf{C}^T\, \mathbf{R}^T)$ transformam valores em deslocamentos equivalentes $\mathbf{d}^*$ do sistema interno. A Equação (4-57) também expressa uma relação de compatibilidade de deslocamentos, em que as matrizes $(\mathbf{G}^T + \mathbf{R}\, \mathbf{C})$ e $\mathbf{L}$ transformam valores em deslocamentos equivalentes $\tilde{\mathbf{d}}$ do sistema auxiliar.

De modo análogo ao apresentado na Seção 3.2 para o MCCEC, a partir do critério dado pela Equação (3-31) obtém-se a Equação (3-32) para as constantes $\mathbf{C}$, a partir da qual pode-se reescrever as Equações (4-56) e (4-57) como

$$\mathbf{F}\, \mathbf{p}^* = \mathbf{G}\, \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\, (\mathbf{t} - \mathbf{t^b}) \quad (4\text{-}58)$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\, \mathbf{G}^T\, \mathbf{p}^* = \mathbf{L}\, (\mathbf{d} - \mathbf{d^b}) \quad (4\text{-}59)$$

Considerando que apenas forças de superfície desequilibradas são transformadas nas equações acima, aplicando o princípio da contragradiência na Equação (3-44), chega-se a

$$\tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\, \mathbf{L}\, (\mathbf{d} - \mathbf{d}^{\mathbf{b}}) \tag{4-60}$$

Assim, pode-se pré-multiplicar a Equação (4-59) por $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}$, chegando a

$$\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\, \mathbf{G}^{T}\, \mathbf{p}^{*} = \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\, \mathbf{L}\, (\mathbf{d} - \mathbf{d}^{\mathbf{b}}) \tag{4-61}$$

As Equações (4-58), (4-61) e (3-44) são as expressões matriciais que governam o problema no MHDEC, a partir das quais se deriva uma matriz de rigidez na Seção 4.3.3.

Na Figura 4.4, estão esquematizadas as relações de transformações presentes no MHDEC entre os parâmetros $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^{\mathbf{b}})$, $\mathbf{d}^{*}$, $\mathbf{p}^{*}$ e $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^{\mathbf{b}})$. Também encontram-se representadas as bases ortonormais dos espaços ortogonais complementares de tais parâmetros.

