

## 2

### Considerações teóricas iniciais

Neste trabalho, as formulações de cada método estão apresentadas nos capítulos subseqüentes para problemas de elasticidade, sendo que alguns tópicos estão desenvolvidos para problemas de potencial. Assim, a fim de se estabelecer a nomenclatura utilizada, as relações básicas desses tópicos estão apresentadas na Seção 2.1. As aplicações numéricas apresentadas são somente para problemas de potencial e acústica.

A Seção 2.2 trata da discretização do contorno e da técnica utilizada nas aplicações numéricas do Capítulo 6 para a representação de valores descontínuos de fluxo normal.

Na Seção 2.3 é apresentada a solução fundamental, utilizada como fator de ponderação no método convencional dos elementos de contorno e como função de interpolação nos métodos híbridos dos elementos de contorno.

#### 2.1

##### Relações básicas das teorias da elasticidade e do potencial

###### 2.1.1

###### Relações básicas da teoria elastostática linear

Seja um corpo elástico, ilustrado na Figura 2.1, sujeito a forças de massa  $b_i$  no domínio  $\Omega$  e prescrições de forças de superfície  $\bar{t}_i$  em  $\Gamma_\sigma$  e deslocamentos  $\bar{u}_i$  em  $\Gamma_u$ .

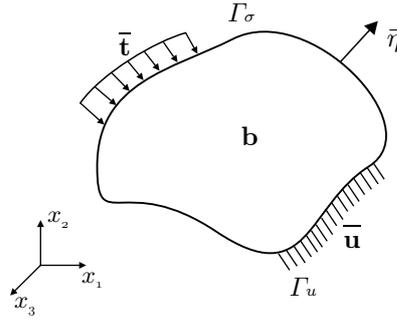


Figura 2.1: Corpo elástico submetido a forças de massa, forças de superfície e deslocamentos prescritos

Para pequenos deslocamentos, a relação entre deformações e deslocamentos é dada por

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad \text{em } \Omega \quad (2-1)$$

em que  $\epsilon_{ij}$  é o tensor de deformações,  $u_i$  é o campo de deslocamentos e os índices  $i$  e  $j$  referem-se às direções coordenadas do sistema.

Para material isotrópico linearmente elástico, a relação constitutiva é expressa por

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad \text{em } \Omega \quad (2-2)$$

em que  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões e  $D_{ijkl}$  é o tensor de constantes elásticas, dado por

$$D_{ijkl} = \frac{2G\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \delta_{kl} + G (\delta_{ik} \delta_{jp} + \delta_{ip} \delta_{jk}) \quad (2-3)$$

sendo  $G$  o módulo de elasticidade transversal,  $\nu$  o coeficiente de Poisson e  $\delta_{ij}$  o delta de Kronecker, definido por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2-4)$$

A partir do equilíbrio de momentos, considerando a inexistência de momentos de massa, chega-se à propriedade de simetria do tensor de tensões

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad \text{em } \Omega \quad (2-5)$$

e a partir do equilíbrio de forças, à equação diferencial que governa o problema

$$\sigma_{ji,j} + b_i = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2-6)$$

Considerando as Equações (2-1) e (2-5), pode-se reescrever a Equação (2-2)

como

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} u_{k,p} \quad (2-7)$$

No contorno  $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_\sigma$ , as forças de superfície  $t_i$  são expressas por

$$t_i = \sigma_{ji} \eta_j \quad \text{em } \Gamma \quad (2-8)$$

em que  $\eta_j$  são os cossenos diretores do vetor  $\vec{\eta}$ , normal à superfície, como pode ser observado na Figura 2.1. Além disso, considerando as condições de contorno, tem-se a relação de compatibilidade de deslocamentos

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2-9)$$

e a relação de equilíbrio de forças de superfície

$$t_i = \bar{t}_i \quad \text{em } \Gamma_\sigma \quad (2-10)$$

### 2.1.2 Relações básicas da teoria de potencial em regime permanente

Seja um corpo homogêneo, ilustrado na Figura 2.2, sujeito a uma fonte interna  $Q$  no domínio  $\Omega$  e prescrições de fluxo normal  $\bar{q}_n$  em  $\Gamma_q$  e potencial  $\bar{u}$  em  $\Gamma_u$ .

