



Maria Fernanda Figueiredo de Oliveira

**Métodos de elementos de contorno convencional,
híbridos e simplificados**

Dissertação de Mestrado

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil. Área de concentração: Estruturas.

Orientador: Prof. Ney Augusto Dumont

Rio de Janeiro
Abril de 2004



Maria Fernanda Figueiredo de Oliveira

**Métodos de elementos de contorno convencional,
híbridos e simplificados**

Dissertação apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Mestre pelo Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Ney Augusto Dumont

Presidente / Orientador

Departamento de Engenharia Civil — PUC-Rio

Prof. José Cláudio de Faria Telles

COPPE/UFRJ

Prof. Raul Rosas e Silva

Departamento de Engenharia Civil — PUC-Rio

Prof. Ricardo Alexandre Passos Chaves

CEFET/RJ

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador Setorial

do Centro Técnico Científico — PUC-Rio

Rio de Janeiro, 15 de Abril de 2004

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador.

Maria Fernanda Figueiredo de Oliveira

Graduou-se em Engenharia Civil na Universidade Federal do Paraná – UFPR em 2002. Participou do Programa Especial de Treinamento – PET (CAPES/SESU) de 1998 a 2000. Foi bolsista de Iniciação Científica PIBIC/CNPq de 2000 a 2002.

Ficha Catalográfica

Oliveira, Maria Fernanda Figueiredo de

Métodos de elementos de contorno convencional, híbridos e simplificados/ Maria Fernanda Figueiredo de Oliveira; orientador: Ney Augusto Dumont. — Rio de Janeiro : PUC–Rio, Departamento de Engenharia Civil, 2004.

v., 119 f: il. ; 29,7 cm

1. Dissertação (mestrado) - Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil.

Inclui referências bibliográficas.

1. Elementos de Contorno. 2. Métodos Variacionais. 3. Matrizes Inversas Generalizadas. I. Dumont, Ney Augusto. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro. Departamento de Engenharia Civil. III. Título.

CDD: 624

Agradecimentos

Aos meus pais Wilson e Maria Aparecida, meus irmãos Maurício e Leandro e meu namorado Márcio, pelo amor, carinho, incentivo e pela compreensão.

À Paôla, Ângela e Regina, pela amizade e pelo companheirismo.

Aos professores do Centro de Estudos de Engenharia Civil Prof. Inaldo Ayres Vieira – CESEC/UFPR, pela iniciação científica.

Ao Prof. Ney Augusto Dumont, pela orientação e motivação.

Às agências CAPES e FAPERJ, pelo apoio financeiro.

Resumo

Oliveira, Maria Fernanda Figueiredo de; Dumont, Ney Augusto. **Métodos de elementos de contorno convencional, híbridos e simplificados**. Rio de Janeiro, 2004. 119p. Dissertação de Mestrado — Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Apresentam-se as formulações, consolidando a nomenclatura e os principais conceitos dos métodos de elementos de contorno: convencional (MCCEC), híbrido de tensões (MHTEC), híbrido de deslocamentos (MHDEC) e híbrido simplificado de tensões (MHSTEC). É proposto o método híbrido simplificado de deslocamentos (MHSDEC), em contrapartida ao MHSTEC, baseando-se nas mesmas hipóteses de aproximação de tensões e deslocamentos do MHDEC e supondo que a solução fundamental em termos de tensões seja válida no contorno. Como decorrência do MHSTEC e do MHSDEC, é apresentado também o método híbrido de malha reduzida dos elementos de contorno (MHMREC), com aplicação computacionalmente vantajosa a problemas no domínio da frequência ou envolvendo materiais não-homogêneos. A partir da investigação das equações matriciais desses métodos, são identificadas quatro novas relações matriciais, das quais uma verifica-se como válida para a obtenção dos elementos das matrizes de flexibilidade e de deslocamento que não podem ser determinados por integração ou avaliação direta. Também é proposta a correta consideração, ainda não muito bem explicada na literatura, de que forças de superfície devem ser interpoladas em função de atributos de superfície e não de atributos nodais. São apresentadas aplicações numéricas para problemas de potencial para cada método mencionado, em que é verificada a validade das novas relações matriciais.

Palavras-chave

Elementos de Contorno; Métodos Variacionais; Matrizes Inversas Generalizadas.

