

## 3 Programa PFC2D

### 3.1. Introdução

Existe uma variedade de métodos numéricos disponíveis para cálculo de soluções aproximadas de problemas de engenharia. O método dos elementos finitos (MEF) e o método dos elementos de contorno (MEC) estão atualmente em um estágio de desenvolvimento bastante avançado, podendo ser considerados métodos tradicionais para solução de problemas de valor de contorno. O método dos elementos discretos (MED) encontra-se em um estágio de desenvolvimento comparativamente anterior. A sua formulação está ainda em franco desenvolvimento, mantendo-se as características básicas propostas por Cundall e Strack (1979), com aperfeiçoamentos freqüentemente apresentados e publicados em periódicos e congressos da área.

Para o uso eficiente de uma ferramenta numérica é preciso, no entanto, identificar para quais tipos de problemas o seu uso é mais recomendado. O método dos elementos discretos mostra-se mais adequado para lidar com problemas de natureza descontínua e, ao mesmo tempo, sob grandes níveis de deformação. Devido a essas características particulares, o método tem sido aplicado em problemas de diversas áreas, e especificamente na engenharia geotécnica suas funcionalidades têm sido utilizadas em problemas de mecânica das rochas (Cundall, 1971; Tannant e Wang, 2004), mecânica dos solos, mecânica dos pavimentos, etc.

A característica principal do método dos elementos discretos é a sua simplicidade e generalidade. Problemas estáticos são resolvidos através de uma aproximação de relaxação dinâmica e o processo de cálculo é feito em pequenos incrementos de tempo. O meio é discretizado em partículas rígidas (discos na modelagem 2D, esferas em simulações 3D), as quais se movem para posições de equilíbrio de acordo com a segunda lei de Newton. As etapas básicas de um ciclo de cálculo do método dos elementos discretos são apresentadas na figura 3.1.

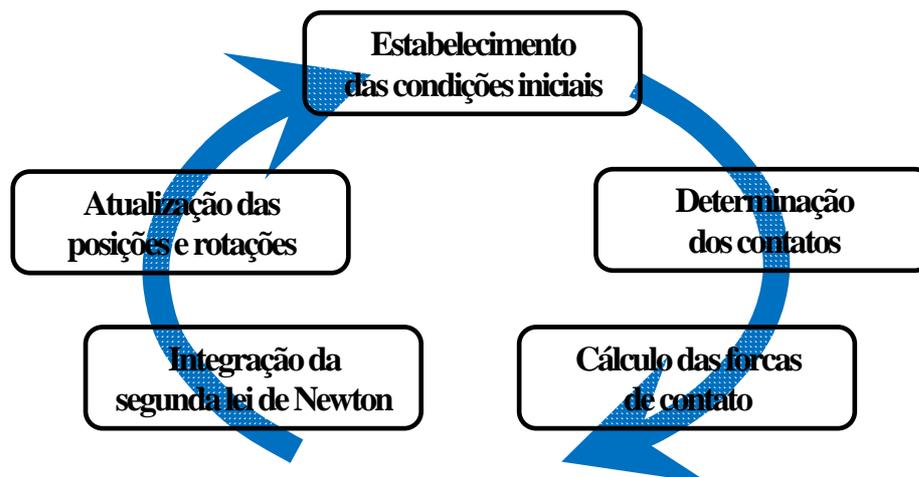


Figura 3.1 – Etapas básicas do método dos elementos discretos.

O intervalo de tempo é assumido suficientemente pequeno para que a perturbação, durante determinado incremento de tempo, não se propague além da vizinhança matemática de cada partícula. A natureza explícita da resolução do sistema de equações otimiza o uso da memória computacional e evita a necessidade de processos de cálculo iterativos, permitindo a representação de interações não lineares envolvendo um grande número de partículas.

### 3.2. O programa PFC2D

O Programa *PFC2D* (*Particle Flow Code 2D*) foi desenvolvido pela *Itasca Consulting Group Inc.* Baseado no método dos elementos discretos modela o movimento e interação de partículas cilíndricas (*PFC2D*) geradas aleatoriamente, de raios constantes ou variáveis.

Nesta pesquisa considerou-se partículas de raios constantes para modelagem do trincamento de revestimento asfáltico com base nos resultados de ensaios de Disco Circular com Fenda (*Disk-Shaped Compact*), considerando o material como homogêneo e partículas de raios 0.25mm, 0.5mm e 1mm.

À medida que o número de partículas aumenta, é necessário ter maior capacidade de memória RAM, como indicado na tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Número máximo de partículas em função da memória RAM disponível (*PFC2D*, 2003).

RAM disponível (MB)	Número aproximado de partículas*
10	10.000
50	50.000
100	100.000
* Estado compacto (Contatos requerem maior memória que as partículas)	

O procedimento geral de solução é mostrado na Figura 3.2, dividido em diferentes estágios. Na etapa de configuração do modelo, três componentes são fundamentais:

- O arranjo de partículas;
- Comportamento no contato e propriedades do material;
- Condições de contorno e condições iniciais.

O arranjo corresponde a um número de partículas posicionadas e distribuídas de maneira uniforme dentro de uma região previamente estabelecida. As propriedades destas partículas e o comportamento dos seus contatos determinam o tipo de resposta do modelo. Antes de efetuar qualquer simulação é importante definir as condições iniciais e de contorno. Após aplicação das cargas, o arranjo de partículas atinge uma condição de equilíbrio inicial. Qualquer alteração deste estado (como uma escavação ou uma mudança nas condições de contorno) faz com que a resposta do modelo seja recalculada. A solução de equilíbrio é atingida depois da execução de vários passos de tempo, automaticamente controlados pelo programa, mas que também podem ser redefinidos pelo usuário.

O programa *PFC* tem a sua própria linguagem de programação chamada *FISH*. Ela permite definir e introduzir no modelo novas variáveis, gerar outras geometrias, modificar relações constitutivas, utilizar mecanismos servo-controlados, etc., ampliando assim a potencialidade do programa.

