

Referências bibliográficas

- 1 WIKIPÉDIA. **A hierarquia da classificação científica dos seres vivos**. Disponível em: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Ficheiro:Biological_classification_L_Pengo_vflip-pt.svg>. Acesso em 19 mar. 2010.
- 2 BAMBUSC. **Estrutura de bambu**. Disponível em: <<http://www.bambusc.org.br/wpcontent/uploads/2009/05/imagem-3-estrutura-do-bambu.jpg>>. Acesso em 26 maio 2010.
- 3 GHAVAMI, K.; BARBOSA, N. Bambu. In: Instituto Brasileiro do Concreto. (Org.). **Materiais de construção civil e Princípios de Ciência e Engenharia de Materiais**. 1 ed. São Paulo: isaia, G. E., ibracon, 2v, p. 1559-1589, 2007.
- 4 BERALDO, AL; AZZINI,A; GHAVAMI.K et al. **Bambu: Características e aplicações**. In: Freire, W. J, Beraldo, A.L (coord). **Tecnologias e materiais alternativos de construção**. Campinas: Editora da Unicamp, cap. 9, p. 253-299, 2003.
- 5 LIESE, W.; KUMAR, S. **Bamboo preservation compendium**. New Delhi, 2003.
- 6 LONDOÑO, X; CAMAYO, G.C.; RIAÑO, N.M. et al. **Characterization of the anatomy of *Guadua angustifolia* (Poaceae: bambusoideae) culms**. *Bamboo science culture: the Journal of the American Bamboo Society*, v.16, n.1. p. 18-31, 2002.
- 7 LOPES, O. H. **Bamboo the gift of the gods**. Colômbia, p.32, ISBN: 958-33-4298-X, 2003.
- 8 PORATH, J. F. at al. **Apresentação do grupo GIEM**. Universidade Federal de Santa Catarina, 2008.
- 9 GHAVAMI, K.; MARINHO, A.B. **Propriedades mecânicas dos colmos dos bambus das espécies: *Mosó*, e *Guadua angustifolia* para utilização na engenharia**. 2 ed, Rio de janeiro: RMNC do departamento de engenharia civil da PUC-Rio, 91p., 2002.

- 10 FLICKR. **Fotos de Bambu**. Disponível em: < <http://www.flickr.com/photos/asa100/429413001/> >. Acesso em 28 julho 2010.
- 11 SALGADO, A. L.; AZZINI, A. O. **Bambu: 100 anos para florescer e depois morrer**. O agrônomo, Campinas, 46(1-3), p 15, 1994.
- 12 FERNANDES E. **Determinação das propriedades do bambu da espécie Dendrocalamus Giganteus para utilização na construção civil**. Relatório, PUC-Rio, 2006.
- 13 GHAVAMI, K.; MARINHO, A. **Propriedades físicas e mecânicas do colmo inteiro do bambu da espécie Guadua angustifolia**. Revista Brasileira de Engenharia Agrícola e Ambiental, v.9, p. 107-114, 2005.
- 14 TORRES, L. A. **Caracterización de la isotropía transversal del bambú, su modelación mecánica en elementos finitos y verificación experimental**. Trabalho de graduação, Universidad Del Valle, Cali, 2005.
- 15 SÁNCHEZ, J, PRIETO, E. **Comportamiento de la guadua angustifolia sometida a flexión**, Trabalho de graduação, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2002.
- 16 AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **Norma ASTM D198**. Standard Methods of Static Test of Timber in Structural Sizes. Philadelphia, 1999.
- 17 MARTINEZ, D. **Determinación de valores característicos de resistencia a tensión y torsión en Guadua Angustifolia Kunth**. Trabalho de graduação, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá, 2009.
- 18 GARCÍA, J.J.; RANGEL, C.; GHAVAMI, K. **Experiments with rings to determine the anisotropic elastic constants of bamboo**. Journal of Construction and Building Materials, v.31, p.52-57, 2012.
- 19 NOGATA, F.; TAKAHASHI, I. **Intelligent functionally graded material: Bamboo**. Composites Part B: Engineering, v. 5, n. 7, p. 743-751, 1995.

- 20 NELLI, E.; WALTERS, M.; PAULINO, G. **Modeling bamboo as a functionally graded material: lessons for the analysis of affordable materials.** Journal of Materials Science, v. 41, issue 21, p. 6991-7004, 2006.
- 21 MÉNDEZ, L.; VALLECILLA, C. **Sistema Constructivo de Casas en Tierra Timagua: Análisis Experimental de Conexiones.** Trabalho de graduação, Universidad del Valle, Cali, 2003.
- 22 EXCELSENSOR. **Extensômetros de Resistência Elétrica Roseta Tripla a 90°.** Disponível em: < http://www.excelsensor.com.br/ext_roseta_tripla60.htm >. Acesso em 28 fev. 2011.
- 23 TIMOSHENKO S. P. **Resistência dos materiais**, v.1 , Livros técnicos e científicos editora S.A., 1979.
- 24 VLASOV V. Z. **Thin-walled elastic rods. The principles of formation of a general technical theory of shells**, v. 2, Publishing of USSR Academy of Sciences. Título original: Тонкостенные упругие стержни. Принципы построения общей технической теории оболочек, 1963.
- 25 FELLMOSE, P; BLASS H. J. **Influence of Rolling Shear Modulus on Strength and Stiffness of Structural Bonded Timber Elements.** International Council for Research and Innovation in Building and Construction, CIB-W18/37-6-5, August, 2004.
- 26 MELLO E SOUZA, J. **Torção de Perfis Abertos**, PUC-Rio e Usiminas, 1975.

Anexo A

Tabela A.1 - Características físicas de colmo 1

Espessura da parede, mm	8,2	8,76	8,5	8,71	8,5425
8,70	9,26	8,93	8,83	8,4	8,855
Esbeltez diametral	No 1		No 2		No 3
0,8069	25,35		32,25		30,1
Razão Dm/ Esp m	24,6		32,4		30,4
9,36	24,7		32,2		30,6
	25		32,2		30,5
Distância entre nós,cm					
31,33	24,9125		32,2625		30,4
Diâmetro ex,mm	89,87	94,62	92,245		
90,08	85,81	90,02	87,915		

Tabela A.2 - Características físicas de colmo 2

Espessura da parede, mm	9,46	9,1	9,14	9,61	9,3275	
10,25	10,9	11,49	11,04	11,28	11,1775	
Esbeltez diametral	No 1		No 2		No 3	No 4
0,7978	18,4		24,1		21,4	21,1
Razão Dm/ Esp m	18,7		22,7		22,1	20,5
8,89	19,4		22,6		22	20,5
	19		22,7		21,9	20,6
Distância entre nós,cm						
21,77	18,875		22,775		21,85	20,675
Diâmetro ex,mm	100,3	109,88	105,09			
101,405	93,82	101,62	97,72			

Tabela A.3 - Características físicas de colmo 3

Espessura da parede, mm	9,05	9,24	8,66	8,86	8,95	
9,47	10,16	9,51	10,37	9,91	9,9875	
Esbeltez diamentral	No 1		No 2		No 3	No 4
0,8011	16,4		27,3		26,2	24,5
Razão Dm/ Esp m	16		27,5		26,1	25,2
9,06	15,8		27,2		26,4	24,8
	16,4		27,2		26,4	24,6
Distância entre nós,cm						
26,12	16,15		27,3		26,275	24,775
Diâmetro ex,mm	93,63	102,05	97,84			
95,225	90,34	94,88	92,61			

