7
Referências Bibliográficas

Abell, M. L.; Braselton, J. P. **Differential Equations with Maple V**. Ap Professional Academic Press Limited, Cambridge, Massachusetts, USA, 1994.

American Concrete Institute Committee 318, "**Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-02) and Commentary (318R-02)**", American Concrete Institute, Farmington Hills, Mich., 2002.

Aktan, A. E.; Karlsson, B. I.; Sozen, M. A. **Stress-Strain Relationships of Reinforced Concrete Bars Subjected to Large Strain Reversals**. Civil Engineering Studies, Structural Research Series Nº 397, University Illinois, Urbana, 1973.

Andrade, E. Q. **Instabilidade e Vibrações de Colunas Esbeltas sobre Base Elástica**. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, PUC/Rio, 1993.

Bazant, Z. P.; Cedolin, L. **Stability of Structures – Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage theories**. Oxford University Press, New York, 1991.

Bresler, B.; Gilbert, P. H. **Tie Requirements for Reinforced Concrete Columns**. ACI Journal. Vol. 58, No. 5, p. 555-570, 1961.

Claeson, C. **Behavior of Reinforced High Strength Concrete Columns**. Chalmers University of Technology, 1995.

CEB 1995. **Comite Euro-Internacional du Beton**, CEB-FIP Model Code 1995.

Char, B. W.; Geddes, K. O.; Connet, G. H.; Leong, B. L.; Monagan, M. B.; Wett, S. M. **A Tutorial Introduction to Maple V** . Springer-Verlag, 1992.

Chen, W. F.; Atsuta, T. **Theory of Beam-Columns**. McGraw-Hill, First Edition, Vol. 1, Singapore, 1975.

Cusson, D.; Paultre, P. **High-Strength Concrete Columns Confined by Retangular Ties**. Journal of Structural Engineering. Vol. 120, Nº 3, p. 783-804, 1994.

Cusson, D.; Paultre, P. **Stress-Strain Model for Confined High-Strength Concrete**. Journal of Structural Engineering. Vol. 121, Nº 3, p. 468-477, 1995.

Dym, C. L.; Shames, I. H. **Solid Mechanics - A Variational Approach** . McGraw-Hill-Kogakusha, Ltd . Tokyo, 1973.

EUROCODE 2. **Design of Concrete Structures: General Rules and Rules for Buldings**, 2001.

Fusco, P. B. **Estruturas de Concreto**. Editora Guanabara dois S. A., Rio de Janeiro, 1986.

Guimarães, G. B. **Comportamento e Projeto de Estruturas de Concreto Armado**. Notas de aula, PUC/Rio, 1995.

Gonçalves, P. B. **Instabilidade Elástica de Colunas**. Notas de aula, PUC/Rio, 1994.

Hetényi, M. **Beams on Elastic Foundation**. The University of Michigan Press, Ann Arbor, 1946.

James, F. P. **Influence of Ties on the Behavior of Reinforced Concrete Columns**. Journal of the American Concrete Institute. Proceedings Vol. 61, No. 5, p. 521-537, 1964.

Kaar, P. H.; Corley, W. G. **Properties of Confined Concrete for design of Earthquake Resistant Structures**. Proc. 6th World Conf. on Earthquake Engrg. Indian Society of Earthquake, 1977.

Keidel, C. **Pilares em Estruturas Indeslocáveis - Comparação entre Normas** . Projeto Final de Curso, EEUFRJ, Rio de Janeiro, 2000.

King, J. W. H. **The Effect of Lateral Reinforcement in Reinforced Concrete Columns** . The Structural Engeneer, Vol. 24, Jul. p. 355-388, 1946.

King, J. W. H. **Further Notes on Reinforcement Concrete Columns**. The Structural Engeneer, Vol. 24, Nov. p. 609-616, 1946.

Leonhardt, F.; Mönnig, E. **Construções de Concreto**. Livraria Interciência, Vol. 1, Primeira Edição, Rio de Janeiro, 1977.

Leonhardt, F.; Mönnig, E. **Construções de Concreto**. Livraria Interciência, Vol. 3, Primeira Edição, Rio de Janeiro, 1978.

Macgregor, J. G. **Reinforced Concrete.** Prentice Hall, Third Edition, New Jersey, 1997.

Mander, J. B.; Priestley, M. J. N.; Park R. **Seismic Design of Bridge Piers**. Report 84-2, Departament of Civil Engineering, University of Canterbury, Christchurch, Nueva Zelanda, 1984.

Mander, J. B.; Priestley, M. J. N.; Park R. **Observed Stress-Strain Behavior of Confined Concrete**. Journal Structural Engenner, ASCE, Vol. 114, No. 8, p. 1827-1849, 1988[a].

Mander, J. B.; Priestley, M. J. N.; and Park R. **Theoretical Stress-Strain Model for Confined Concrete**. Journal Structural Engenner, ASCE, Vol. 114, No. 8, p. 1804-1826, 1988b.

Mau, S. T.; EL-Mabsout, M. **Inelastic Buckling of Reinforcing Bars**. Journal of Engineering Mechanics, Vol. 115, No. 1, p. 1-17, 1989.

Mau, S. T. **Effect of Tie Spacing on Inelastic Buckling of Reinforcing Bars**. Structural Journal, Vol. 87, No. 6, ACI, p. 671-677, 1990.

Moehle, J. P.; Cavanagh, T. **Confinement Effectiveness of Crossties in RC**. Journal of Structural Engineering, Vol. 111, Nº 10, p. 2105-2120, 1985.

Monti, G.; Nuti, C. **Nonlinear Cyclic Behavior of Reinforcing Bars Including Buckling**. Journal of Structural Engineering, Vol. 118, No. 12, p. 3268-3284, 1992.

NBR-6118. **Projeto e execução de obras de concreto armado.** 1978.

NBR-6118. **Projeto e execução de obras de concreto armado.** 2003.

Pantazopoulou, S. J. **Detailing for Reinforcement Stability in RC Members**. Journal of Structural Engineering, Vol. 124, Nº 6, ASCE, p. 623-632, 1998.

Papia, M.; Russo, G.; Zingone, G. **Instability of Longitudinal Bars in RC Members**. Journal of Structural Engineering, Vol. 114, Nº 2, p. 445-461, 1988.

Papia, M.; Russo, G. **Compressive Concrete Strain at Buckling of Longitudinal Reinforcement**. Journal of Structural Engineering, Vol. 115, No. 2, p. 382- 397, 1989.

Park, R.; Paulay, T. ***Reinforced Concrete Structures***. John Wiley & Sons, New York, 1975.

Pfister, J. F. **Influence of Ties on the Behavior of Reinforced Concrete Columns**. Journal of the American Concrete Institute, Vol. 61, No. 5, p. 521-536, 1964.

Queiroga, M. V. M. **Análise Experimental de Pilares de Concreto de Alto Desempenho Submetidos à Compressão Simples**. Dissertação de Mestrado apresentada à Escola de Engenharia de São Carlos, EESC – USP, 1999.

Queiroga, M. V. M.; Giongo, J. S. **Resistência e Ductilidade de Modelos de Pilares de Concreto de Alta Resistência Submetidas à Compressão Simples**. IV Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, SP, 2000.

Razvi, S.; Saatcioglu, M. **Strength and Deformability of Confined High-Strength Concrete Columns**. ACI Structural Journal, Vol. 91, Nº 6, p. 678-687, 1994.

Razvi, S.; Saatcioglu, M. **Confinement Model for Normal Strength and High Strength Concrete Columns**. Res. Rep., Ottawa - Carleton Earthquake Engrg. Res. Ctr., Dept. of Civ. Engrg., Univ. of Otawa, Canada, 1995.

Razvi, S.; Saatcioglu, M. **Confinement Model for High-Strength Concrete**. Journal of Structural Engineering, mar. , p. 281-289, 1999.

Rosas, R. **Instabilidade das Estruturas** – *Notas de Aula***.** Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2000.

Saatcioglu, M.; Razvi, S. R. **Strength and Ductility of Confined Concrete.** Journal of Structural Engineering, Vol. 118, No. 6, pp. 1590-1607, 1992.

Salmon, C. G. ; Johnson, J. E. **Steel Structures: Design and Behavior,** Haper Collins, 3a ed, EUA, 1990.

Scribner, C. F. **Reinforcement Buckling in Reinforced Concrete Flexural Members**. ACI Journal, Vol. 83, No. 6, pp. 966-973, 1986.

Scott, B. D. **Stress-Strain Relationships for Confined Concrete: Retangular Sections**. Res. Rep. Nº 80-6, Dept. of Civ. Engrg., Univ. of Canterbury, Christchurch, New Zealand, 1980.

Scott, B. D.; Park, R.; Priestley, J. N. **Stress-Strain Behavior of Concrete Confined by Overlapping Hoops at Low and High Strain Rates** . ACI Journal, Vol. 79, No. 2, pp. 13-27, 1982.

Sheikh, S. A.; Toklucu, M. T. **Reinforced Concrete Columns Confined by Circular Spirals and Hoops**. ACI Structural Journal, Vol. 90, Nº 5, p. 542-553, 1993.

Sheikh, S. A.; Uzumeri, S. M. **Strength and Ductility of Tied Concrete Columns**. Journal of Structural Division, Vol. 106, Nº ST5, ASCE, pp. 1079-1102, 1980.

Sheikh, S. A.; Uzumeri, S. M. **Analytical Model for Concrete Confinement in Tied Columns** . Journal of Structural Division, Vol. 108, Nº 12, ASCE, pp. 2703-2722, 1980.

Sheikh, S. A. ; Yeh, C. C. ; Khoury, S. **Concrete Strength in Tied Columns**. ACI Structural Journal, Vol. 87 Nº 4, p. 379-385, 1990.

Simitses, G. J. **An Introduction to the Elastic Stability of Structures**. Robert E. Krieger Company Malabar, Second Edition, Florida, 1986.

Süssekind, J. C. **Curso de Concreto .** Editora Globo**,** Vol. I**,** Primeira Edição, Rio de Janeiro, RJ, Porto Alegre, RS, 1980.

Süssekind, J. C. **Curso de Concreto .** Editora Globo**,** Vol. II**,** Rio de Janeiro, RJ, Porto Alegre, RS, 1984.

Timoshenko, S. P.; Gere, J. M. **Theory of Elastic Stability**. McGraw-Hill, Second Edition, Singapure, 1961.

Vallenas, J.; Bertero, V. V.; Popov, E. P. **Concrete Confined by Retangular Hoops and Subjected to Axial Loads***.* Report No. UCB/EERC-77/13, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley – Ca, 1977.

Watson, S.; Zahn, F. A.; Park, R. **Confining Reinforcement for Concrete Columns .** Journal of Structural Engineering, Vol. 120, No. 6, pp. 1798-1824, 1994.

Zahn, F. A. **Design of Reinforced Concrete Bridge Columns for Strength and Ductility**. Res. Rep. Nº 86-7, Dept. of Civ. Engrg., Univ. of Canterbury, Christchurch, New Zealand, 1986.

8
Apêndice

8.1.
Introdução

Neste apêndice apresentam-se os programas para o cálculo das matrizes de rigidez, o cálculo dos autovalores e o método utilizado para o cálculo dos caminhos pós-críticos a partir das equações não-lineares de equilíbrio.

Apresentam-se também todos os cálculos referentes aos exemplos apresentados no Capítulo 5.

