

2. Mecânica da Fratura

2.1. Introdução

As condições de trincamento em campo representam um dos principais ítems para a avaliação de pavimentos e diagnóstico dos problemas existentes.

Os primeiros projetos de pavimento eram totalmente empíricos, baseados na experiência e na observação do comportamento de trechos experimentais. Formou-se assim, um acervo de resultados e de observações experimentais que deram origem a vários métodos para o projeto de pavimentos tal como o método empírico do DNER, dentre outros. A partir da década de 1970 surgiram os métodos classificados como mecanístico-empíricos, que procuravam relacionar o desempenho do pavimento em campo com as propriedades mecânicas dos materiais, obtidas através de ensaios de laboratório (ensaio de compressão diametral, geralmente, no Brasil).

Motta (1991), em uma abordagem mecanística, propõe um método que previna a formação e propagação de trincas, limitando as tensões solicitantes nas fibras inferiores do revestimento, através da utilização de parâmetros adequados para os materiais, obtidos em ensaios de laboratório.

Na metodologia mecanística, a propagação de trincas e o fenômeno da fadiga de materiais são abordadas através de conceitos da Mecânica dos Pavimentos (Rodrigues, 1991; Pinto, 1991; Medina,1997), que estuda o comportamento de materiais que contenham fraturas ou trincas pré-existentes.

O estudo do campo das tensões nas proximidades da ponta da trinca é de grande importância na determinação da carga estática máxima que o pavimento suportará e na estimativa da vida útil dos seus componentes. No entanto o mais importante nos pavimentos é considerar a repetição das cargas móveis do tráfego que geram estas trincas.

Segundo Freitas (2002), o trabalho desenvolvido no Brasil por Rodrigues (1991) contribuiu para disseminar a Teoria da Mecânica da Fratura (TMF) em

problemas de pavimentação. O referido trabalho fez uso da Lei de Paris (Paris e Erdogan, 1963) para a determinação de parâmetros de fratura de misturas asfálticas a partir de ensaios de fadiga, considerando, entretanto, o material como homogêneo.

A Mecânica da Fratura pode ser estudada através da formulação linear clássica, para materiais frágeis, ou pela Mecânica da Fratura Elasto-Plástica, para materiais dúteis. No Brasil, pesquisas sobre a Mecânica da Fratura aplicada a concretos asfálticos são mencionadas nos trabalhos de Rodrigues (1991), Pinto (1991) Medina (1991) Soares e Freitas (2003), dentre outros.

2.2. Teoria da Mecânica da Fratura

2.2.1. Mecânica da Fratura Linear Elástica

A Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) surgiu em função das limitações na aplicação dos conceitos tradicionais para prever o comportamento dos materiais em relação à presença de descontinuidades internas e superficiais. Segundo Miranda (2003) a MFLE descreve a magnitude e a distribuição do campo de tensões (linear elástico) na vizinhança de uma trinca.

Inglis (1913) mostrou para o caso de uma placa de dimensões infinitas apresentada na figura 2.1 (comprimento da placa muito maior do que $2b$ e largura muito maior que $2a$) e que contém uma trinca elíptica, que a tensão normal na extremidade do eixo maior da elipse (ponto A) é majorada de acordo com a equação (2.1) onde $\rho = b^2/a$ é o raio de curvatura na ponta da elipse e σ o valor do carregamento de tração aplicada à placa.

$$\sigma_A = \sigma \left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}} \right) \quad (2.1)$$

Considerando o raio de curvatura ρ na extremidade da elipse muito menor que o tamanho da trinca, pode-se simplificar a equação (2.1) para:

$$\sigma_A = 2\sigma \sqrt{\frac{a}{\rho}} \quad (2.2)$$

O termo $2\sqrt{a/\rho}$ é definido como fator de concentração de tensões K_t , e descreve o efeito da geometria da placa no nível de tensões da ponta da trinca. Em uma primeira análise, significa que as trincas, se presentes, devem ser mantidas com o menor tamanho possível e que, quanto maior o raio de curvatura, menor a severidade devido à concentração de tensões.

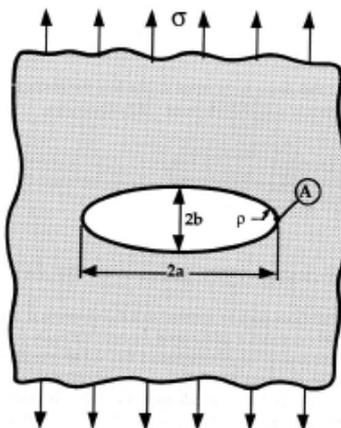


Figura 2.1 - Entalhe elíptico em uma placa plana (Miranda,2003)

A equação (2.1) sugere que para um raio de curvatura nulo (trinca com ponta aguda) as tensões máximas tendem a infinito sob qualquer tensão de tração, o que, evidentemente, não acontece na realidade.

