2
O Modelo

2.1.
Descrição

O objetivo final deste trabalho é mostrar como uma trajetória não fixa para a taxação em uma determinada economia pode se estabelecer como resultado ótimo frente a choques de taxas de juros reais que acompanhem o ciclo econômico. O resultado de Barro (1979) nos mostra que, diante de variações nas taxas de juros que impliquem variações no serviço da dívida, o comportamento ótimo de uma Autoridade Fiscal deverá ser a manutenção do nível de taxação constante. Isto pois, assumindo-se que parte dos impostos existentes em certa economia seja distorciva e que não haja possibilidade de não pagamento das obrigações de dívida, é ótimo, em termos do bem estar da sociedade, deixar que déficit e superávit fiscais se alternem ao longo do tempo em conjunto com a taxa de juros e o ciclo econômico, enquanto se mantém o nível de taxação em patamar pré-estabelecido de forma a não interferir no plano ótimo de consumo da população. Desta forma, o resultado esperado neste trabalho conta com a modificação de uma das hipóteses em relação ao trabalho de Barro (1979): aqui permitimos que exista a possibilidade de repúdio total ou de parte da dívida soberana de certa economia. Com esta modificação, esperamos que não se possa acumular um déficit fiscal indefinidamente e nem esperar que este se reverta ao longo do tempo em um superávit fiscal. Ao contrário, passa a existir a possibilidade de haver uma crise de confiança de acordo com o tamanho do déficit fiscal acumulado, e a Autoridade Fiscal deverá preferir variar a carga tributária na economia, e realizar um esforço fiscal em termos de arrecadação excedente, no caso de querer sinalizar que o déficit fiscal é transitório e não escalará no sentido de se tornar insustentável e exigir um *default*. O que queremos dizer é que, não somente será levado em conta que é desejável que a dívida de certa economia não se torne insustentável, como também que a dívida não se aproxime perigosamente de seu limite de sustentabilidade. Assim, não permitiremos aqui que a dívida possa flutuar de forma estacionariamente livre em torno de certo patamar, já que em determinado nível ela se torna insustentável.

O modelo que construiremos terá as seguintes principais características:

(i) Um único agente: a Autoridade Fiscal;
(ii) Tempo infinito;
(iii) Estrutura dinâmica;
(iv) Um componente estocástico;
(v) Hipóstese básica: permite dívida em *default*.

O agente do nosso modelo é a Autoridade Fiscal de certa economia, ou o Governo. Este deverá escolher, a cada período do tempo, o esforço fiscal a ser realizado, na forma de superávit primário como porcentagem do PIB. Nosso modelo é construído em tempo infinito, e ao escolher o esforço fiscal/PIB, o Governo se depara a cada período do tempo com duas variáveis de estado presentes na economia: o estoque de dívida como porcentagem do PIB, e uma variável que agrega a taxa de juros em vigor e o crescimento do PIB no período. O serviço da dívida como porcentagem do PIB, a ser cumprido no período em questão, está atrelado à taxa de juros e ao crescimento do PIB.

A estrutura dinâmica de nosso modelo vem da seguinte construção: definimos que o estoque de dívida como proporção do PIB, em determinado período do tempo, seja composto por (i) o estoque de dívida como proporção do PIB acumulado até o período anterior; (ii) o serviço da dívida como proporção do PIB exercido no período anterior além de relação entre o PIB do período anterior e o PIB do período corrente; e (iii) o esforço fiscal como proporção do PIB realizado no período anterior. Portanto, a cada momento do tempo, sobre um determinado estoque de dívida/PIB acrescenta-se um novo pagamento de juros/PIB além da diferença entre o PIB dos dois períodos e um novo alívio na forma de superávit primário/PIB. A soma destes três componentes nos fornece o tamanho da dívida/PIB no período seguinte.