8.2.
Programas

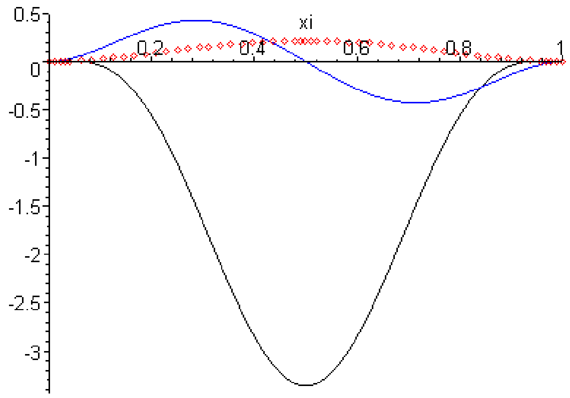
Programa I.1 - Cálculo das matrizes de rigidez da coluna, dos autovalores para o caso linear e equações não-lineares de equilíbrio considerando-se o campo de deslocamentos (3.29) - Apoios Discretos.

```
> restart:with(linalg):with(plots):with(LinearAlgebra):
Váriáveis do Programa
> # N    -  Número de termos considerados na expansão modal ( número de graus de
            liberdade)
> # wt  -  Campo de deslocamentos
> # a||i -  Amplitude do deslocamento - Para o cálculo dos autovalores esse termo é
           tirado da expressão do campo de deslocamentos e executa-se o programa
           normalmente.
> # m  -  Número de apoios laterais
> wt:=0:N:=15:
> for i from 1 by 1 to N do
>    wt||i(xi):=a||i*(-i*Pi*xi+i*Pi*(2+(-1)^i)*xi^2-i*Pi*(1+(-1)^i)*xi**3+sin(i*Pi*xi)):
>    dwt||i(xi):=diff(wt||i(xi),xi):ddwt||i(xi):=diff(wt||i(xi),xi$2):
>     wt:=wt+wt||i(xi):
> end do:
```

Gráfico das Funções para N=1, 2 e 3

>plot([wt1(xi),wt2(xi),wt3(xi),wt(xi)],xi=0..1,color=[red,blue,black,green],

style=[point,line,line,line]);



<u>Integração ao Longo da Barra para Obtenção das Matrizes de Rigidez Elástica e Rigidez Geométrica</u>

As matrizes de rigidez elástica K (no caso representada por Kf, para lembrar a energia de flexão), rigidez geométrica (das tensões) Kg, podem ser obtidas respectivamente, das energias de deformação e das tensões para a carga de direção constante= trabalho das cargas V3.

A variação do array é de acordo com o número de graus de liberdade considerados**.**

```
>KGt:=array(1..N,1..N):KGtn:=array(1..N,1..N):KFt:=array(1..N,1..N):KFtn:=array(1..N,1..
N):Mt:=array(1..N,1..N):
> for i from 1 by 1 to N do
>   for j from 1 by 1 to N do
>      #Energia da Força axial
>      KGt[i,j]:=int(1/2*dwt||i(xi)*dwt||j(xi),xi=0..1);      #Parcela quadrática
>      KGtn[i,j]:=int(1/8*dwt||i(xi)*dwt||j(xi)*dwt||i(xi)*dwt||j(xi),xi=0..1);
>      #Energia de Flexão
>      KFt[i,j]:=int(1/2*ddwt||i(xi)*ddwt||j(xi),xi=0..1);  #Parcela Quadrática
>
                    KFtn[i,j]:=int(1/2*ddwt||i(xi)*ddwt||j(xi)*dwt||i(xi)*dwt||j(xi)+1/8*ddwt||i(xi)*dd
        wt||j(xi)*dwt||i(xi)*dwt||j(xi)*dwt||i(xi)*dwt||j(xi),xi=0..1):
>    od:
> od:
```

Cálculo da energia de deformação dos estribos, autovalores e equações não-lineares de equilíbrio

```
> for Nmolas from 1 by 1 to 5 do
>    KFtm||Nmolas:=array(1..N,1..N):
>    for i from 1 by 1 to N do
>       for j from 1 by 1 to N do
>          KFtm||Nmolas[i,j]:=0;
>       od:
>    od:
>    for m from 1 to Nmolas do
>       xm||m:=1/(Nmolas+1)*m;
>       for i from 1 by 1 to N do
>          for j from 1 by 1 to N do
>
              KFtm||Nmolas[i,j]:=KFtm||Nmolas[i,j]+eta*1/2*subs(xi=xm||m,wt||i(xi))*subs(xi
              =xm||m,wt||j(xi));
>          od:
>       od:
>    od:
>    #Parcela quadrática do funcional
>    KFtQ||Nmolas:=evalm(KFt+KFtm||Nmolas);
>    A||Nmolas:=multiply(inverse(KGt),KFtQ||Nmolas):
>    Gamma||Nmolas:=eigenvals(A||Nmolas);
>    Autov||Nmolas:=[eigenvectors(A||Nmolas)];
>    KGtNL:=evalm(KGt+KGtn);
>    KFt2||Nmolas:=evalm(KFtQ||Nmolas+KFtn):
>    EPT||Nmolas:=evalm(KFt2||Nmolas-Gamma*KGtNL);
>    #Equações não-lineares de Equilíbrio
>    for f from 1 to N do
>       EqL||Nmolas||f:=0;
>    od:
>    for g from 1 to N do
>       for h from 1 to N do
>          EqL||Nmolas||g:=EqL||Nmolas||g+diff(EPT||Nmolas[g,h],a||g);
>       od:
```

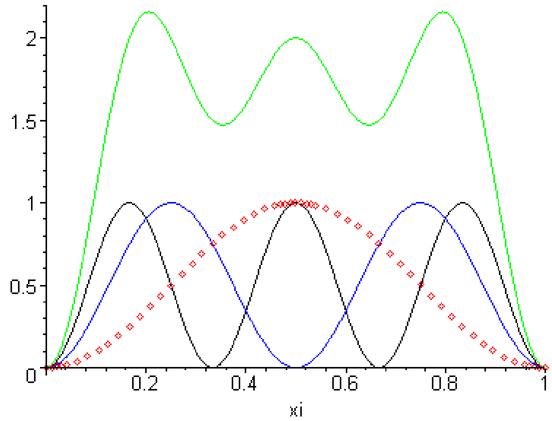
```
>     od:
> od:
```

Programa I.2 - Cálculo das matrizes de rigidez da coluna, dos autovalores para o caso linear e das equações não-lineares de equilíbrio considerando-se o campo de deslocamentos (3.28) e apoios Discretos

```
> restart:with(linalg):with(plots):with(LinearAlgebra):
> wt:=0:N:=15:
> for i from 1 by 1 to N do
>        wt||i(xi):=1/2*a||i*(1-cos(2*Pi*i*xi)):
>       dwt||i(xi):=diff(wt||i(xi),xi):ddwt||i(xi):=diff(wt||i(xi),xi$2):
>        wt:=wt+wt||i(xi):
> end do:
```

Gráficos das Funções para N=1, 2 e 3

```
>plot([wt1(xi),wt2(xi),wt3(xi),wt(xi)],xi=0..1,color=[red,blue,black,green],
style=[point,line,line,line]);
```



A partir deste ponto, o trecho do programa para o cálculo das matrizes de rigidez, dos autovalores e das equações não-lineares de equilíbrio é o mesmo do Programa I.1.

Programa I.3 - Cálculo das matrizes de rigidez da coluna sobre base elástica, dos autovalores para o caso linear e das equações não-lineares de equilíbrio considerando-se o campo de deslocamentos (3.28).

```
> restart:with(linalg):with(plots):with(LinearAlgebra):
> wt:=0:N:=6:
> for i from 1 by 1 to N do
>    wt||i(xi):=1/2*a||i*(1-cos(2*Pi*i*xi)):
>    dwt||i(xi):=diff(wt||i(xi),xi):ddwt||i(xi):=diff(wt||i(xi),xi$2):
>    wt:=wt+wt||i(xi):
> end do:
```

Integração ao Longo da Barra para Obtenção das Matrizes de Rigidez Elástica e Rigidez Geométrica

```
> N:=1:
KGt:=array(1..N,1..N):KGtn:=array(1..N,1..N):KFt:=array(1..N,1..N):KFtn:=array(1..N,1..N)
:Mt:=array(1..N,1..N):
> for i from 1 by 1 to N do
>    for j from 1 by 1 to N do
>       # Energia da Força Axial
>       KGt[i,j]:=int(1/2*dwt||i(xi)*dwt||j(xi),xi=0..1); # Parcela Quadrática
>       KGtn[i,j]:=int(1/8*dwt||i(xi)*dwt||j(xi)*dwt||i(xi)*dwt||j(xi),xi=0..1); #Parcela Não-
        Linear
>       #Energia de Flexão
>       KFt[i,j]:=int(1/2*ddwt||i(xi)*ddwt||j(xi),xi=0..1); # Parcela Quadrática
>
                    KFtn[i,j]:=int(1/2*ddwt||i(xi)*ddwt||j(xi)*dwt||i(xi)*dwt||j(xi)+1/8*ddwt||i(xi)*dd
          wt||j(xi)*dwt||i(xi)*dwt||j(xi)*dwt||i(xi)*dwt||j(xi),xi=0..1); #Parcela Não-Linear
>    od:
> od:
```

Inclusão da base elástica

```
> KFtm:=array(1..N,1..N):
>   for i from 1 by 1 to N do
>      for j from 1 by 1 to N do
>         KFtm[i,j]:=int(eta*1/2*subs(L=1,wt||i(xi))*subs(L=1,wt||j(xi)),xi=0..1):
>      od:
>   od:
>  print(KFtm):
```

```
> KFtQ:=evalm(KFt+KFtm):
> A:=multiply(inverse(KGt),KFtQ);
> Gamma:=eigenvals(A);
> Autov:=eigenvectors(A):
> KGtNL:=evalm(KGt+KGtn):
> KFt2:=evalm(KFtQ+KFtn):
> EPT:=evalm(KFt2-lambda*KGtNL):
> #Equações não-lineares de Equilíbrio
> for f from 1 to N do
>    EqL||f:=0;
> od:
>  for g from 1 to N do
>     for h from 1 to N do
>        EqL||g:=EqL||g+diff(EPT[g,h],a||g):
>     od:
>  od:
```

Programa I.4 - Cálculo das matrizes de rigidez da coluna sobre base elástica, dos autovalores para o caso linear e das equações não-lineares de equilíbrio considerando-se para o campo de deslocamentos uma combinação de funções simétricas e antissimétricas.

```
> restart:with(linalg):with(plots):with(LinearAlgebra):
> wt:=0:N:=6:
> for i from 1 by 1 to N do
>     wt||i(xi):=a||i*(-i*Pi*xi+i*Pi*(2+(-1)^i)*xi^2-i*Pi*(1+(-1)^i)*xi**3+sin(i*Pi*xi)):
>     dwt||i(xi):=diff(wt||i(xi),xi):ddwt||i(xi):=diff(wt||i(xi),xi$2):
>     wt:=wt+wt||i(xi):
> end do:
```

A partir deste ponto, o trecho do programa para o cálculo das matrizes de rigidez, dos autovalores e das equações não-lineares de equilíbrio é o mesmo do Programa I.3.