O primeiro desenvolvimento teórico da Mecânica da Fratura foi proposto anos mais tarde por Griffith (1920). Este observou que quando uma trinca é introduzida em uma placa tracionada de material elástico, deve existir um balanço entre o decréscimo na energia potencial, relacionado com a liberação de energia elástica armazenada e ao trabalho realizado pelo movimento das forças externas, e o aumento na energia de superfície resultante da presença da trinca, conforme equação 2.3.

$$\frac{dE_T}{dA} = \frac{d\Pi}{dA} + \frac{dW_s}{dA} = 0 \quad (2.3)$$

onde E_T é a energia total do sistema, Π a energia potencial na placa e W_s a energia de deformação das superfícies da trinca.

Segundo Griffith (1920), em materiais idealmente frágeis, a trinca se propagaria de maneira instável se a energia de deformação liberada, quando a trinca avançasse de um comprimento infinitesimal, fosse maior do que a energia

necessária para formar uma nova superfície de trinca. Considerando novamente uma placa infinita de largura B, sujeita ao carregamento uniforme σ (Figura 2.2), contendo uma trinca elíptica de comprimento $2a$, Griffith com base nas equações de Inglis (1913) demonstrou que:

$$\Pi = \Pi_0 - \frac{\pi\sigma^2 a^2 B}{E} \quad (2.4)$$

$$W_s = 2(2aB\gamma_s) \quad (2.5)$$

onde Π_0 é a energia potencial total de uma placa equivalente sem trinca, E é módulo de elasticidade do material e W_s a energia de deformação das superfícies da trinca, considerada igual ao produto da energia elástica de superfície γ_s pela nova área da superfície da trinca $2(2aB)$.

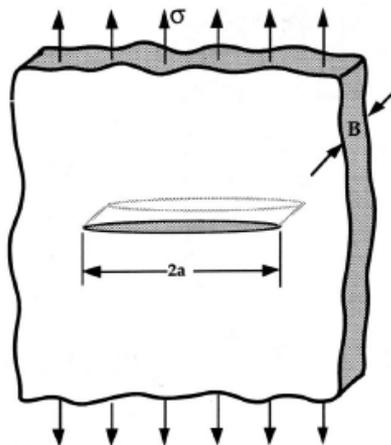


Figura 2.2 – Modelo usado por Griffith, 1920 (Miranda, 2003)

Substituindo as equações (2.5) e (2.4) na equação (2.3) obtém-se a tensão na trinca,

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{2E\gamma_s}{\pi a}} \quad \text{para estado plano de tensão} \quad (2.6)$$

A Mecânica da Fratura Elástica Linear pode ser matematicamente formulada em função de energia (abordagem proposta por Griffith, 1920) ou em termos dos fatores de *intensidade de tensão* K_I , ambas produzindo os mesmos resultados em problemas envolvendo materiais elásticos ou com pequena zona plástica na frente da trinca. *A análise com base em fatores de intensidade de tensão é vantajosa na*

engenharia, pois o comportamento de trincas longas em estruturas pode ser estudado em laboratório utilizando pequenos corpos de prova.

Westergaard (1927) determinou a natureza da distribuição de tensões na ponta de uma trinca, utilizando uma análise de tensões baseada em conceitos da teoria da elasticidade. Os campos de tensão circundando a ponta de uma trinca podem ser divididos em três modos principais de fraturamento que envolvem diferentes deslocamentos das superfícies das trincas (figura 2.3).

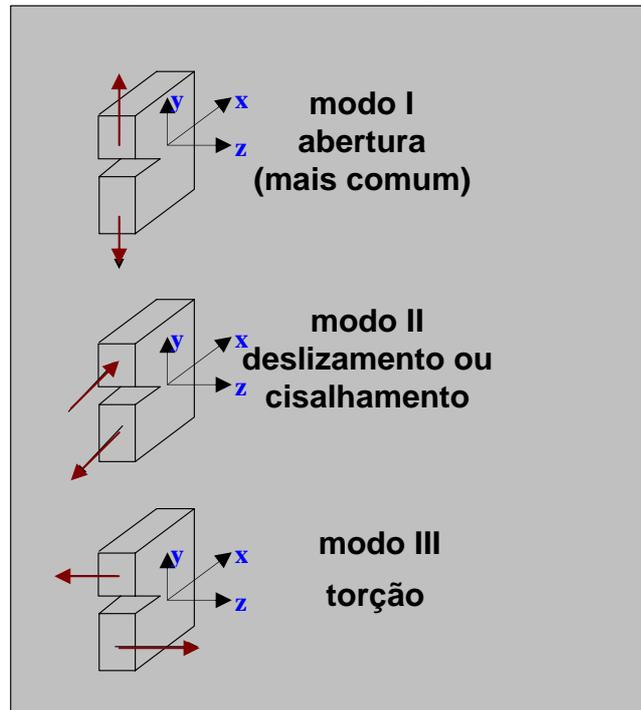


Figura 2.3 – Os três modos básicos de fraturamento

O modo de abertura, ou modo I, é caracterizado por deslocamentos locais na direção do eixo y , os quais são simétricos em relação aos planos $x-y$ e $x-z$. É o modo mais comumente encontrado e fácil de ser simulado em ensaios de laboratório (Rossmannith, 1983; Dumont, 2001).