Anexo B

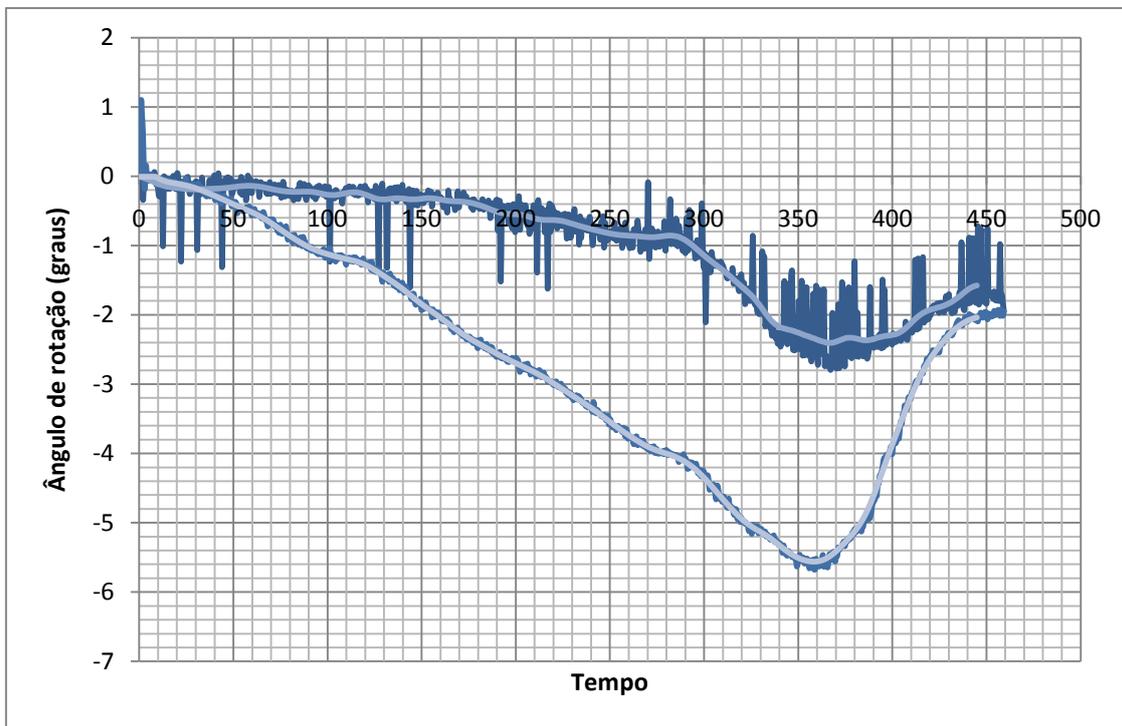


Figura B.1 - Limpeza dos dados de ruído, utilizando filtro FIR em MatLab (colmo 2, seção fechada, ensaio de torção, ângulo de giro versus tempo)

Anexo C

Teoria de Vlasov

Em mecânica estrutural as esquemas de cálculo principais se dividem em 3 grupos: 1) os corpos sólidos; 2) placas e cascas; 3) hastes e sistema de hastes. Esta última classe inclui hastes com paredes delgadas, que deveriam compor a própria classe devido às várias diferenças entre hastes de seção fechada e de seção aberta.

As hipóteses de cálculo dos corpos da terceira classe baseiam-se:

- 1) no caso de flexão, na hipótese de seções planas (Seções planas e normais ao eixo axial da peça permanecem planas e normais a tal eixo após a deformação);
- 2) no caso de torção, na teoria de Saint-Venant (teoria de torção pura: não surgem deformações de alongamento e de deslocamento na direção transversal e deformações de alongamento na direção longitudinal).

Essa teoria só permite definir as tensões cisalhantes que surgem nas seções transversais da haste. Neste caso nas hastes com paredes delgadas podem surgir as deformações de alongamento longitudinal que provocam as tensões normais longitudinais respectivamente. Essas tensões que surgem devido à deplanação da seção podem chegar até os valores muitos grandes e não são consideradas na teoria de Saint-Venant. Por isso é muito importante separar as hastes com paredes delgadas na própria classe e analisar pela teoria diferente da teoria de Saint-Venant.

Estruturas com paredes delgadas são estruturas, cujas três dimensões são de diferentes ordens de grandeza. Por exemplo, a espessura t é muito menor do que diâmetro d , e o último é muito menor do que comprimento l .

$$\frac{t}{d} \leq 0,1; \quad (C-1)$$

$$\frac{d}{l} \leq 0,1; \quad (C-2)$$

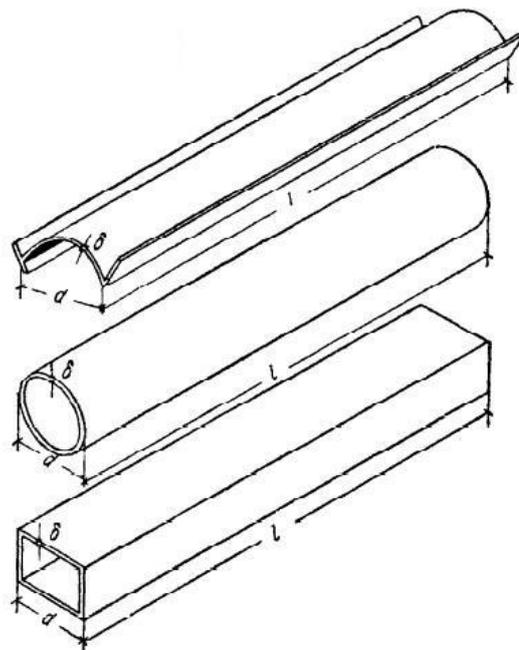


Figura C.1 - Exemplos das hastes com paredes delgadas [24]

Estas estruturas têm o comportamento bem distinto das chamadas vigas sólidas (estrutura, cujas duas dimensões são muito menores do que o comprimento).

Hipóteses básicas

É muito importante definir algumas determinações:

Superfície média – a superfície que passa pelo meio das espessuras das placas que formam a haste.

Geratriz – a linha reta paralela ao eixo da haste e que pertence a superfície média.

Guia - curva plana que forma de coibição da superfície média e plano P perpendicular geratrizes.

Se geratrizes e guias fossem os eixos coordenados, teríamos um sistema mutuamente ortogonal, onde pode-se definir a posição de qualquer ponto. As coordenadas de qualquer ponto M na geratriz e guia determinam-se como z e s respectivamente (figura C.2).