Abstract

Oliveira, Maria Fernanda Figueiredo de; Dumont, Ney Augusto (Advisor). **Conventional, Hybrid and Simplified Boundary Element Methods**. Rio de Janeiro, 2004. 119p. MSc. Dissertation — Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A consolidated, unified formulation of the conventional (CCBEM), hybrid stress (HSBEM), hybrid displacement (HDBEM) and simplified hybrid stress (SHSBEM) boundary element methods is presented. As a counterpart of SHSBEM, the simplified hybrid displacement boundary element method (SHDBEM) is proposed on the basis of the same stress and displacement approximation hypotheses of the HDBEM and on the assumption that stress fundamental solutions are also valid on the boundary. A combination of the SHSBEM and the SHDBEM gives rise to a provisorily called mesh-reduced hybrid boundary element method (MRHBEM), which seems computationally advantageous when applied to frequency domain problems or non-homogeneous materials. Four new matrix relations are identified, one of which may be used to obtain the flexibility and displacement matrix coefficients that cannot be determined by integration or direct evaluation. It is also proposed the correct consideration, still not well explained in the technical literature, that traction forces should be interpolated as functions of surface and not of nodal attributes. Numerical examples of potential problems are presented for each method, in which the validity of the new matrix relations is verified.

Keywords

Boundary Elements; Variational Methods; Generalized Inverse Matrices.

Sumário

1	Introdução	14
2	Considerações teóricas iniciais	17
2.1	Relações básicas das teorias da elasticidade e do potencial	17
2.1.1	Relações básicas da teoria elastostática linear	17
2.1.2	Relações básicas da teoria de potencial em regime permanente	19
2.2	Discretização do contorno	20
2.3	Solução fundamental	21
2.3.1	Obtenção das funções de interpolação singulares	23
2.3.2	Obtenção das funções de interpolação referentes apenas aos deslocamentos de corpo rígido	24
3	Método convencional consistente dos elementos de contorno	26
3.1	Identidade de Somigliana	26
3.2	Equações matriciais que governam o problema	28
3.3	Matriz de rigidez	33
3.3.1	Inversa generalizada da matriz $\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp$ quadrada	34
3.3.2	Inversa generalizada da matriz $\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp$ retangular	34
3.4	Obtenção da base das forças de superfície desequilibradas \mathbf{Z}	36
3.5	Propriedades de ortogonalidade e consistência das equações matriciais	36
3.5.1	Propriedades de ortogonalidade de \mathbf{H}	37
3.5.2	Propriedades de ortogonalidade de $\mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp$	37
3.5.3	Propriedades de ortogonalidade de $\mathbf{L}^T \mathbf{P}_Z^\perp$	37
3.5.4	Propriedades de ortogonalidade de \mathbf{K}_{CC} e $(\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$	38
3.5.5	Consistência de $\mathbf{H} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = \mathbf{G} \mathbf{P}_Z^\perp (\mathbf{t} - \mathbf{t}^b)$	38
3.5.6	Consistência de $\mathbf{K}_{CC} (\mathbf{d} - \mathbf{d}^b) = (\mathbf{p} - \mathbf{p}^b)$	38
3.6	Avaliação dos campos de deslocamentos e de forças de superfície no domínio	39
3.7	Método convencional dos elementos de contorno	40
4	Métodos híbridos dos elementos de contorno	41
4.1	Aproximações no contorno e no domínio	41
4.2	Método híbrido de tensões dos elementos de contorno	42
4.2.1	Equações matriciais que governam o problema	42
4.2.2	Obtenção dos valores indeterminados de \mathbf{F} a partir de \mathbf{V}	45
4.2.3	Matriz de rigidez	47
4.2.4	Obtenção da base de forças desequilibradas do sistema interno \mathbf{V}	48
4.2.5	Propriedades de ortogonalidade e consistência das equações matriciais	49
4.2.6	Avaliação dos campos de deslocamentos e de tensões no domínio	50
4.3	Método híbrido de deslocamentos dos elementos de contorno	50
4.3.1	Equações matriciais que governam o problema	50
4.3.2	Obtenção dos valores indeterminados de \mathbf{F} a partir de \mathbf{Y}	54