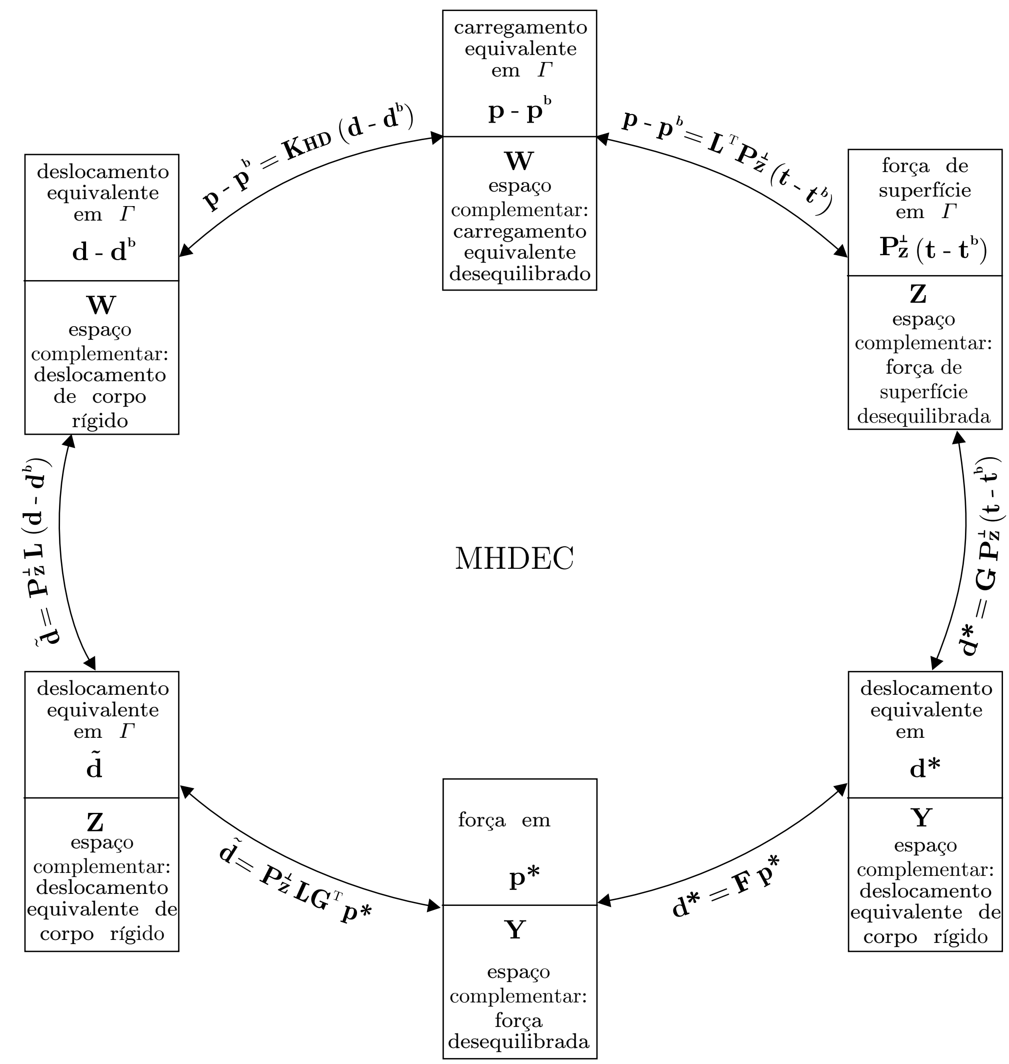

Figura 4.4: Transformações entre os parâmetros presentes no MHDEC

4.3.2
Obtenção dos valores indeterminados de $\mathbf{F}$ a partir de $\mathbf{Y}$

Seja $\mathbf{Y}$ a base ortonormal das forças desequilibradas do sistema interno, já apresentada na Seção 3.5.2. De modo análogo ao apresentado na Seção 4.2.2, considerando a Equação (3-69) e a simetria de $\mathbf{F}$, para que a Equação (4-58) seja consistente tem-se que

$$\mathbf{F}\,\mathbf{Y} = \mathbf{F}^T\,\mathbf{Y} = \mathbf{0} \tag{4-62}$$

ou seja, forças desequilibradas não devem ser transformadas em deslocamentos equivalentes no sistema interno.

Assim, os elementos indeterminados de $\mathbf{F}$ podem ser obtidos pela resolução da Equação (4-62) por mínimos quadrados, chegando a

$$F_{MM} = -\frac{F_{CD_{Mn}} Y_n}{Y_M} \tag{4-63}$$

para problemas de potencial, sendo que o índice M não realiza soma implícita.

Analogamente ao MHTEC, para valores nulos ou muito pequenos de $\mathbf{Y}$ não é possível obter os valores de indeterminados de $\mathbf{F}$ pela Equação (4-62). Na Seção 5.2.6, é apresentada uma relação alternativa a essa, a partir da qual se espera que os elementos indeterminados de $\mathbf{F}$ possam ser obtidos mesmo que $\mathbf{Y}$ assumam valores muito pequenos ou nulos.

4.3.3 Matriz de rigidez

Isolando $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} (\mathbf{t} - \mathbf{t}^{\mathbf{b}})$ da Equação (4-58), $\mathbf{p}^*$ da Equação (4-61) e substituindo na Equação (3-44), chega-se a

$$\mathbf{K_{HD}} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^{\mathbf{b}}) = \mathbf{p} - \mathbf{p}^{\mathbf{b}} \tag{4-64}$$

sendo

$$\mathbf{K_{HD}} = \mathbf{L}^T \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} (\mathbf{G} \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp})^{(-1)} \mathbf{F} (\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} \mathbf{G}^T)^{(-1)} \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} \mathbf{L} \tag{4-65}$$

a matriz de rigidez do MHDEC, em que $(\mathbf{G} \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp})^{(-1)}$ é obtida pela resolução do sistema restrito da Equação (3-48), que resulta na inversa dada pela Equação (3-49) para o caso em que $\mathbf{G} \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}$ é uma matriz quadrada.