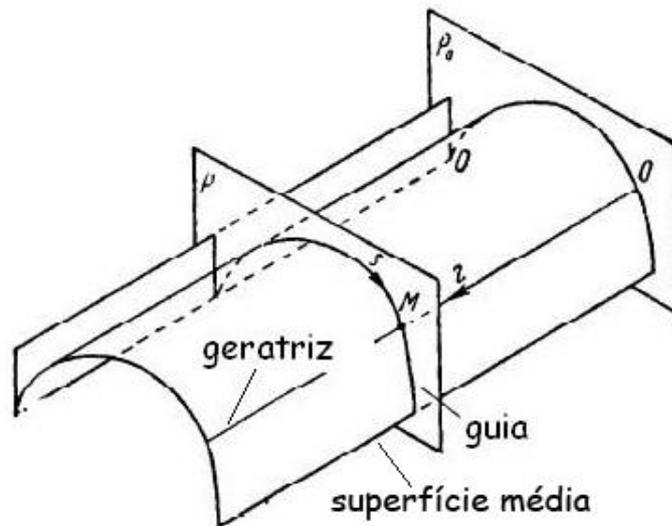


Figura C.2 - Geratriz, guia e superfície média da haste [24]

Sabe-se que para uma haste que está sujeita a distensão, compressão, flexão ou torção as tensões importantes são tensão normal e tensão cisalhante que surgem nas seções transversais da haste. Estas tensões são as grandezas fundamentais para definição das dimensões de estrutura.

As tensões normais que surgem nas seções longitudinais e atuam paralelamente a tangente a guia não tem muita importância, considerando a haste com paredes delgadas o sistema espacial.

Então as hipóteses geométricas são as seguintes:

- 1) A haste com seção aberta e paredes finas considere-se a estrutura, cujo perfil é indeformável no plano da seção transversal.
- 2) A deformação de deslocamento da superfície média, que caracteriza-se pela alteração do ângulo reto entre os eixos coordenados $z = \text{const}$ e $s = \text{const}$, considera-se igual a zero.

A distorção da seção transversal plana, condicionada por deslocamentos longitudinais dos pontos da seção, chama-se deplanação da seção.

No caso de flexo-torção a deplanação da haste é acompanhada pelas tensões cisalhantes e também pelas tensões normais nas seções transversais. Em cada seção transversal da haste as tensões normais resultam em nova força generalizada, que representa o sistema de duas forças longitudinais

reciprocamente equilibradas. Esta força generalizada chama-se bimomento longitudinal da haste.

A teoria de flexo-torção da haste com paredes delgadas baseia-se principalmente na negação da hipótese das seções transversais planas e também na negação de considerar a haste como modelo elástico de uma só dimensão para a qual as condições de contorno podem ser indicadas segundo o princípio de Saint-Venant "... as tensões que podem ser produzidas em um corpo pela aplicação, em uma pequena parte da sua superfície, de um sistema de forças equivalente estaticamente a força zero e conjugado zero, são de magnitude desprezível a distâncias que são maiores se foram comparadas com as dimensões lineares do corpo", [26]). A diferença desta teoria de teoria elementar de flexão das vigas sólidas consiste em que a última baseia-se nas hipóteses que permitem considerar o fenômeno de flexo-torção da haste como flexo-torção do sistema com paredes delgadas considerando o fator de deplanação da seção.

Viga sólida e haste com paredes delgadas engastadas reagem bem diferente ao momento torçor aplicado na extremidade livre.

No caso de viga "as tensões só serão significativas em seções próximas a extremidade livre" [26]. Isso significa que as tensões vão diminuir à medida que vão se afastando da extremidade livre. A haste com paredes delgadas reage de forma diferente: em todas as seções as tensões têm a mesma ordem de grandeza.

Deslocamentos e deformações. A lei das áreas setoriais.

Em resistência dos materiais o eixo da haste é uma linha de centros da gravidade das áreas das seções transversais. A seguir chamaremos o *eixo arbitrário* a qualquer reta no espaço que seja paralela a este eixo.

Considere-se que o *eixo arbitrário* cruza-se com o plano da seção transversal $z = \text{const}$ no ponto O (figura C.3).

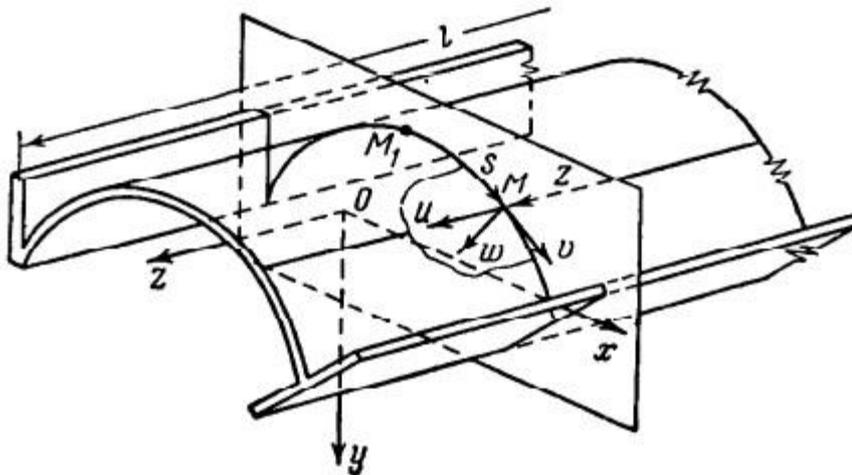


Figura C.3 - Eixo arbitrário da haste [24]

Considera-se que haste com paredes delgadas sofre uma deformação. Então o ponto genérico M se deslocará e ocupará outra posição. Temos que definir os deslocamentos dos pontos da superfície média da haste porque eles definem o seu estado de deformações.

De acordo com a primeira hipótese geométrica o perfil da haste é rígido e as deformações não mudam a sua forma e as dimensões da seção transversal.

Os deslocamentos transversais dos pontos da seção $z = \text{const}$ definem-se através do deslocamento do ponto arbitrário A desta seção e também através do ângulo de rotação da seção em relação a esse ponto.

E se o ponto A não pertence a guia, considere-se que pelo menos este ponto está ligado rigidamente com ela.

a_x, a_y - as coordenadas do ponto A e

$\xi(z), \eta(z)$ - as projeções do deslocamento deste ponto nos eixos coordenados O_x e O_y respectivamente (figura C.4).

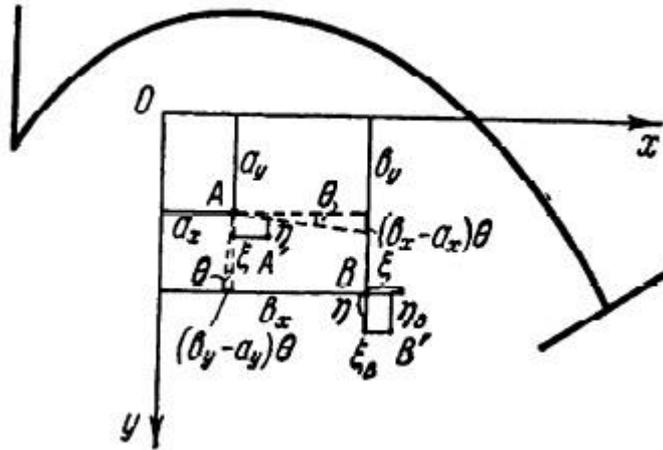


Figura C.4 - Seção transversal da haste $z = \text{const}$ [24]

$\theta(z)$ - o ângulo de rotação da seção $z = \text{const}$ no plano Oxy em relação ao mesmo ponto A. Este ângulo como função de z define o ângulo de torção da haste ao longo do comprimento. O ângulo considera-se positivo se olhando para a seção $z = \text{const}$ no sentido contrário do eixo Oz parece que ela roda no sentido horário.