No modo de cisalhamento, ou modo II, ocorre um deslocamento relativo entre ambas as superfícies da fratura ao longo do eixo x , simétrico em relação ao plano $x-y$ e antissimétrico em relação ao plano $x-z$, enquanto que no modo III, de torção, as superfícies movem-se ao longo do eixo z , com antissimetria em relação aos planos $x-y$ e $x-z$.

A cada um destes modos de fraturamento corresponde um tipo básico do campo de tensões nas vizinhanças da ponta da fratura, para a singularidade $r \rightarrow 0$, determinados por Irwin (1957) como:

$$\text{Modo I} \quad \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{r\theta} \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \\ \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ \text{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\text{Modo II} \quad \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{r\theta} \end{bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} \text{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \left(1 - 3 \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}\right) \\ -3 \text{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \cdot \left(1 - 3 \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\text{Modo III} \quad \begin{bmatrix} \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta z} \end{bmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} -\text{sen} \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

onde as coordenadas r , medida a partir da ponta da fratura e θ , ângulo polar medido positivamente no sentido anti-horário, são mostradas na figura 2.4.

Nas equações (2.7) a (2.9) foram negligenciados termos de mais alta ordem, por isto, os valores exatos das tensões circulares na ponta da trinca são obtidos apenas na condição limite em que $r \rightarrow 0$. Os campos de tensão mostram que as distribuições de tensão ao redor da ponta da trinca podem ser descritas em termos dos parâmetros K_I , K_{II} e K_{III} , isto é, dos fatores de intensidade de tensão associados aos modos I, II e III, respectivamente. Uma característica importante dessas equações é o fato que as distribuições das tensões em torno da trinca são similares e dependem somente de r e θ . A diferença entre um material trincado e outro reside na grandeza do parâmetro K que, essencialmente, serve como um fator de escala para definir a magnitude do campo de tensões. Um considerável trabalho de pesquisa já foi desenvolvido neste sentido, com publicações na literatura de expressões para cálculo dos fatores de intensidade de tensão para vários tipos de fratura nos modos I, II e III.

Valores de tensões na ponta da fratura podem também ser tratados como uma combinação linear destes três tipos básicos de campos de tensão (modo misto).

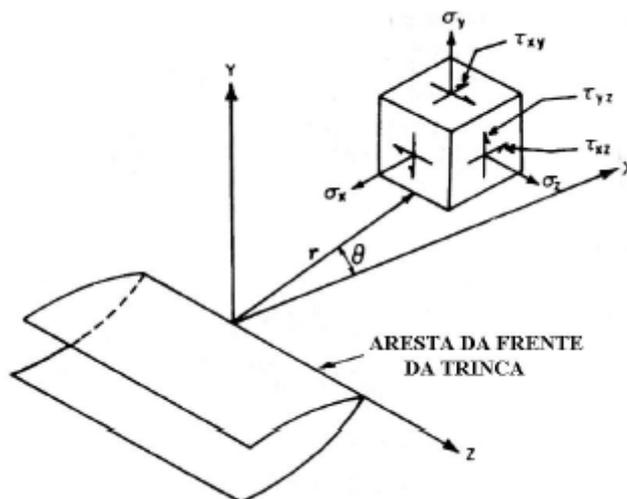


Figura 2.4 - Distribuição das componentes de tensão nas vizinhanças da ponta de uma trinca. (Miranda, 2003)

Do desenvolvimento de Westergaard (1927), pode ser concluído que:

$$K = f(\sigma, a) \quad (2.10)$$

É importante comparar o fator de intensidade de tensões K (equação 2.10) e o fator de concentração de tensões Kt (equação 2.2). Embora Kt leve em consideração variáveis geométricas, tamanho de trinca e raio na ponta da trinca, o fator de intensidade de tensões K incorpora tanto termos geométricos (o comprimento da trinca aparece explicitamente, enquanto que o raio na ponta da trinca é subentendido muito pequeno) quanto o nível de tensões σ . Dessa forma, o fator de intensidade de tensões incorpora mais informações do que o fator de concentração de tensões.

Se o fator de intensidade de tensões de uma determinada amostra é conhecido, então é possível determinar o máximo fator de intensidade de tensões que causaria ruptura. Esse valor crítico Kc é descrito na literatura como a tenacidade à fratura do material.

Uma analogia interessante pode ser feita entre tensão e resistência, e fator de intensidade de tensões e tenacidade à fratura. Um corpo pode sofrer muitos níveis de tensões, porém existe um único nível de tensões que produz deformações plásticas permanente, que é a tensão limite de escoamento, bem como um único nível de tensões que causa fratura, que é a tensão limite de resistência. Da mesma forma, o fator de intensidade de tensões na ponta de uma trinca pode variar com o nível de carregamento aplicado e com o comprimento da trinca. Porém, existe um

único nível de intensidade de tensões que causa a fratura, que é o nível crítico de intensidade de tensões, definido como tenacidade à fratura. Portanto, a tensão está para a resistência mecânica assim como o fator de intensidade de tensões está para a tenacidade à fratura.