Em relação às variáveis do nosso modelo a cada instante de tempo, temos a decisão de esforço fiscal (superávit primário) como proporção do PIB por parte de nosso agente (Governo), o estoque de dívida/PIB dado e o serviço da dívida/PIB mais a relação entre o PIB dos dois períodos consecutivos também dado. Neste problema, a decisão de esforço fiscal como proporção do PIB se coloca como nossa variável de controle (a ser determinada otimamente). O estoque de dívida/PIB segue a dinâmica acima explicada e se coloca como uma variável de estado determinística no problema de decisão do Governo. O componente estocástico de nosso modelo está associado ao serviço da dívida como porcentagem do PIB e ao crescimento do PIB entre os períodos. Como mencionado anteriormente, estabelecemos que o serviço da dívida (em %PIB) está associado, de forma única, à taxa de juros em vigor no instante de tempo em questão. Do ponto de vista do agente desta economia, a taxa de juros é um elemento exógeno fixado a cada período do tempo pela Autoridade Monetária visando responder a choques que se abatam sobre a economia, acompanhando o ciclo econômico. Assim, o serviço da dívida (em %PIB) no nosso problema se coloca como uma variável de estado estocástica aos olhos do Governo (nosso único agente). O crescimento do PIB entre os períodos também não é controlado pela Autoridade Fiscal. Assim, o elemento estocástico no nosso modelo leva em conta o pagamento de juros sobre a dívida e a relação entre o PIB de dois períodos consecutivos na estrutura recursiva para se obter a dívida/PIB no período seguinte.

Ainda, nosso modelo permite ao Governo decidir em favor de um *default* parcial ou total da dívida. Admitimos assim que exista um limite de endividamento que o Governo pode assumir, ou seja, um teto para o tamanho da dívida/PIB que, se ultrapassado, indica situação de insolvência e consequente *default* das obrigações junto a credores. Este teto de sustentabilidade fiscal pode teoricamente ser definido da seguinte maneira: denotando D_t o estoque de dívida no período t, P_t os pagamentos realizados ao(s) credor(es), temos que se os pagamentos totais a cada período não podem exceder um montante máximo P_t^{max}, um regime fiscal será sustentável se

$$D_{t-1} \leq \sum_{s=0}^{\infty} \frac{P_{t+s}^{\max}}{(1+r_{t+s})^{s+1}} \qquad (1)$$

onde r é a taxa de juros. No nosso modelo, normalizaremos esse limite para a sustentabilidade da dívida/PIB para zero, conforme ilustra a representação que se segue. Portanto, em um eixo que mede a dívida/PIB total acumulada por um Governo, consideramos que quanto mais afastada de zero esta se encontrar, mais longe de uma situação de insolvência esta reside.