Considere, então, que $\mathbf{Y} \equiv Y_{mr}$ é uma base ortonormal do espaço das forças desequilibradas do sistema auxiliar, tal que

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{Y} = \mathbf{I} \tag{4-66}$$

Pode-se, portanto, definir um projetor ortogonal idempotente único para o espaço das forças desequilibradas do sistema interno

$$\mathbf{P_Y} = \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T \tag{4-67}$$

de propriedades conhecidas

$$\mathbf{P_Y} \mathbf{P_Y} = \mathbf{P_Y} \tag{4-68}$$

$$\mathbf{P_Y} \mathbf{Y} = \mathbf{Y} \tag{4-69}$$

Supondo o espaço das forças equilibradas ortogonal e complementar ao espaço das forças desequilibradas, tem-se que

$$\mathbf{P}_{\mathbf{Y}}^{\perp} = \mathbf{I} - \mathbf{P}_{\mathbf{Y}} = \mathbf{I} - \mathbf{Y}\,\mathbf{Y}^{T} \tag{4-70}$$

sendo $\mathbf{P}_{\mathbf{Y}}^{\perp}$ o projetor ortogonal do espaço das forças equilibradas do sistema interno, de propriedades conhecidas

$$\mathbf{P}_{\mathbf{Y}}^{\perp}\,\mathbf{P}_{\mathbf{Y}}^{\perp} = \mathbf{P}_{\mathbf{Y}}^{\perp} \tag{4-71}$$

$$\mathbf{P}_{\mathbf{Y}}^{\perp}\,\mathbf{Y} = \mathbf{0} \tag{4-72}$$

Deseja-se, então, obter a inversa generalizada $(\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,\mathbf{G}^{T})^{(-1)}$ que realiza a transformação inversa

$$(\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,\mathbf{G}^{T})^{(-1)}\,\mathbf{d}^{*} = \mathbf{P}_{\mathbf{Y}}^{\perp}\,\mathbf{p}^{*} \tag{4-73}$$

ou seja, que transforma deslocamentos equivalentes em forças equilibradas no sistema interno. Então, considerando as Equações (4-70) e (3-69), a matriz $(\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,\mathbf{G}^{T})^{(-1)}$ pode ser obtida pela resolução do sistema restrito

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,\mathbf{G}^{T}\,\mathbf{P}_{\mathbf{Y}}^{\perp}\,\mathbf{p}^{*} = \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,\mathbf{G}^{T}\,\mathbf{p}^{*} = \tilde{\mathbf{d}} \\ \mathbf{P}_{\mathbf{Y}}\,\mathbf{p}^{*} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{4-74}$$

para $\mathbf{P}_{\mathbf{Y}}^{\perp}\,\mathbf{p}^{*}$. Caso $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,\mathbf{G}^{T}$ seja uma matriz quadrada, chega-se à inversa generalizada restrita ao seu próprio espaço [2]

$$(\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,\mathbf{G}^{T})^{(-1)} = \mathbf{P}_{\mathbf{Y}}^{\perp}\,(\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,\mathbf{G}^{T} + \mathbf{P}_{\mathbf{Y}})^{-1} \tag{4-75}$$

sendo $(\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,\mathbf{G}^{T} + \mathbf{P}_{\mathbf{Y}})$ uma matriz não-singular.

Desde que os elementos indeterminados de $\mathbf{F}$ possam ser obtidos com resíduo nulo segundo os procedimentos apresentados na Seção 4.3.2, a Equação (4-62) é válida. Assim, considerando também a Equação (3-27), pode-se reescrever a Equação (4-65) como

$$\mathbf{K_{HD}} = \mathbf{L^{T}}\,\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,(\mathbf{G}\,\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} + \mathbf{P_{Z}})^{\mathbf{-1}}\,\mathbf{F}\,(\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,\mathbf{G^{T}} + \mathbf{P_{Y}})^{\mathbf{-1}}\,\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,\mathbf{L} \tag{4-76}$$

Apesar de

$$(\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,\mathbf{G}^{T})^{(-1)} \neq \left[(\mathbf{G}\,\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp})^{(-1)}\right]^{T} \tag{4-77}$$

pode-se provar que

$$(\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,\mathbf{G}^{T})^{(-1)}\,\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} = \mathbf{P}_{\mathbf{Y}}^{\perp}\left[(\mathbf{G}\,\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp})^{(-1)}\right]^{T} \tag{4-78}$$

e portanto, desde que a Equação (4-62) seja válida, pode-se reescrever a Equação (4-65) como

$$\mathbf{K_{HD}} = \mathbf{L}^T\,\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,(\mathbf{G}\,\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp})^{(-1)}\,\mathbf{F}\,[(\mathbf{G}\,\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp})^{(-1)}]^T\,\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,\mathbf{L} \tag{4-79}$$

4.3.4 Obtenção da base de forças desequilibradas do sistema auxiliar $\mathbf{Y}$

Como já apresentado na Seção 3.5.2, a base do espaço das forças $\mathbf{Y}$ do sistema interno pode ser obtida a partir da Equação (3-69), ou seja, pela obtenção do espaço nulo de $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,\mathbf{G}^T$.