Programa I.5 - Cálculo das matrizes de rigidez da coluna sobre base elástica, dos autovalores para o caso linear e das equações não-lineares de equilíbrio considerando-se uma imperfeição geométrica inicial para o campo de deslocamentos uma combinação de funções simétricas e antissimétricas, campo de deslocamentos (3.29).

```
> restart:with(linalg): with(plots):
> wt:=0:N:=3:
> for i from 1 by 1 to N do
>    wt||i(xi):=a||i*(-i*Pi*xi+i*Pi*(2+(-1)^i)*xi^2-i*Pi*(1+(-1)^i)*xi**3+sin(i*Pi*xi)):
>    dwt||i(xi):=diff(wt||i(xi),xi):ddwt||i(xi):=diff(wt||i(xi),xi$2):
>    wto||i(xi):=ao||i*(-i*Pi*xi+i*Pi*(2+(-1)^i)*xi^2-i*Pi*(1+(-1)^i)*xi**3+sin(i*Pi*xi)):
>    dwto||i(xi):=diff(wto||i(xi),xi):ddwto||i(xi):=diff(wto||i(xi),xi$2):
>    wt:=wt+wt||i(xi)+wto||i(xi):
> end do:
```

Integração ao Longo da Barra para Obtenção das Matrizes de Rigidez Elástica e Rigidez Geométrica

```
KGt:=array(1..N,1..N):KGtn:=array(1..N,1..N):KFt:=array(1..N,1..N):KFtn:=array(1..N,1..N)
:Mt:=array(1..N,1..N):
> for i from 1 by 1 to N do
>    for j from 1 by 1 to N do
>       #Energia da Força Axial
>       KGt[i,j]:=int(1/2*dwt||i(xi)*dwt||j(xi)+dwt||i(xi)*dwto||j(xi),xi=0..1); # Parcela Quadrática
>
        KGtn[i,j]:=int(1/8*dwt||i(xi)*dwt||j(xi)*dwt||i(xi)*dwt||j(xi)+1/2*dwt||i(xi)*dwt||j(xi)*dwt||i(xi)*dwto||j
        (xi)+3/4*dwt||i(xi)*dwt||j(xi)*dwto||i(xi)*dwto||j(xi)+1/2*dwt||i(xi)*dwto||j(xi)*dwto||i(xi)*dwto||j(xi)
        ,xi=0..1); #Parcela Não-Linear
>       #Energia de Flexão
>       KFt[i,j]:=int(1/2*ddwt||i(xi)*ddwt||j(xi),xi=0..1); # Parcela Quadrática
>
        KFtn[i,j]:=int(1/2*(ddwt||i(xi)*ddwt||j(xi)*dwt||i(xi)*dwt||j(xi)+1/4*ddwt||i(xi)*ddwt||j(xi)*
        dwt||i(xi)*dwt||j(xi)*dwt||i(xi)*dwt||j(xi)+dwto||i(xi)*dwto||j(xi)*ddwt||i(xi)*ddwt||j(xi)+1/4
        *dwto||i(xi)*dwto||j(xi)*dwto||i(xi)*dwto||j(xi)*ddwt||i(xi)*ddwt||j(xi)+1/4*dwt||i(xi)*dwt||j
        (xi)*dwt||i(xi)*dwt||j(xi)*ddwto||i(xi)*ddwto||j(xi)+dwt||i(xi)*dwt||j(xi)*dwt||i(xi)*ddwt||j(xi
        )*ddwt||i(xi)*dwto||j(xi)+dwt||i(xi)*dwt||j(xi)*dwt||i(xi)*ddwto||j(xi)*ddwto||i(xi)*dwto||j(xi
        )+2*dwt||i(xi)*ddwt||j(xi)*ddwt||i(xi)*dwto||j(xi)+dwt||i(xi)*dwto||j(xi)*dwto||i(xi)*dwto||j(
        xi)*ddwt||i(xi)*ddwt||j(xi)+3/2*dwt||i(xi)*dwt||j(xi)*ddwt||i(xi)*ddwt||j(xi)*dwto||i(xi)*dwto
        ||j(xi)+1/2*dwt||i(xi)*dwt||j(xi)*dwt||i(xi)*dwt||j(xi)*ddwt||i(xi)*ddwto||j(xi)+dwt||i(xi)*dwt|
```

```
|j(xi)*dwto||i(xi)*dwto||j(xi)*ddwto||i(xi)*ddwto||j(xi)+ddwt||i(xi)*dwt||j(xi)*dwt||i(xi)*ddw
to||j(xi)+2*dwt||i(x)*dwt||j(xi)*dwt||i(xi)*ddwt||j(xi)*dwto||i(xi)*ddwto||j(xi)+2*ddwt||i(xi)*
dwt||j(xi)*dwto||i(xi)*ddwto||j(xi)+5/2*dwt||i(xi)*dwt||j(xi)*ddwt||i(xi)*dwto||j(xi)*dwto||i(
xi)*ddwto||j(xi)+dwt||i(xi)*dwto||j(xi)*dwto||i(xi)*dwto||j(xi)*ddwt||i(xi)*ddwto||j(xi)),xi=0
..1); #Parcela Não-Linear
>   od:
> od:
```

Inclusão da base elástica

```
> KFtm:=array(1..N,1..N):
> for i from 1 by 1 to N do
>   for j from 1 by 1 to N do
>
     KFtm[i,j]:=int(1/2*eta*(wt||i(xi)*wt||j(xi)+2*wto||i(xi)*wt||j(xi)+wto||i(xi)*wto||j(xi)),xi=0
     ..1);
>   od:
> od:
> print(KFtm);
> KFtQ:=evalm(KFt+KFtm):
> A:=multiply(inverse(KGt),KFtQ):
> #Gamma:=eigenvals(A):
> #Autov:=eigenvectors(A):
> KGtNL:=evalm(KGt+KGtn):
> KFt2:=evalm(KFtQ+KFtn):
> EPT:=evalm(KFt2-lambda*KGtNL):
> #Equações de Equilíbrio
> for f from 1 to N do
>    EqL||f:=0;
> od:
> for g from 1 to N do
>    for h from 1 to N do
>      EqL||g:=EqL||g+diff(EPT[g,h],a||g):
>    od:
> od:
```

Programa I.6- Para se considerar apenas funções simétricas no programa 1.5, basta alterar o trecho correspondente ao campo de deslocamentos como a seguir.

```
> restart:with(linalg):with(plots):with(LinearAlgebra):
> wt:=0:N:=3;
> for i from 1 by 1 to N do
>    wt||i(xi):=1/2*(1-cos(2*Pi*i*xi)):wto||i(xi):=1/2*(1-cos(2*Pi*i*xi)):
>    dwt||i(xi):=diff(wt||i(xi),xi):ddwt||i(xi):=diff(wt||i(xi),xi$2):
>    dwto||i(xi):=diff(wto||i(xi),xi):ddwto||i(xi):=diff(wto||i(xi),xi$2):
>     wt:=wt+wt||i(xi)+wto||i(xi):
> end do:
```

Programa I.7- Para considerar-se o caso de emendas das barras da armadura, considerou-se um modelo, onde a coluna é engastada e livre. Assim, calcula-se a matriz A para o cálculo dos pontos (Γ, η) e assim através da solução do problema de autovalores pode-se conhecer estes pontos.

```
> restart:with(linalg):with(plots):with(LinearAlgebra):
> wt:=0:N:=6:
> for i from 1 by 1 to N do
>    wt||i(xi):=(1-cos((2*i-1)*Pi*xi/2)):
>   dwt||i(xi):=diff(wt||i(xi),xi):ddwt||i(xi):=diff(wt||i(xi),xi$2):
>    wt:=wt+wt||i(xi):
> end do:
```

<u>Integração ao Longo da Barra para Obtenção das Matrizes de Rigidez Elástica e Rigidez Geométrica</u>

```
>KGt:=array(1..N,1..N):KGtn:=array(1..N,1..N):KFt:=array(1..N,1..N):KFtn:=array(1..N,1..
N):Mt:=array(1..N,1..N):
> for i from 1 by 1 to N do
>    for j from 1 by 1 to N do
>      # Energia da Força Axial
>      KGt[i,j]:=int(1/2*dwt||i(xi)*dwt||j(xi),xi=0..1); # Parcela Quadrática
>      KGtn[i,j]:=int(1/8*dwt||i(xi)*dwt||j(xi)*dwt||i(xi)*dwt||j(xi),xi=0..1); #Parcela Não-Linear
>      #Energia de Flexão
>      KFt[i,j]:=int(1/2*ddwt||i(xi)*ddwt||j(xi),xi=0..1); # Parcela Quadrática
>
       KFtn[i,j]:=int(1/2*ddwt||i(xi)*ddwt||j(xi)*dwt||i(xi)*dwt||j(xi)+1/8*ddwt||i(xi)*ddwt||j(xi)*d
       wt||i(xi)*dwt||j(xi)*dwt||i(xi)*dwt||j(xi),xi=0..1); #Parcela Não-Linear
>    od:
> od:
```

Inclusão da Base elástica (apoios laterais distribuídos de forma contínua)

```
> KFtm:=array(1..N,1..N):
>  for i from 1 by 1 to N do
>     for j from 1 by 1 to N do
>        KFtm[i,j]:=int(eta*1/2*wt||i(xi)*wt||j(xi),xi=0..1):
>     od:
>  od:
> KFtQ:=evalm(KFt+KFtm):
> A:=multiply(inverse(KGt),KFtQ);
```

Considerando-se seis modos na expansão modal, chega-se a seguinte matriz característica para o cálculo dos autovalores.

$$A := \begin{bmatrix}
\frac{16\left(\frac{\pi^4}{64}+\frac{\eta\,(3\pi-8)}{4\pi}\right)}{\pi^2}, & \frac{8\,(-4+3\pi)\,\eta}{3\pi^3}, & \frac{8\,(-12+5\pi)\,\eta}{5\pi^3}, & \frac{8\,(-12+7\pi)\,\eta}{7\pi^3}, & \frac{8\,(-20+9\pi)\,\eta}{9\pi^3}, & \frac{8\,(-20+11\pi)\,\eta}{11\pi^3} \\
\frac{8\,(-4+3\pi)\,\eta}{27\pi^3}, & \frac{16\left(\frac{81\pi^4}{64}+\frac{\eta\,(9\pi+8)}{12\pi}\right)}{9\pi^2}, & \frac{8\,(4+15\pi)\,\eta}{135\pi^3}, & \frac{8\,(20+21\pi)\,\eta}{189\pi^3}, & \frac{8\,(4+9\pi)\,\eta}{81\pi^3}, & \frac{8\,(28+33\pi)\,\eta}{297\pi^3} \\
\frac{8\,(-12+5\pi)\,\eta}{125\pi^3}, & \frac{8\,(4+15\pi)\,\eta}{375\pi^3}, & \frac{16\left(\frac{625\pi^4}{64}+\frac{\eta\,(15\pi-8)}{20\pi}\right)}{25\pi^2}, & \frac{8\,(-4+35\pi)\,\eta}{875\pi^3}, & \frac{8\,(-28+45\pi)\,\eta}{1125\pi^3}, & \frac{8\,(-12+55\pi)\,\eta}{1375\pi^3} \\
\frac{8\,(-12+7\pi)\,\eta}{343\pi^3}, & \frac{8\,(20+21\pi)\,\eta}{1029\pi^3}, & \frac{8\,(-4+35\pi)\,\eta}{1715\pi^3}, & \frac{16\left(\frac{2401\pi^4}{64}+\frac{\eta\,(21\pi+8)}{28\pi}\right)}{49\pi^2}, & \frac{8\,(4+63\pi)\,\eta}{3087\pi^3}, & \frac{8\,(36+77\pi)\,\eta}{3773\pi^3} \\
\frac{8\,(-20+9\pi)\,\eta}{729\pi^3}, & \frac{8\,(4+9\pi)\,\eta}{729\pi^3}, & \frac{8\,(-28+45\pi)\,\eta}{3645\pi^3}, & \frac{8\,(4+63\pi)\,\eta}{5103\pi^3}, & \frac{16\left(\frac{6561\pi^4}{64}+\frac{\eta\,(27\pi-8)}{36\pi}\right)}{81\pi^2}, & \frac{8\,(-4+99\pi)\,\eta}{8019\pi^3} \\
\frac{8\,(-20+11\pi)\,\eta}{1331\pi^3}, & \frac{8\,(28+33\pi)\,\eta}{3993\pi^3}, & \frac{8\,(-12+55\pi)\,\eta}{6655\pi^3}, & \frac{8\,(36+77\pi)\,\eta}{9317\pi^3}, & \frac{8\,(-4+99\pi)\,\eta}{11979\pi^3}, & \frac{16\left(\frac{14641\pi^4}{64}+\frac{\eta\,(33\pi+8)}{44\pi}\right)}{121\pi^2}
\end{bmatrix}$$