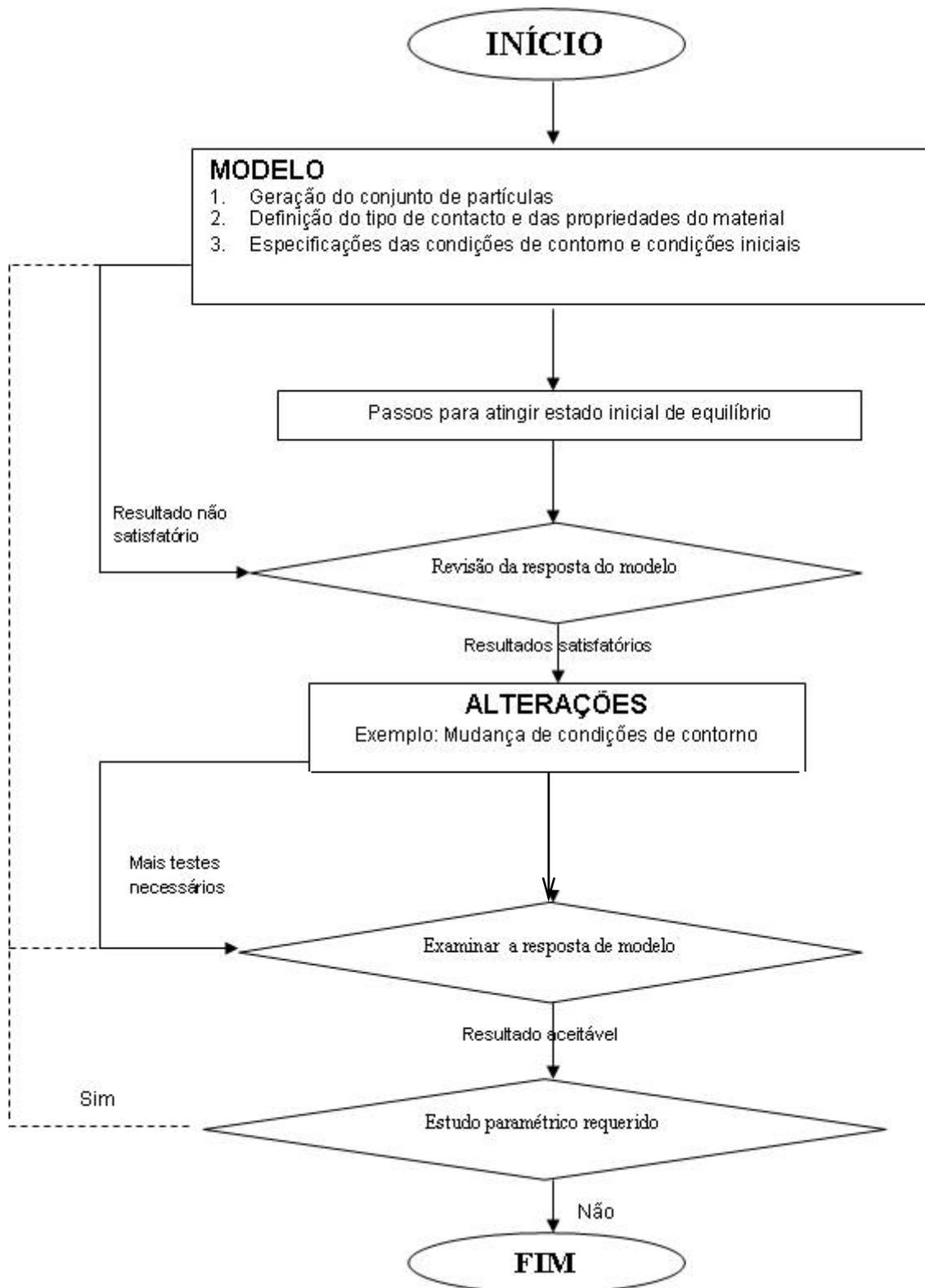


Figura 3.2 – Procedimento geral de solução no programa PFC-2D

O programa também possui uma opção de processamento em paralelo, permitindo a solução de problemas de modo compartilhado entre microcomputadores agrupados em um "cluster" de máquinas, diminuindo assim o tempo de processamento em problemas mais complexos.

Para processamento em um computador isolado, o programa tem como desvantagem um tempo de cálculo bastante longo, dependendo do número de partículas e de contatos envolvidos na simulação. Nesta pesquisa trabalhou-se com 65 mil partículas.

Dentre outras características do programa PFC2D podem ser citadas as seguintes:

- As partículas são consideradas rígidas;
- O contato entre as partículas ocorre em uma área muito pequena (pontual);
- No contato há uma tolerância de penetração entre partículas. A magnitude desta tolerância está diretamente relacionada com a força do contato através da relação constitutiva força - deslocamento, sendo em geral muito pequena em comparação com o tamanho das partículas;
- Pode existir uma ligação no contato entre as partículas;
- Todas as partículas são consideradas como discos, mas outras geometrias podem ser geradas agrupando-se partículas;
- Na formulação podem ser incluídos elementos rígidos ou paredes, os quais podem experimentar velocidades, deslocamentos ou forças prescritas. Estas paredes delimitam os contornos do problema, delimitando e confinando um determinado arranjo de partículas.

### **3.2.1.**

#### **Forças nos contatos**

Uma relação força versus deslocamento deve ser utilizada no contato entre duas entidades (partícula-partícula ou partícula-parede). O plano de contato tem vetor unitário normal  $n_i$ , definido pela reta que une os centros das duas partículas (partículas A e B).

$$n_i = \frac{x_i^{[B]} - x_i^{[A]}}{d} \quad (3.1)$$

onde  $d$  é a distância entre os centros, determinada por

$$d_i = |x_i^{[B]} - x_i^{[A]}| = \sqrt{(x_i^{[B]} - x_i^{[A]})^2} \quad (3.2)$$

Se o contato for entre uma partícula e a parede, a normal será definida pela direção da menor distância entre o centro da partícula e a parede. A superposição  $U^n$  entre partículas é definida por um deslocamento relativo na direção normal (figura 3.3), expresso pela equação (3.3).

$$U^n = \begin{cases} R^{[A]} + R^{[B]} - d, & (\text{partícula} - \text{partícula}) \\ R^{[b]} - d, & (\text{partícula} - \text{parede}) \end{cases} \quad (3.3)$$

Onde  $R^{[\phi]}$  é o raio da entidade  $\phi$ .