De modo análogo ao apresentadado para o MHTEC, supondo que os parâmetros $\mathbf{p}$ e $\mathbf{p^b}$ representam as mesmas grandezas físicas que $\mathbf{p}^*$, tem-se que

$$\text{posto}(\widetilde{\mathbf{Y}}) = \text{posto}(\mathbf{W}) \tag{4-80}$$

sendo $\widetilde{\mathbf{Y}}$ uma base qualquer, não necessariamente normalizada, do espaço das forças desequilibradas do sistema interno. Assim, supondo também que as bases ortonormais $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{W}$ pertencem a espaços não-ortogonais, pode-se obter $\mathbf{W}$ pela projeção $\widetilde{\mathbf{Y}}$ no espaço dos deslocamentos de corpo rígido, ou seja,

$$\mathbf{P_W}\,\widetilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{W} \tag{4-81}$$

Então, considerando a Equação (3-69), a base $\widetilde{\mathbf{Y}}$ pode ser obtida pela resolução dos sistemas de equações

$$(\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,\mathbf{G}^T + \mathbf{P_W})\,\widetilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{W} \quad \text{e} \tag{4-82}$$

$$(\mathbf{G}\,\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,\mathbf{G}^T + \mathbf{P_W})\,\widetilde{\mathbf{Y}} = \mathbf{W} \tag{4-83}$$

para os casos em que $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,\mathbf{G}^T$ é uma matriz quadrada e retangular, respectivamente, sendo as matrizes $(\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,\mathbf{G}^T + \mathbf{P_W})$ e $(\mathbf{G}\,\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,\mathbf{G}^T + \mathbf{P_W})$ não-singulares. A base $\mathbf{Y}$ pode então também ser obtida pela normalização de $\widetilde{\mathbf{Y}}$.

Como na Equação (4-83) está implícita a Equação (3-69), resolvida por mínimos quadrados, a base $\mathbf{Y}$ resultante é uma aproximação da base resultante da obtenção do espaço nulo de $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,\mathbf{G}^T$.

4.3.5
Propriedades de ortogonalidade e consistência das equações matriciais

As propriedades ortogonais de $\mathbf{G}\,\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}$ e $\mathbf{L}^T\,\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}$ estão apresentadas nas Seções 3.5.2 e 3.5.3, nas Equações (3-68) a (3-71). A propriedade de ortogonalidade de $(\mathbf{p}-\mathbf{p}^{\mathbf{b}})$ encontra-se apresentada na Equação (3-74) da Seção 3.5.4.

4.3.5.1
Propriedade de ortogonalidade de $\mathbf{F}$

De modo análogo ao MHTEC, desde que os elementos indeterminados de $\mathbf{F}$ possam ser obtidos com resíduo nulo segundo o procedimento apresentado na Seção 4.3.2, a propriedade de ortogonalidade expressa na Equação (4-62) é válida, ou seja, a matriz simétrica $\mathbf{F}$ não realiza transformações sobre forças desequilibradas do sistema interno. Caso o resíduo não seja nulo, essa propriedade tende a ser satisfeita como o aumento da discretização do contorno.

4.3.5.2
Propriedades de ortogonalidade de $\mathbf{K_{HD}}$

Considerando a Equação (3-71) na Equação (4-65), tem-se que

$$\mathbf{K_{HD}}\,\mathbf{W}=\mathbf{0} \quad \text{e} \tag{4-84}$$

$$\mathbf{K_{HD}^T}\,\mathbf{W}=\mathbf{0} \tag{4-85}$$

ou seja, a matriz $\mathbf{K_{HD}}$ não realiza transformações sobre deslocamentos de corpo rígido.