A partir da obtenção da matriz A, pode-se gerar os pontos $(\Gamma \times \eta)$ a partir da seguinte subrotina:

```
> restart:with(linalg):with(plots):with(codegen,fortran):
> A := matrix([[16/Pi^2*(1/64*Pi^4+1/4*eta*(3*Pi-8)/Pi), 8/3/Pi^3*(-4+3*Pi)*eta, 8/5/Pi^3*(-
12+5*Pi)*eta, 8/7/Pi^3*(-12+7*Pi)*eta, 8/9/Pi^3*(-20+9*Pi)*eta, 8/11/Pi^3*(-
20+11*Pi)*eta], [8/27/Pi^3*(-4+3*Pi)*eta, 16/9/Pi^2*(81/64*Pi^4+1/12*eta*(9*Pi+8)/Pi),
8/135/Pi^3*(4+15*Pi)*eta, 8/189/Pi^3*(20+21*Pi)*eta, 8/81/Pi^3*(4+9*Pi)*eta,
8/297/Pi^3*(28+33*Pi)*eta], [8/125/Pi^3*(-12+5*Pi)*eta, 8/375/Pi^3*(4+15*Pi)*eta,
16/25/Pi^2*(625/64*Pi^4+1/20*eta*(15*Pi-8)/Pi), 8/875/Pi^3*(-4+35*Pi)*eta,
8/1125/Pi^3*(-28+45*Pi)*eta, 8/1375/Pi^3*(-12+55*Pi)*eta], [8/343/Pi^3*(-12+7*Pi)*eta,
8/1029/Pi^3*(20+21*Pi)*eta, 8/1715/Pi^3*(-4+35*Pi)*eta,
16/49/Pi^2*(2401/64*Pi^4+1/28*eta*(21*Pi+8)/Pi), 8/3087/Pi^3*(4+63*Pi)*eta,
8/3773/Pi^3*(36+77*Pi)*eta], [8/729/Pi^3*(-20+9*Pi)*eta, 8/729/Pi^3*(4+9*Pi)*eta,
8/3645/Pi^3*(-28+45*Pi)*eta, 8/5103/Pi^3*(4+63*Pi)*eta,
16/81/Pi^2*(6561/64*Pi^4+1/36*eta*(27*Pi-8)/Pi), 8/8019/Pi^3*(-4+99*Pi)*eta],
[8/1331/Pi^3*(-20+11*Pi)*eta, 8/3993/Pi^3*(28+33*Pi)*eta, 8/6655/Pi^3*(-12+55*Pi)*eta,
8/9317/Pi^3*(36+77*Pi)*eta, 8/11979/Pi^3*(-4+99*Pi)*eta,
16/121/Pi^2*(14641/64*Pi^4+1/44*eta*(33*Pi+8)/Pi)]]):
> for i from 0 by 1 to 600000 do
>     b:=subs(eta=i,evalm(A));
>     Gamma||i:=evalf(Eigenvals(b));
> od:
> arq:=`c:\\salete\\tesedoctor\\resultados\\casocont\\emenda.dat`:
> fd:=fopen(arq,APPEND):
> for i from 0 by 1 to 600000 do
>
    fprintf(arq,"%d,%.10f,%.10f,%.10f,%.10f,%.10f,%.10f",i,Gamma||i[1],Gamma||i[2],Ga
    mma||i[3],Gamma||i[4],Gamma||i[5],Gamma||i[6]):
>     fprintf(arq,`\n`):
> od:
> fclose(arq):
```

8.3
Cálculo do Diâmetro e Espaçamento entre Estribos para Diversos Arranjos das Armaduras na Seção Transversal

Apresenta-se alguns testes realizados no Mathcad 11 para se calcular o diâmetro e espaçamento entre estribos em pilares descritos nos trabalhos de Queiroga(1999) e Sheikh & Uzumeri (1980)

a) Queiroga (1999)

Exemplo1 : Pilar P1, P4 e P6

Propriedades da Barra e seus Carregamentos:

E	Módulo de Young do Material	N/mm^2
f_y	Resistência de escoamento do aço	N/mm^2
I	Momento de Inércia da Seção Reta	mm^4
L	Comprimento da barra	mm
b	Distância entre duas pernas de estribos	mm
s	Espaçamento entre estribos	mm
ϕ_l	Diâmetro da armadura longitudinal	mm
ϕ_t	Diâmetro da armadura transversal	mm
A_s	Aréa da seção da armadura longitudinal	mm^2
P_y	Carga de esmagamento	N
P_{cr}	Carga de flambagem	N
Γ_1	Parâmetro adimensional de carga	
η_1	Parâmetro adimensional da rigidez dos estribos	

Par=ϕ^4t/S

$fy := 502$ $\quad \phi l := 12.5$ $\quad L := 1200$ $\quad E := 210000$ $\quad As := 125$

$$Py := \frac{fy}{1.15} \cdot As$$

$$Py = 5.45652 \times 10^4$$

$$b := 200 - 2 \cdot 6.3 - 12.5 - 2 \cdot 17.5$$

$$b = 139.9$$

Cálculo dos valores de ϕ_t e s, considerando-se a carga de flambagem P_{cr}=1,2P_y

$\gamma := 1.2$

$Pcr := \gamma \cdot Py$

$Pcr = 6.54783 \times 10^4$

$\Gamma 1 := Pcr \cdot \frac{L^2}{E \cdot \phi l^4}$ $\Gamma 1 = 18.39079$ Equivale a $\eta 1 := 149.1042$

$par := \frac{\eta 1 \cdot b^3 \cdot \phi l^4}{L^4}$ $par = 4.80682$

P1

$s := 150$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 5.18188$

P4

$s := 100$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 4.68236$

P6

$s := 50$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 3.93738$

Teste para um valor de s=200 mm

$s := 200$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 5.56829$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=6,3 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 6.3$

$s := \frac{\phi t^4}{par}$ $s = 327.72088$

Cálculo dos valores de ϕ_t e s, considerando-se a carga de flambagem P_{cr}=1,5P_y

$\gamma := 1.5$

$Pcr := \gamma \cdot Py$

Cálculo de Γ1

$\Gamma 1 := Pcr \cdot \frac{L^2}{E \cdot \phi l^4}$ $\Gamma 1 = 22.98848$ Equivale a $\eta 1 := 242.8594$

$$par := \frac{\eta 1 \cdot b^3 \cdot \phi l^4}{L^4} \qquad par = 7.8293$$

Cálculo do diâmetro dos estribos dado o espaçamento entre estribos

P1

$s := 150$

$$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s} \qquad \phi t = 5.85401$$

P4

$s := 100$

$$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s} \qquad \phi t = 5.2897$$

P6

$s := 50$

$$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s} \qquad \phi t = 4.44809$$

Teste com um valor de s=200 mm

$s := 200$

$$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s} \qquad \phi t = 6.29055$$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=6,3 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 6.3$

$$s := \frac{\phi t^4}{par} \qquad s = 201.20514$$

<u>Consideração das emendas</u>

Para a emenda na seção, considera-se a armadura com uma extremidade livre e assim, os valores de η_1 correspondem a valores muito maiores para cada valor de Γ_1 calculado

Cálculo dos valores de ϕ_t e s, considerando-se a carga de flambagem P_{cr}=1,2P_y

$\gamma := 1.2$

$Pcr := \gamma \cdot Py$

$$\Gamma 1 := Pcr \cdot \frac{L^2}{E \cdot \phi l^4} \qquad \Gamma 1 = 18.39079 \quad \text{Equivale a} \quad \eta 1 := 566.3021$$

$$par := \frac{\eta 1 \cdot b^3 \cdot \phi l^4}{L^4} \qquad par = 18.25645$$

P1

$s := 150$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 7.23397$

P4

$s := 100$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 6.53663$

P6

$s := 50$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 5.49663$

Teste para um valor de s=200 mm

$s := 200$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 7.77341$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=6,3 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 6.3$

$s := \frac{\phi t^4}{par}$ $s = 86.28709$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=6,3 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 6.3$

$s := \frac{\phi t^4}{par}$ $s = 86.28709$

Cálculo dos valores de ϕ_t e s, considerando-se a carga de flambagem P_{cr}=1,5P_y

$\gamma := 1.5$

$Pcr := \gamma \cdot Py$

Cálculo de Γ1

$\Gamma 1 := Pcr \cdot \frac{L^2}{E \cdot \phi l^4}$ $\Gamma 1 = 22.98848$ Equivale a $\eta 1 := 790.8073$

$par := \frac{\eta 1 \cdot b^3 \cdot \phi l^4}{L^4}$ $par = 25.49405$

Cálculo do diâmetro dos estribos dado o espaçamento entre estribos

P1

$s := 150$

$$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s} \qquad \phi t = 7.8638$$

P4

$s := 100$

$$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s} \qquad \phi t = 7.10575$$

P6

$s := 50$

$$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s} \qquad \phi t = 5.9752$$

Teste para um valor de s=200 mm

$s := 200$

$$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s} \qquad \phi t = 8.4502$$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=6,3 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 6.3$

$$s := \frac{\phi t^4}{par} \qquad s = 61.79073$$

<u>Flambagem ocorrendo entre dois estribos consecutivos</u>

Os valores de Γ_1 para que a flambagem ocorra entre dois estribos consecutivos dependerá da relação entre L e s

P1

$s := 150$

$$Pcr := \frac{\left(E \cdot \pi^3 \cdot \frac{\phi l^4}{64}\right)}{s^2} \qquad \gamma := \frac{Pcr}{Py} \qquad \gamma = 2.02316$$

$$\Gamma 1 := \frac{\pi^3 \cdot L^2}{64 \cdot s^2} \qquad \Gamma 1 = 31.00628 \quad \text{Equivale a} \quad \eta 1 := 443.1979$$

$$par := \frac{\eta 1 \cdot b^3 \cdot \phi l^4}{L^4} \qquad par = 14.28782$$

$$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s} \qquad \phi t = 6.804$$