A implementação de conceitos de Mecânica da Fratura Linear Elástica como um item de controle de projeto consiste em duas etapas essenciais:

- Determinação das propriedades da tenacidade à fratura do material, usando corpos de prova e carregamentos adequados;
- Determinação do tamanho da trinca real no corpo e cálculo do valor limite de tensão que manterá o valor do fator de intensidade de tensão menor do que a tenacidade à fratura do material. Pode ser aplicado um fator de segurança nesta estimativa e pode também ser incorporada uma margem de segurança ao tamanho da trinca, escolhendo-se um tamanho de referência maior que o tamanho da trinca real. Existe, como já foi visto anteriormente, uma relação entre a tenacidade à fratura, a tensão nominal de fratura e o tamanho da trinca.

Resultados da Mecânica da Fratura Linear Elástica são válidos somente enquanto a deformação plástica do material for confinada a uma pequena região circundante à ponta da trinca. Em materiais dúteis, onde a energia de fraturamento é algumas ordens de grandeza maior do que a energia de superfície, as equações de Griffith não podem ser mais aplicadas em sua forma original.

2.2.2.

Mecânica da Fratura Elasto-Plástica

A Mecânica da Fratura elasto-plástica representa o comportamento de trincas em materiais com comportamento não-linear e independente do tempo. Há dois parâmetros que são muito utilizados para representação da elasto-plasticidade no fraturamento: a Integral J e a abertura de ponta da trinca δ (**CTOD** – “Crack Tip Opening Displacement”). Seus valores críticos são quase independentes da tenacidade ao faturamento para grandes deformações plásticas. A integral J e a CTOD podem ser utilizados como critérios para dimensionamento no regime

elasto-plástico e, embora possuam limitações, são parâmetros mais abrangentes do que os empregados na MFLE.

Irwin (1948) e Orowan (1948), de forma independente, modificaram a expressão de Griffith para levar em consideração o trabalho plástico γ_p

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{2E(\gamma_s + \gamma_p)}{\pi a}} \quad (2.11)$$

ou, de maneira geral,

$$\sigma_{\max} = \sqrt{\frac{2EW_f}{\pi a}} \quad (2.12)$$

onde W_f é a energia de fraturamento.

Esta adaptação sofre restrições, em sua aplicação, porque na mecânica da fratura linear elástica o comportamento da fratura é caracterizado apenas pelo estado de tensões na ponta da fratura, enquanto que a presença de uma zona plástica de tamanho significativo na ponta da trinca permite que as duas superfícies se separem sem ocorrência do crescimento da trinca.

Dois metodologias foram desenvolvidas para a mecânica da fratura elasto-plástica: uma delas é conhecida como o método CTOD (*crack tip opening displacement*) proposta por Wells (1961), que investiga a distância entre as duas superfícies da trinca, medida na ponta da trinca.

O parâmetro CTOD caracteriza a capacidade do material em se deformar plasticamente antes da ruptura, medindo o afastamento entre as duas faces da trinca pré-existente na frente desta (figura 2.5). Pode ser estimado em função do aumento do perímetro da zona deformada plasticamente nas vizinhanças da ponta da fratura (figura 2.6).

A outra metodologia é conhecida como a integral J, proposta por Rice (1968), formulada em termos de um tratamento mecânico com forte base matemática (equação 2.13).

$$J = \int_{\Gamma} \left(W dy - \bar{T} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} ds \right) \quad (2.13)$$

Onde Γ é o contorno escolhido (figura 2.7), percorrido no sentido anti-horário, com início e final em dois pontos não coincidentes de cada uma das faces

da trinca, W é a densidade de energia de deformação, \bar{T} o vetor de carregamento com normal exterior \bar{n} ao contorno, \bar{u} o vetor deslocamento na direção x , e s o comprimento do caminho escolhido.

A integral J é independente do caminho escolhido, o que a liberta da caracterização local do estado de tensões na frente da ponta da trinca.

Historicamente, CTOD e a integral J são ambas usadas extensivamente na Mecânica da Fratura. Relação entre elas foi estabelecida de forma empírica, como a seguinte, incorporada na ASTM norte-americana,

$$J = m\sigma_y CTOD \quad (2.14)$$

onde σ_y é tensão de escoamento e m um fator de plasticidade.