Após a definição destas variáveis, a posição do contato  $x_i^{[c]}$  pode ser determinada como:

$$x_i^{[c]} = \begin{cases} x_i^{[A]} + \left( R^{[A]} - \frac{1}{2} U^n \right) n_i, & (\text{partícula} - \text{partícula}) \\ x_i^{[b]} + \left( R^{[b]} - \frac{1}{2} U^n \right) n_i, & (\text{partícula} - \text{parede}) \end{cases} \quad (3.4)$$

A força no contato é gerada pela superposição das partículas, sendo formada pelas componentes de força normal  $F^n$  e cisalhante  $F^s$ , com magnitudes dependentes da relação força - deslocamento adotado.

$$F_i = F_i^n + F_i^s \quad (3.5)$$

As partículas atuam como se estivessem ligadas por molas nos contatos. Logo, a força no contato será o produto do deslocamento da mola por sua rigidez. Sendo a rigidez normal do contato igual  $K^n$ , a força normal é portanto

$$F_i^n = K^n U^n n_i \quad (3.6)$$

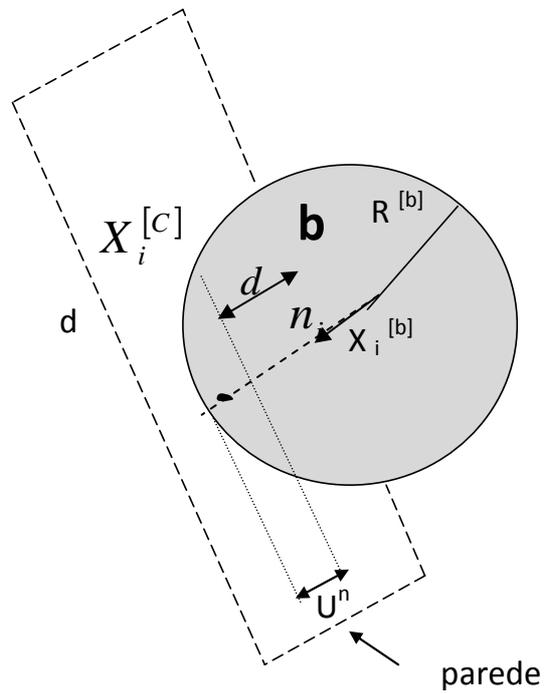
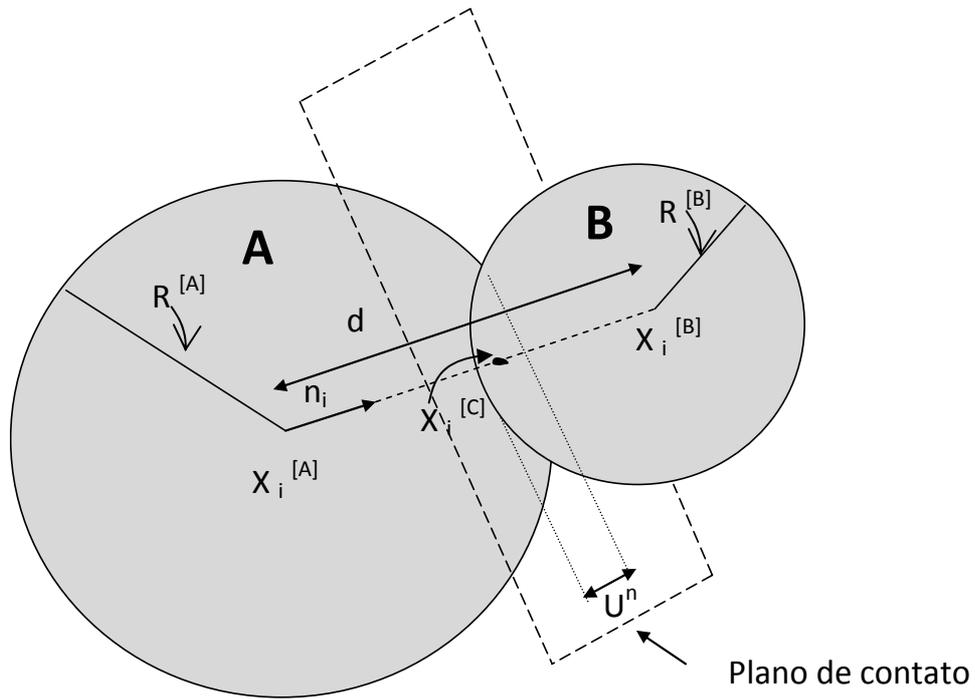


Figura 3.3 – Características do contato partícula-partícula e partícula-parede (Mejia, 2009)

No caso da componente de força cisalhante, são considerados os deslocamentos laterais de translação bem como as rotações relativas entre as partículas. Quando o contato é formado, o valor total da força cisalhante é zero. Cada deslocamento cisalhante subsequente incrementará a força. Assim, para determinar a força cisalhante, são consideradas a força gerada pelo deslocamento translacional do contato e a força gerada pela rotação das partículas.

A componente rotacional pode ser escrita como:

$$\left\{ F_i^s \right\}_{rot.1} = F_j^s \left( \delta_{ij} - e_{ijk} e_{kmn} n_m^{[OLD]} n_n \right) \quad (3.7)$$

$$\left\{ F_i^s \right\}_{rot.2} = F_j^s \left( \delta_{ij} - e_{ijk} (\omega_k) \Delta t \right) \quad (3.8)$$

onde  $n_m^{[OLD]}$  é o vetor unitário normal referente ao passo anterior e  $\omega_k$  a velocidade angular entre as duas partículas na nova direção normal. A velocidade angular é definida como:

$$(\omega_i) = \frac{1}{2} \left( \omega_j^{[\phi^1]} + \omega_j^{[\phi^2]} \right) n_j n_i \quad (3.9)$$

As equações 3.7 e 3.8 foram escritas em termos do delta de Kronecker (equação 3.10) e do símbolo de permutação (equação 3.11) definidos como

$$\delta_{ij} = \left\{ \begin{array}{l} 1, \text{ se } i = j; \\ 0, \text{ se } i \neq j \end{array} \right\} \quad (3.10)$$

$$e_{ijk} = \left\{ \begin{array}{l} 0, \text{ se dois índices coincidem} \\ +1, \text{ se } i, j, k \text{ permuta entre } 1, 2, 3; \\ -1, \text{ outro caso} \end{array} \right\} \quad (3.11)$$

