

3 Método convencional consistente dos elementos de contorno

O método convencional consistente dos elementos de contorno (MCCEC) [10] baseia-se na adequada consideração das constantes de corpo rígido da solução fundamental no método convencional dos elementos de contorno (MCEC) [1, 3], de modo que o equilíbrio das forças de superfície seja satisfeito.

3.1 Identidade de Somigliana

O método convencional consistente dos elementos de contorno (MCCEC) [1, 3] aproxima deslocamentos u_i e forças de superfície t_i no contorno Γ , como esquematizado na Figura 3.1.

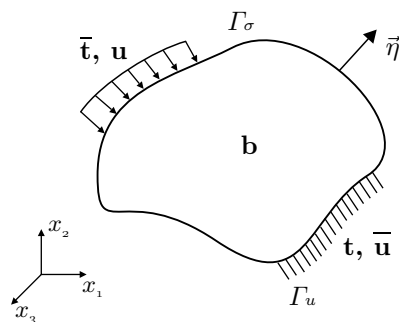


Figura 3.1: Aproximações do método convencional consistente dos elementos de contorno

Suas equações matriciais podem ser deduzidas a partir de uma formulação em resíduos ponderados, através da qual se deseja obter os campos de deslocamentos u_i e de forças de superfície t_i que satisfazem a equação diferencial que governa o problema no domínio e a condição de equilíbrio de forças no contorno, dadas pelas Equações (2-6) e (2-10), respectivamente,

tendo como previamente satisfeita a condição de compatibilidade no contorno, dada pela Equação (2-9). Assim, utilizando δu_i^* como função de peso, chega-se a

$$\delta R(u_i, t_i) = \int_{\Omega} (\sigma_{ji,j} + b_i) \delta u_i^* d\Omega - \int_{\Gamma_{\sigma}} (\sigma_{ji} \eta_j - \bar{t}_i) \delta u_i^* d\Gamma = 0 \quad (3-1)$$

em que, como a porção do contorno Γ_u será identificada apenas após a formulação matricial do problema, $\Gamma_{\sigma} \equiv \Gamma$ e $\bar{t}_i \equiv t_i$.

Realizando integrações por partes, aplicando o teorema da divergência e considerando as Equações (2-7) e (2-8), chega-se à forma inversa

$$\int_{\Omega} (u_k D_{ijkp} \delta u_{i,jp}^* + b_i \delta u_i^*) d\Omega - \int_{\Gamma} (u_k D_{ijkp} \delta u_{i,j}^* \eta_p - t_i \delta u_i^*) d\Gamma = 0 \quad (3-2)$$

Substituindo δu_i^* pela variação da Equação (2-19) e considerando as Equações (2-20) e (2-21), para qualquer δp_m^* , tem-se que

$$\int_{\Omega} \sigma_{jim,j}^* u_i d\Omega + \int_{\Gamma} t_i (u_{im}^* + u_{ir}^r C_{rm}) d\Gamma - \int_{\Gamma} t_{im}^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} b_i (u_{im}^* + u_{ir}^r C_{rm}) d\Omega = 0 \quad (3-3)$$

Supondo que o campo de deslocamentos u_i^b e o campo de forças de superfície t_i^b constituem uma solução particular qualquer da equação diferencial

$$\sigma_{ji,j}^b + b_i = 0 \quad (3-4)$$

tem-se que

$$\int_{\Omega} b_i u_{im}^* d\Omega = - \int_{\Gamma} t_i^b u_{im}^* d\Gamma + \int_{\Gamma} t_{im}^* u_i^b d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{jim,j}^* u_i^b d\Omega \quad (3-5)$$

$$\int_{\Omega} b_i u_{ir}^r C_{rm} d\Omega = - \int_{\Gamma} t_i^b u_{ir}^r C_{rm} d\Gamma \quad (3-6)$$

Substituindo as expressões acima na Equação (3-3), chega-se a

$$\int_{\Omega} \sigma_{jim,j}^* (u_i - u_i^b) d\Omega + \int_{\Gamma} (t_i - t_i^b) (u_{im}^* + u_{ir}^r C_{rm}) d\Gamma - \int_{\Gamma} t_{im}^* (u_i - u_i^b) d\Gamma = 0 \quad (3-7)$$

Assim, considerando a Equação (2-27) e a relação $(u_m - u_m^b) \equiv \delta_{im} (u_i - u_i^b)$, chega-se à expressão da identidade de So-

migliana

$$u_m - u_m^b = \int_{\Gamma} (t_i - t_i^b) u_{im}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} t_{im}^* (u_i - u_i^b) d\Gamma + \int_{\Gamma} (t_i - t_i^b) u_{ir}^r C_{rm} d\Gamma \quad (3-8)$$

através da qual pode-se avaliar deslocamentos no domínio desde que os campos u_i e t_i sejam conhecidos no contorno.