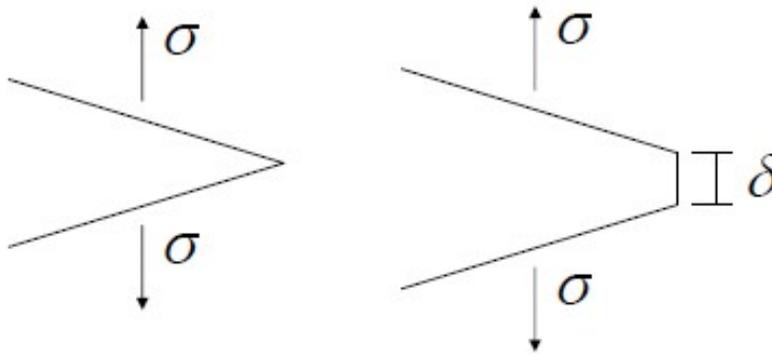


Figura 2.5 - Conceito de CTOD (Crack Tip Opening Displacement)

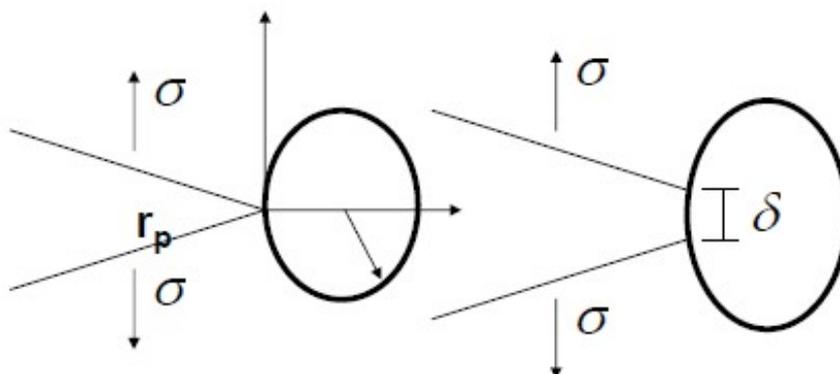


Figura 2.6 - O tamanho da região plasticada e sua relação com a abertura da ponta da fratura δ

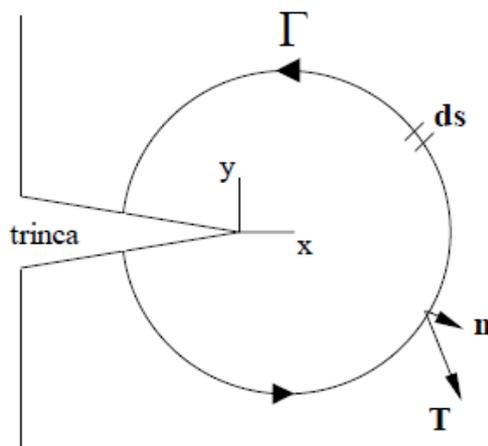


Figura 2.7 - Esquema de um caminho escolhido no método da integral J.

2.3. Propagação de Trincas no Modo Misto I-II

A literatura apresenta várias publicações tratando da propagação de trincas no modo I, correspondente ao tipo de ensaio de laboratório analisado nesta dissertação. Todavia, para fins de revisão bibliográfica sobre assunto, foi adotada uma abordagem mais geral de propagação de trinca no modo misto I-II (figura 2.8). Particularização das equações aqui apresentadas para apenas o modo I é feita sem dificuldades.

A propagação da trinca pode ser estimada comparando-se o fator de intensidade de tensão com o valor crítico K_c , considerado como propriedade do material, e determinado experimentalmente em ensaios de laboratório para cada modo de fraturamento.

Como já mencionado, Griffiths (1920) aplicou princípios de conservação de energia para postular que a fratura em materiais frágeis torna-se instável quando a taxa de liberação de energia de deformação na ponta da fratura, devido ao seu crescimento, tornar-se igual ou maior do que o acréscimo de energia associada com as recém-formadas superfícies da fratura. Esta abordagem não envolve o cálculo das distribuições de tensão ao redor da fratura, tendo sido estendida por Irwin (1948) e Orowan (1955) para materiais com ocorrência de limitada deformação plástica nas vizinhanças da ponta da fratura.

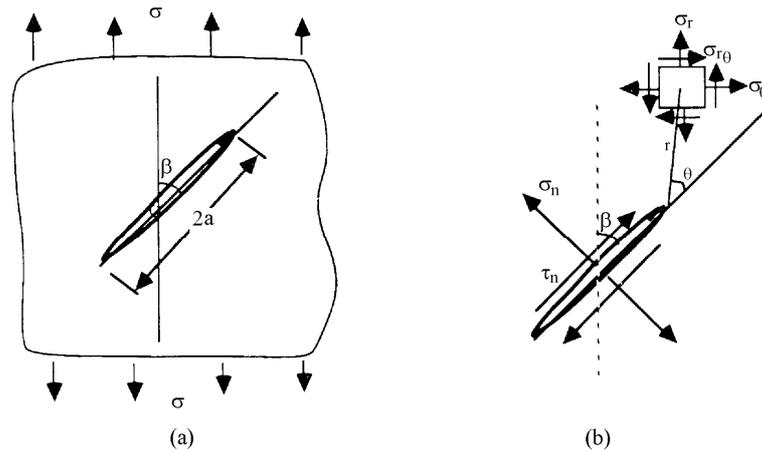


Figura 2.8 - Uma fratura sob modo misto I-II: (a) configuração de carregamento; (b) tensões na fratura (Whittaker et al. 1992)