O produto vetorial entre os vetores unitários normais  $c = n^{[OLD]} \times n$  pode ser expresso com auxílio do símbolo de permutação da seguinte forma:

$$c_k = e_{kmn} n_m^{[OLD]} n_n \quad (3.12)$$

Possibilitando então que as equações 3.7 e 3.8 sejam reescritas como

$$F_{rot1}^s = \begin{bmatrix} 1 & -c3 & c2 \\ c3 & 1 & -c1 \\ -c2 & c1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^s \\ F_2^s \\ F_3^s \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$F_{rot2}^s = \begin{bmatrix} 1 & -\bar{\omega}_3 \Delta t & \bar{\omega}_2 \Delta t \\ \bar{\omega}_3 \Delta t & 1 & -\bar{\omega}_1 \Delta t \\ \bar{\omega}_3 \Delta t & \bar{\omega}_1 \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{1rot1}^s \\ F_{2rot1}^s \\ F_{3rot1}^s \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Uma vez determinada a força rotacional é necessário conhecer o valor da força produzida pelo movimento translacional no contato. No caso da força normal, o deslocamento relativo foi definido como a superposição  $U^n$ , calculada diretamente em função dos raios das partículas e a distância entre os seus centros. No caso do deslocamento cisalhante  $U^s$ , a determinação é feita com base nas velocidades das partículas, da seguinte forma

$$V_i = (\dot{x}_i^{[c]})\phi^2 - (\dot{x}_i^{[c]})\phi^1 \quad (3.15)$$

$$V_i = \left( \dot{x}_i^{[\phi^2]} + e_{ijk} \omega_j^{[\phi^2]} (x_k^{[c]} - x_k^{[\phi^2]}) \right) - \left( \dot{x}_i^{[\phi^1]} + e_{ijk} \omega_j^{[\phi^1]} (x_k^{[c]} - x_k^{[\phi^1]}) \right) \quad (3.16)$$

onde  $(\dot{x}_i^{[\phi^j]})$  é a velocidade translacional da partícula  $\phi^j$ .

A velocidade do contato é definida em termos das velocidades normal e cisalhante, sendo a componente cisalhante expressa por

$$V_i^s = V_i - V_i^n = V_i - V_j n_j n_i \quad (3.17)$$

Através da velocidade cisalhante, é possível determinar o deslocamento incremental cisalhante no contato pela equação 3.18, a cada incremento de tempo  $\Delta t$ :

$$\Delta U_i^s = V_i^s \Delta t \quad (3.18)$$

e o incremento de força cisalhante translacional sendo determinado por:

$$\Delta F_i^s = -K^s \Delta U_i^s \quad (3.19)$$

A força cisalhante total no contato é então calculada pela adição das componentes geradas pelos movimentos de translação e de rotação,

$$F_i^s = \left\{ F_i^s \right\}_{rot.2} + \Delta F_i^s \quad (3.20)$$

### 3.2.2. Modelo Constitutivo no Contato

O comportamento geral de um material pode ser representado mediante a definição de um modelo constitutivo para os contatos entre partículas. Este modelo constitutivo consiste na superposição de três modelos básicos: o modelo de rigidez, o modelo de deslizamento e o modelo de ligação. Existem vários tipos de modelos que podem ser utilizados, como ilustrado na figura 3.4.

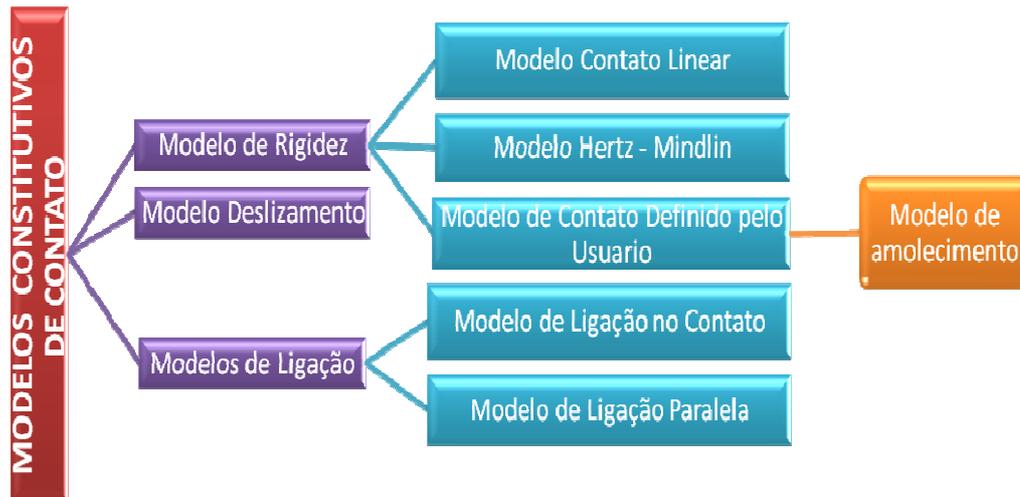


Figura 3.4 – Modelos constitutivos de contato.

#### 3.2.2.1. Modelos de Rigidez do Contato

O *modelo linear* é definido pela rigidez normal  $K_n$  e tangencial  $K_s$ , com unidades de força por deslocamento, calculadas a partir dos valores de rigidez das partículas em contato (equações 3.21 e 3.22)

$$K^n = \frac{k_n^{[A]} k_n^{[B]}}{k_n^{[A]} + k_n^{[B]}} \quad (3.21)$$

$$K^s = \frac{k_s^{[A]} k_s^{[B]}}{k_s^{[A]} + k_s^{[B]}} \quad (3.22)$$

O *modelo de Hertz-Midlin* é um tipo de contato não linear, definido pelos parâmetros  $G$  (módulo de cisalhamento) e  $\nu$  (coeficiente de Poisson). A rigidez normal do contato é dada pela seguinte expressão:

$$K^n = \frac{2\langle G \rangle \sqrt{2\bar{R}}}{3(1 - \langle \nu \rangle)} \sqrt{U^n} \quad (3.23)$$

e a rigidez de cisalhamento no contato por

$$K^s = \frac{2(\langle G \rangle^2 3(1 - \langle \nu \rangle) \bar{R})^{1/3}}{2 - \langle \nu \rangle} |F_i^n|^{1/3} \quad (3.24)$$

onde  $U^n$  é a sobreposição das partículas e  $|F_i^n|$  a magnitude da força normal no contato. As demais variáveis das equações 3.23 e 3.24 são definidas segundo as entidades em contato.