Consideração das emendas na seção

$$\Gamma 1 := \frac{\pi^3 \cdot L^2}{64 \cdot s^2} \qquad \Gamma 1 = 31.00628 \quad \text{Equivale a} \quad \eta 1 := 1195.672$$

$$par := \frac{\eta 1 \cdot b^3 \cdot \phi l^4}{L^4} \qquad par = 38.54608$$

$$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s} \qquad \phi t = 8.72003$$

Teste para s=200 mm

$$s := 200$$

$$Pcr := \frac{\left(E \cdot \pi^3 \cdot \frac{\phi l^4}{64}\right)}{s^2} \qquad \gamma := \frac{Pcr}{Py} \qquad \gamma = 1.13803$$

$$\Gamma 1 := \frac{\pi^3 \cdot L^2}{64 \cdot s^2} \qquad \Gamma 1 = 17.44103$$ Equivale a $\eta 1 := 131.1927$

$$par := \frac{\eta 1 \cdot b^3 \cdot \phi l^4}{L^4} \qquad par = 4.22939$$

$$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s} \qquad \phi t = 5.39296$$

Consideração das emendas

$$\Gamma 1 := \frac{\pi^3 \cdot L^2}{64 \cdot s^2} \qquad \Gamma 1 = 17.44103$$ Equivale a $\eta 1 := 521.2239$

$$par := \frac{\eta 1 \cdot b^3 \cdot \phi l^4}{L^4} \qquad par = 16.80322$$

$$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s} \qquad \phi t = 7.61387$$

P4

$$s := 100$$

$$Pcr := \frac{\left(E \cdot \pi^3 \cdot \frac{\phi l^4}{64}\right)}{s^2} \qquad \gamma := \frac{Pcr}{Py} \qquad \gamma = 4.55211$$

$$\Gamma 1 := \frac{\pi^3 \cdot L^2}{64 \cdot s^2} \qquad \Gamma 1 = 69.76412$$ Equivale a $\eta 1 := 1890.1042$

$$par := \frac{\eta 1 \cdot b^3 \cdot \phi l^4}{L^4} \qquad par = 60.9332$$

$$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s} \qquad \phi t = 8.83514$$

Consideração das emendas na seção

$$\Gamma 1 := \frac{\pi^3 \cdot L^2}{64 \cdot s^2} \qquad \Gamma 1 = 69.76412 \qquad \text{Equivale a} \qquad \eta 1 := 3206.77$$

$$par := \frac{\eta 1 \cdot b^3 \cdot \phi l^4}{L^4} \qquad par = 103.37988$$

$$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s} \qquad \phi t = 10.08345$$

P6

$$s := 50$$

$$Pcr := \frac{\left(E \cdot \pi^3 \cdot \frac{\phi l^4}{64}\right)}{s^2} \qquad \gamma := \frac{Pcr}{Py} \qquad \gamma = 18.20845$$

$$\Gamma 1 := \frac{\pi^3 \cdot L^2}{64 \cdot s^2} \qquad \Gamma 1 = 279.05649 \qquad \text{Equivale a} \qquad \eta 1 := 10200.52$$

$$par := \frac{\eta 1 \cdot b^3 \cdot \phi l^4}{L^4} \qquad par = 328.84445$$

$$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s} \qquad \phi t = 11.32375$$

Consideração das emendas

$$\Gamma 1 := \frac{\pi^3 \cdot L^2}{64 \cdot s^2} \qquad \Gamma 1 = 279.05649 \qquad \text{Equivale a} \qquad \eta 1 := 14166.67$$

$$par := \frac{\eta 1 \cdot b^3 \cdot \phi l^4}{L^4} \qquad par = 456.70523$$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 12.29282$

b. Sheikh & Uzumeri (1980)

Pilar 4A1-13

$fy := 438$ $\phi l := 22.2$ $L := 1219$ $b := 244.8$ $Er := 27400$ $As := 387.1$ $Et := 5000$

$Py := fy \cdot As$

$Py = 1.6955 \times 10^5$

Cálculo dos valores de ϕ_t e s, considerando-se a carga de flambagem P_{cr}=1,2P_y

$\gamma := 1.2$

$Pcr := \gamma \cdot Py$

$\Gamma 1 := Pcr \cdot \dfrac{L^2}{Er \cdot \phi l^4}$ $\Gamma 1 = 45.42799$ Equivale a $\eta 1 := 943.7083$

$par := \dfrac{6 \cdot \eta 1 \cdot Er \cdot b \cdot \phi l^4}{Et \cdot L^4}$ $par = 0.83556$

Cálculo do diâmetro dos estribos dado o espaçamento entre estribos

$s := 57.1$

$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s}$ $\phi t = 6.90728$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=4,76 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 4.76$

$s := \dfrac{\phi t^2}{par}$ $s = 27.11664$

Cálculo dos valores de ϕ_t e s, considerando-se a carga de flambagem P_{cr}=1,5P_y

$\gamma := 1.5$

$Pcr := \gamma \cdot Py$

Cálculo de Γ1

$\Gamma 1 := Pcr \cdot \dfrac{L^2}{Er \cdot \phi l^4}$ $\Gamma 1 = 56.78498$ Equivale a $\eta 1 := 1381.276$

$par := \dfrac{6 \cdot \eta 1 \cdot Er \cdot b \cdot \phi l^4}{Et \cdot L^4}$ $par = 1.22298$

Cálculo do diâmetro dos estribos dado o espaçamento entre estribos

$s := 57.1$

$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s}$ $\qquad \phi t = 8.35658$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=4,76 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 4.76$

$s := \dfrac{\phi t^2}{par}$ $\qquad s = 18.52649$

Consideração das emendas

Para a emenda na seção, considera-se a armadura com uma extremidade livre e assim, os valores de η_1 correspondem a valores muito maiores para cada valor de Γ_1 calculado

Cálculo dos valores de ϕ_t e s, considerando-se a carga de flambagem P_{cr}=1,2P_y

$\gamma := 1.2$

$Pcr := 1.2 \cdot Py$

$\Gamma 1 := Pcr \cdot \dfrac{L^2}{Er \cdot \phi l^4}$ $\qquad \Gamma 1 = 45.42799$ Equivale a $\eta 1 := 1939.245$

$par := \dfrac{6\,\eta 1 \cdot Er \cdot b \cdot \phi l^4}{Et \cdot L^4}$ $\qquad par = 1.71701$

$s := 57.1$

$Pcr := 1.2 \cdot Py$

$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s}$ $\qquad \phi t = 9.90158$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=4,76 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 4.76$

$s := \dfrac{\phi t^2}{par}$ $\qquad s = 13.19596$

Cálculo dos valores de ϕ_t e s, considerando-se a carga de flambagem P_{cr}=1,5P_y

$\gamma := 1.5$

$Pcr := \gamma \cdot Py$

$\Gamma 1 := Pcr \cdot \dfrac{L^2}{Er \cdot \phi l^4}$ $\qquad \Gamma 1 = 56.78498$ Equivale a $\eta 1 := 2529.641$

$par := \dfrac{6 \cdot \eta 1 \cdot Er \cdot b \cdot \phi l^4}{Et \cdot L^4}$ $\qquad par = 2.23975$

Cálculo do diâmetro dos estribos dado o espaçamento entre estribos

$s := 57.1$

$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s}$ $\qquad \phi t = 11.30883$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=4,76 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 4.76$

$s := \frac{\phi t^2}{par}$ $\qquad s = 10.11614$

Flambagem ocorrendo entre dois estribos consecutivos

Os valores de Γ_1 para que a flambagem ocorra entre dois estribos consecutivos dependerá da relação entre L e s

$s := 57.1$

$Pcr := \frac{\left(E \cdot \pi^3 \cdot \frac{\phi l^4}{64}\right)}{s^2}$ $\qquad \gamma := \frac{Pcr}{Py}$ $\qquad \gamma = 44.70245$

$\Gamma 1 := \frac{\pi^3 \cdot L^2}{64 \cdot s^2}$ $\qquad \Gamma 1 = 220.80293$ Equivale a $\eta 1 := 7864.5833$

$par := \frac{6 \cdot \eta 1 \cdot Er \cdot b \cdot \phi l^4}{Et \cdot L^4}$ $\qquad par = 6.96331$

Cálculo do diâmetro dos estribos dado o espaçamento entre estribos

$s := 57.1$

$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s}$ $\qquad \phi t = 19.94004$

Consideração das emendas

$\Gamma 1 := \frac{\pi^3 \cdot L^2}{64 \cdot s^2}$ $\qquad \Gamma 1 = 220.80293$ Equivale a $\eta 1 := 11088.54$

$par := \frac{6 \cdot \eta 1 \cdot Er \cdot b \cdot \phi l^4}{Et \cdot L^4}$ $\qquad par = 9.81781$

Cálculo do diâmetro dos estribos dado o espaçamento entre estribos

$s := 57.1$

$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s}$ $\qquad \phi t = 23.67693$

Pilar 2A5-14 e 2A6-15

$fy := 404 \quad \phi l := 15.87 \quad L := 1219 \quad b := 251.13 \quad Er := 23900 \quad As := 197.81 \quad Et := 5000$

$Py := fy \cdot As$

$Py = 7.99152 \times 10^4$

Cálculo dos valores de ϕ_t e s, considerando-se a carga de flambagem P_{cr}=1,2P_y

$\gamma := 1.2$

$Pcr := \gamma \cdot Py$

$\Gamma 1 := Pcr \cdot \dfrac{L^2}{Er \cdot \phi l^4}$ $\qquad \Gamma 1 = 93.99671$ Equivale a $\eta 1 := 2848.95$

$par := \dfrac{6 \cdot \eta 1 \cdot Er \cdot b \cdot \phi l^4}{Et \cdot L^4}$ $\qquad par = 0.58946$

Cálculo do diâmetro dos estribos dado o espaçamento entre estribos

Corpo de prova - 2A5-14

$s := 76.2$

$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s}$ $\qquad \phi t = 6.70201$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=9,52 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 9.52$

$s := \dfrac{\phi t^2}{par}$ $\qquad s = 153.75117$

Corpo de prova - 2A6-15

$s := 35$

$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s}$ $\qquad \phi t = 4.54215$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=6,35 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 6.35$

$s := \dfrac{\phi t^2}{par}$ $\qquad s = 68.40565$

Cálculo dos valores de ϕ_t e s, considerando-se a carga de flambagem P_{cr}=1,5P_y

$\gamma := 1.5$

$Pcr := \gamma \cdot Py$

Cálculo de Γ1

$$\Gamma 1 := Pcr \cdot \frac{L^2}{Er \cdot \phi l^4} \qquad \Gamma 1 = 117.49589$$ Equivale a $\eta 1 := 3776.041$

$$par := \frac{6 \cdot \eta 1 \cdot Er \cdot b \cdot \phi l^4}{Et \cdot L^4} \qquad par = 0.78128$$

Cálculo do diâmetro dos estribos dado o espaçamento entre estribos

Corpo de prova - 2A5-14

$s := 76.2$

$$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s} \qquad \phi t = 7.7158$$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=9,52 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 9.52$

$$s := \frac{\phi t^2}{par} \qquad s = 116.00229$$

Corpo de prova - 2A6-15

$s := 35$

$$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s} \qquad \phi t = 5.22923$$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=6,35 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 6.35$

$$s := \frac{\phi t^2}{par} \qquad s = 51.61074$$

<u>Consideração das emendas</u>

Para a emenda na seção, considera-se a armadura com uma extremidade livre e assim, os valores de η_1 correspondem a valores muito maiores para cada valor de Γ_1 calculado