Como as forças de superfície não realizam trabalho sobre quaisquer deslocamentos de corpo rígido \tilde{c}_i^r , tem-se que

$$\int_{\Gamma} (t_i - t_i^b) \tilde{c}_i^r d\Gamma = \int_{\Gamma} (t_i - t_i^b) u_{ir}^r C_{rm} \tilde{C}_m d\Gamma = 0 \quad (3-9)$$

sendo \tilde{C}_m constantes quaisquer. Assim, tem-se que a parcela integral

$$\int_{\Gamma} u_{ir}^r C_{rm} (t_i - t_i^b) d\Gamma = 0 \quad (3-10)$$

e então a identidade de Somigliana pode ser reescrita como

$$u_m - u_m^b = \int_{\Gamma} (t_i - t_i^b) u_{im}^* d\Gamma - \int_{\Gamma} t_{im}^* (u_i - u_i^b) d\Gamma \quad (3-11)$$

3.2

Equações matriciais que governam o problema

No método convencional consistente dos elementos de contorno (MCCEC), os campos de deslocamentos u_i e de forças de superfície t_i são representados exatamente no domínio e aproximados pelas Equações (2-17) e (2-18) no contorno. Supondo que os deslocamentos e as forças de superfície referentes à solução particular da Equação (3-4) também podem ser aproximados pelas mesmas funções de interpolação a partir de valores nodais, tem-se que

$$u_i = u_{im} d_m \quad \text{e} \quad u_i^b = u_{im} d_m^b \quad \text{em} \quad \Gamma \quad (3-12)$$

$$t_i = t_{il} t_l \quad \text{e} \quad t_i^b = t_{il} t_l^b \quad \text{em} \quad \Gamma \quad (3-13)$$

sendo d_m e d_m^b valores nodais de deslocamentos e t_l e t_l^b valores nodais de forças de superfície.

A partir da Equação (3-7), discretizando os campos $(u_i - u_i^b)$ e $(t_i - t_i^b)$, considerando as Equações (2-27) e (3-10) e a relação $u_{mn} \equiv \delta_{im} u_{in}$, chega-se

à expressão do MCEC

$$\left[\int_{\Gamma} t_{im}^* u_{in} d\Gamma + u_{mn} \right] (d_n - d_n^b) = \left[\int_{\Gamma} t_{il} u_{im}^* d\Gamma \right] (t_l - t_l^b) \quad (3-14)$$

que pode ser expressa na forma matricial como

$$\mathbf{H} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{G} (\mathbf{t} - \mathbf{t}^b) \quad (3-15)$$

em que

$$\mathbf{H} \equiv H_{mn} = \int_{\Gamma} t_{im}^* u_{in} d\Gamma + u_{mn} \quad (3-16)$$

$$\mathbf{G} \equiv G_{ml} = \int_{\Gamma} t_{il} u_{im}^* d\Gamma \quad (3-17)$$

No entanto, como as forças de superfície t_i e t_i^b são aproximadas no contorno pela Equação (3-13), existem forças de superfície desequilibradas que realizam trabalho sobre deslocamentos de corpo rígido, ou seja, o termo integral da Equação (3-9) não é nulo. Portanto, apesar de tender a zero com o aumento da discretização, o termo integral

$$\int_{\Gamma} u_{ir}^r C_{rm} (t_i - t_i^b) d\Gamma \neq 0 \quad (3-18)$$

não pode ser desprezado na Equação (3-7) e na identidade de Somigliana expressa na Equação (3-8).