Para o contato partícula- partícula,

$$\begin{aligned} \bar{R} &= \frac{2R^{[A]}R^{[B]}}{2R^{[A]} + R^{[B]}} \\ \langle G \rangle &= \frac{1}{2}(G^{[A]} + G^{[A]}) \\ \langle \nu \rangle &= \frac{1}{2}(\nu^{[A]} + \nu^{[A]}) \end{aligned} \quad (3.25)$$

e no caso de contato partícula-parede,

$$\begin{aligned} \bar{R} &= R^{|partícula|} \\ \langle G \rangle &= G^{|partícula|} \\ \langle \nu \rangle &= \nu^{|partícula|} \end{aligned} \quad (3.26)$$

sendo  $R$  o raio da partícula e os índices  $[A]$  e  $[B]$  denotando as duas partículas em contato.

A rigidez normal tangente  $k^n$  é definida como

$$k^n = \frac{dF^n}{dU^n} = \frac{3}{2} K^n \quad (3.27)$$

a qual, diferentemente do modelo linear, não tem valor constante, variando em função dos valores das forças normais e da sobreposição entre as partículas.

### 3.2.2.2. Modelo de Deslizamento do Contato

O modelo de deslizamento é uma propriedade das entidades em contato, podendo ser novamente entre duas partículas ou entre partícula e parede. Este modelo está sempre ativo, exceto se houver algum tipo de ligação entre as entidades, quando pode ser substituído pelo modelo de ligação correspondente. O principal parâmetro do modelo de deslizamento é o coeficiente de atrito  $\mu$ . Com base no critério de Mohr-Coulomb é possível escrever

$$F_{\max}^s = \mu \left| F_i^n \right| \quad (3.28)$$

Se  $\left| F_i^s \right| > F_{\max}^s$ , a força cisalhante  $F_i^s$  é limitada pelo valor de  $F_{\max}^s$ ,

$$F_i^s = F_{\max}^s \frac{F_i^s}{\left| F_i^s \right|} \quad (3.29)$$

### 3.2.2.3. Modelo de ligação

Duas partículas podem estar ligadas mediante certo tipo de contato que pode ser definido, ou imaginado, como uma cola entre as partículas no ponto de contato. Neste contexto, dois tipos de contato são utilizados: (a) ligação de contato (*contact bond*), que é um tipo de contato pontual que só transmite forças; (b) ligação paralela (*parallel bond*), onde duas partículas são unidas por um elemento não pontual que atua como cimentação entre as partículas, podendo transmitir forças e momentos.

A *ligação de contato* pode ser representada por duas molas atuando na direção normal e tangencial no ponto de contato entre duas partículas. Estas duas molas possuem resistência normal e cisalhante, impossibilitando o deslizamento entre as partículas. Se a tensão normal de tração for igual ou maior do que a resistência normal na ligação do contato, esta ligação é rompida em ambas as direções (normal e cisalhante) e as forças de contato tornadas iguais a zero.

A figura 3.5 mostra o comportamento da ligação de contato na direção normal. Quando  $U^n > 0$  tem-se uma sobreposição de partículas, mas uma ruptura da ligação de contato não acontece devido à natureza da força ser de compressão.

Todavia, caso  $F^n > 0$  (tração) e  $F^n \geq F_c^n$  então a ruptura da ligação se produz e as forças de contato se anulam.

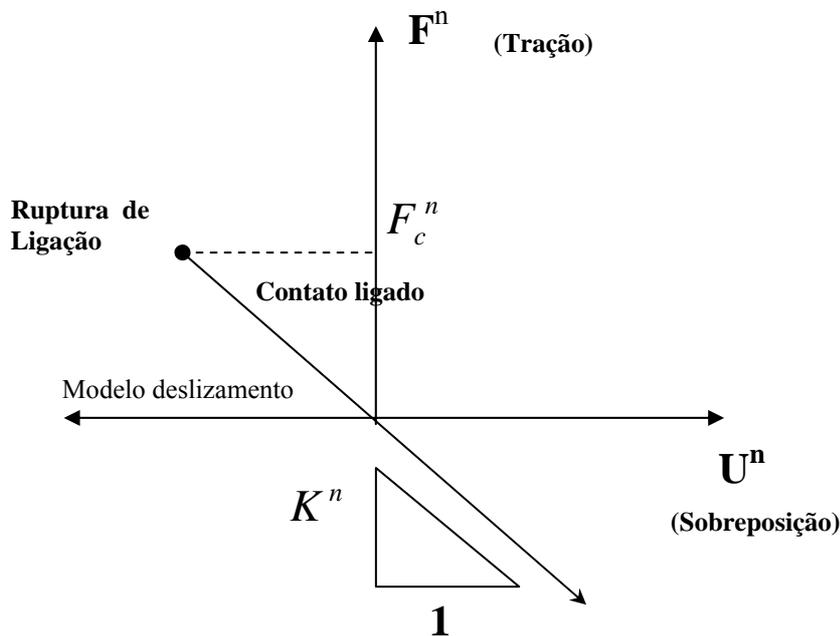


Figura 3.5 – Componente normal da força de contato na ligação (Itasca, 2003)

No caso da força cisalhante, se o valor  $F^s \gg F_c^s$  a ligação nesta direção é rompida, mas os valores das forças não são modificados como no caso anterior, desde que o valor da força cisalhante não seja maior que o valor obtido do modelo de deslizamento. Após a ruptura, o valor da força cisalhante é limitada pelo modelo de deslizamento (figura 3.6).