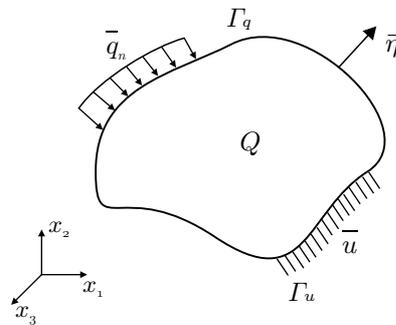


Figura 2.2: Corpo homogêneo submetido a uma fonte interna, fluxo normal e potencial prescritos

Para material isotrópico, o fluxo  $q_i$ , na direção  $i$ , é dado por

$$q_i = -k u_{,i} \quad \text{em } \Omega \quad (2-11)$$

em que  $u$  é o potencial e  $k$  é a constante de condutividade do material.

A partir do equilíbrio, chega-se à equação diferencial que governa o problema

$$q_{i,i} + Q = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2-12)$$

que pode ser reescrita na forma da equação de Poisson

$$u_{,ii} + \frac{Q}{k} = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2-13)$$

No contorno  $\Gamma = \Gamma_u + \Gamma_q$ , o fluxo  $q_n$ , normal à superfície, é expresso por

$$q_n = -q_i \eta_i \quad \text{em } \Gamma \quad (2-14)$$

Além disso, considerando as condições de contorno, tem-se a relação de compatibilidade de potencial

$$u = \bar{u} \quad \text{em } \Gamma_u \quad (2-15)$$

e a relação de equilíbrio de fluxo normal

$$q_n = \bar{q}_n \quad \text{em } \Gamma_q \quad (2-16)$$

## 2.2

### Discretização do contorno

Nos métodos dos elementos de contorno, os campos de deslocamentos  $u_i$  e as forças de superfície  $t_i$  são aproximados no contorno  $\Gamma$  por

$$u_i = u_{im} d_m \quad (2-17)$$

$$t_i = t_{il} t_l \quad (2-18)$$

em que  $u_{im}$  e  $t_{il}$  são funções que interpolam os valores nodais de deslocamentos  $d_m$  e de forças de superfície  $t_l$ , respectivamente [1, 3]. Nessas equações, o índice  $i$  refere-se às direções coordenadas do sistema e os índices  $m$  e  $l$  aos graus de liberdade de deslocamentos e de forças de superfície do problema, respectivamente. Geralmente, utilizam-se funções  $u_{im}$  e  $t_{il}$  iguais e mesmo número de parâmetros  $d_m$  e  $t_l$ .

Sabe-se que a discretização convencional no contorno não é capaz de representar valores descontínuos de fluxo normal e forças de superfície em problemas de potencial e elasticidades, respectivamente. Essas discontinuidades podem ocorrer em locais de mudança na direção do vetor normal ao contorno, interface de meios distintos e mudança nas condições de contorno.

Algumas técnicas empregadas para superar essa dificuldade de representação são a utilização de elementos não-conformes (descontínuos e semi-descontínuos) e nós duplos [1, 3]. Nos exemplos numéricos do Capítulo 6, utiliza-se a técnica de adição de graus de liberdade de fluxo normal e forças de superfície nos nós em que se deseja representar descontinuidades [9, 7]. Dessa forma, algumas matrizes das formulações de contorno resultam na forma retangular, já que o número de parâmetros de fluxo normal e forças de superfície é maior que o de potencial e deslocamentos para problemas de potencial e elasticidade, respectivamente.

Em problemas bidimensionais de potencial, por exemplo, os parâmetros de potencial  $d_m$  permanecem como atributos nodais mas um ou ambos os parâmetros de fluxo normal  $q_{n_i}$  dos nós extremos dos elementos são considerados atributos do elemento. Assim, os nós de interface entre elementos adjacentes podem ter dois parâmetros de fluxo normal,  $q_{ne_i}$  e  $q_{nd_i}$ , referentes aos elementos a sua esquerda e sua direita, respectivamente. Nesses casos, os elementos adjacentes compartilham o mesmo valor para interpolar o campo de potencial  $u$  mas valores distintos para interpolar o fluxo normal  $q_n$ , permitindo, portanto, descontinuidades neste mas não naquele.

A prescrição de valores no contorno deve ser realizada de modo que para cada nó apenas um parâmetro permaneça incógnito. Para nós em que existem dois parâmetros  $q_{n_i}$ , as possíveis combinações de prescrições de valores nodais no contorno estão apresentadas na Tabela 2.1, em que  $u$ ,  $q_{ne}$  e  $q_{nd}$  são parâmetros nodais de deslocamentos, fluxo normal à esquerda e fluxo normal à direita, respectivamente.