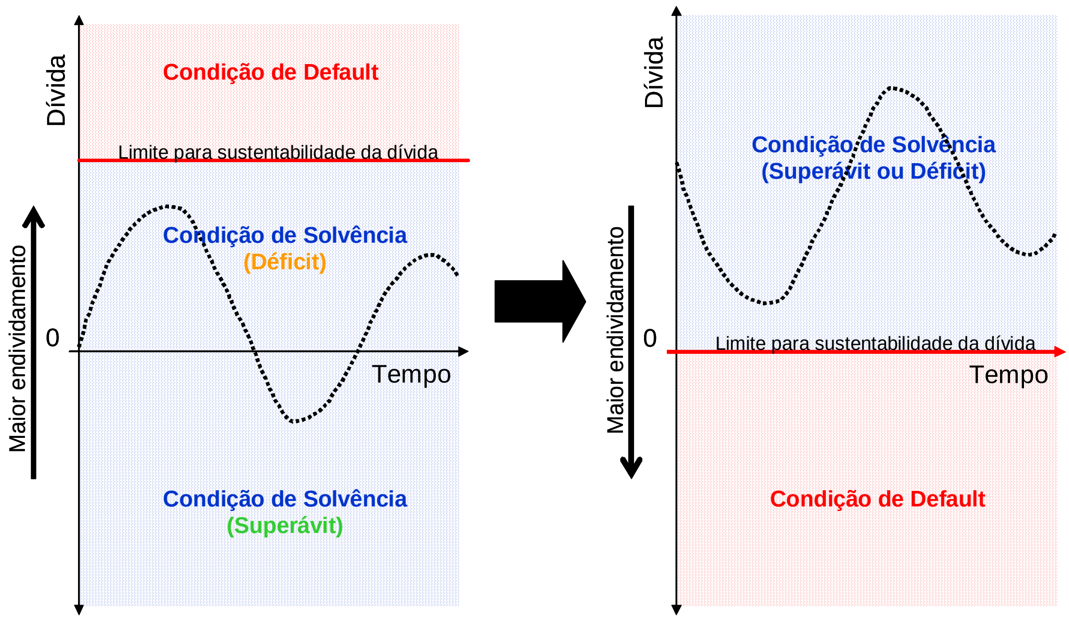

Figura 2 – Diagrama: O Limite de Sustentabilidade da Dívida– Fonte: Autor

Por fim, precisamos delinear o critério de escolha do agente de nosso modelo na decisão do esforço fiscal ótimo (em %PIB) a cada período do tempo. Assumimos assim dois custos que podem ser atribuídos ao Governo (que representa os interesses da sociedade nesta economia). O primeiro deles se refere a um custo proporcional ao montante de dívida/PIB não sustentável que o Governo pode deixar acumular. Este custo mede as incoveniências de uma situação de insolvência em relação à dívida/PIB desta economia, conforme já foi proposto em diversos trabalhos, como em Calvo (1988)[5]. Estas inconveniências

[5] O trabalho de Calvo (1988) estipula que o custo associado ao repúdio da dívida é proporcional ao tamanho da dívida repudiada: $\alpha\beta \cdot D$, onde α é uma constante de proporcionalidade, β é o percentual da dívida repudiada e D é o montante de dívida.

podem incluir, entre outras, custos associados a perda de credibilidade do Governo, a redução do fluxo de capitais que poderiam financiar esta economia, a maiores taxas de juros decorrentes de um aumento no risco-país, por exemplo. O segundo custo que é atribuído ao Governo no nosso modelo se refere a um custo proporcional ao tamanho do esforço fiscal (em %PIB) que o Governo escolhe realizar a cada período. A realização de um esforço fiscal, na forma de superávit primário por parte do Governo, é custosa no sentido de que implica, por exemplo, menores gastos sociais ou investimentos públicos dos quais a sociedade retira bem-estar, envolve negociações políticas desgastantes na formulação de um orçamento público junto ao Congresso, ou ainda, como evidenciado no caso do Brasil, elevação da carga tributária na economia na maior parte das vezes através de impostos distorcivos. Assim, o Governo deverá realizar a escolha do esforço fiscal ótimo (em %PIB) a cada período levando em conta estes dois tipos de custos associados a sua escolha. Surge daí um *trade-off* envolvendo a decisão ótima: se por um lado o Governo deseja não correr o risco de ultrapassar o limite de solvência de sua dívida/PIB para não incorrer no custo de um *default*, por outro lado teria que incorrer nos custos de realizar esforço fiscal. Por outro lado, se deseja deixar de se ver obrigado a arcar com custos associados à realização de esforço fiscal, pode se deixar levar a uma situação perigosamente próxima ao limite de solvência de sua dívida/PIB e incorrer futuramente em custos ligados à insustentabilidade de sua dívida/PIB.

2.2. Modelagem Proposta

Conforme a descrição apresentada anteriormente, mostraremos agora a maneira escolhida para a modelagem do problema.

2.2.1. Parâmetros

Nosso modelo contará com os seguintes parâmetros:

(i) $\beta \in (0,1)$: representa a taxa intertemporal de desconto;

(ii) k : representa um fator multiplicativo em relação ao custo de realizar esforço fiscal;

(iii) Δ: representa um fator multiplicativo em relação ao custo de ter parte ou o total da dívida em *default*.

2.2.2. Variáveis

As variáveis presentes em nosso modelo são:

(i) ω_t: agrega serviço da dívida como proporção do PIB e crescimento do PIB – choque aleatório que ocorre em t (associado à taxa de juros);

(ii) u_t: esforço fiscal como proporção do PIB – variável de escolha em t (superávit primário decidido em t e realizado em t+1);

(iii) x_t: estoque de dívida/PIB – variável de estado em t (posição), em que a dívida/PIB é medida em relação à sua distância do limite de sustentabilidade normalizado para zero;

(iv) c_t: penalidade – "custo" da Autoridade Fiscal pago em t.

Apresentaremos a seguir a maneira pela qual estas variáveis são definidas na estrutura de nosso modelo. Em relação às condições iniciais de nosso problema, temos que no instante inicial de tempo t_0 relevante para esta economia, são dados ω_0 (um determinado serviço de dívida (em %PIB) e crescimento do PIB vinculados à taxa de juros que vigora na economia em t_0) e $x_0 \geq 0$ (um determinado montante de dívida/PIB em posição de solvência na economia).

Nossa variável estocástica que mede o serviço da dívida e o crescimento do PIB a cada período segue uma determinada distribuição de probabilidade, portanto temos:

$$\omega_t \sim F_t(\cdot) \qquad (2)$$

Em relação ao esforço fiscal como proporção do PIB a ser determinado otimamente, exigiremos apenas que este seja limitado tanto superiormente como inferiormente, em linha com seu significado econômico.