Definindo como ξ_B e η_B os deslocamentos do ponto B da seção transversal da haste nas direções dos eixos Ox e Oy respectivamente e substituindo o arco pelo tangente a este arco (considerando que o ângulo θ é muito pequeno) obtemos os valores (figura C.4) :

$$\xi_B = \xi - (b_y - a_y) \cdot \theta, \quad (\text{C-3})$$

$$\eta_B = \eta + (b_x - a_x) \cdot \theta, \quad (\text{C-4})$$

onde b_x e b_y são as coordenadas do ponto B.

Quando os valores $\xi(z)$, $\eta(z)$ e $\theta(z)$ são muito pequenos o deslocamento do perfil da haste no plano da seção transversal considera-se como rotação em torno de um ponto que chama-se *centro instantâneo de rotação*. A posição deste centro no plano Oxy determina-se baseado nas condições da sua imobilidade. Fazendo coincidir o ponto B com o *centro instantâneo de rotação* pode-se igualar a zero os deslocamentos ξ_B e η_B :

$$\xi - (b_y - a_y) \cdot \theta = 0, \quad (\text{C-5})$$

$$\eta + (b_x - a_x) \cdot \theta = 0, \quad (\text{C-6})$$

onde agora b_x e b_y são as coordenadas do *centro instantâneo de rotação*. Daqui a diante o *centro instantâneo de rotação* chamaremos o *centro de torção*. Das equações C-5 e C-6 obtém-se as expressões para as coordenadas de *centro de torção* :

$$b_x = a_x - \frac{\eta}{\theta}, \quad (\text{C-7})$$

$$b_y = a_y + \frac{\xi}{\theta}, \quad (\text{C-8})$$

As equações C-7 e C-8 determinam a curva chamada a linha dos centros de torção.

A posição do centro de torção é diferente do centro da gravidade da seção porque depende de deformação e como consequência da carga externa que provoca esta deformação.

O deslocamento total do ponto arbitrário M da superfície média da haste com paredes delgadas é um vetor que pode ser definido no espaço com três componentes:

- deslocamento longitudinal u ; u considera-se positivo se coincide com aumento da variável Z ;
- deslocamento transversal tangencial v ; coincide com a tangente a guia; v considera-se positivo se coincide com aumento da variável s ;
- deslocamento transversal normal w ; considera-se positivo se u , v e w positivos formam o sistema das coordenadas *left-handed* (figura C.3).

Os três deslocamentos são funções das variáveis Z e s .

Definimos os deslocamentos transversais v e w . Das expressões C-3 e C-4 para o ponto arbitrário $M(x, y)$ da guia tem-se:

$$\xi_s = \xi - (y - a_y) \cdot \theta, \quad (C-9)$$

$$\eta_s = \eta + (x - a_x) \cdot \theta, \quad (C-10)$$

onde ξ_s e η_s são os deslocamentos do ponto M no sentido dos eixos Ox e Oy .

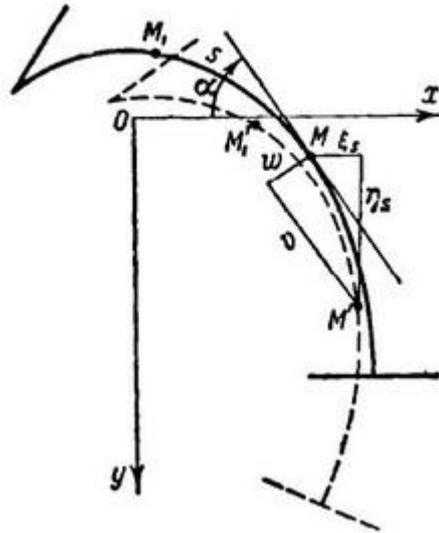


Figura C.5 - Deslocamento de ponto M [24]

Definindo como α o ângulo entre tangente a guia no ponto M e eixo Ox e projetando ξ_s e η_s no sentido de tangente (figura C.5) tem-se:

$$v(z, s) = \xi_s \cos \alpha + \eta_s \sin \alpha \quad (C-11)$$

$$w(z, s) = \eta_s \cos \alpha - \xi_s \sin \alpha \quad (C-12)$$

Substituindo C-11 e C-12 em C-9 e C-10 tem-se:

$$v(z, s) = \xi \cdot \cos \alpha + \eta \cdot \sin \alpha + [(x - a_x) \cdot \sin \alpha - (y - a_y) \cdot \cos \alpha] \cdot \theta \quad (C-13)$$

$$w(z, s) = -\xi \cdot \sin \alpha + \eta \cdot \cos \alpha + [(x - a_x) \cdot \cos \alpha + (y - a_y) \cdot \sin \alpha] \cdot \theta \quad (C-14)$$

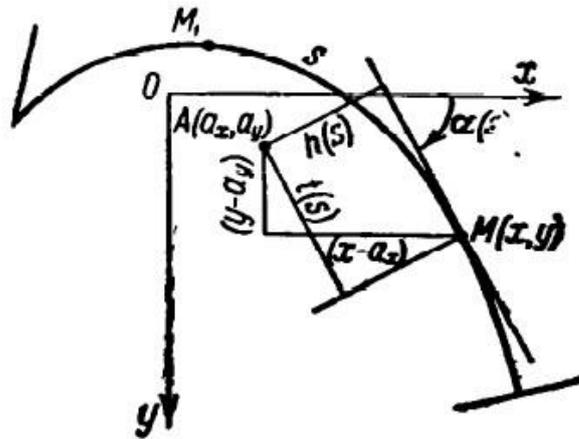


Figura C.6 - Coordenadas de ponto A [24]

Na figura C.6 nota-se, que:

$$(x - a_x) \cdot \sin \alpha - (y - a_y) \cdot \cos \alpha = h(s), \quad (\text{C-15})$$

$$(x - a_x) \cdot \cos \alpha + (y - a_y) \cdot \sin \alpha = t(s), \quad (\text{C-16})$$

onde $h(s)$ e $t(s)$ são as distâncias dos perpendiculares de ponto A à tangente e normal à guia no ponto M.

Transformando as expressões C-13 - C-16 tem-se em forma compacta:

$$v(z, s) = \xi(z) \cdot \cos \alpha(s) + \eta(z) \cdot \sin \alpha(s) + \theta(z) \cdot h(s), \quad (\text{C-17})$$

$$w(z, s) = -\xi(z) \cdot \sin \alpha(s) + \eta(z) \cdot \cos \alpha(s) + \theta(z) \cdot t(s), \quad (\text{C-18})$$

Para determinar o deslocamento longitudinal $u(z, s)$ do ponto M que surge devido a deformação da superfície média, aplica-se a segunda hipótese sobre ausência de deformações devidos a deslocamento da superfície média.

A deformação devida a deslocamento determina-se como alteração relativa do ângulo reto entre os eixos coordenados $s = \text{const}$ e $z = \text{const}$, que surge por causa de deformação da haste.