<i>Parâmetros prescritos</i>	<i>Parâmetros incógnitos</i>
$u$	$q=q_{ne}=q_{nd}$
$u$ e $q_{ne}$	$q_{nd}$
$u$ e $q_{nd}$	$q_{ne}$
$q_{ne}$ e $q_{nd}$	$u$

Tabela 2.1: Combinações possíveis de prescrições de valores nodais

## 2.3

### Solução fundamental

Considera-se como solução fundamental o campo de deslocamentos  $u_i^*$  devido à atuação de uma força concentrada qualquer  $p_m^*$  nos nós do contorno discretizado para cada direção coordenada, como ilustrado na Figura 2.3, obtidos a menos de constantes referentes a movimentos de corpo rígido [12].

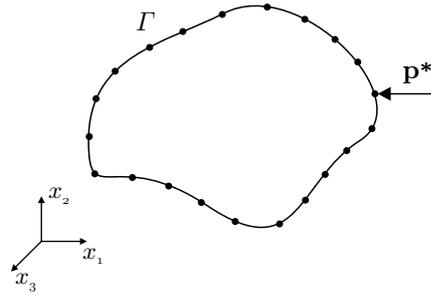


Figura 2.3: Corpo submetido a uma força nodal concentrada qualquer

Pode ser expressa por

$$u_i^* = u_{im}^* p_m^* + c_i^r \equiv u_{im}^* p_m^* + u_{ir}^r C_{rm} p_m^* \quad \text{em } \Omega \quad (2-19)$$

em que  $c_i^r$  e  $C_{rm}$  são constantes,  $u_{im}^*$  são funções de interpolação singulares e  $u_{ir}^r$  são funções de interpolação referentes a deslocamentos de corpo rígido. O índice subscrito  $i$  refere-se às direções coordenadas do sistema e  $m$  a uma direção coordenada num dado ponto nodal do contorno. Os índices superescritos  $*$  e  $r$  referem-se à solução fundamental e aos deslocamentos de corpo rígido, respectivamente. A primeira parcela da soma da Equação (2-19) é constituída por deslocamentos devidos à força concentrada e constantes de deslocamentos de corpo rígido, estas resultantes da obtenção das funções  $u_{im}^*$ . Já a segunda parcela da soma é constituída apenas por deslocamentos de corpo rígido.

Considerando as Equações (2-7) e (2-8), as tensões referentes à solução fundamental são expressas por

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ijm}^* p_m^* = D_{ijkp} u_{km,p}^* p_m^* \quad \text{em } \Omega \quad (2-20)$$

e as forças de superfície por

$$t_i^* = t_{im}^* p_m^* = \sigma_{jim}^* \eta_j p_m^* \quad \text{em } \Gamma \quad (2-21)$$

Essa é uma representação mais geral do que a usualmente apresentada nos métodos de elementos de contorno, em que se considera a força concentrada com intensidade unitária e as constantes  $c_i^r$  nulas. No método convencional dos elementos de contorno, a solução fundamental é utilizada como fator de ponderação e nos métodos híbridos dos elementos de contorno, como função de interpolação.

A seguir, a obtenção das funções  $u_{im}^*$  e  $u_{ir}^r$  está resumidamente apre-

sentada. As constantes  $C_{rm}$  são consideradas de modos distintos em cada método e portanto são discutidas quando da apresentação das formulações.

### 2.3.1

#### Obtenção das funções de interpolação singulares

As funções de interpolação singulares  $u_{im}^*$  são obtidas de modo que a solução fundamental satisfaça a equação diferencial que governa o problema de um corpo submetido a uma força concentrada qualquer  $p_m^*$  [1, 3], dada por

$$\sigma_{ji,j}^* + \Delta_{im} p_m^* = (\sigma_{jim,j}^* + \Delta_{im}) p_m^* = 0 \quad \text{em } \Omega \quad (2-22)$$

em que  $\Delta_{im}$  é a função singular de Dirac, definida por

$$\Delta_{im} = \begin{cases} \infty & \text{se } i \text{ e } m \text{ referem-se à mesma direção coordenada} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2-23)$$

e para a qual se conhece a propriedade

$$\int_{\Omega} \Delta_{im} d\Omega = \delta_{im} \quad (2-24)$$

em que  $\delta_{im}$  é uma generalização do delta de Kronecker  $\delta_{ij}$  e é definido por

$$\delta_{im} = \begin{cases} 1 & \text{se } i \text{ e } m \text{ referem-se à mesma direção coordenada} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2-25)$$