Cálculo dos valores de ϕ_t e s, considerando-se a carga de flambagem P_{cr}=1,2P_y

$\gamma := 1.2$

$Pcr := 1.2 \cdot Py$

$$\Gamma 1 := Pcr \cdot \frac{L^2}{Er \cdot \phi l^4} \qquad \Gamma 1 = 93.99671$$ Equivale a $\eta 1 := 4458.328125$

$$par := \frac{6 \cdot \eta 1 \cdot Er \cdot b \cdot \phi l^4}{Et \cdot L^4} \qquad par = 0.92245$$

Cálculo do diâmetro dos estribos dado o espaçamento entre estribos

Corpo de prova - 2A5-14

$s := 76.2$

$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s}$ $\phi t = 8.38395$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=9,52 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 9.52$

$s := \dfrac{\phi t^2}{par}$ $s = 98.2497$

Corpo de prova - 2A6-15

$s := 35$

$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s}$ $\phi t = 5.68205$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=6,35 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 6.35$

$s := \dfrac{\phi t^2}{par}$ $s = 43.71241$

Cálculo dos valores de ϕ_t e s, considerando-se a carga de flambagem P_{cr}=1,5P_y

$\gamma := 1.5$

$Pcr := \gamma \cdot Py$

Cálculo de $\Gamma 1$

$\Gamma 1 := Pcr \cdot \dfrac{L^2}{Er \cdot \phi l^4}$ $\Gamma 1 = 117.49589$ Equivale a $\eta 1 := 5692.70833$

$par := \dfrac{6 \cdot \eta 1 \cdot Er \cdot b \cdot \phi l^4}{Et \cdot L^4}$ $par = 1.17785$

Cálculo do diâmetro dos estribos dado o espaçamento entre estribos

Corpo de prova - 2A5-14

$s := 76.2$

$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s}$ $\phi t = 9.47376$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=9,52 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 9.52$

$s := \frac{\phi t^2}{par}$ $\quad s = 76.9457$

Corpo de prova - 2A6-15

$s := 35$

$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s}$ $\quad \phi t = 6.42065$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=6,35 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 6.35$

$s := \frac{\phi t^2}{par}$ $\quad s = 34.23402$

<u>Flambagem ocorrendo entre dois estribos consecutivos - 2A5-14</u>

Os valores de Γ_1 para que a flambagem ocorra entre dois estribos consecutivos dependerá da relação entre L e s

$s := 76.2$

$Pcr := \frac{\left(E \cdot \pi^3 \cdot \frac{\phi l^4}{64}\right)}{s^2}$ $\quad \gamma := \frac{Pcr}{Py}$ $\quad \gamma = 13.90776$

$\Gamma 1 := \frac{\pi^3 \cdot L^2}{64 \cdot s^2}$ $\quad \Gamma 1 = 123.98442$ Equivale a $\eta 1 := 4026.037$

$par := \frac{6 \cdot \eta 1 \cdot Er \cdot b \cdot \phi l^4}{Et \cdot L^4}$ $\quad par = 0.83301$

Cálculo do diâmetro dos estribos dado o espaçamento entre estribos

$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s}$ $\quad \phi t = 7.96713$

Consideração das emendas

$\eta 1 := 6041.66$

$par := \frac{6 \cdot \eta 1 \cdot Er \cdot b \cdot \phi l^4}{Et \cdot L^4}$ $\quad par = 1.25005$

Cálculo do diâmetro dos estribos dado um certo espaçamento entre estribos

$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s}$ $\phi t = 9.7598$

Flambagem ocorrendo entre dois estribos consecutivos - 2A6-15

Os valores de Γ_1 para que a flambagem ocorra entre dois estribos consecutivos dependerá da relação entre L e s

$s := 35$

$Pcr := \dfrac{\left(E \cdot \pi^3 \cdot \dfrac{\phi l^4}{64}\right)}{s^2}$ $\gamma := \dfrac{Pcr}{Py}$ $\gamma = 65.92209$

$\Gamma 1 := \dfrac{\pi^3 \cdot L^2}{64 \cdot s^2}$ $\Gamma 1 = 587.68008$ Equivale a $\eta 1 := 22455.77$

$par := \dfrac{6 \cdot \eta 1 \cdot Er \cdot b \cdot \phi l^4}{Et \cdot L^4}$ $par = 4.64621$

Cálculo do diâmetro dos estribos dado o espaçamento entre estribos

$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s}$ $\phi t = 12.75215$

Consideração das emendas

$\eta 1 := 30313.693$

$par := \dfrac{6 \cdot \eta 1 \cdot Er \cdot b \cdot \phi l^4}{Et \cdot L^4}$ $par = 6.27205$

Cálculo do diâmetro dos estribos dado um certo espaçamento entre estribos

$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s}$ $\phi t = 14.81627$

Pilar 4B3-19, 4B4-20 E 4B6-21

$fy := 392$ $\phi l := 19.05$ $L := 1219$ $b := 247.95$ $Er := 19300$ $As := 285.02$ $Et := 5000$

$Py := fy \cdot As$

$Py = 1.11728 \times 10^5$

Cálculo dos valores de ϕ_t e s, considerando-se a carga de flambagem $P_{cr}=1{,}2P_y$

$\gamma := 1.2$

$Pcr := \gamma \cdot Py$

$\Gamma 1 := Pcr \cdot \frac{L^2}{Er \cdot \phi l^4}$ $\Gamma 1 = 78.38137$ Equivale a $\eta 1 := 2229.162$

$par := \frac{4 \cdot \eta 1 \cdot Er \cdot b \cdot \phi l^4}{Et \cdot L^4}$ $par = 0.509$

Cálculo do diâmetro dos estribos dado o espaçamento entre estribos

Corpo de prova - 4B3-19

$s := 101.6$

$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s}$ $\phi t = 7.19128$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=7,94 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 7.94$

$s := \frac{\phi t^2}{par}$ $s = 123.85766$

Corpo de prova - 4B4-20

$s := 38.1$

$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s}$ $\phi t = 4.40374$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=4,76 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 4.76$

$s := \frac{\phi t^2}{par}$ $s = 44.51391$

Corpo de prova - 4B6-21

$s := 47.7$

$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s}$ $\phi t = 4.9274$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=6,35 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 6.35$

$s := \frac{\phi t^2}{par}$ $s = 79.21899$

Cálculo dos valores de ϕ_t e s, considerando-se a carga de flambagem P_{cr}=1,5P_y

$\gamma := 1.5$

$Pcr := \gamma \cdot Py$

Cálculo de Γ1

$\Gamma 1 := Pcr \cdot \frac{L^2}{Er \cdot \phi l^4}$ $\quad \Gamma 1 = 97.97671$ Equivale a $\eta 1 := 3005.2031$

$par := \frac{4 \cdot \eta 1 \cdot Er \cdot b \cdot \phi l^4}{Et \cdot L^4}$ $\quad par = 0.6862$

Cálculo do diâmetro dos estribos dado o espaçamento entre estribos

Corpo de prova - 4B3-19

$s := 101.6$

$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s}$ $\quad \phi t = 8.34972$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=7,94 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 7.94$

$s := \frac{\phi t^2}{par}$ $\quad s = 91.87359$

Corpo de prova - 4B4-20

$s := 38.1$

$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s}$ $\quad \phi t = 5.11314$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=4,76 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 4.76$

$s := \frac{\phi t^2}{par}$ $\quad s = 33.01897$

Corpo de prova - 4B6-21

$s := 47.7$

$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s}$ $\quad \phi t = 5.72116$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=6,35 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 6.35$

$s := \frac{\phi t^2}{par}$ $\quad s = 58.76207$

Consideração das emendas

Para a emenda na seção, considera-se a armadura com uma extremidade livre e assim, os valores de η_1 correspondem a valores muito maiores para cada valor de Γ_1 calculado

Cálculo dos valores de ϕ_t e s, considerando-se a carga de flambagem P_{cr}=1,2P_y

$\gamma := 1.2$

$Pcr := 1.2 \cdot Py$

$\Gamma 1 := Pcr \cdot \frac{L^2}{Er \cdot \phi l^4}$ $\Gamma 1 = 78.38137$ Equivale a $\eta 1 := 3657.292$

$par := \frac{4 \cdot \eta 1 \cdot Er \cdot b \cdot \phi l^4}{Et \cdot L^4}$ $par = 0.8351$

Cálculo do diâmetro dos estribos dado o espaçamento entre estribos

Corpo de prova - 4B3-19

$s := 101.6$

$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s}$ $\phi t = 9.21117$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=7,94 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 7.94$

$s := \frac{\phi t^2}{par}$ $s = 75.49268$

Corpo de prova - 4B4-20

$s := 38.1$

$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s}$ $\phi t = 5.64067$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=4,76 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 4.76$

$s := \frac{\phi t^2}{par}$ $s = 27.13175$

$s := 47.7$

$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s}$ $\phi t = 6.31142$

Corpo de prova - 4B6-21

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=6,35 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 6.35$

$s := \frac{\phi t^2}{par}$ $\quad s = 48.2849$

Cálculo dos valores de ϕ_t e s, considerando-se a carga de flambagem P_{cr}=1,5P_y

$\gamma := 1.5$

$Pcr := \gamma \cdot Py$

Cálculo de Γ1

$\Gamma 1 := Pcr \cdot \frac{L^2}{Er \cdot \phi t^4}$ $\quad \Gamma 1 = 97.97671$ Equivale a $\eta 1 := 4681.771$

$par := \frac{4 \cdot \eta 1 \cdot Er \cdot b \cdot \phi t^4}{Et \cdot L^4}$ $\quad par = 1.06902$

Cálculo do diâmetro dos estribos dado o espaçamento entre estribos

Corpo de prova - 4B3-19

$s := 101.6$

$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s}$ $\quad \phi t = 10.42174$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=7,94 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 7.94$

$s := \frac{\phi t^2}{par}$ $\quad s = 58.97315$

Corpo de prova - 4B4-20

$s := 38.1$

$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s}$ $\quad \phi t = 6.38199$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=4,76 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 4.76$

$s := \frac{\phi t^2}{par}$ $\quad s = 21.1947$

Corpo de prova - 4B6-21

$s := 47.7$

$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s} \qquad \phi t = 7.14089$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=6,35 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 6.35$

$s := \dfrac{\phi t^2}{par} \qquad s = 37.71905$

<u>Flambagem ocorrendo entre dois estribos consecutivos - 4B3-19</u>

Os valores de Γ_1 para que a flambagem ocorra entre dois estribos consecutivos dependerá da relação entre L e s

$s := 101.6$

$Pcr := \dfrac{\left(E \cdot \pi^3 \cdot \dfrac{\phi l^4}{64}\right)}{s^2} \qquad \gamma := \dfrac{Pcr}{Py} \qquad \gamma = 11.6177$

$\Gamma 1 := \dfrac{\pi^3 \cdot L^2}{64 \cdot s^2} \qquad \Gamma 1 = 69.74124$ Equivale a $\eta 1 := 1890.619$

$par := \dfrac{4 \cdot \eta 1 \cdot Er \cdot b \cdot \phi l^4}{Et \cdot L^4} \qquad par = 0.4317$