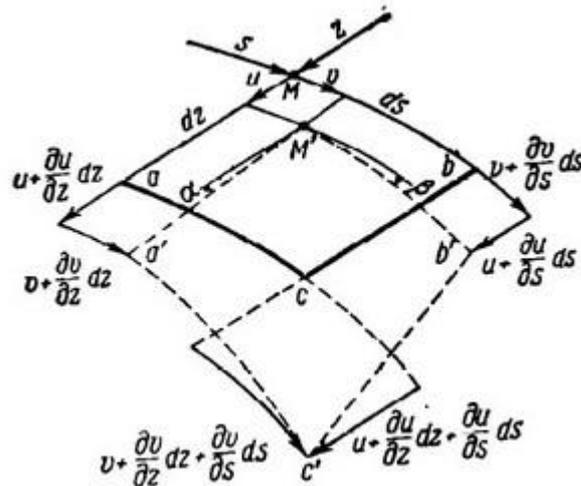


Figura C.7 - Deslocamentos tangenciais para quatro pontos: M , a , b e c [24]

Na figura C.7 mostram-se os deslocamentos tangenciais para quatro pontos: M , a , b e c do retângulo elementar da superfície. Sabendo os deslocamentos destes pontos pode-se determinar a deformação devida a deslocamento γ :

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad (\text{C-19})$$

Se deformação for igual a zero tem-se:

$$\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \quad (\text{C-20})$$

Sabendo o deslocamento $v(z, s)$ (exp. C-17) define-se $u(z, s)$:

$$u(z, s) = \zeta(z) - \int_{M_1}^M \frac{\partial v}{\partial z} ds, \quad (\text{C-21})$$

onde $\zeta(z)$ - uma função arbitrária que depende só da coordenada z e representa o deslocamento longitudinal do ponto M_1 (ponto zero da coordenada

s). Integral $\int_{M_1}^M \frac{\partial v}{\partial z} ds$ calcula-se ao longo do guia de uma variável s entre o intervalo $[M_1, M]$, onde M é o ponto para o qual determina-se deslocamento $u(z, s)$.

Diferenciando a expressão C-17 por uma variável z e multiplicando ambas partes dessa expressão por ds tem-se:

$$\frac{\partial v}{\partial z} ds = \xi'(z) \cdot \cos \alpha(s) ds + \eta'(z) \cdot \sin \alpha(s) ds + \theta'(z) \cdot h(s) ds \quad (C-22)$$

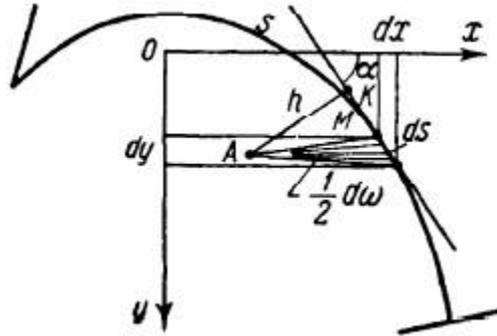


Figura C.8 - Determinação de $d\omega$ [24]

Da figura C.8 tem-se:

$$\cos \alpha \cdot ds = dx, \quad (C-23)$$

$$\sin \alpha \cdot ds = dy, \quad (C-24)$$

$$h \cdot ds = d\omega, \quad (C-25)$$

onde ds é diferencial do arco do guia;

dx , dy são os diferenciais das coordenadas cartesianas que corresponde ao elemento ds do guia;

$d\omega$ é a área dupla do triangulo elementar (sector), a base do qual é diferencial do arco ds e a altura é um perpendicular h de ponto A a tangente a guia no ponto M .

Substituindo (C-22 – C-25) em (C-21) tem-se:

$$u(z, s) = \zeta(z) - \xi'(z) \cdot x(s) - \eta'(z) \cdot y(s) - \theta'(z) \cdot \omega(s), \quad (\text{C-26})$$

onde $x(s)$, $y(s)$ - as coordenadas cartesianas do ponto M ;

$\omega(s)$ - a área dupla do sector AMM_1 (figura C.9),

esta área chama-se a área setorial;

ponto A - é o pólo da área setorial;

ponto M_1 - é o ponto setorial inicial.

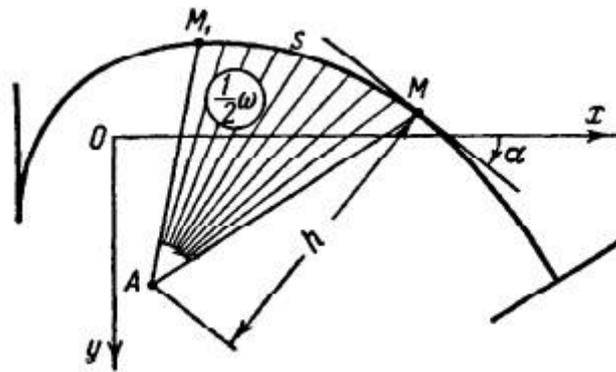


Figura C.9 - Área setorial [24]

Chamaremos a reta AM_1 - imóvel raio-vetor e a reta AM - móvel raio-vetor.

A área setorial considera-se positiva se o móvel raio-vetor AM roda no sentido horário (olhando no sentido contrário a eixo Oz).

Na expressão C-26 os três primeiros termos mostram a lei de Bernoulli-Navier, segundo o qual as seções transversais planas permanecem planas após da deformação. O último termo da expressão define a parte dos deslocamentos que não segue a lei de Bernoulli-Navier e surge como resultado de torção. Este desvio da lei das seções planas chama-se deplanação setorial de seção.

Valor $\theta'(z) = \frac{d\theta}{dz}$ é o ângulo relativo de torção que vamos chamar de deplanação

da haste devida a torção.

Sabendo deslocamentos dos pontos da superfície média da haste pode-se calcular deformações desta superfície em qualquer ponto M :

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (\text{C-27})$$

Diferenciando (C-26) segundo (C-27) tem-se:

$$\varepsilon(z, s) = \zeta'(z) - \xi''(z) \cdot x(z) - \eta''(z) \cdot y(s) - \theta''(z) \cdot \omega(s) \quad (\text{C-28})$$

Então, como a teoria de flexão, a teoria da torção pura das hastes com paredes delgadas em resistência dos materiais é o caso particular desta teoria, descrita pela lei das áreas setoriais e baseada nas seguintes hipóteses:

- a forma da seção transversal não se modifica;
- não tem deformação de deslocamento da superfície média da haste.

As hipóteses de Bernoulli–Navier (quais são fundamentais para a teoria elementar de flexão das vigas) e as hipóteses de Saint-Venant sobre a torção pura das barras são os casos particulares dessas hipóteses mais gerais que permitem estudar uma série dos novos problemas de resistência e estabilidade das hastes com paredes delgadas [24].