Assim, a partir da Equação (3-7), discretizando os campos $(u_i - u_i^b)$ e $(t_i - t_i^b)$, considerando as Equações (2-27) e (3-10) e a relação $u_{mn} \equiv \delta_{im} u_{in}$, chega-se à expressão do método convencional consistente dos elementos de contorno (MCCEC)

$$\left[\int_{\Gamma} t_{im}^* u_{in} d\Gamma + u_{mn} \right] (d_n - d_n^b) = \left[\int_{\Gamma} t_{il} (u_{im}^* + u_{ir}^r C_{rm}) d\Gamma \right] (t_l - t_l^b) \quad (3-19)$$

que pode ser expressa na forma matricial como

$$\mathbf{H} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = (\mathbf{G} + \mathbf{C}^T \mathbf{R}^T) (\mathbf{t} - \mathbf{t}^b) \quad (3-20)$$

em que

$$\mathbf{R} \equiv R_{lr} = \int_{\Gamma} t_{il} u_{ir}^r d\Gamma \quad (3-21)$$

e as matrizes \mathbf{H} e \mathbf{G} são dadas pelas Equações (3-16) e (3-17), respectiva-

mente.

Considere, então, que se a matriz $\mathbf{C}^T \mathbf{R}^T$ transforma apenas forças de superfície desequilibradas, uma base ortonormal $\mathbf{Z} \equiv Z_{lr}$ desse espaço pode ser obtida de modo que suas colunas sejam bases ortonormais das linhas de \mathbf{R}^T , tal que

$$\mathbf{Z}^T \mathbf{Z} = \mathbf{I} \quad (3-22)$$

sendo \mathbf{I} a matriz identidade. Pode-se, portanto, definir um projetor ortogonal idempotente único para o espaço das forças de superfície desequilibradas

$$\mathbf{P}_Z = \mathbf{Z} \mathbf{Z}^T \quad (3-23)$$

de propriedades conhecidas

$$\mathbf{P}_Z \mathbf{P}_Z = \mathbf{P}_Z \quad (3-24)$$

$$\mathbf{P}_Z \mathbf{Z} = \mathbf{Z} \quad (3-25)$$

Supondo o espaço das forças de superfícies equilibradas ortogonal e complementar ao espaço das forças de superfície desequilibradas, tem-se que

$$\mathbf{P}_Z^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}_Z = \mathbf{I} - \mathbf{Z} \mathbf{Z}^T \quad (3-26)$$

sendo \mathbf{P}_Z^\perp o projetor ortogonal do espaço das forças de superfície equilibradas, de propriedades conhecidas

$$\mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{P}_Z^\perp = \mathbf{P}_Z^\perp \quad (3-27)$$

$$\mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{Z} = \mathbf{0} \quad (3-28)$$

Assim, considerando o modo de obtenção de \mathbf{Z} , tem-se que

$$\mathbf{R} = \mathbf{Z} \boldsymbol{\lambda} \quad (3-29)$$

sendo $\boldsymbol{\lambda}$ uma matriz quadrada não singular dada por, multiplicando a equação acima por \mathbf{Z}^T e considerando a Equação (3-22),

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{Z}^T \mathbf{R} \quad (3-30)$$

Como forças de superfície desequilibradas não devem ser transformadas na Equação (3-20), tem-se que

$$(\mathbf{G} + \mathbf{C}^T \mathbf{R}^T) \mathbf{Z} = \mathbf{0} \quad (3-31)$$

da qual pode-se obter uma expressão para as constantes C_{rm} da solução fundamental

$$C_{C_{rm}} \equiv \mathbf{C}_C = -(\mathbf{Z}^T \mathbf{R})^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{G}^T \quad (3-32)$$

sendo $C_{C_{rm}}$ constantes obtidas a partir do critério expresso pela Equação (3-31). Substituindo a Equação (3-29) na Equação (3-31) e considerando a Equação (3-22), pode-se expressar essas mesmas constantes como

$$\mathbf{C}_C = -\lambda^{-1} \mathbf{Z}^T \mathbf{G}^T \quad (3-33)$$

Então, substituindo as Equações (3-29) e (3-33) na Equação (3-20) e considerando a Equação (3-26), chega-se a

$$\mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{G} \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} (\mathbf{t} - \mathbf{t}^b) \quad (3-34)$$

Comparando as Equações (3-20) e (3-34), pode-se concluir que, desde que os parâmetros de forças de superfície sejam projetados para o espaço das forças de superfície equilibradas, ou seja,

$$t_i - t_i^b = t_{iq} P_{Z_{qi}}^{\perp} (t_l - t_l^b) \quad (3-35)$$

o trabalho das forças de superfície sobre deslocamentos quaisquer de corpo rígido é nulo, ou seja,

$$\int_{\Gamma} u_{ir}^r C_{rm} (t_i - t_i^b) d\Gamma = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{C}^T \mathbf{R}^T (\mathbf{t} - \mathbf{t}^b) = \mathbf{0} \quad (3-36)$$