4.3.3	Matriz de rigidez	55
4.3.4	Obtenção da base de forças desequilibradas do sistema auxiliar \mathbf{Y}	57
4.3.5	Propriedades de ortogonalidade e consistência das equações matriciais	58
4.3.6	Avaliação dos campos de deslocamentos e de tensões no domínio	59
5	Métodos híbridos simplificados dos elementos de contorno	61
5.1	Método híbrido simplificado de tensões dos elementos de contorno	61
5.1.1	Equações matriciais que governam o problema	61
5.1.2	Obtenção dos valores indeterminados de \mathbf{U}^* a partir de \mathbf{V}	63
5.1.3	Obtenção de \mathbf{C}	64
5.1.4	Matriz de rigidez	66
5.1.5	Propriedades de ortogonalidade e consistência das equações matriciais	67
5.1.6	Avaliação dos campos de deslocamentos e de tensões no domínio	68
5.1.7	Obtenção dos valores indeterminados de \mathbf{F} e \mathbf{U}^* a partir da relação $\mathbf{H}\mathbf{U}^* \approx \mathbf{F}$	69
5.2	Método híbrido simplificado de deslocamentos dos elementos de contorno	70
5.2.1	Equações matriciais que governam o problema	71
5.2.2	Obtenção dos valores indeterminados de \mathbf{T}^* a partir de \mathbf{Y}	73
5.2.3	Matriz de rigidez	74
5.2.4	Propriedades de ortogonalidade e consistência das equações matriciais	74
5.2.5	Avaliação dos campos de deslocamentos e de tensões no domínio	75
5.2.6	Obtenção dos valores indeterminados de \mathbf{F} e \mathbf{T}^* a partir da relação $\mathbf{G}\mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{T}^* \approx \mathbf{F}$	75
5.3	Método híbrido de malha reduzida dos elementos de contorno	77
5.3.1	Equações matriciais que governam o problema	77
5.3.2	Obtenção dos valores indeterminados de \mathbf{U}^* e \mathbf{T}^* a partir de \mathbf{V} e \mathbf{Y}	78
5.3.3	Matriz de rigidez	79
5.3.4	Propriedades de ortogonalidade e consistência das equações matriciais	79
5.3.5	Avaliação dos campos de deslocamentos e de tensões no domínio	80
5.3.6	Obtenção dos valores indeterminados de \mathbf{U}^* a partir da relação $\mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L}\mathbf{U}^* \approx \mathbf{G}^T$	80
5.3.7	Obtenção dos valores indeterminados de \mathbf{T}^* a partir da relação $\mathbf{P}_Z^\perp \mathbf{L}^T \mathbf{T}^* \approx \mathbf{H}^T$	81
5.3.8	Aplicação do MHMREC	82
6	Aplicações numéricas	84
6.1	Comportamento da base \mathbf{V} para um problema transiente de potencial considerando material com graduação funcional	84
6.2	Problema de potencial em regime permanente para um contorno convexo de 6 lados, sujeito a uma força de massa	86
6.2.1	Bases \mathbf{V} e \mathbf{Y}	87
6.2.2	Valores indeterminados de \mathbf{F} , \mathbf{U}^* e \mathbf{T}^*	89
6.2.3	Matriz de rigidez	99

6.2.4	Vetor de constantes \mathbf{C}	101
6.2.5	Resultados de potencial e fluxo normal equivalente para condições de contorno de Neumann e Dirichlet	102
6.3	Problema de potencial em regime permanente para um contorno de 8 lados com concavidade, sujeito a uma força de massa	105
6.3.1	Bases \mathbf{V} e \mathbf{Y}	106
6.3.2	Valores indeterminados de \mathbf{F} , \mathbf{U}^* e \mathbf{T}^*	106
6.3.3	Resultados de potencial e fluxo normal equivalente para condições de contorno de Neumann e Dirichlet	110
6.4	Problema de Helmholtz para um contorno de 5 lados pelo MHMREC	112
7	Conclusões	116
7	Referências bibliográficas	119

Lista de Figuras

2.1	Corpo elástico submetido a forças de massa, forças de superfície e deslocamentos prescritos	18
2.2	Corpo homogêneo submetido a uma fonte interna, fluxo normal e potencial prescritos	19
2.3	Corpo submetido a uma força nodal concentrada qualquer	22
3.1	Aproximações do método convencional consistente dos elementos de contorno	26
3.2	Transformações entre os parâmetros presentes no MCCEC	33
4.1	Aproximações do método híbrido de tensões dos elementos de contorno	42
4.2	Transformações entre os parâmetros presentes no MHTEC	45
4.3	Aproximações do método híbrido de deslocamentos dos elementos de contorno	51
4.4	Transformações entre os parâmetros presentes no MHDEC	54
5.1	Transformações entre os parâmetros presentes no MHSTEC	63
5.2	Transformações entre os parâmetros presentes no MHSDEC	72
5.3	Transformações entre os parâmetros presentes no MHMREC	78
6.1	a) Estrutura analisada e suas condições de contorno b) Variação das propriedades do material	85
6.2	Estrutura analisada	85
6.3	Corpo analisado	86
6.4	Força de massa, campo de potencial, campo de fluxo nas direções x_1 e x_2	87
6.5	Valores de \mathbf{V} e \mathbf{Y} ao longo do contorno para a Malha 5	88
6.6	Diferença entre as bases de \mathbf{V} e \mathbf{Y} para as diversas malhas	89
6.7	Erro entre as matrizes $\mathbf{H}\mathbf{U}^*$ e \mathbf{F} para as diversas malhas	90
6.8	Erro de simetria da matriz $\mathbf{H}\mathbf{U}^*$ para as diversas malhas	90
6.9	Erro entre as matrizes $\mathbf{G}\mathbf{P}_Z^\perp\mathbf{T}^*$ e \mathbf{F} para as diversas malhas	91
6.10	Erro de simetria da matriz $\mathbf{G}\mathbf{P}_Z^\perp\mathbf{T}^*$ para as diversas malhas	92
6.11	Erro entre as matrizes $\mathbf{P}_Z^\perp\mathbf{L}\mathbf{U}^*$ e $\mathbf{P}_Z^\perp\mathbf{G}^T$ para as diversas malhas	93
6.12	Erro entre as matrizes $\mathbf{L}^T\mathbf{P}_Z^\perp\mathbf{T}^*$ e \mathbf{H}^T para as diversas malhas	94
6.13	Valores indeterminados de \mathbf{F} ao longo do contorno para a Malha 5	95
6.14	Diferença entre os valores indeterminados de \mathbf{F} em relação aos valores indeterminados de \mathbf{F} obtidos a partir de $\mathbf{F}\mathbf{V} = \mathbf{0}$ para as diversas malhas	95
6.15	Valores indeterminados de \mathbf{U}^* ao longo do contorno para a Malha 5	96
6.16	Diferença entre os valores indeterminados de \mathbf{U}^* em relação aos valores indeterminados de \mathbf{U}^* obtidos a partir de $(\mathbf{U}^* + \mathbf{W}\mathbf{C})\mathbf{V} = \mathbf{0}$ para as diversas malhas	97