Seção em forma de arco

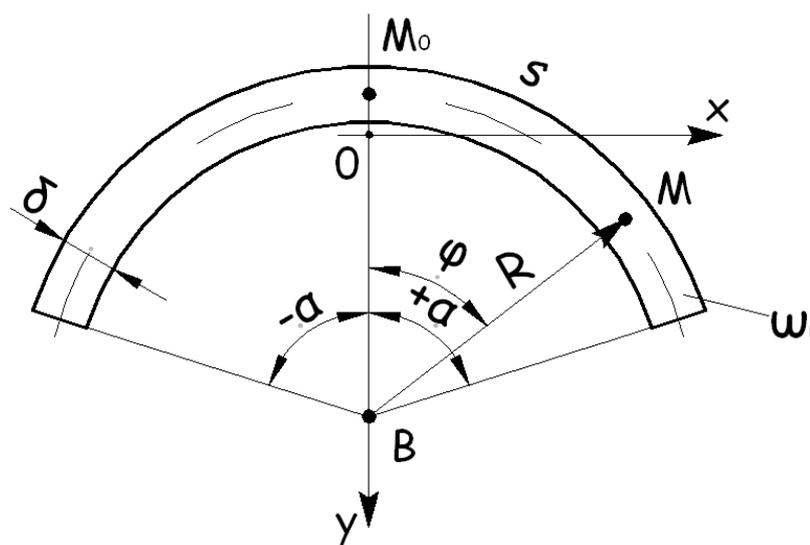


Figura C.10 - Seção em forma de arco [24]

R - raio do arco da guia da seção

δ - espessura da parede da seção

α - a metade do ângulo central

Escolha-se o pólo B da área setorial auxiliar no centro geométrico do arco de circunferência (figura C.10). Começo da contagem da área ω_B é no ponto M_0 (cruzamento do eixo de simetria com a guia). O ângulo central determinado como φ define no contorno o ponto M com a coordenada atual s e considerando o eixo O_y o eixo da simetria da seção, pode-se escrever:

$$s = R \cdot \varphi, \quad dF = R \cdot \delta \cdot d\varphi$$

$$x = R \cdot \sin \varphi, \quad y = b_y - R \cdot \cos \varphi, \quad \omega_B = R^2 \cdot \varphi \quad (\text{C-29})$$

Segundo C-29 têm-se os valores dos momentos de inércia centrífugos:

$$J_{\omega_B x} = \int_F x \cdot \omega_B dF = R^4 \delta \int_{-\alpha}^{+\alpha} \varphi \sin \varphi \cdot d\varphi \quad (\text{C-30})$$

$$J_{\omega_B y} = \int_F y \cdot \omega_B dF = R^3 \delta \int_{-\alpha}^{+\alpha} (b_y - R \cos \varphi) \varphi \cdot d\varphi \quad (\text{C-31})$$

No momento de inércia $J_{\omega_B x}$ a expressão em integral é uma função par, então o integral vai ser diferente de zero. No momento de inércia $J_{\omega_B y}$ a expressão em integral é uma função ímpar. O integral da função ímpar em um intervalo simétrico em relação a ponto zero é igual a zero.

Então:

$$J_{\omega_B x} = 2R^4 \delta (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) \quad (\text{C-32})$$

$$J_{\omega_B y} = 0 \quad (\text{C-33})$$

$$\alpha_x = a_x - b_x = \frac{1}{J_x} \int_F \omega_B y \cdot dF = \frac{J_{\omega_B y}}{J_x} \quad (\text{C-34})$$

$$\alpha_y = a_y - b_y = -\frac{1}{J_y} \int_F \omega_B x \cdot dF = \frac{J_{\omega_B x}}{J_y} \quad (\text{C-35})$$

Considerando $b_x = 0$ obtêm-se:

$$\alpha_x = a_x = 0 \quad (\text{C-36})$$

$$\alpha_y = -\frac{J_{\omega_B x}}{J_y} = -\frac{2R^4 \delta}{J_y} (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) \quad (\text{C-37})$$

Igualdade $\alpha_x = 0$ mostra que centro de flexão encontra-se no eixo da simetria. A distância entre centro de flexão até o centro geométrico B do arco determina-se através da formula (C-37).

Calcula-se o momento da inércia J_y . Considera-se que as tensões principais σ distribuem-se uniformemente pela espessura da parede.

Então:

$$J_y = \int_F x^2 dF \quad (\text{C-38})$$

Substituindo em C-38 os valores de x e dF segundo as expressões (31)

e integrando obtêm-se:

$$J_y = R^3 \cdot \delta \cdot \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin^2 \varphi \cdot d\varphi = R^3 \cdot \delta (\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha) \quad (\text{C-39})$$

Então:

$$\alpha_y = -2R \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} \quad (\text{C-40})$$

Segundo C-40 a distância entre centro de flexão até o centro geométrico B do arco determina-se em função do ângulo α (quando o ângulo central é 2α). Os valores das coordenadas a_y para os diferentes α estão na tabela 4:

Tabela C.1 - Os valores do ângulo α

α	30°	60°	90°	120°	150°	180°
a_y	-1,004R	-1,117R	-1,274R	-1,436R	-1,609R	-2R

Da tabela C.1 é evidente que centro de flexão encontra-se fora da seção.

Caso $\alpha = 180^\circ$ o seja no caso do tubo com paredes delgadas fissurado pela geratriz – o centro de flexão encontra-se na distância de um diâmetro $D = 2R$ do centro geométrico O no lado contrário da fissura (figura C.11).

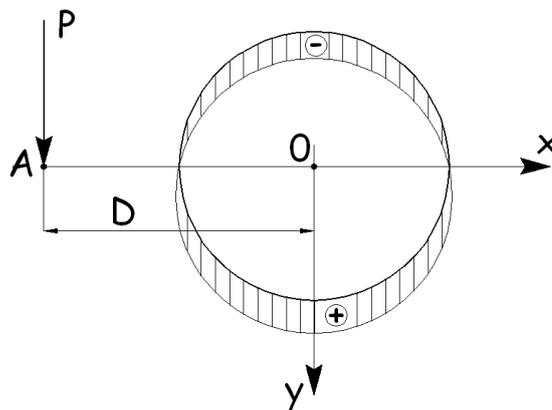


Figura C.11 - Estado de tensões no caso de flexão [24]

Fixando as extremidades do tubo (para não permitir flexão e deslocamento angular) e aplicando no médio do vão uma carga transversal concentrada, estado das tensões e deformações do tubo vai depender da posição da carga no plano da seção transversal. Se a carga passa pelo centro da flexão, então o tubo vai sofrer só flexão transversal (figura C.11). Se a carga não passa pelo centro da flexão, por exemplo, no caso da ação do peso próprio do tubo (a carga passa pelo centro da gravidade da seção, (figura C.12)), então o tubo vai estar em condições de

resistência composta: de flexão (figura C.11) e de torção (figura C.13) ao mesmo tempo.

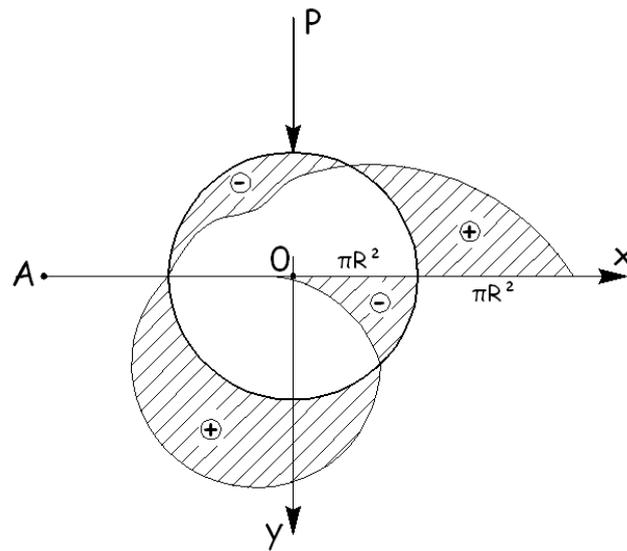


Figura C.12 - Estado de tensões no caso da ação do peso próprio [24]