Para a obtenção de uma matriz de rigidez, é necessária uma relação de transformação de forças de superfície $(t_l - t_l^b) \equiv (\mathbf{t} - \mathbf{t}^b)$ em carregamento nodal equivalente $(p_m - p_m^b) \equiv (\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$. Assim, para que o trabalhos realizados por p_m e p_m^b sejam equivalentes ao realizados por t_i e t_i^b , respectivamente, tem-se que

$$p_m d_m = \int_{\Gamma} u_i t_i d\Gamma \quad \text{e} \quad (3-37)$$

$$p_m^b d_m^b = \int_{\Gamma} u_i^b t_i^b d\Gamma \quad (3-38)$$

Aproximando os campos de deslocamentos e de forças de superfície pelas Equações (3-12) e (3-13), chega-se a

$$\mathbf{p} = \mathbf{L}^T \mathbf{t} \quad \text{e} \quad (3-39)$$

$$\mathbf{p}^b = \mathbf{L}^T \mathbf{t}^b \quad (3-40)$$

sendo

$$\mathbf{L} \equiv L_{lm} = \int_{\Gamma} t_{il} u_{im} d\Gamma \quad (3-41)$$

No entanto, como na Equação (3-34) apenas forças de superfície equilibradas são transformadas, pode-se também projetá-las nas Equações (3-39) e (3-40), chegando a

$$\mathbf{p} = \mathbf{L}^T \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} \mathbf{t} \quad e \quad (3-42)$$

$$\mathbf{p}^b = \mathbf{L}^T \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} \mathbf{t}^b \quad (3-43)$$

Assim, tem-se que

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}^b = \mathbf{L}^T \mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} (\mathbf{t} - \mathbf{t}^b) \quad (3-44)$$

sendo que somente forças de superfície equilibradas são transformadas em carregamento nodal equivalente.

As Equações (3-34) e (3-44) são as expressões matriciais que governam o problema no MCCEC, a partir das quais se deriva uma matriz de rigidez.

Nos métodos de elementos de contorno, pode-se identificar três sistemas de referência: externo, interno e auxiliar. O sistema externo é constituído pelos deslocamentos \mathbf{d} e pelas forças nodais equivalentes \mathbf{p} , para os quais se procura uma relação de rigidez. O sistema interno é constituído pelos deslocamentos \mathbf{d}^* e pelas forças \mathbf{p}^* e o sistema auxiliar pelos deslocamentos $\tilde{\mathbf{d}}$ e pelas forças de superfície \mathbf{t} . Os parâmetros \mathbf{d}^* e $\tilde{\mathbf{d}}$ não aparecem explicitamente nas equações matriciais mas podem ser identificados pela decomposição das transformações matriciais em alguns métodos. Os parâmetros \mathbf{p}^* e $\tilde{\mathbf{d}}$ são introduzidos no próximo capítulo, para os métodos híbridos de elementos de contorno.

Na Figura 3.2, estão esquematizadas as relações de transformações presentes no MCCEC entre os parâmetros $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$, \mathbf{d}^* , $\mathbf{P}_{\mathbf{Z}}^{\perp} (\mathbf{t} - \mathbf{t}^b)$ e $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$. Também encontram-se representadas as bases ortonormais dos espaços ortogonais complementares de tais parâmetros, que estão apresentadas na Seção 3.5.