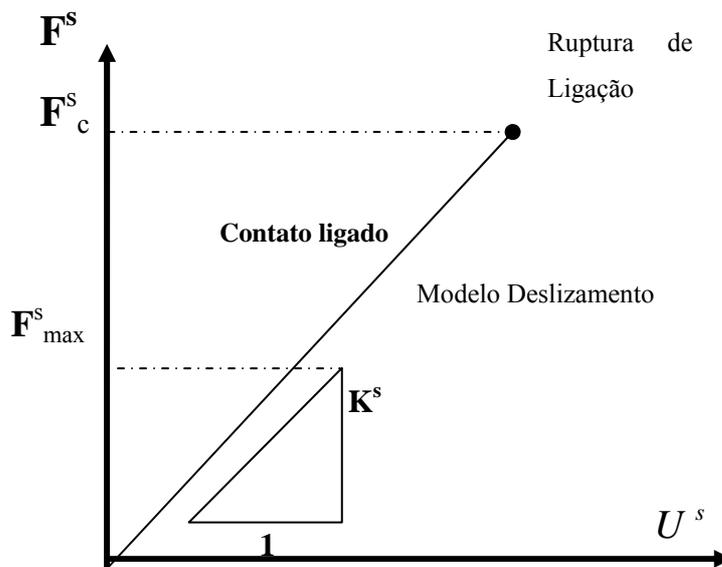


Figura 3.6 – Componente tangencial da força de contato ligação (Itasca, 2003)

A *ligação paralela* descreve o comportamento de um elemento não pontual que une a duas partículas como uma cimentação. Este tipo de contato estabelece uma interação elástica entre as partículas, podendo ser transmitidos forças e momentos para as partículas (denotados por  $F_i$  e  $M_i$  na figura 3.7). O contato paralelo é representado como um disco com raio definido pelo menor dos raios das partículas em contato. Adota-se, por convenção, que as forças atuam na partícula B para fins de representação deste tipo de ligação no contato.

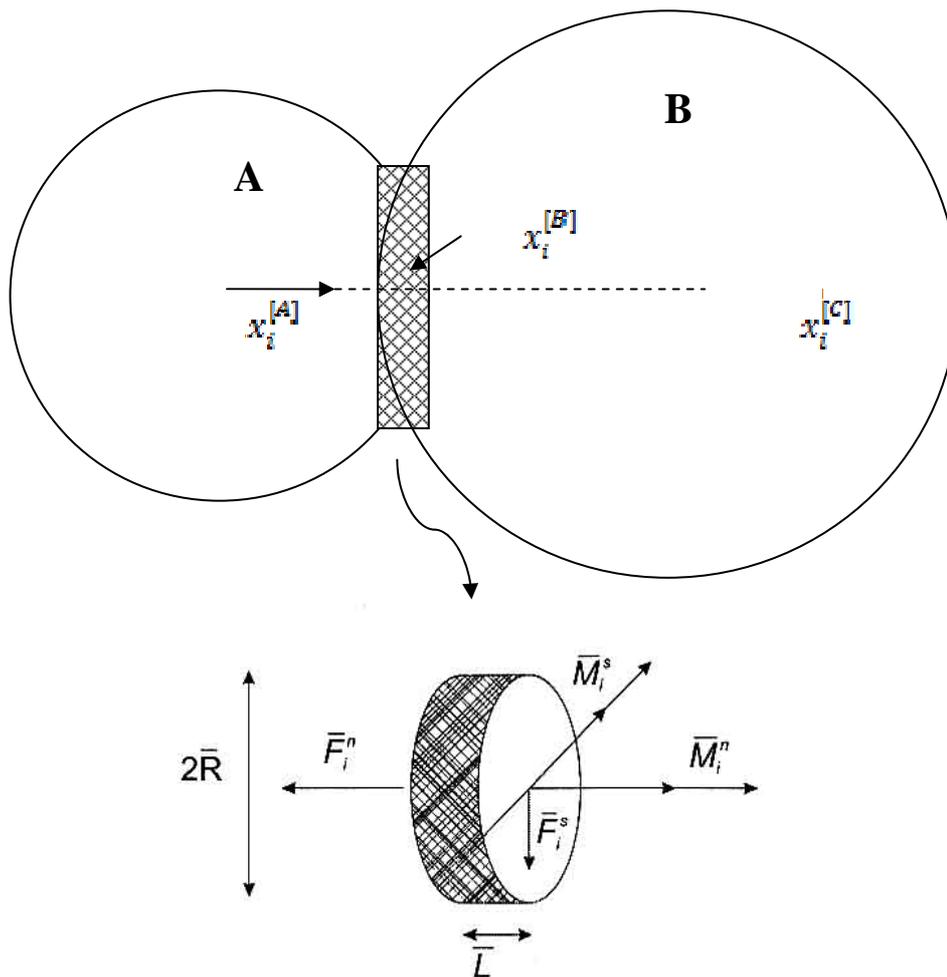


Figura 3.7 – Esquema de ligação paralela no contato (Mejia, 2009)

### 3.2.3. Modelo de Zona Coesiva com Amolecimento

Na análise numérica da propagação de trincas é necessário adotar-se um modelo constitutivo específico para a região próxima à ponta da fratura. Barenblatt (1959) e Dugdale (1960) propuseram o modelo de zona coesiva para

representação do comportamento de materiais frágeis e dúteis (figura 3.8), respectivamente, incluindo forças de coesão na região típica do trincamento. Barenblatt (op.cit.) assumiu que tais forças decrescem suavemente (figura 3.9) enquanto que no modelo de Dugdale (op.cit.) estas forças se mantêm constantes, representando comportamento de material elasto-perfeitamente plástico.



Figura 3.8 – Comportamento do material em ensaio de ruptura sob deformação controlada (a) material frágil (b) material dúctil (Soares,1997)

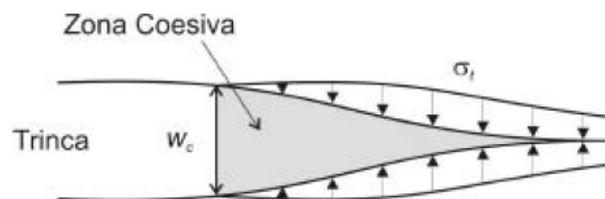


Figura 3.9 – Modelo de Zona Coesiva de Barenblatt (1959).

Atualmente modelos de zona coesiva (MZC) têm sido usados para simular processos de fraturamento em vários materiais como polímeros, materiais metálicos, materiais cerâmicos, compósitos de matriz metálica, concreto, materiais reforçado com fibras de plástico, considerando-se uma variedade de condições de carga (estática, dinâmica, cíclica, etc.).

Na tabela 3.2 estão listadas várias versões do modelo MZC propostos por vários autores na literatura, nas últimas décadas. A principal diferença entre eles se refere à forma da resposta tração versus deslocamento e as constantes que são usadas para descrição do modelo.