Cálculo do diâmetro dos estribos dado um certo espaçamento entre estribos

$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s} \qquad \phi t = 6.62273$

Consideração das emendas

$\eta 1 := 3207.8125$

$par := \dfrac{4 \cdot \eta 1 \cdot Er \cdot b \cdot \phi l^4}{Et \cdot L^4} \qquad par = 0.73246$

Cálculo do diâmetro dos estribos

$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s} \qquad \phi t = 8.6266$

<u>Flambagem ocorrendo entre dois estribos consecutivos - 4B4-20</u>

Os valores de Γ_1 para que a flambagem ocorra entre dois estribos consecutivos dependerá da relação entre L e s

$s := 38.1$

$Pcr := \dfrac{\left(E \cdot \pi^3 \cdot \dfrac{\phi l^4}{64}\right)}{s^2} \qquad \gamma := \dfrac{Pcr}{Py} \qquad \gamma = 82.61473$

$$\Gamma 1 := \frac{\pi^3 \cdot L^2}{64 \cdot s^2} \qquad \Gamma 1 = 495.93768$$ Equivale a $\eta 1 := 18818.32$

$$par := \frac{4 \cdot \eta 1 \cdot Er \cdot b \cdot \phi l^4}{Et \cdot L^4} \qquad par = 4.29692$$

Cálculo do diâmetro dos estribos dado o espaçamento entre estribos

$$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s} \qquad \phi t = 12.79503$$

Consideração das emendas

$$\eta 1 := 25520.83$$

$$par := \frac{4 \cdot \eta 1 \cdot Er \cdot b \cdot \phi l^4}{Et \cdot L^4} \qquad par = 5.82735$$

Cálculo do diâmetro dos estribos

$$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s} \qquad \phi t = 14.90041$$

<u>Flambagem ocorrendo entre dois estribos consecutivos - 4B6-21</u>

Os valores de Γ_1 para que a flambagem ocorra entre dois estribos consecutivos dependerá da relação entre L e s

$$s := 47.7$$

$$Pcr := \frac{\left(E \cdot \pi^3 \cdot \frac{\phi l^4}{64}\right)}{s^2} \qquad \gamma := \frac{Pcr}{Py} \qquad \gamma = 52.70729$$

$$\Gamma 1 := \frac{\pi^3 \cdot L^2}{64 \cdot s^2} \qquad \Gamma 1 = 316.40278$$ Equivale a $\eta 1 := 11692.76$

$$par := \frac{4 \cdot \eta 1 \cdot Er \cdot b \cdot \phi l^4}{Et \cdot L^4} \qquad par = 2.66989$$

Cálculo do diâmetro dos estribos dado o espaçamento entre estribos

$$\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s} \qquad \phi t = 11.28511$$

Consideração das emendas

$$\eta 1 := 16147.026$$

$$par := \frac{4 \cdot \eta 1 \cdot Er \cdot b \cdot \phi l^4}{Et \cdot L^4} \qquad par = 3.68697$$

Cálculo do diâmetro dos estribos $\phi t := \sqrt[2]{par \cdot s}$ $\phi t = 13.26153$

- Verificação do Pilar de Concreto Armado Apresentado no Ítem 5.7

Propriedades da Barra e seus Carregamentos:

f_{ck}	Resistência de escoamento do aço	Mpa
f_{yk}	Resistência de escoamento do aço	Mpa
L	Comprimento livre da coluna	m
B	Menor dimensão da seção	m
H	Maior dimensão da seção	m
s	Espaçamento entre estribos	m
ϕl	Diâmetro da armadura longitudinal	m
ϕt	Diâmetro da armadura transversal	m
A_S	Aréa da seção da armadura longitudinal	m^2
c	Cobrimento	m

$fyk := 500$ $\quad fck := 20$ $\quad c := 0.03$ $\quad L := 3.5$

$fcd := \frac{fck}{1.4}$ $\quad fcd = 14.2857143$ $\quad fyd := \frac{fyk}{1.15}$ $\quad fyd = 434.7826087$

Adotou-se a seguinte seção B=0,25 m e h=1,10 m

$B := 0.25$ $\quad h := 1.10$

$Ac := 0.25 \cdot 1.10$

$Ac = 0.275$

$\phi l := 0.016$ $\quad n := 22$

$$As := \frac{n \cdot \pi \cdot \phi l^2}{4}$$

$As = 4.4233625 \times 10^{-3}$

Carga máxima em tf

$Nd := 600$

Valores limites para armaduras longitudinais de Pilares de acordo com o ítem 17.3.5.3 da NBR 6118-2003

Valores minímos: Asmin>=0,004Ac em m^2

$$Asmin := \frac{0.15 \cdot Nd}{fyd \cdot 100}$$

$Asmin = 2.07 \times 10^{-3}$

$Asmin := 0.004 \cdot Ac$

$Asmin = 1.1 \times 10^{-3}$

Taxa de armadura de acordo com o ítem 17.3.5.3.1 da NBR 6118-2003

$$\rho min := \frac{0.15 \cdot Nd}{fyd \cdot 100 \cdot Ac}$$

$\rho min = 7.5272727 \times 10^{-3}$

$$\rho s := \frac{As \cdot 100}{Ac}$$

$\rho s = 1.6084954$ Ok

Armadura Transversal de acordo com o ítem 18.4.3 da NBR 6118-2003

$\phi t := 0.0063$

$s := 0.19$

Distribuição transversal de acordo com o item 18.4.2.2

Espaçamento entre as faces das barras longitudinais

$$sl := \frac{h - 2 \cdot (c + \phi t) - 11 \cdot \phi l}{10}$$

$sl = 0.08514$

- Cálculo do Diâmetro e Espaçamento entre Estribos- Ítem 5.7

Apresenta-se alguns testes para se calcular o diâmetro e espaçamento entre estribos em um pilar de concreto armado.

Propriedades da Barra e seus Carregamentos:

E	Módulo de Young do Material	N/mm^2
f_y	Resistência de escoamento do aço	N/mm^2
I	Momento de inércia	mm^4
L	Comprimento da barra	mm
b	Vão livre de flexão	mm
s	Espaçamento entre estribos	mm
ϕ_l	Diâmetro da armadura longitudinal	mm
ϕ_t	Diâmetro da armadura transversal	mm
A_s	Aréa da seção da armadura longitudinal	mm^2
P_y	Carga de esmagamento	N
P_{cr}	Carga de flambagem	N
Γ_1	Parâmetro adimensional de carga	
η_1	Parâmetro adimensional da rigidez dos estribos	

Par=ϕ^4t/S

$fy := 435$ $\quad \phi l := 16$ $\quad L := 3500$ $\quad E := 210000$ $\quad As := 200$

$b := 1100 - \phi l - 2\cdot(30) - 2\cdot(5)$

$b = 1.014\times 10^3$

$Py := fy\cdot As$

$Py = 8.7\times 10^4$

Caso 1

Cálculo dos valores de ϕ_t e S, considerando-se a carga de flambagem P_{cr}=1,2P_y

$\gamma := 1.2$

$Pcr := \gamma \cdot Py$

$Pcr = 1.044 \times 10^5$

$\Gamma1 := Pcr \cdot \dfrac{L^2}{E \cdot \phi l^4}$ $\quad \Gamma1 = 92.92603$ Equivale a $\eta1 := 2802.08$

$par := \dfrac{192 \cdot \eta1 \cdot b^3 \cdot \phi l^4}{38.4 \cdot L^4}$ $\quad par = 6.37929 \times 10^3$

$s := 190$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\quad \phi t = 33.18039$

$s := 150$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\quad \phi t = 31.27633$

$s := 50$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\quad \phi t = 23.76488$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=6,3 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 6.3$

$s := \dfrac{\phi t^4}{par}$ $\quad s = 0.24694$

Caso 2

$b := 507$

$par := \dfrac{192 \cdot \eta1 \cdot b^3 \cdot \phi l^4}{83.33 \cdot L^4}$ $\quad par = 367.46164$

$s := 190$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\quad \phi t = 16.25517$

$s := 150$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\quad \phi t = 15.32237$

$s := 50$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\qquad \phi t = 11.64248$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=6,3 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 6.3$

$s := \frac{\phi t^4}{par}$ $\qquad s = 4.28697$

Caso 3

$b := 304.2$ $\qquad a := 101.4$

$par := \frac{192 \cdot \eta 1 \cdot a^3 \cdot \phi l^4}{6 \cdot L^4}$ $\qquad par = 40.82744$

$s := 190$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\qquad \phi t = 9.38483$

$s := 150$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\qquad \phi t = 8.84628$

$s := 50$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\qquad \phi t = 6.72172$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=6,3 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 6.3$

$s := \frac{\phi t^4}{par}$ $\qquad s = 38.58425$

Considerando-se apenas modos de deformação simétricos se tem os seguintes resultados

$\eta 1 := 4472.39$

$par := \frac{192 \cdot \eta 1 \cdot a^3 \cdot \phi l^4}{6 \cdot L^4}$ $\qquad par = 65.16453$

$s := 190$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\qquad \phi t = 10.54851$

$s := 150$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 9.94319$

$s := 50$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 7.55519$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=6,3 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 6.3$

$s := \frac{\phi t^4}{par}$ $s = 24.17413$

Caso 4

$b := 202.8$

$par := \frac{\eta 1 \cdot b^3 \cdot \phi l^4}{L^4}$ $par = 16.29113$

$s := 190$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 7.45892$

$s := 150$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 7.0309$

$s := 50$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 5.34233$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=6,3 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 6.3$

$s := \frac{\phi t^4}{par}$ $s = 96.69654$

Caso 5

$b := 507$ $\quad a := 46$

Cálculo dos valores de ϕ_t e s, considerando-se a carga de flambagem P_{cr}=1,2P_y

$\gamma := 1.2$

$Pcr := \gamma \cdot Py$

$Pcr = 1.044\times 10^5$

$\Gamma 1 := Pcr \cdot \dfrac{L^2}{E \cdot \phi l^4}$ $\quad \Gamma 1 = 92.92603$ Equivale a $\quad \eta 1 := 2802.08$

$$par := \frac{192 \cdot \eta 1 \cdot \phi l^4 \cdot \left[10 \cdot a^3 \cdot \left(13 \cdot b^3 + 528 \cdot a^2 \cdot b - 640 \cdot a^3 - 144 \cdot a \cdot b^2\right)\right]}{3 \cdot b^3 \cdot L^4}$$

$par = 289.93988$

$s := 190$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\quad \phi t = 15.32023$

$s := 150$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\quad \phi t = 14.44108$

$s := 50$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\quad \phi t = 10.97285$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=6,3 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 6.3$

$s := \dfrac{\phi t^4}{par}$

$s = 5.43318$

Caso 6

$b := 507$ $a := 46$

$$par := \frac{192 \cdot \eta 1 \cdot \phi l^4 \cdot \left[a^3 \cdot \left(21 \cdot b^3 + 192 \cdot b \cdot a^2 - 128 \cdot a^3 - 108 \cdot b^2 \cdot a\right)\right]}{6 \cdot b^3 \cdot L^4}$$

$par = 48.35486$

$s := 190$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 9.79035$

$s := 150$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 9.22854$

$s := 100$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 8.33892$

$s := 50$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 7.01217$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=6,3 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 6.3$