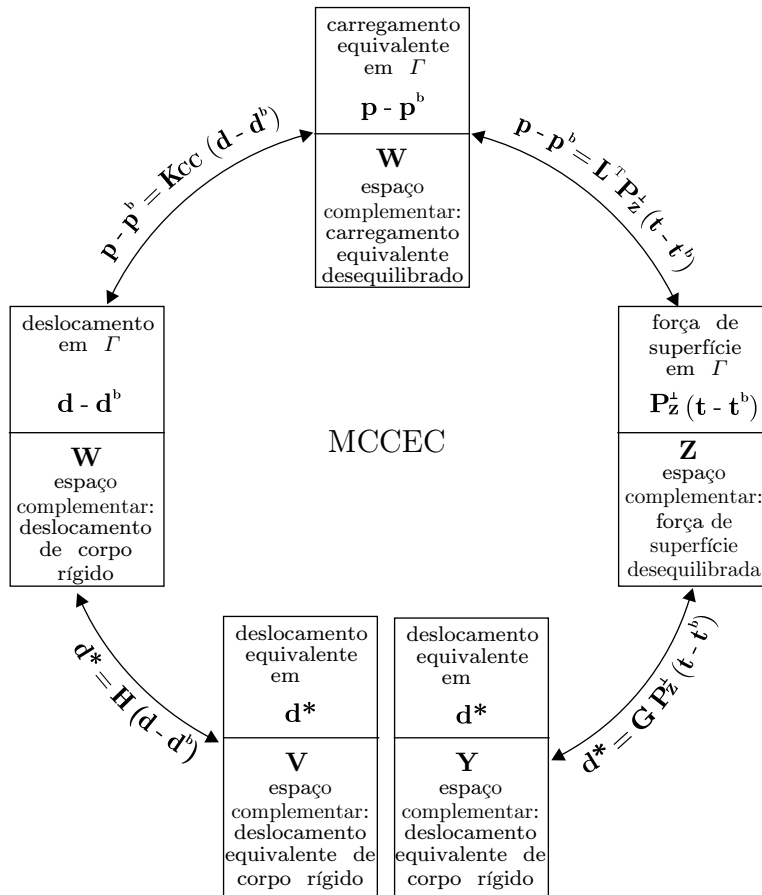


Figura 3.2: Transformações entre os parâmetros presentes no MCCEC

Nota-se que a Equação (3-34) expressa uma relação de compatibilidade de deslocamentos, em que as matrizes \mathbf{H} e $\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp$ transformam valores em deslocamentos equivalentes \mathbf{d}^* de um sistema interno isentos de parcelas de corpo rígido, ou seja, admissíveis. A matriz \mathbf{H} realiza uma transformação cinemática sobre deslocamentos admissíveis de $(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b)$. A matriz $\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp$ realiza uma transformação de flexibilidade sobre forças de superfície equilibradas $(\mathbf{t} - \mathbf{t}^b)$.

3.3

Matriz de rigidez

Substituindo a expressão de $\mathbf{P}_Z^\perp(\mathbf{t} - \mathbf{t}^b)$ da Equação (3-34) na Equação (3-44), chega-se a

$$\mathbf{K}_{CC}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{p} - \mathbf{p}^b \quad (3-45)$$

sendo

$$\mathbf{K}_{CC} = \mathbf{L}^T \mathbf{P}_Z^\perp (\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp)^{(-1)} \mathbf{H} \quad (3-46)$$

a matriz de rigidez do MCCEC.

Quando o número de parâmetros d_m é menor que o número de parâmetros t_l , o produto $\mathbf{G P}_Z^\perp$ é uma matriz retangular. Assim, seja $\mathbf{G P}_Z^\perp$ uma matriz quadrada ou retangular, sua inversa deve ser interpretada como uma inversa generalizada, identificada pelo sobrescrito (-1) , que realiza a transformação

$$(\mathbf{G P}_Z^\perp)^{(-1)} \mathbf{d}^* = \mathbf{P}_Z^\perp (\mathbf{t} - \mathbf{t}^b) \quad (3-47)$$

ou seja, que transforma deslocamentos equivalentes do sistema interno em forças de superfície equilibradas do sistema auxiliar. Então, considerando a Equação (3-27), a matriz $(\mathbf{G P}_Z^\perp)^{(-1)}$ pode ser obtida pela resolução do sistema restrito

$$\begin{cases} (\mathbf{G P}_Z^\perp) \mathbf{P}_Z^\perp (\mathbf{t} - \mathbf{t}^b) = \mathbf{G P}_Z^\perp (\mathbf{t} - \mathbf{t}^b) = \mathbf{d}^* \\ \mathbf{P}_Z (\mathbf{t} - \mathbf{t}^b) = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3-48)$$

para $\mathbf{P}_Z^\perp (\mathbf{t} - \mathbf{t}^b)$.