Portanto temos:

$$\underline{u} \leq u_t \leq \overline{u} \qquad (3)$$

onde $\underline{u}$ e $\overline{u}$ são definidos exogenamente.

O estoque da dívida/PIB é definido conforme a seguinte estrutura dinâmica:

$$x_{t+1} = f(x_t, u_t, \omega_t) = x_t + u_t + \omega_t \;\; \forall t = 0,1,2,... \qquad (4)$$

Por fim, a penalidade do Governo a cada período é definida da seguinte forma:

$$c_t = \begin{cases} \frac{k}{2} u_t^2 & \text{se } x_{t+1} \geq 0 \\ \frac{k}{2} u_t^2 + \frac{\Delta}{2} x_{t+1}^2 & \text{se } x_{t+1} < 0 \end{cases} \qquad (5)$$

onde a penalidade pode assumir dois formatos: representar o custo associado a se realizar esforço fiscal caso se esteja em situação de solvência da dívida ($x_{t+1} \geq 0$) ou representar, além do custo associado a se realizar esforço fiscal, um custo associado à insustentabilidade da dívida ou parte desta caso se esteja em situação de insolvência ($x_{t+1} < 0$).

2.2.3. O Problema da Autoridade Fiscal

No modelo proposto, o problema da Autoridade Fiscal será minimizar o valor presente das penalidades a cada período do tempo, num problema com horizonte infinito, escolhendo para isso a cada instante a variável de controle u_t, o esforço fiscal (em %PIB). Podemos ainda encarar nosso problema como maximizar a penalidade com sinal invertido:

$$F(x_t, x_{t+1}, \omega_t) = -\frac{k}{2}(x_{t+1} - x_t - \omega_t)^2 - \frac{\Delta}{2} x_{t+1}^2 \cdot \chi_{\{x_{t+1}<0\}} \quad (6)$$

onde foi feita a substituição:

$$u_t = x_{t+1} - x_t - \omega_t \qquad (7)$$

e

$$\chi_{\{x_{t+1}<0\}} = \begin{cases} 1 & \text{se } x_{t+1} < 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (8)$$

O problema da Autoridade Fiscal no modelo proposto pode assim ser escrito como:

$$\begin{aligned} v(x_0, \omega_0) = \ & \underset{\Gamma(x_t, \omega_t)}{\text{Max}} \sum_{t=0}^{\infty} \int_{W^t} \beta^t \cdot F(x_t, x_{t+1}, \omega_t) Q^t(\omega_t, d\omega_t) \\ & \text{s.a.} \quad (x_t, x_{t+1}, \omega_t) \in \Omega \ \text{ para } \ \forall t \geq 0 \qquad (9) \\ & \qquad (x_0, \omega_0) \in X \times W \ \text{ dado} \end{aligned}$$

onde:

$W \subseteq \mathbb{R}$ é o espaço da variável aleatória de estado ω_t para dado instante t, e $W^t = W \times W \times ... \times W$ t vezes;

$X \subseteq \mathbb{R}$ é o espaço da variável determinística de estado x_t para dado instante t;

$\Omega \subseteq X \times X \times W = \mathbb{R}^3$ é o espaço da tripla (x_t, x_{t+1}, ω_t) para dado instante t;

Γ é definida por

$\Gamma(x_t, \omega_t) = \{x_{t+1} \in X;\ (x_t, x_{t+1}, \omega_t) \in \Omega\} = [x_t + \omega_t + \underline{u}, x_t + \omega_t + \overline{u}]$;

F é definida por $\mathrm{F} : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ em (6).

Sendo $(W,\mathcal{W})$ um espaço mensurável, temos que $Q:W\times\mathcal{W}\to[0,1]$ é a função de transição tal que :

(a) para cada $\omega_t\in W$, $Q(\omega_t,\cdot)$ é uma medida de probabilidade sobre $(W,\mathcal{W})$;

(b) para cada $A\in\mathcal{W}$, $Q(\cdot,A)$ é uma função $\mathcal{W}$-mensurável.