Modelos bilinear de zona coesiva podem ser descritos por dois parâmetros independentes, dentre a energia coesiva  $\Phi$ , a resistência coesiva  $\sigma_{\max}$  ou a distância de separação das superfícies da trinca  $\delta_{sep}$ . Em geral, a energia coesiva é obtida a partir de ensaios de laboratório, sendo considerada equivalente à energia de fraturamento  $\Gamma$ . Na figura 3.10 é ilustrando uma zona coesiva onde os pontos A e B representam a ponta da trinca coesiva e C a ponta da trinca do

material, e na figura 3.11 o conceito esquemático do modelo de zona coesiva com amolecimento.

Se o contato está sob tração, a força resistente no contato  $F_{\max}$  é calculada a partir dos parâmetros de resistência (força normal  $F_n$  e força de cisalhamento  $F_s$ ), como uma função da orientação atual da força de contato. É assumido que a resistência no contato varia linearmente com o ângulo  $\alpha$  formado entre a direção da força de contato e o segmento de reta conectando os centros das partículas em contato:

$$F_{\max} = \left(1 - \frac{2\alpha}{\pi}\right) F_c^n + \frac{2\alpha}{\pi} F_n^s \quad (3.30)$$

O escoamento plástico no contato sob tração é determinado comparando-se a força de contato  $F$  resultante com a força resistente  $F_{\max}$  disponível.

$$F = \sqrt{\left((F^n)^2 + (F^s)^2\right)} \quad (3.31)$$

O contato apresentará escoamento plástico se

$$F > F_{\max} \quad (3.32)$$

No escoamento plástico nos contatos, o incremento de deslocamento no contato  $\Delta U^k$  ( $k = n, s$ ) pode ser descomposto em incrementos de deslocamento elástico e plástico:

$$\Delta U^K = \Delta U_e^k + \Delta U_p^k \quad (3.33)$$

O incremento de força  $\Delta F^k$  é uma função do incremento do deslocamento elástico somente

$$\Delta F^K = K^K \Delta U_e^k \quad (3.34)$$

onde:

$$\Delta U_e^K = \Delta U^K - \Delta U_p^k \quad (3.35)$$

O incremento de deslocamento plástico pode ser determinado usando a condição de consistência  $F - F_{\max} = 0$ . O incremento de deslocamento plástico satisfaz uma lei de fluxo e é considerado que, se a força normal for de tração, então a direção do incremento de deslocamento plástico é sempre coincidente com a direção da força de contato resultante,

$$\Delta U_p^k = \Delta \lambda \frac{F^k}{F} \quad (3.36)$$

onde  $\Delta \lambda$  é um escalar positivo.

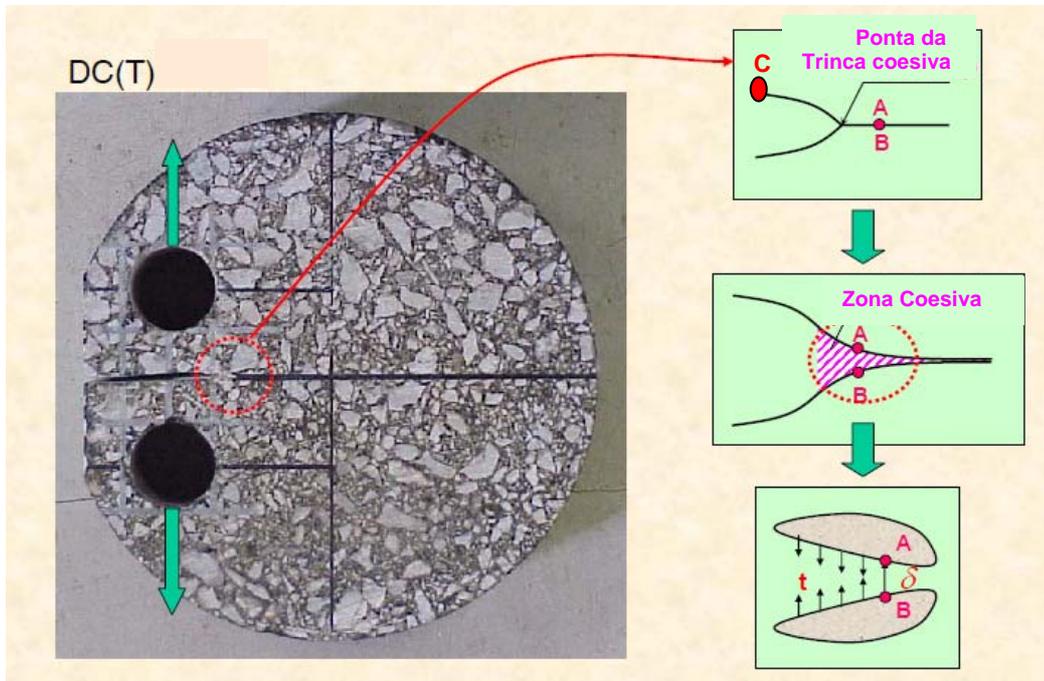


Figura 3.10 – Esquema de uma zona coesiva no ensaio DC(T) (Buttler, 2007)

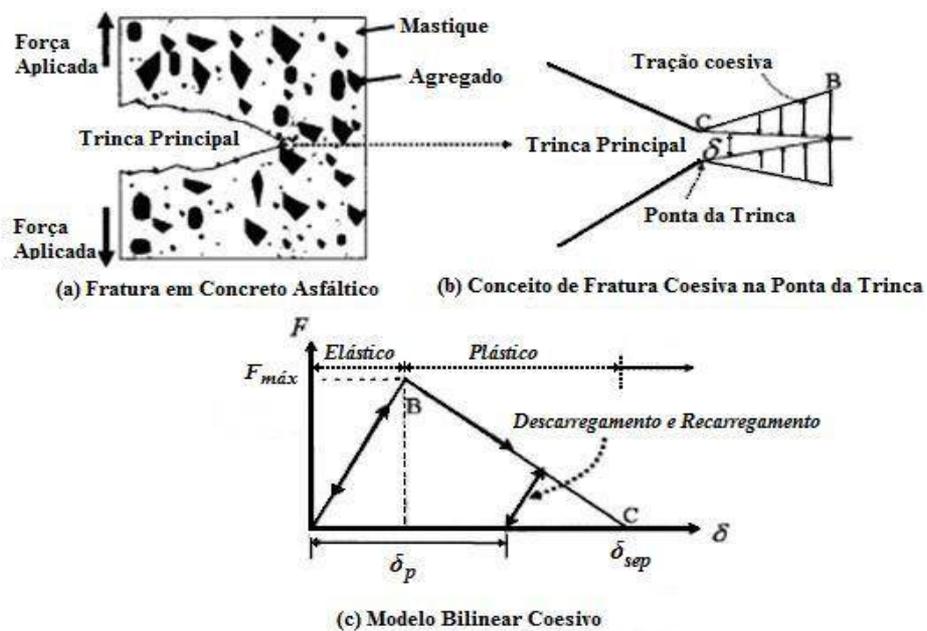


Figura 3.11 – Modelo bilinear de zona coesiva com amolecimento (Kim, 2007)

Se a força normal de contato for compressiva, a máxima força de cisalhamento no contato é definida por:

$$F_{\max}^s = \mu |F^n| + F_c^s \quad (3.37)$$

Se deslizamento ocorrer, então o deslocamento plástico de cisalhamento é assumido coincidente com a direção da força cisalhante no contato.