3.3.1

Inversa generalizada da matriz $\mathbf{G P}_Z^\perp$ quadrada

Caso $\mathbf{G P}_Z^\perp$ seja uma matriz quadrada, chega-se à inversa generalizada restrita ao seu próprio espaço

$$(\mathbf{G P}_Z^\perp)^{(-1)} = \mathbf{P}_Z^\perp (\mathbf{G P}_Z^\perp + \mathbf{P}_Z)^{-1} \quad (3-49)$$

isto é, uma inversa de Bott-Duffin [2], considerando $(\mathbf{G P}_Z^\perp + \mathbf{P}_Z)$ não-singular. Nesse caso, considerando também a Equação (3-27), pode-se reescrever a Equação (3-46) como

$$\mathbf{K}_{CC} = \mathbf{L}^T \mathbf{P}_Z^\perp (\mathbf{G P}_Z^\perp + \mathbf{P}_Z)^{-1} \mathbf{H} \quad (3-50)$$

3.3.2

Inversa generalizada da matriz $\mathbf{G P}_Z^\perp$ retangular

A seguir, uma expressão para a inversa generalizada da matriz retangular $\mathbf{G P}_Z^\perp$ é apresentada.

Inicialmente, considere que $\mathbf{W} \equiv W_{mr}$ é uma base ortonormal do espaço dos deslocamentos de corpo rígido, tal que

$$\mathbf{W}^T \mathbf{W} = \mathbf{I} \quad (3-51)$$

Pode-se, portanto, definir um projetor ortogonal idempotente único para o espaço dos deslocamentos de corpo rígido

$$\mathbf{P}_W = \mathbf{W} \mathbf{W}^T \quad (3-52)$$

de propriedades conhecidas

$$\mathbf{P}_W \mathbf{P}_W = \mathbf{P}_W \quad (3-53)$$

$$\mathbf{P}_W \mathbf{W} = \mathbf{W} \quad (3-54)$$

Assim, supondo que o espaço dos deslocamentos admissíveis é ortogonal e complementar ao espaço dos deslocamentos de corpo rígido, tem-se que

$$\mathbf{P}_W^\perp = \mathbf{I} - \mathbf{P}_W = \mathbf{I} - \mathbf{W} \mathbf{W}^T \quad (3-55)$$

sendo \mathbf{P}_W^\perp o projetor ortogonal do espaço dos deslocamentos de corpo rígido, de propriedades conhecidas

$$\mathbf{P}_W^\perp \mathbf{P}_W^\perp = \mathbf{P}_W^\perp \quad (3-56)$$

$$\mathbf{P}_W^\perp \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (3-57)$$

Partindo da suposição de que a propriedade para inversão

$$(\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L})^{(-1)} = (\mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L})^{(-1)} (\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp)^{(-1)} \quad (3-58)$$

é válida, pode-se escrever que

$$(\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp)^{(-1)} = \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L} (\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L})^{(-1)} \quad (3-59)$$

em que $(\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L})^{(-1)}$ também é uma inversa generalizada. Como será apresentado na Seção 3.5.3, sabe-se que a matriz $\mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L}$ é ortogonal à base \mathbf{W} à direita. Assim, pode-se escrever uma inversa generalizada restrita ao seu próprio espaço, isto é, uma inversa de Bott-Duffin [2],

$$(\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L})^{(-1)} = \mathbf{P}_W^\perp (\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L} + \mathbf{P}_W)^{-1} \quad (3-60)$$

considerando $(\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L} + \mathbf{P}_W)^{-1}$ não-singular.

Pode-se, finalmente, reescrever a Equação (3-59) como a inversa generalizada 1,2,3 [2]

$$(\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp)^{(-1)} = \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L} (\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L} + \mathbf{P}_W)^{-1} \quad (3-61)$$

e a Equação (3-46) como

$$\mathbf{K}_{CC} = \mathbf{L}^T \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L} (\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L} + \mathbf{P}_W)^{-1} \mathbf{H} \quad (3-62)$$

De modo análogo ao apresentado para $(\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp)^{(-1)}$, chega-se à expressão

$$(\mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L})^{(-1)} = (\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L})^{(-1)} \mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp = \mathbf{P}_W^\perp (\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L} + \mathbf{P}_W)^{-1} \mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp \quad (3-63)$$

que, juntamente com a Equação (3-61), confirma a validade da Equação (3-58).

A escolha da matriz $\mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L}$ para o produto da Equação (3-58) atende às transformações esperadas entre os espaços cobertos pelos projetores \mathbf{P}_Z^\perp e \mathbf{P}_W^\perp nas Equações (3-47) e (3-44).

3.4

Obtenção da base das forças de superfície desequilibradas \mathbf{Z}

Como já apresentada na Seção 3.2, a base das forças de superfície desequilibradas \mathbf{Z} é obtida de modo que suas colunas sejam bases ortonormais das linhas de \mathbf{R}^T . Um modo de obtenção é apresentado a seguir.