Os fatores de intensidade de tensão estão relacionados com as correspondentes expressões da taxa de liberação de energia de deformação por:

$$\text{Modo I} \quad \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{r\theta} \end{bmatrix} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi \cdot r}} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 + \text{sen}^2 \frac{\theta}{2} \\ \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ \text{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

$$\text{Modo II} \quad \begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_{r\theta} \end{bmatrix} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} \text{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \left(1 - 3 \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}\right) \\ -3 \text{sen} \frac{\theta}{2} \cdot \cos^2 \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \cdot \left(1 - 3 \text{sen}^2 \frac{\theta}{2}\right) \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$\text{Modo III} \quad \begin{bmatrix} \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta z} \end{bmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{bmatrix} -\text{sen} \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

onde, no estado plano de deformação,

$$\kappa = 3 - 4\nu \quad (2.18)$$

Se a abertura da fratura ocorre sob modo misto I-II, então a liberação total de energia de deformação é simplesmente:

$$G = G_I + G_{II} = \frac{(K_I^2 + K_{II}^2)(\kappa + 1)}{8\mu} \quad (2.19)$$

A equação (2.19) permite então introduzir um critério para propagação da fratura no modo misto I-II, em termos da taxa de liberação total de energia de deformação

$$G = G_c \quad (2.20)$$

onde G_c corresponde à taxa crítica de liberação de energia de deformação, que é propriedade do material.

Alternativamente, em termos dos fatores de intensidade de tensão,

$$(K_I^2 + K_{II}^2) = \frac{8\mu}{(\kappa + 1)} G_c \quad (2.21)$$

o que permite inferir que K_{IC} e K_{IIC} são iguais entre si, desde que G_c seja uma constante

$$K_I^2 + K_{II}^2 = K_{IC}^2 = K_{IIC}^2 \quad (2.22)$$

Resultados experimentais, no entanto, não satisfazem a equação (2.22), representada pelo arco de círculo da figura 2.9, mas se adaptam a outras formas da envoltória de ruptura, como as seguintes, propostas na literatura (Whittaker, Singh e Sun, 1992):

$$\text{Linha reta:} \quad \frac{K_I}{K_{IC}} + \frac{K_{II}}{K_{IIC}} = 1 \quad (2.23)$$

$$\text{Elipse:} \quad \left(\frac{K_I}{K_{IC}} \right)^2 + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIC}} \right)^2 = 1 \quad (2.24)$$

$$\text{Quadrática homogênea:} \quad \left(\frac{K_I}{K_{IC}} \right)^2 + C_c \frac{K_I K_{II}}{K_{IC} K_{IIC}} + \left(\frac{K_{II}}{K_{IIC}} \right)^2 = 1 \quad (2.25)$$

onde C_c é uma constante diferente de 2. Huang e Wang (1985) recomendam a utilização da equação (2.25), onde a envoltória de ruptura é a mais conservadora dentre as apresentadas, excetuando-se, evidentemente, a linear.

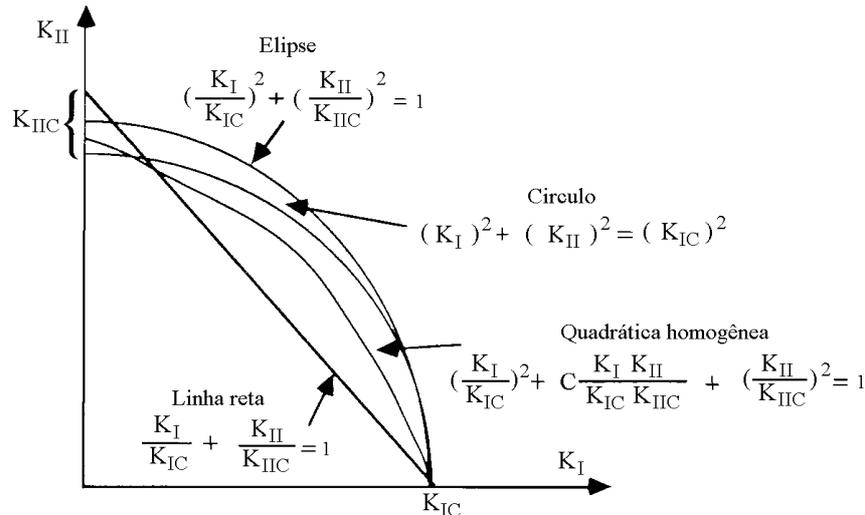


Figura 2.9 - Possíveis envoltórias de fratura no modo misto I-II de fraturamento (Whittaker, et al. , 1992).

2.4. Direção de Propagação de Trincas

2.4.1. Direção de Propagação da Fissura

a) Critério da tensão circunferencial máxima (critério σ_θ)

É baseado na hipótese de que a fratura propagará, a partir de sua ponta, na direção θ em que a tensão tangencial σ_θ é máxima, isto é

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (2.26a)$$

$$\text{com } \frac{\partial^2 \sigma_\theta}{\partial \theta^2} < 0 \text{ para } \theta = \theta_m \quad (2.27b)$$

$$\text{ou } \sigma_{r\theta} = 0 \quad (2.27)$$

onde σ_θ e $\sigma_{r\theta}$ se referem à superposição dos campos de tensões determinados pelas equações (2.7), para o modo I, e (2.8) para o modo II.