A interpretação para $Q\ (\omega_t,d\omega_t)$ é a de que $Q(a,A)$ é a probabilidade de que no próximo período o choque ω_{t+1} caia dentro do conjunto *A*, dado que o choque corrente é *a*. Isto é, $Q(a,A)=\Pr\{\omega_{t+1}\in A|\omega_t=a\}$. Por fim, $Q^t(\omega_t,d\omega_t)=Q\times Q\times...\times Q$, t vezes. Com isso temos que os choques podem guardar uma relação de correlação temporal entre si, não necessariamente precisando ser independentemente distribuídos no tempo.

2.2.4. Abordagem Metodológica

Resolvendo o problema da Autoridade Fiscal conforme exposto em (9), estaremos encontrando uma sequência de variáveis da forma:

$$\Gamma(x_t,\omega_t)=\{x_{t+1}\in X\subseteq\mathbb{R};(x_t,x_{t+1},\omega_t)\in\Omega\subseteq\mathbb{R}^3\},\ \forall t=0,1,2,... \qquad (10)$$

ou seja, dadas as condições iniciais ω_0 e $x_0\geq 0$ em $t=0$, pela dinâmica descrita em (7) encontraremos os esforços fiscais (superávit) ótimos a cada período do tempo.

Conforme exposto, o problema da Autoridade Fiscal é um problema de programação dinâmica estocástica, e encontrar sua solução como desejado exige o uso de técnicas específicas.

Uma primeira abordagem metodológica possível para resolver este tipo de problema é o uso de Equações de Euler. Sob esta metodologia, deve-se encontrar a condição de primeira ordem do problema e supor que a solução desejada seja uma solução interior. Contudo, estas duas exigências mostram que resolver nosso problema através de Equações de Euler não seria a maneira apropriada neste caso. Em primeiro lugar, encontrar condições de primeira ordem no nosso problema exigiria diferenciar a função valor, que no nosso caso é uma função contínua porém não diferenciável duas vezes em $x_{t+1} = 0$ devido à utilização da função indicadora (8). Em segundo lugar, este método procuraria apenas por soluções interiores, enquanto também poderiamos desejar obter soluções de canto.

Assim, uma segunda abordagem metodológica se mostra possível e desejada no nosso caso. Vamos utilizar técnicas de resolução do nosso problema de maximização que se inserem nas perspectivas tratadas pelo Método de Bellman. A seção seguinte deste trabalho busca inteirar o leitor desta metodologia.

Vale aqui uma observação a respeito da resolução do problema proposto. Conforme a modelagem sugerida, temos que a resolução via Equações de Euler não se apresenta como uam possibilidade viável. As Equações de Euler permitiriam enxergar como variações nos parâmetros modificariam a solução de forma analítica, permitindo a realização de exercícios de estática comparativa de forma direta. Ao adotar a hipótese de que a dívida possa estar em condição de *default* no trabalho, representando essa nova situação como uma mudança de estado na economia não suave através da função indicadora (8), estamos dando um passo na direção de tornar nosso modelo mais realista. Contudo, pagamos o preço de apenas poder resolver o problema central deste trabalho através do Método de Bellman, que obterá a solução numericamente e não mais analiticamente. Com este passo deixamos de obter a solução teórica exata, para em substituição obter uma solução que contém um erro de aproximação, ainda que no caso deste trabalho o erro seja pequeno o suficiente para poder ser considerado despresóvel (garantimos teoricamente a convergência da solução para a solução exata). Ainda, os exercícios de estática compartaiva serão realizados através de simulações para a obtenção de novas soluções que são comparáveis entre si, e não mais obtidos analíticamente. Este esforço de tratar a possibilidade de *default* da dívida como uma mudança de estado na economia (mais realista) tem como contraponto estes custos.

2.3. O Método de Bellman

Esta seção tem o objetivo de familiarizar o leitor com o Método de Bellman, através do que buscaremos resolver o problema da Autoridade Fiscal de nosso modelo. O breve apanhado aqui descrito é majoritariamente baseado em Ljungqvist & Sargent (2000), Bertsekas (1978), Bertsekas & Shreve (1978), Stokey & Lucas (1989) e Judd (1998). Demandas por maior aprofundamento ou rigor dos temas abordados poderão ser supridas nestas fontes.