4.3.5.3
Consistência de $\mathbf{F}\,\mathbf{p}^*=\mathbf{G}\,\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,(\mathbf{t}-\mathbf{t}^{\mathbf{b}})$

Considerando a propriedade ortogonal de $\mathbf{F}$ apresentada na Seção 4.3.5.1 e a Equação (3-69), tem-se que ambas as parcelas da Equação (4-58) são ortogonais a $\mathbf{Y}^T$ à esquerda se o resíduo da Equação (4-62) for nulo.

4.3.5.4
Consistência de $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,\mathbf{G}^T\,\mathbf{p}^* = \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,\mathbf{L}\,(\mathbf{d}-\mathbf{d}^{\mathbf{b}})$

Considerando a Equação (3-28), tem-se que ambas as parcelas da Equação (4-61) são ortogonais a $\mathbf{Z}^T$ à esquerda.

4.3.5.5
Consistência de $\mathbf{K}_{\mathbf{HD}}\,(\mathbf{d}-\mathbf{d}^{\mathbf{b}}) = (\mathbf{p}-\mathbf{p}^{\mathbf{b}})$

Considerando as Equações (4-85) e (3-74), tem-se que ambas as parcelas da Equação (4-64) são ortogonais a $\mathbf{W}^T$ à esquerda.

4.3.6
Avaliação dos campos de deslocamentos e de tensões no domínio

No MHTEC, as tensões σ_{ij}^f são aproximadas no domínio e portanto, os deslocamentos correspondentes u_i^f são obtidos a menos de uma constante de corpo rígido, referente à solução da equação diferencial do problema. No entanto, no MHDEC, os deslocamentos u_i^f já são aproximados no domínio e portanto, não é necessária a consideração da parcela referente a deslocamentos de corpo rígido na Equação (4-5). Assim, os deslocamentos no domínio podem ser obtidos por

$$u_i^f = u_{im}^*\,p_m^* + u_i^b \tag{4-86}$$

e as tensões correspondentes a partir da Equação (4-6), sendo que $p_m^* \equiv \mathbf{p}^*$ pode ser obtido a partir da Equação (4-58) ou (4-61). Tem-se, então, que

$$\mathbf{p}^* = \mathbf{F}^{(-1)}\,\mathbf{G}\,\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,(\mathbf{t}-\mathbf{t}^{\mathbf{b}}) \quad \text{ou} \tag{4-87}$$

$$\mathbf{p}^* = (\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,\mathbf{G}^T)^{(-1)}\,\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,\mathbf{L}\,(\mathbf{d}-\mathbf{d}^{\mathbf{b}}) \tag{4-88}$$

sendo $(\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,\mathbf{G}^T)^{(-1)}$ dada pela Equação (4-75) e $\mathbf{F}^{(-1)}$ a matriz que realiza a transformação inversa

$$\mathbf{F}^{(-1)}\,\mathbf{d}^* = \mathbf{P}_{\mathbf{Y}}^{\perp}\,\mathbf{p}^* \tag{4-89}$$

ou seja, que transforma deslocamentos equivalentes em forças equivalentes no sistema interno. De modo análogo ao apresentado na Seção 4.2.3 para o MHTEC, tem-se que

$$\mathbf{F}^{(-1)} = \mathbf{P}_{\mathbf{Y}}^{\perp}\,(\mathbf{F}\,\mathbf{P}_{\mathbf{Y}}^{\perp} + \mathbf{P}_{\mathbf{Y}})^{-1} \tag{4-90}$$

sendo $(\mathbf{F}\,\mathbf{P}_{\mathbf{Y}}^{\perp} + \mathbf{P}_{\mathbf{Y}})$ uma matriz não-singular. Se os valores indeterminados de $\mathbf{F}$ forem obtidos com resíduo nulo pela Equação (4-62), pode-se então reescrever a equação acima como

$$\mathbf{F}^{(-1)} = \mathbf{P}_{\mathbf{Y}}^{\perp}\,(\mathbf{F} + \mathbf{P}_{\mathbf{Y}})^{-1} \tag{4-91}$$

Como a matriz inversa $(\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp}\,\mathbf{G}^{T})^{(-1)}$ já é obtida quando do cálculo da matriz de rigidez, utiliza-se a Equação (4-88) para a obtenção de $\mathbf{p}^{*}$.

A Equação (4-88) pode ser usada também na obtenção de deslocamentos e tensões no domínio do MCCEC apresentada na Seção 4.2.6.