Considere que as funções de deslocamento de corpo rígido u_{ir}^r podem ser obtidas pela interpolação da base $\mathbf{W} \equiv W_{mr}$ pelas funções u_{im} , ou seja,

$$u_{ir}^r = u_{im} W_{mr} \quad (3-64)$$

Pré-multiplicando ambos os lados por t_{il} e integrando no contorno, considerando as Equações (3-21) e (3-41), chega-se a

$$\mathbf{R} = \mathbf{L} \mathbf{W} \quad (3-65)$$

Assim, a base \mathbf{Z} também pode ser obtida de modo que suas colunas sejam bases ortonormais das colunas do produto $\mathbf{L} \mathbf{W}$, dispensando a obtenção de \mathbf{R} [12].

3.5

Propriedades de ortogonalidade e consistência das equações matriciais

3.5.1

Propriedades de ortogonalidade de \mathbf{H}

Sendo $\mathbf{W} \equiv W_{nr}$ a base ortonormal de deslocamentos de corpo rígido do sistema externo, tem-se que

$$\mathbf{H} \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (3-66)$$

já que \mathbf{H} não realiza transformação cinemática sobre deslocamentos de corpo rígido. Pode-se definir também que

$$\mathbf{H}^T \mathbf{V} = \mathbf{0} \quad (3-67)$$

sendo que $\mathbf{V} \equiv V_{nr}$ pode ser interpretada como uma base ortonormal de forças desequilibradas do sistema interno. A obtenção de \mathbf{V} é discutida na Seção 4.2.4.

3.5.2

Propriedades de ortogonalidade de $\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp$

Por construção, sabe-se que a matriz $\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp$ não realiza transformação de flexibilidade sobre forças de superfície desequilibradas, ou seja, reescrevendo a Equação (3-31),

$$\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{Z} = \mathbf{0} \quad (3-68)$$

Pode-se definir que

$$\mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{G}^T \mathbf{Y} = \mathbf{0} \quad (3-69)$$

em que $\mathbf{Y} \equiv Y_{nr}$ pode ser interpretada como uma outra base ortonormal referente a forças desequilibradas do sistema interno, cuja obtenção é discutida na Seção 4.3.4.

3.5.3

Propriedades de ortogonalidade de $\mathbf{L}^T \mathbf{P}_Z^\perp$

Por construção, sabe-se que a matriz $\mathbf{L}^T \mathbf{P}_Z^\perp$ não realiza transformação sobre forças de superfície desequilibradas, ou seja,

$$\mathbf{L}^T \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{Z} = \mathbf{0} \quad (3-70)$$

Considerando as Equações (3-65), (3-29) e (3-28), tem-se que

$$\mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L} \mathbf{W} = \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{Z} \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0} \quad (3-71)$$

3.5.4

Propriedades de ortogonalidade de \mathbf{K}_{CC} e $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$

Considerando as Equações (3-66) e (3-71) na Equação (3-46), tem-se que

$$\mathbf{K}_{CC} \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad (3-72)$$

$$\mathbf{K}_{CC}^T \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (3-73)$$

ou seja, a matriz \mathbf{K}_{CC} não realiza transformações sobre deslocamentos de corpo rígido.

Considerando a Equação (3-71) na Equação (3-44), tem-se também que

$$(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)^T \mathbf{W} = \mathbf{0} \quad (3-74)$$

ou seja, o carregamento nodal equivalente não realiza trabalho sobre os deslocamentos de corpo rígido.

3.5.5

Consistência de $\mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp (\mathbf{t} - \mathbf{t}^b)$

Considerando as Equações (3-67) e (3-69), tem-se que

$$\mathbf{V}^T \mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{0} \quad \text{e} \quad (3-75)$$

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp (\mathbf{t} - \mathbf{t}^b) = \mathbf{0} \quad (3-76)$$

sendo que

$$\mathbf{V} \mathbf{V}^T \neq \mathbf{Y} \mathbf{Y}^T \quad (3-77)$$

Como essas duas parcelas da Equação (3-34) são ortogonais a duas bases distintas à esquerda, essa equação é considerada inconsistente. Isso também ocorre no MCEC e está relacionado com a origem não-variacional do método. Apesar disso, à medida que a discretização aumenta, $\mathbf{V} \mathbf{V}^T$ e $\mathbf{Y} \mathbf{Y}^T$ convergem para uma mesmo projetor ortonormal de forças desequilibradas do sistema interno.