O modelo de zona coesiva incorpora amolecimento (figura 3.11), sendo as resistências nos contatos expressas em função dos deslocamentos plásticos acumulados,

$$F_c^k(U_p/U_{p\max}) = F_c^k \left( 1 - \frac{U_p}{U_{p\max}} \right) \quad (3.38)$$

$$U_p = \sum |\Delta U_p| \quad (3.39)$$

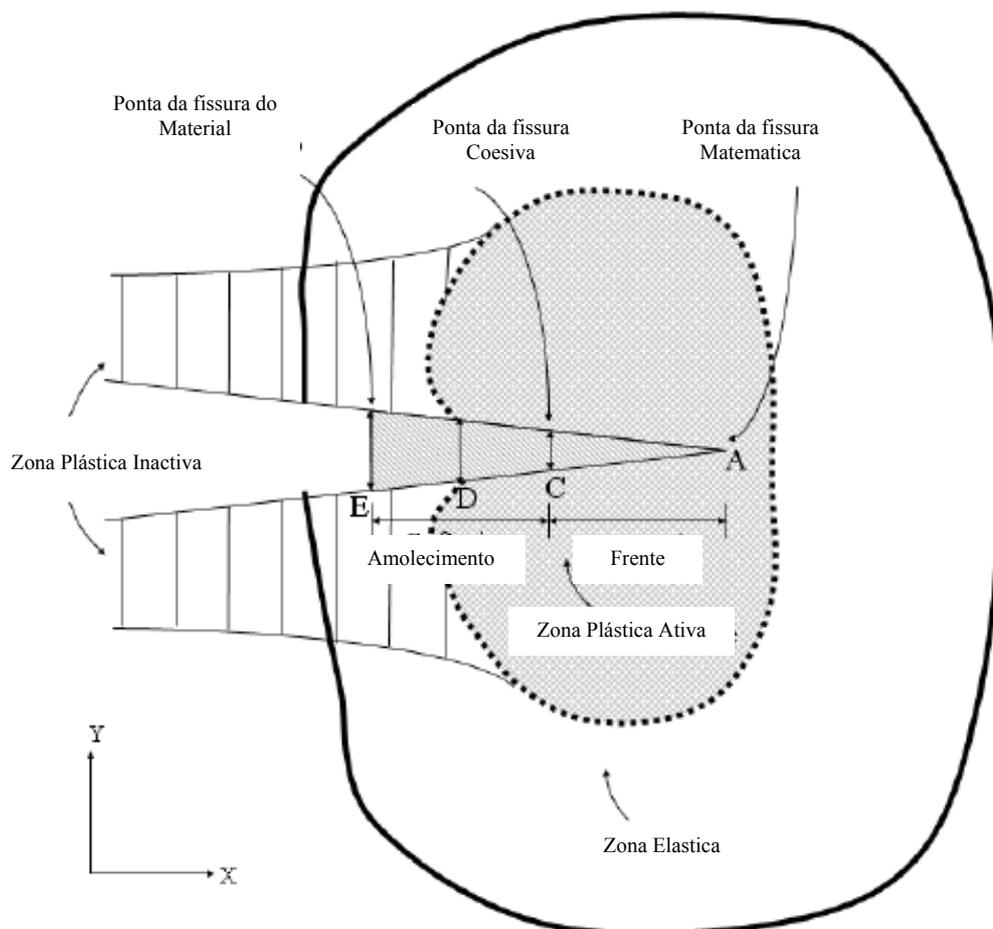


Figura 3.12 - Esquema de uma zona coesiva, segundo Kim ( 2007).

Tabela 3.2 - Versões do modelo de zona coesiva propostas na literatura (Kim, 2007).

Ano	Autores	Modelo proposto	Tipo de problema	Comentários
1952 1962	Barenblatt	Modelo Frágil	Materiais frágeis	O primeiro a propor o conceito de zona coesiva
1960	Dugdale	Modelo Dútil	Escoamento de folhas finas de aço elástico-plásticas ideais contendo trincas	Tensão coesiva igual à tensão de escoamento do material
1976	Hillerborg et al.	Modelo com Trinca Fictícia	Concreto de cimento Portland	O primeiro para materiais cimentícios
1987	Needleman	Modelo polinomial para forças normais e linear para forças cisalhantes	Separação partícula-matriz	Separação normal
1989	Rice and Wang	Modelo em Reajuste Atômico	Segregação de soluto	Considera separação normal e ignora separação tangencial (deslizamento).
1990	Needleman	Modelo polinomial para forças normais e linear para forças cisalhantes	Separação partícula-matriz	Separação normal
1990	Needleman	Modelo exponencial para forças normais e trigonométrico para forças cisalhantes.	Separação na interface sob tensão hidrostática	Força cisalhante periódica
1990	Tvergaard	Modelo Quadrático		
1992	Tvergaard and Hutchinson	Modelo Trapezoidal	Crescimento da trinca em material elasto-plástico	A forma da lei de separação é relativamente não importante
1993	Xu and Needleman	Modelo exponencial para forças normais e cisalhantes	Separação partícula-matriz	Prevê separação normal e tangencial (deslizamento).
1996	Camacho and Ortiz	Modelo Linear de Separação	Forças de impacto	Prevê ruptura por cisalhamento e separação normal por tração, com separação normal e por cisalhamento.
1997	Geubelle and Bayler	Modelo Bilinear	Impacto de baixa velocidade	