Então, para qualquer  $p_m^*$ , tem-se que

$$\sigma_{jim,j}^* + \Delta_{im} = 0 \quad (2-26)$$

$$\int_{\Omega} \sigma_{jim,j}^* d\Omega = -\delta_{im} \quad (2-27)$$

Aplicando o teorema da divergência e considerando a Equação (2-21), tem-se também que

$$\int_{\Gamma} t_{im}^* d\Gamma = -\delta_{im} \quad (2-28)$$

para um contorno  $\Gamma$  que circunscreva o ponto de aplicação da força  $p_m^*$ .

Para problemas tridimensionais de elastostática, considerando material isotrópico, tem-se que

$$u_{im}^* = \frac{1}{16\pi(1-\nu)Gr} [(3-4\nu)\delta_{im} + r_{,i}r_{,m}] \quad (2-29)$$

e para problemas de estado plano de deformações,

$$u_{im}^* = -\frac{1}{8\pi(1-\nu)G} [(3-4\nu) \ln(r) \delta_{im} - r_{,i} r_{,m}] \quad (2-30)$$

em que

$$r_i = x_i - x_i^m \quad \text{e} \quad r = (r_i r_i)^{\frac{1}{2}} \quad (2-31)$$

sendo  $r$  a distância a uma força concentrada  $p_m^*$  aplicada no ponto de coordenadas  $x_i^m$ .

Para problemas tridimensionais de potencial, considerando material homogêneo e regime permanente, tem-se que

$$u_{im}^* = \frac{1}{4k\pi r} \quad (2-32)$$

e para bidimensionais,

$$u_{im}^* = -\frac{\ln(r)}{2k\pi} \quad (2-33)$$

### 2.3.2

#### Obtenção das funções de interpolação referentes apenas aos deslocamentos de corpo rígido

É conveniente considerar  $u_{ir}^r$  funções de interpolação normalizadas de modo que, quando avaliadas no contorno  $\Gamma$  para cada grau de liberdade  $m$ , resultem numa base ortonormal de deslocamentos de corpo rígido  $W_{mr} \equiv \mathbf{W}$ . Tal conveniência é melhor compreendida quando da obtenção de resultados em pontos internos nos métodos híbridos de elementos de contorno, por exemplo.

Supondo que essas funções normalizadas  $u_{ir}^r \equiv \mathbf{u}^r$  possam ser obtidas a partir de funções arbitrárias de deslocamentos de corpo rígido  $\tilde{u}_{ir}^r \equiv \tilde{\mathbf{u}}^r$  pela expressão

$$u_{ir}^r = \tilde{u}_{ir}^r T_{rs} \quad \text{ou} \quad \mathbf{u}^r = \tilde{\mathbf{u}}^r \mathbf{T} \quad (2-34)$$

Para cada grau de liberdade  $m$  do contorno chega-se a

$$W_{ms} = \tilde{U}_{mr}^r T_{rs} \quad \text{ou} \quad \mathbf{W} = \tilde{\mathbf{U}}^r \mathbf{T} \quad (2-35)$$

Pré-multiplicando por  $\mathbf{W}^T$  e sabendo que  $\mathbf{W}^T \mathbf{W} = \mathbf{I}$ , sendo  $\mathbf{I}$  a matriz identidade, chega-se a

$$\mathbf{T} = (\mathbf{W}^T \tilde{\mathbf{U}}^r)^{-1} \quad (2-36)$$

Assim, conhecidas as funções arbitrárias  $\tilde{u}_{ir}^r$  e a base ortonormal  $W_{mr}$ , pode-se obter  $T_{rs}$  e  $u_{ir}^r$ .

Para problemas de elastostática em estado plano de deformações, pode-se utilizar como funções arbitrárias de deslocamentos de corpo rígido

$$\tilde{u}_{ir}^r \equiv \tilde{\mathbf{u}}^r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_2 \\ 0 & 1 & x_1 \end{bmatrix} \quad (2-37)$$

e para problemas bidimensionais de potencial,

$$\tilde{u}_{ir}^r \equiv \tilde{\mathbf{u}}^r = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix} \quad (2-38)$$