2.3.1. Caso Determinísitico

Seja $\beta \in (0,1)$ um fator de desconto. Suponha que se deseja escolher uma sequência infinita de variáveis de controle $\{u_t\}_{t=0}^{\infty}$ que maximize o seguinte problema sequencial:

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, u_t) \qquad (11)$$

sujeito a $x_{t+1} = g(x_t, u_t)$ com x_0 dado. Vamos assumir que $r(x_t, u_t)$ é uma função côncava e que o conjunto $\{(x_{t+1}, x_t) : x_{t+1} \leq g(x_t, u_t), u_t \in \mathbb{R}^k\}$ seja convexo e compacto.

A programação dinâmica busca uma função política h invariante no tempo que mapeie o estado x_t no controle u_t, de forma que a sequência $\{u_s\}_{s=0}^{\infty}$ gerada pela iteração das duas funções

$$u_t = h(x_t) \qquad (12)$$

$$x_{t+1} = g(x_t, u_t) \qquad (13)$$

começando da condição inicial x_0 em $t = 0$ resolva o problema original. Uma solução na forma das equações (12) e (13) é chamada de solução recursiva.

Para se encontrar a função política *h* é preciso conhecer uma outra função *V(x)* que expresse o valor ótimo do problema original, começando de uma condição inicial arbitrária $x \in X$. Esta função é chamada função valor. Em particular, podemos definir

$$V(x_0) = \max_{\{u_s\}_{s=0}^{\infty}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, u_t) \qquad (14)$$

onde novamente a maximização é sujeita a $x_{t+1} = g(x_t, u_t)$ com x_0 dado.

Obviamente, não podemos esperar que seja possível conhecer *V(* x_0 *)* antes de resolvermos o problema. Mas se conhecessemos *V(* x_0 *)*, a função política *h* poderia ser computada resolvendo para cada $x \in X$ o problema

$$\max_u \{r(x,u) + \beta V(\tilde{x})\} \ (15)$$

onde a maximização é sujeita a $\tilde{x} = g(x,u)$ com *x* dado.

Portanto, foi possível trocar o problema original em que se procurava uma sequência infinita de variáveis de controle que maximiza a expressão (11) por um problema em que se procura o valor ótimo da função *V(x)* e uma função *h* que resolvam o contínuo de problemas de maximização (15) – um problema para cada valor de $x \in X$. Nosso problema se tornou encontrar conjuntamente *V(x),h(x),* que são relacionadas através da equação de Bellman

$$V(x) = \max_u \{r(x,u) + \beta V[g(x,u)]\} \qquad (16)$$

O argumento que maximiza o lado direito da equação (16) é a função política *h(x)* que satisfaz

$$V(x) = r[x, h(x)] + \beta V\{g[x, h(x)]\} \qquad (17)$$

A equação (16) ou (17) é a equação funcional a ser resolvida para o par de funções desconhecidas *V(x),h(x)*.

Métodos para resolver a equação de Bellman são baseados em estruturas matemáticas que variam em detalhe dependendo da natureza precisa das funções *r* e *g*. Seus resultados indicam em comum que:

(i) a equação funcional (16) possui uma única solução estritamente côncava;

(ii) esta solução é aproximada no limite em que se faz $j \to \infty$ via iterações em

$$V_{j+1}(x) = \max_{u}\{r(x,u) + \beta V_j(\tilde{x})\} \qquad (18)$$

sujeito a $\tilde{x} = g(x,u)$ com x dado, começando em qualquer condição inicial V_0 limitada e contínua;

(iii) existe uma função política ótima única e invariante no tempo da forma $u_t = h(x_t)$, onde h é escolhida para maximizar o lado direito de (16). Com uma função política invariante no tempo, pode-se impor uma única regra de decisão para todos os períodos.

2.3.2.
Caso Estocástico

Vamos agora considerar uma modificação do caso anterior para permitir incerteza: vamos acrescentar choques ao problema anterior não-estocástico. Vamos modificar a equação de transição e considerar agora o problema de maximizar

$$E_0 \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t r(x_t, u_t) \qquad (19)$$

com $\beta \in (0,1)$ e sujeito a

$$x_{t+1} = g(x_t, u_t, \omega_{t+1}) \qquad (20)$$

com x_0 dado em $t = 0$ e onde ω_t é uma sequência de variáveis aleatórias independente e identicamente distribuídas com função de distribuição de probabilidade acumulada $F(\omega) = \{\omega_t \leq \omega\}$ para todo t; $E_t(\omega)$ denota a esperança matemática da variável aleatória ω dada a informação conhecida até t. Temos que no momento de tempo t, assume-se que x_t é conhecida, mas $x_{t+j}, j \geq 1$ não é conhecida em t. Isto é, ω_{t+1} é realizado em (t+1) após u_t ter sido escolhido em t. Neste problema, a incerteza é adicionada assumindo-se que x_t segue uma equação a diferenças aleatória.