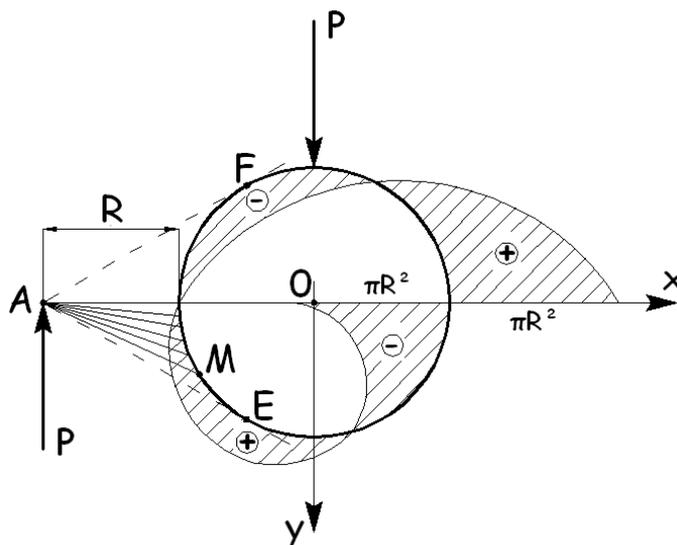


Figura C.13 - Estado de tensões no caso de torção [24]

Na seção transversal de tubo além das tensões da flexão, que agem segundo a lei das seções planas, surgem as tensões adicionais de torção, que pode-se definir segundo a lei das áreas setoriais.

Na figura C.14 esta mostrada a diagrama com ação conjunta da flexão e torção:

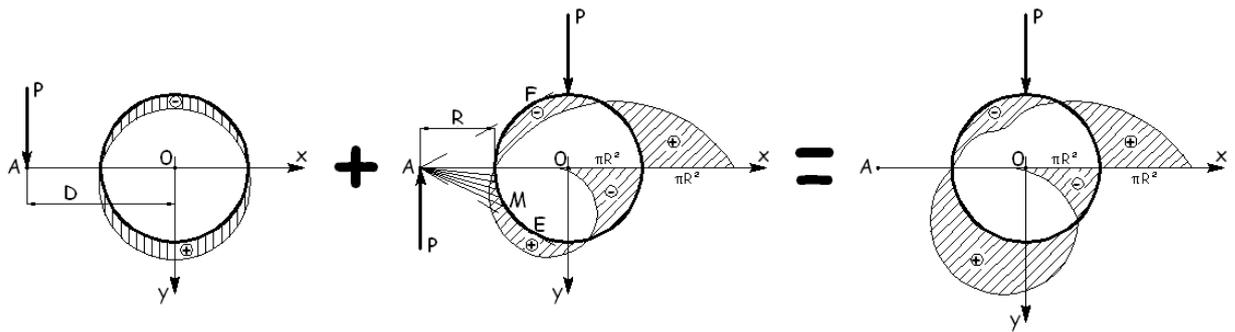


Figura C.14 - Estado de tensões no caso de flexo-torção [24]

Da figura C.14 nota-se que na seção transversal do tubo há três pontos nos quais as tensões de torção são iguais a zero. Estes pontos não estão na mesma reta que significa deplanação da seção. As tensões σ_{ω} assumem os valores máximos (absolutos) nos pontos E e F (sem contar os pontos da fissura), onde o raio-vetor, que descreve a área ω é o mesmo que a tangente a guia. No ponto da fissura a tensão σ_{ω} rompe-se por causa de deslocamento livre das extremidades longitudinais.

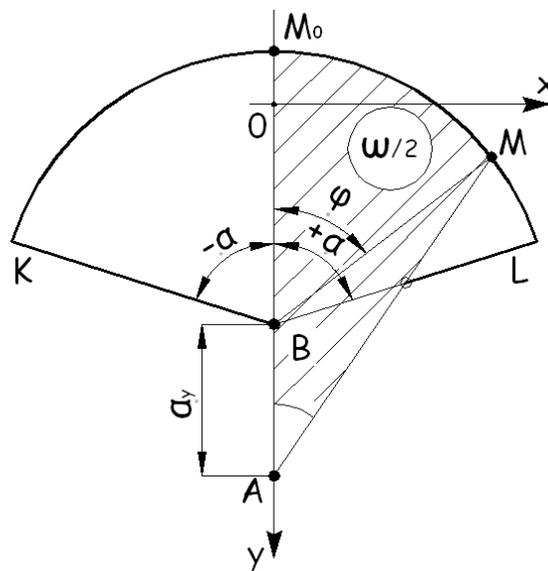


Figura C.15 - Diagrama das áreas setoriais principais [24]

Na seção circular considerada a expressão para a diagrama das áreas setoriais principais é a seguinte (figura C.15):

$$\omega = R \cdot (\alpha_y \cdot \sin \varphi + R \cdot \varphi) \quad (\text{C-41})$$

Nessa expressão α_y conserva o seu próprio sinal. Para o momento da inércia setorial temos a expressão:

$$J_\omega = \int_F \omega^2 dF \quad (\text{C-42})$$

$$\begin{aligned} J_\omega &= \int_F \omega^2 dF = R^3 \delta \int_{-\alpha}^{+\alpha} (\alpha_y \sin \varphi + R \cdot \varphi)^2 d\varphi = \\ &= \frac{2}{3} R^2 \delta \cdot \left[\alpha^3 - \frac{6 \cdot (\sin \alpha - \alpha \cdot \cos \alpha)^2}{\alpha - \sin \alpha \cdot \cos \alpha} \right] \end{aligned} \quad (\text{C-43})$$

Substituindo nesta expressão $\alpha = \pi$ o momento da inércia fica:

$$J_\omega = \frac{2}{3} R^5 \delta \pi \cdot (\pi^2 - 6) \quad (\text{C-44})$$

Sabendo o valor de $\omega(\alpha)$, pode-se deduzir a expressão para o momento setorial estático da parte cortada da seção. Assume-se que a direção positiva é a direção de relógio.

Da figura 32 para a parte cortada MK tem-se:

$$S_\omega = \int_F \omega \cdot dF = R^2 \delta \int_{-\alpha}^{\varphi} (\alpha_y \sin \varphi + R \cdot \varphi) \cdot d\varphi \quad (\text{C-45})$$

Substituindo nesta expressão $\alpha = \pi$ tem-se a expressão S_ω para o tubo fissurado:

$$S_\omega = R^2 \delta \int_{-\pi}^{\varphi} (-2 \sin \varphi + \varphi) \cdot d\varphi =$$

$$= R^3 \delta \cdot \left(2 \cos \varphi + \frac{\varphi^2}{2} - 2,93 \right) \quad (\text{C-46})$$

Diagrama dos momentos setoriais estáticos calculados pela expressão C-46 está mostrado na figura C.16:

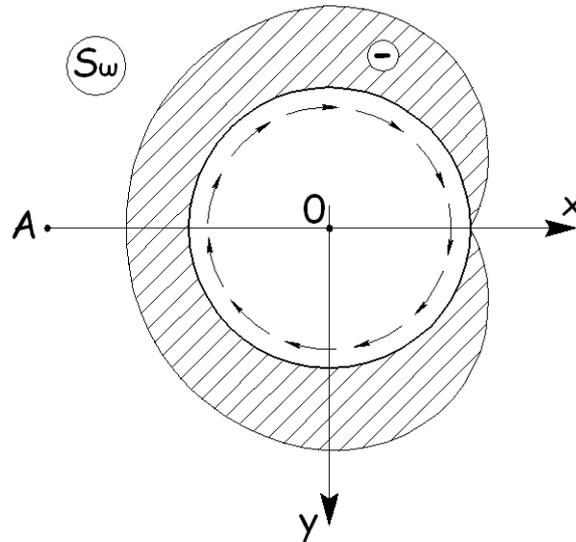


Figura C.16 - Diagrama dos momentos setoriais estáticos [24]

Nesta figura nota-se que no caso da torção as tensões tangenciais proporcionais a S_{ω} , assumem os valores máximos nos dois pontos da seção transversal.

$$\alpha_x = a_x - b_x = \frac{1}{J_x} \int_F \omega_B y \cdot dF = \frac{J_{\omega_B y}}{J_x} \quad (\text{C-47})$$

$$\alpha_y = a_y - b_y = -\frac{1}{J_y} \int_F \omega_B x \cdot dF = -\frac{J_{\omega_B x}}{J_y} \quad (\text{C-48})$$

$$J_{\omega} = \int_F \omega^2 dF \quad (\text{C-49})$$

As expressões C-47 e C-48 para o cálculo das coordenadas do centro da torção e expressão C-49 para o cálculo do momento setorial de inércia são expressões generalizadas: nos casos particulares a espessura da seção transversal pode-se variar.

Até agora foi considerado que a espessura de tubo o valor permanente. Os resultados obtidos podem ser generalizados para o caso, quando a seção transversal compõe-se dos sectores da espessura variável mais têm o eixo da simetria comum (figura C.17).

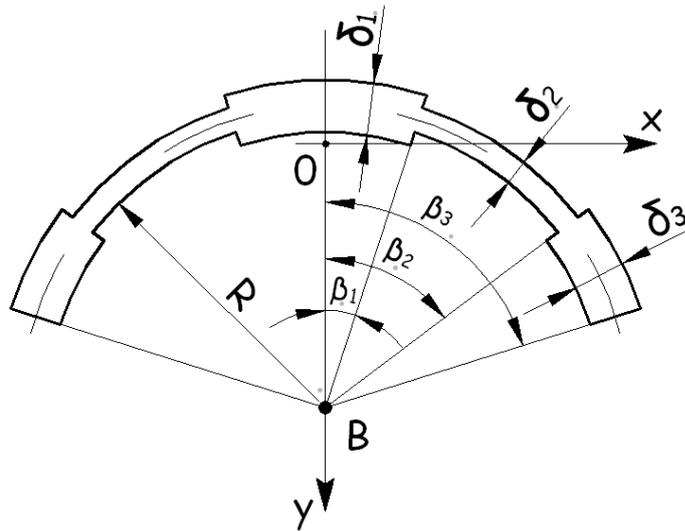


Figura C.17 - Seção transversal do tubo com a espessura da parede variável [24]

Tem-se o sector qualquer k , cuja espessura é δ_k . Este sector está restringido pelos raios, que compõem com o eixo da simetria os ângulos β_{k-1} e β_k . O sector equivalente estará do outro lado do eixo de simetria (figura C.18).

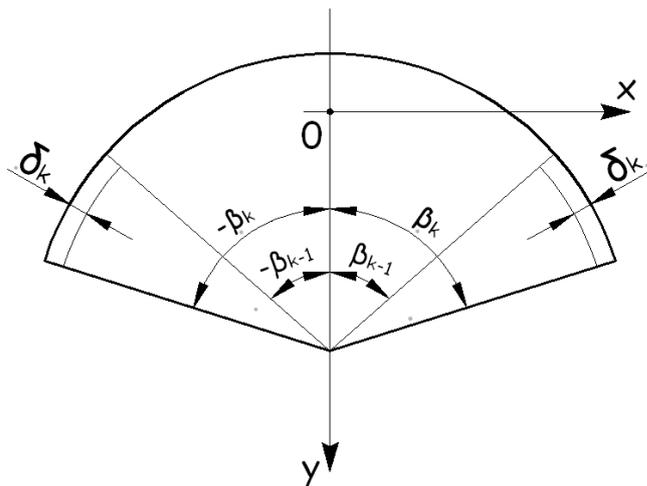


Figura C.18 - O sector k da seção transversal [24]

Daqui adiante considera-se, que o sector entre os ângulos $-\beta_k$ e $+\beta_k$ tem a espessura positiva igual a $+\delta_k$. O sector entre os ângulos $-\beta_{k-1}$ e $+\beta_{k-1}$ tem a espessura negativa igual a $-\delta_k$.

Etão a expressão para o sector k (da exp. C-30) fica:

$$\begin{aligned} J_{\omega_B x} &= \int_F x \cdot \omega_B dF = R^4 \delta_k \cdot \left(\int_{-\beta_k}^{+\beta_k} \varphi \sin \varphi \cdot d\varphi - \int_{-\beta_{k-1}}^{+\beta_{k-1}} \varphi \sin \varphi \cdot d\varphi \right) = \\ &= 2R^4 \delta_k \cdot [(\sin \beta_k - \beta_k \cos \beta_k) - (\sin \beta_{k-1} - \beta_{k-1} \cos \beta_{k-1})] \quad (C-50) \end{aligned}$$

e da expressão (C-39):

$$J_y = \int_F x^2 dF = R^3 \delta_k \cdot [(\beta_k - \sin \beta_k \cos \beta_k) - (\beta_{k-1} - \sin \beta_{k-1} \cos \beta_{k-1})] \quad (C-51)$$

Somado os valores obtidos por índice k desde 1 até n , onde n - numero dos sectores, que têm a mesma espessura, tem-se a expressão para as coordenadas do centro de flexão:

$$\begin{aligned} \alpha_y &= -\frac{J_{\omega_B x}}{J_y} = \\ &= -2R \frac{\sum_{k=1}^n [(\sin \beta_k - \beta_k \cos \beta_k) - (\sin \beta_{k-1} - \beta_{k-1} \cos \beta_{k-1})] \cdot \delta_k}{\sum_{k=1}^n [(\beta_k - \sin \beta_k \cos \beta_k) - (\beta_{k-1} - \sin \beta_{k-1} \cos \beta_{k-1})] \cdot \delta_k} \quad (C-52) \end{aligned}$$

De forma análoga tem-se a expressão para o momento setorial de inércia [24]:

$$J_{\omega} = 4R^5 \left\{ \frac{\frac{1}{6} \sum_{k=1}^n (\beta_k^3 - \beta_{k-1}^3) \delta_k - \left\{ \sum_{k=1}^n [(\sin \beta_k - \beta_k \cos \beta_k) - (\sin \beta_{k-1} - \beta_{k-1} \cos \beta_{k-1})] \cdot \delta_k \right\}^2}{\sum_{k=1}^n [(\beta_k - \sin \beta_k \cos \beta_k) - (\beta_{k-1} - \sin \beta_{k-1} \cos \beta_{k-1})] \cdot \delta_k} \right\} \quad (C-53)$$