A direção de fraturamento θ_m é então determinada da equação (2.27) como

$$K_I \sin \frac{\theta_m}{2} \cdot \cos \frac{\theta_m}{2} + K_{II} \left(1 - 3 \sin^2 \frac{\theta_m}{2} \right) = 0 \quad (2.28)$$

Resultando em

$$\theta_m = 2 \cdot \arctg \left[\frac{1}{4} \left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 \pm \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{K_I}{K_{II}} \right)^2 + 8} \right] \quad (2.29)$$

onde o sinal positivo de σ_m , para tensões de compressão, não satisfaz a segunda expressão da equação (2.26b), sendo, portanto, desconsiderado.

No modo I, para $K_I = K_{IC}$, $K_{II} = 0$, o ângulo de propagação θ_m da fratura e a tensão tangencial crítica são definidos por:

$$\theta_m = 0^\circ \quad (2.30a)$$

$$\sigma_{\theta_c} = \frac{K_{IC}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot a}} \quad (2.30b)$$

Enquanto que no modo II, para $K_{II} = K_{IIC}$, $K_I = 0$, tem-se:

$$\theta_m = -70,53^\circ \quad (2.31a)$$

$$\sigma_{\theta_c} = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{K_{IIC}}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot a}} \quad (2.31b)$$

Admitindo-se que σ_{θ_c} é uma constante característica do material, da comparação das equações (2.30b) e (2.31b) resulta,

$$K_{IIC} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot K_{IC} = 0,8666 \cdot K_{IC} \quad (2.32)$$

b) Critério da máxima taxa de liberação de energia de deformação (critério G)

É baseado na hipótese de que a fratura propagará, a partir de sua ponta, na direção θ_m em que a taxa de liberação de energia de deformação for máxima, isto é,

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = 0 \quad (2.33a)$$

$$\text{com } \frac{\partial^2 G}{\partial \theta^2} < 0 \text{ para } \theta = \theta_m \quad (2.33b)$$

A figura 2.10 ilustra a ramificação de uma fratura de Griffith (fratura central de comprimento $2a$ em uma placa submetida a um estado uniaxial de tração), em conseqüência de seu crescimento na direção θ de um incremento de

comprimento Δa . A forma geral da taxa de liberação de energia de deformação vem da equação (2.19)

$$G(\theta) = \frac{[K_I^2(\theta) + K_{II}^2(\theta)](\kappa + 1)}{8\mu} \quad \text{onde} \quad (2.34a)$$

$$\begin{bmatrix} K_I(\theta) \\ K_{II}(\theta) \end{bmatrix} = \frac{4}{4 - \sin^2 \theta} \left(\frac{1 - \theta/\pi}{1 + \theta/\pi} \right)^{\theta/2\pi} \begin{bmatrix} K_I \cos \theta + \frac{3}{2} K_{II} \sin \theta \\ K_{II} \cos \theta - \frac{K_I}{2} \sin \theta \end{bmatrix} \quad (2.34b)$$

são os fatores de intensidade de tensão na fratura original, não ramificada.

O sinal do ângulo θ_m , obtido pela aplicação das equações (2.33) e (2.34), depende do sinal de K_{II} . De acordo com Carvalho et al (1999), se $K_{II} > 0$ então $\theta_m < 0$ e se $K_{II} < 0$ então $\theta_m > 0$

No modo I de fraturamento, $K_{II} = 0$, $K_I = K_{IC}$ e $G(\theta)_m = G_{IC}$, o ângulo de propagação da fratura é determinado como $\theta_m = 0^0$ e o fator crítico de intensidade de tensão K_{IC} nesta direção relaciona-se com a taxa crítica de liberação de energia de deformação G_{IC} pela equação (2.15),

$$G_{IC} = \frac{(\kappa + 1)}{8\mu} K_{IC}^2 \quad (2.35)$$

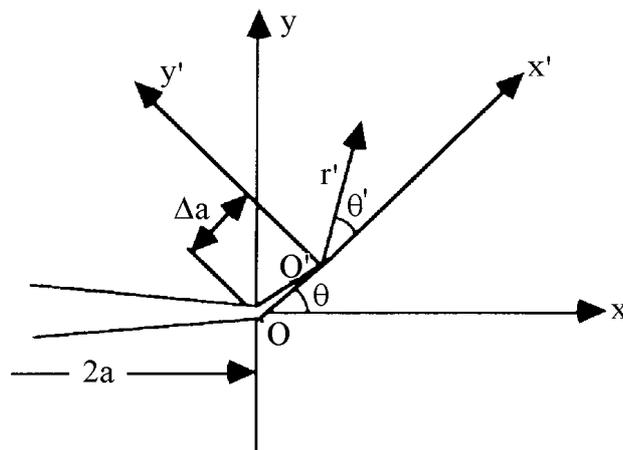


Figura 2.10 - Fratura ramificada (Whittaker et al., 1992).