Este problema continua a ter uma estrutura recursiva, que vem tanto da separabilidade aditiva da função objetivo (19) em pares (x_t, u_t), como também da equação a diferenças que caracteriza a lei de transição (20). Em particular, variáveis de controle datadas de t afetam retornos $r(x_s, u_s)$ para $s \geq t$, mas não antes disto. Esta característica implica que a metodologia de programação dinâmica permanece apropriada para o tratamento do problema.

O problema atual é maximizar a expressão (19) sujeita a equação (20) pela escolha de uma política ou plano contingente $u_t = h(x_t)$. A equação de Bellman anterior (16) agora fica sendo:

$$V(x) = \max_u \{r(x,u) + \beta E[V[g(x,u,\omega)] | x]\} \qquad (21)$$

onde $E[V[g(x,u,\omega)] | x] = \int V[g(x,u,\omega)] dF(\omega)$ e onde *V(x)* é o valor ótimo do problema iniciando em $x \in X$ em $t = 0$.

A solução *V(x)* da equação (21) pode ser computada iterando-se

$$V_{j+1}(x) = \max_u \left\{ r(x,u) + \beta E\left[V_j \left[g(x,u,\omega) \right] | x \right] \right\} \qquad (22)$$

começando-se em qualquer condição inicial V_0 contínua e limitada. Sob determindas condições de regularidade, obtemos versões das mesmas três propriedades listadas anteriormente.

2.4. Resolução do Modelo

Existem diferentes métodos computacionais para resolver problemas de programação dinâmica (equações funcionais do tipo (21)). O método que utilizaremos no nosso problema é a "Iteração da Função Valor". O método consiste em construir uma sequência de funções valor e funções política associadas. Esta sequência é criada via iteração da seguinte expressão, iniciando com uma condição inicial $V_0 = 0$ e continuando a iteração até que V_j tenha convergido:

$$V_{j+1}(x) = \max_{u}\{r(x,u) + \beta V_j(\tilde{x})\} \qquad (23)$$

sujeito a $\tilde{x} = g(x,u)$ com x dado.

No nosso caso, temos o seguinte problema sequencial (9) reescrito aqui:

$$v(x_0,\omega_0) = \underset{x_{t+1}}{Max} \sum_{t=0}^{\infty} \int_{W^t} \beta^t F(x_t, x_{t+1}, \omega_t) Q^t(\omega_t, d\omega_t) \qquad (24)$$

sujeito a $(x_t, x_{t+1}, \omega_t) \in \Omega$ para todo $t \geq 0$, com $(x_0, \omega_0) \in X \times W$ dado, onde

$$F(x_t, x_{t+1}, \omega_t) = -\frac{k}{2}(x_{t+1} - x_t - \omega_t)^2 - \frac{\Delta}{2} x_{t+1}^2 \cdot \chi_{\{x_{t+1}<0\}} \qquad (6)$$

Desta forma, a equação de Bellman para o nosso modelo é:

$$TV(x,y) = \max_{\{y \in X; (x,y,\omega) \in \Omega\}} F(x,y,\omega) + \beta \int_W V(y,\omega')Q(\omega, d\omega') \qquad (25)$$

onde T é o operador de Bellman e y é a variável x no período seguinte. A iteração da função valor consiste em construir uma sequência $(v_n)_{n\geq 0}$ de forma que:

$$v_{n+1}(x,\omega) = Tv_n(x,\omega), \forall (x,\omega) \in X \times W, \forall n \geq 0 \qquad (26)$$

Através deste método encontramos uma função valor que aproxima a função valor verdadeira do problema e a respectiva função política. Contudo, devemos nos lembrar que a solução de interesse no nosso caso é encontrar a função política do problema, ou seja, a sequência de variáveis $\{x_{t+1}\}_{t\geq 0}$ que é o argumento que maximiza a função valor e que nos fornecerá a informação relevante que buscamos: a sequência de esforços fiscais ótimos $\{u_t\}_{t\geq 0}$.

O teorema 3.8 de Lucas & Stockey (1989) nos garante que a função política ótima obtida através da iteração da função valor converge para a função política verdadeira do problema.