3.5.6

Consistência de $\mathbf{K}_{CC}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = (\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$

Considerando as Equações (3-73) e (3-74) na Equação (3-46), tem-se que ambas as parcelas da Equação (3-45) são ortogonais a \mathbf{W}^T à esquerda. Essa consistência é devida à adequada consideração das constantes de corpo

rígido na solução fundamental e não é verificada no MCEC, justificando, pois, a denominação de “consistente” ao método apresentado nesse capítulo.

3.6

Avaliação dos campos de deslocamentos e de forças de superfície no domínio

Considerando que as forças de superfície no contorno obtidas pela resolução do problema satisfazem a Equação (3-35), tem-se que a Equação (3-36) é válida e portanto, pode-se considerar a Equação (3-11) como a expressão da identidade de Somigliana. Através dessa equação, valores de deslocamentos podem ser obtidos no domínio Ω desde que sejam conhecidos os campos de deslocamentos u_i e de forças de superfície t_i no contorno Γ , aproximados pelas Equações (3-12) e (3-13) a partir de \mathbf{d} e \mathbf{t} .

Considerando que os parâmetros \mathbf{d} e \mathbf{p} são conhecidos pela resolução do problema através da Equação (3-45), deseja-se obter então os parâmetros \mathbf{t} que satisfaçam as Equações (3-34) e (3-39), ou seja,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp \\ \mathbf{L}^T \mathbf{P}_Z^\perp \end{bmatrix} \mathbf{t} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) + \mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{t}^b \\ \mathbf{p} \end{pmatrix} \quad (3-78)$$

Resolvendo esse sistema de equações por mínimos quadrados, chega-se a

$$(\mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp + \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L} \mathbf{L}^T \mathbf{P}_Z^\perp) \mathbf{t} = \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{G}^T [\mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) + \mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{t}^b] + \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L} \mathbf{p} \quad (3-79)$$

Então, supondo que apenas forças equilibradas são transformadas, pode-se constituir o sistema restrito

$$\begin{cases} (\mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp + \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L} \mathbf{L}^T \mathbf{P}_Z^\perp) \mathbf{t} = \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{G}^T [\mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) + \mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{t}^b] + \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L} \mathbf{p} \\ \mathbf{P}_Z \mathbf{t} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (3-80)$$

para o qual se obtém

$$\mathbf{t} = (\mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp + \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L} \mathbf{L}^T \mathbf{P}_Z^\perp + \mathbf{P}_Z^\perp)^{-1} [\mathbf{H}(\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) + \mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{t}^b] + \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L} \mathbf{p} \quad (3-81)$$

sendo $(\mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{G}^T \mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp + \mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L} \mathbf{L}^T \mathbf{P}_Z^\perp + \mathbf{P}_Z^\perp)$ uma matriz não-singular.

As tensões podem ser obtidas através da aplicação da Equação (2-7) na Equação (3-11).

3.7

Método convencional dos elementos de contorno

No método convencional dos elementos de contorno (MCEC) [1, 3], como já apresentado, a constante c_i^r da solução fundamental expressa pela Equação (2-19) é considerada nula. Conseqüentemente, a Equação (3-8) é previamente considerada como satisfeita e portanto, o trabalho realizado pelas forças de superfície desequilibradas sobre os deslocamentos de corpo rígido, gerado pelo erro de aproximação, está sendo desprezado. Tem-se, então, em substituição das Equações (3-34), (3-44) e (3-46), respectivamente,

$$\mathbf{H} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{G} (\mathbf{t} - \mathbf{t}^b) \quad (3-82)$$

$$\mathbf{p} - \mathbf{p}^b = \mathbf{L}^T (\mathbf{t} - \mathbf{t}^b) \quad (3-83)$$

$$\mathbf{K}_C = \mathbf{L}^T \mathbf{G}^{-1} \mathbf{H} \quad (3-84)$$

Observa-se que a matriz de rigidez é inconsistente com relação aos deslocamentos de corpo rígido, já que

$$\mathbf{W}^T \mathbf{K}_C \neq \mathbf{0} \quad (3-85)$$

Apesar disso, verifica-se que as matrizes \mathbf{K}_C e \mathbf{K}_{CC} tendem a se igualar com o aumento da discretização, já que as forças de superfície desequilibradas tendem a zero.