6.17	Valores indeterminados de \mathbf{T}^* ao longo do contorno para a Malha 5	98
6.18	Diferença entre os valores indeterminados de \mathbf{T}^* em relação aos valores indeterminados de \mathbf{T}^* obtidos a partir de $\mathbf{T}^* \mathbf{V} = \mathbf{0}$ para as diversas malhas	98
6.19	Diferença da matriz \mathbf{K}_C em relação à matriz \mathbf{K}_{CC} para as diversas malhas	99
6.20	Diferença da matriz \mathbf{K} em relação à matriz \mathbf{K}_{CC} para as diversas malhas	100
6.21	Simetria da matriz \mathbf{K} para as diversas malhas	100
6.22	Valores de \mathbf{C} ao longo do contorno para a Malha 5	101
6.23	Diferença entre os valores de \mathbf{C} para as diversas malhas	102
6.24	Valores de potencial ao longo do contorno para a Malha 5 para condição de contorno de Neumann	103
6.25	Valores de fluxo normal equivalente ao longo do contorno para a Malha 5 para condição de contorno de Dirichlet	103
6.26	Erro dos valores de potencial projetados no espaço ortogonal ao dos deslocamentos de corpo rígido para cada malha e para condição de contorno de Neumann	104
6.27	Erro dos valores de fluxo equivalente para cada malha e para condição de contorno Dirichlet	104
6.28	Corpo analisado	105
6.29	Valores de \mathbf{V} e \mathbf{Y} ao longo do contorno para a Malha 5	106
6.30	Numerador do quociente da equação para a obtenção dos valores indeterminados de \mathbf{F} ao longo do contorno para a Malha 5	107
6.31	Numerador do quociente da equação para a obtenção dos valores indeterminados de \mathbf{U}^* ao longo do contorno para a Malha 5	107
6.32	Numerador do quociente da equação para a obtenção dos valores indeterminados de \mathbf{T}^* ao longo do contorno para a Malha 5	108
6.33	Valores indeterminados de \mathbf{F} ao longo do contorno para a Malha 5	108
6.34	Valores indeterminados de \mathbf{U}^* ao longo do contorno para a Malha 5	109
6.35	Erro entre as matrizes $\mathbf{H} \mathbf{U}^*$ e \mathbf{F} para as diversas malhas	109
6.36	Valores de potencial ao longo do contorno para a Malha 5 para condição de contorno de Neumann	110
6.37	Valores de fluxo normal equivalente ao longo do contorno para a Malha 5 para condição de contorno de Dirichlet	111
6.38	Erro dos valores de potencial projetados no espaço normal ao dos deslocamentos de corpo rígido cada malha e para condição de contorno de Neumann	111
6.39	Erro dos valores de fluxo equivalente para cada malha e para condição de contorno de Dirichlet	112
6.40	Corpo analisado discretizado por 14 elementos lineares para a malha de referência I.	112
6.41	Erro dos valores de potencial de velocidade para cada malha e para condição de contorno de Neumann	113
6.42	Erro dos valores de fluxo normal equivalente para cada malha e para condição de contorno de Dirichlet	114

6.43	Potencial de velocidade ao longo da reta FG para condição de contorno de Neumann	114
6.44	Fluxo na direção x ao longo da reta FG para condição de contorno de Neumann	115
6.45	Fluxo na direção y ao longo da reta FG para condição de contorno de Neumann	115

Lista de Tabelas

2.1	Combinações possíveis de prescrições de valores nodais	21
6.1	Número de elementos por lado nas 5 malhas analisadas	88
6.2	Número de elementos por lado nas 5 malhas analisadas	105