Enquanto que no modo II, $K_{II} = K_{IIC}$, $K_I = 0$ e $G(\theta)_m = G_{IIC}$, o ângulo de propagação da fratura é calculado como $\theta_m = -75.6^0$ e o correspondente fator

crítico de intensidade de tensão K_{IIc} nesta direção relaciona-se com G_{IIc} pela equação (2.16),

$$G_{IIc} = 2,546 \frac{(\kappa + 1)}{8\mu} K_{IIc}^2 \quad (2.36)$$

Admitindo-se que a taxa crítica de liberação de energia de deformação seja uma constante do material, uma comparação das expressões (2.35) e (2.36) permite então concluir que

$$K_{II} = 0,627 \cdot K_{IIc} \quad (2.37)$$

C) Critério da mínima densidade de energia de deformação (Critério S)

Para um problema do estado plano de deformação, a expressão geral para determinação da densidade de energia de deformação S é dada por

$$S = \frac{1}{2\mu} \left[\frac{\kappa + 1}{8} (\sigma_r + \sigma_\theta)^2 - \sigma_r \sigma_\theta + \sigma_{r\theta}^2 \right] \quad (2.38)$$

Considerando-se o problema de uma fratura sob o modo misto I-II (figura 2.8), as expressões das componentes de tensão na ponta da fratura, conforme equações (2.7) e (2.8), permitem escrever a seguinte equação quadrática para o fator de densidade de energia de deformação, denotado por SF,

$$S_F = \frac{1}{r} (a_{11} K_I^2 + 2a_{12} K_I K_{II} + a_{22} K_{II}^2) \quad (2.39a)$$

onde os coeficientes a_{ij} ($i, j = 1, 2$) são dados por

$$\left. \begin{aligned} 16\pi\mu a_{11} &= (1 + \cos\theta)(k - \cos\theta) \\ 16\pi\mu a_{12} &= \text{sen}\theta [2\cos\theta - (k - 1)] \\ 16\pi\mu a_{22} &= (k + 1)(1 - \cos\theta) + (1 + \cos\theta)(3\cos\theta - 1) \end{aligned} \right\} \quad (2.39b)$$

O critério S está baseado nas seguintes três hipóteses fundamentais (Whittaker et al., 1992):

- 1) A propagação da fratura ocorre na direção ao longo da qual o fator de densidade de energia de deformação S_F é mínimo. O ângulo de propagação θ_m , medido em relação à direção da fratura original, corresponde ao da mínima densidade de energia de deformação S_{Fm} , ou seja:

$$\frac{\partial S_F}{\partial \theta} = 0 \quad (2.40a)$$

$$\text{com } \frac{\partial^2 S_F}{\partial \theta^2} > 0 \text{ para } \theta = \theta_m \quad (2.40b)$$

2) a propagação da fratura ocorre quando S_{Fm} atingir um valor crítico S_{FC} ;

3) o fator de densidade de energia de deformação SF é avaliado ao longo de um contorno $r = r_0$, onde a razão S_{Fm}/r_0 permanece constante.

No modo I de fraturamento, $K_{II} = K_{IC}$, $K_{II} = 0$, $S_{Fm} = S_{FC}$ e o ângulo crítico determinado pelas equações (2.40) é

$$\theta_m = 0^\circ \quad (2.41a)$$

indicando que a propagação da fratura ocorre ao longo do plano da fratura original, com valor crítico de S_F correspondendo a

$$S_{FC} = \frac{\kappa - 1}{8\pi\mu} K_{IC}^2 \quad (2.41b)$$

No modo II de fraturamento, $K_I = 0$, $K_{II} = K_{IIC}$, $S_{Fm} = S_{FC}$ e o ângulo crítico é determinado por:

$$\theta_m = -ar \cos \frac{\kappa - 1}{6} \quad (2.42a)$$

com o correspondente valor crítico de S_F expresso por

$$S_{FC} = \frac{14\kappa - 1 - \kappa^2}{192\pi\mu} \cdot K_{IIC}^2 \quad (2.42b)$$

Desde que S_F seja uma constante característica do material, e que não se altere com o modo de fraturamento, conclui-se então das equações (2.41) e (2.42) que

$$\frac{K_{IIC}}{K_{IC}} = \sqrt{\frac{24(\kappa - 1)}{14\kappa - 1 - \kappa^2}} \quad (2.43)$$

De acordo com o critério da tensão circunferencial máxima (critério σ_θ) os ângulos de propagação da fratura nos modos I e II, bem como a razão entre os fatores críticos de intensidade de tensão K_{IIC}/K_{IC} , são independentes das propriedades do material.

De acordo com o critério da mínima densidade de energia de deformação S , estes valores são, no entanto, dependentes do coeficiente de Poisson do material ν , o que

causa pequenas variações nos valores de θ_m e K_{IIIC}/K_{IC} , conforme equações (2.42a) e (2.43).

Resultados experimentais indicam que geralmente θ_m e K_{IIIC}/K_{IC} estão relacionados com as propriedades mecânicas (Huang e Wang, 1985).