$s := \frac{\phi t^4}{par}$ $s = 32.57782$

Considerando-se γ=1,0 tem-se os seguintes resultados para este caso

$\gamma := 1.0$

$Pcr := \gamma \cdot Py$

$Pcr = 8.7 \times 10^4$

$\Gamma 1 := Pcr \cdot \dfrac{L^2}{E \cdot \phi l^4}$ $\quad \Gamma 1 = 77.43835$ Equivale a $\quad \eta 1 := 2193.29$

$$par := \frac{192 \cdot \eta 1 \cdot \phi l^4 \cdot \left[a^3 \cdot \left(21 \cdot b^3 + 192 \cdot b \cdot a^2 - 128 \cdot a^3 - 108 \cdot b^2 \cdot a\right)\right]}{6 \cdot b^3 \cdot L^4}$$

$par = 37.84911$

$s := 190$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s} \quad \phi t = 9.20878$

$s := 150$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s} \quad \phi t = 8.68034$

$s := 100$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s} \quad \phi t = 7.84357$

$s := 50$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s} \quad \phi t = 6.59563$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=6,3 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 6.3$

$s := \dfrac{\phi t^4}{par} \quad s = 41.62043$

Caso 7

γ=1.2

$a := 46 \quad b := 184$

$\eta 1 := 2802.08$

$par := \frac{2 \cdot \eta 1 \cdot \phi l^4 \cdot b^3}{L^4}$ $par = 15.24656$

$s := 190$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 7.33637$

$s := 150$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 6.91538$

$s := 50$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 5.25455$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=6,3 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 6.3$

$s := \frac{\phi t^4}{par}$ $s = 103.32144$

poderia utilizar apenas dois estribos suplementares neste caso

$\phi t := 5$

$s := \frac{\phi t^4}{par}$ $s = 40.99286$

Cálculo para menor rigidez para o maior vão de flexão

$b := 420$ $a := 46$

$par := \frac{192 \cdot \eta 1 \cdot \phi l^4 \cdot \left[a^3 \cdot (2 \cdot b - 3 \cdot a)\right]}{6 \cdot b \cdot L^4}$ $par = 6.37088$

$s := 190$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 5.89846$

$s := 150$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 5.55997$

$s := 50$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 4.22467$

γ=1,0 $\eta 1 := 2193.29$ $b := 184$ $a := 46$

$par := \frac{2 \cdot \eta 1 \cdot \phi l^4 \cdot b^3}{L^4}$ $par = 11.93403$

$s := 190$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 6.90057$

$s := 150$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 6.50459$

$s := 50$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 4.94242$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=6,3 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 6.3$

$s := \frac{\phi t^4}{par}$ $s = 132.0003$

$\phi t := 5$

$s := \frac{\phi t^4}{par}$ $s = 52.37123$

Caso 8

Para o menor lado - γ=1,2 $\eta 1 := 2802.08$ $b := 164$

$par := \frac{b^3 \cdot \eta 1 \cdot \phi l^4}{L^4}$ $par = 5.39784$

$s := 190$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 5.65905$

$s := 150$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 5.3343$

$s := 50$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\qquad \phi t = 4.05319$

Para o vão entre estribos suplementares - γ=1,2

$b := 338 \qquad a := 46$

$$par := \frac{192 \cdot \eta 1 \cdot \phi l^4 \cdot \left[a^3 \cdot (2 \cdot b - 3 \cdot a)\right]}{6 \cdot b \cdot L^4} \qquad par = 6.06705$$

$s := 190$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\qquad \phi t = 5.82684$

$s := 150$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\qquad \phi t = 5.49246$

$s := 50$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\qquad \phi t = 4.17337$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=6,3 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 6.3$

$$s := \frac{\phi t^4}{par} \qquad s = 259.64793$$

$\phi t := 5$

$$s := \frac{\phi t^4}{par} \qquad s = 103.01553$$

Utilizando-se uma rigidez efetiva no lugar e chamando K a rigidez considerando-se os estribos suplementares e Kses a rigidez sem estribos suplementares tem-se que a rigidez média fica

γ=1,2 $\qquad b := 341.33 \qquad a := 46 \qquad b1 := 1014$

$$par := \frac{192 \cdot \eta 1 \cdot \phi l^4}{\left[\frac{3 \cdot b}{a^3 \cdot (2 \cdot b - 3 \cdot a)} + \frac{27 \cdot b1}{\left(b1^4 + 3 \cdot b1^3 \cdot a - 9 \cdot a^2 \cdot b1^2 + 18 \cdot a^3 \cdot b1 - 81 \cdot a^4\right)}\right] \cdot L^4}$$

$par = 12.1499$

$s := 190$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 6.93157$

$s := 150$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 6.5338$

$s := 50$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 4.96462$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=6,3 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 6.3$

$s := \frac{\phi t^4}{par}$ $s = 129.65507$

$\phi t := 5$

$s := \frac{\phi t^4}{par}$ $s = 51.44076$

Para o valor de γ=1,0

$b := 338$ $a := 46$ $\eta 1 := 2193.29$

$$par := \frac{192 \cdot \eta 1 \cdot \phi t^4 \cdot \left[a^3 \cdot (2 \cdot b - 3 \cdot a)\right]}{6 \cdot b \cdot L^4}$$ $par = 4.7489$

$s := 190$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 5.48071$

$s := 150$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 5.1662$

$s := 50$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s}$ $\phi t = 3.92546$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=6,3 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 6.3$ $s := \frac{\phi t^4}{par}$

$s = 331.71823$

$\phi t := 5$

$s := \dfrac{\phi t^4}{par} \qquad s = 131.60948$

Considerando-se a rigidez média da base elástica $\quad b1 := 1014$

$$par := \frac{192 \cdot \eta 1 \cdot \phi l^4}{\left[\dfrac{3 \cdot b}{a^3 \cdot (2 \cdot b - 3 \cdot a)} + \dfrac{27 \cdot b1}{\left(b1^4 + 3 \cdot b1^3 \cdot a - 9 \cdot a^2 \cdot b1^2 + 18 \cdot a^3 \cdot b1 - 81 \cdot a^4\right)}\right] \cdot L^4}$$

$par = 9.48646$

$s := 190$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s} \qquad \phi t = 6.51575$

$s := 150$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s} \qquad \phi t = 6.14184$

$s := 50$

$\phi t := \sqrt[4]{par \cdot s} \qquad \phi t = 4.66679$

Para o diâmetro dos estribos, ϕ_t=6,3 mm tem-se o seguinte espaçamento

$\phi t := 6.3$

$s := \dfrac{\phi t^4}{par} \qquad s = 166.05736$

$\phi t := 5$

$s := \dfrac{\phi t^4}{par} \qquad s = 65.88339$

8.4. Cálculo da Flexibilidade dos Estribos para o Cálculo da Rigidez (*K*)

Cálculo analítico da flexibilidade de uma viga fixa nas extremidades. Os resultados das flexibilidades são divididos pela rigidez a flexão EI. A rigidez K foi calculada utilizando-se a expressão F=Kxd. Estes valores foram utilizados no Capítulo 5.

a) Uma barra localizada no meio do vão como no exemplo de Queiroga (1999) e o Caso 4

```
> restart:with(linalg):
> M1:=P/2*x-Ma:
> M2:=M1-P*(x-a):
> eq1:=int(-M1,x)+C1:eq2:=int(eq1,x)+C2:
> eq3:=int(-M2,x)+C3:eq4:=int(eq3,x)+C4:
Condições de contorno
> subs(x=0,eq2):
Logo C2=0
> C2:=0:
> subs(x=0,eq1):
Logo C1=0
> C1:=0:
 em x=a
> C3:=solve(subs(x=a,eq3-eq1),C3):
> C4:=solve(subs(x=a,eq4-eq2),C4):
Em x=a+b V=0 V`=0
> Ma:=solve(subs(x=2*a,eq4), Ma):
> va:=subs(x=a,eq2):v2a:=evalf(expand(subs(x=2*a,eq4)));
```

$$v2a := 0.$$

```
> va1:=subs([a=b/2,b=b/2],va);
```

$$va1 := \frac{1}{192} P\, b^3$$

b) Viga fixa nas extremidades com três cargas concentradas como no caso 7

```
> restart:with(linalg):
> M1:=3*P/2*x-Ma:
> M2:=M1-P*(x-a):
```

> **M3:=M2-P*(x-2*a):**

> **M4:=M3-P*(x-3*a):**

> **eq1:=int(-M1,x)+C1:eq2:=int(eq1,x)+C2:**

> **eq3:=int(-M2,x)+C3:eq4:=int(eq3,x)+C4:**

> **eq5:=int(-M3,x)+C5:eq6:=int(eq5,x)+C6:**

> **eq7:=int(-M4,x)+C7:eq8:=int(eq7,x)+C8:**

Condições de contorno

> **subs(x=0,eq2):**

Logo C2=0

> **C2:=0:**

> **subs(x=0,eq1):**

Logo C1=0

> **C1:=0:**

em x=a

> **C3:=solve(subs(x=a,eq3-eq1),C3):**

> **C4:=solve(subs(x=a,eq4-eq2),C4):**

Em x=2a

> **C5:=solve(subs(x=2*a,eq5-eq3),C5):**

> **C6:=solve(subs(x=2*a,eq6-eq4),C6):**

Em x=3a

> **C7:=solve(subs(x=3*a,eq7-eq5),C7):**

> **C8:=solve(subs(x=3*a,eq8-eq6),C8):**

Em x=4*a V=0 V`=0

> **Ma:=solve(subs(x=4*a,eq8), Ma):**

>

>
va:=subs(x=a,eq2);v2a:=subs(x=2*a,eq4);v3a:=subs(x=3*a,eq6);v4a:=subs(x=4*a,eq8);

$$va := \frac{3}{8} P\, a^3$$

$$v2a := \frac{2}{3} P\, a^3$$

$$v3a := \frac{3}{8} P\, a^3$$

$$v4a := 0$$

> **v:=subs(a=b/4,v2a);**

$$v := \frac{1}{96} P\, b^3$$

c) Viga fixa nas extremidades com três cargas concentradas como no caso 2

> **restart:**

> **M1:=2*P*x-Ma:**

> **M2:=M1-P*(x-a):**

> **M3:=M2-P*(x-2*a):**

> **M4:=M3-P*(x-3*a):**

> **M5:=M4-P*(x-4*a):**

> **eq1:=int(-M1,x)+C1:eq2:=int(eq1,x)+C2:**

> **eq3:=int(-M2,x)+C3:eq4:=int(eq3,x)+C4:**

> **eq5:=int(-M3,x)+C5:eq6:=int(eq5,x)+C6:**

> **eq7:=int(-M4,x)+C7:eq8:=int(eq7,x)+C8:**

> **eq9:=int(-M5,x)+C9:eq10:=int(eq9,x)+C10:**

Condições de contorno

> **subs(x=0,eq2):**

Logo C2=0

> **C2:=0:**

> **subs(x=0,eq1):**

Logo C1=0

> **C1:=0:**

em x=a

> **C3:=solve(subs(x=a,eq3-eq1),C3):**

> **C4:=solve(subs(x=a,eq4-eq2),C4):**

Em x=2a

> **C5:=solve(subs(x=2*a,eq5-eq3),C5):**

> **C6:=solve(subs(x=2*a,eq6-eq4),C6):**

Em x=3a

> **C7:=solve(subs(x=3*a,eq7-eq5),C7):**

> **C8:=solve(subs(x=3*a,eq8-eq6),C8):**

Em x=4a

> **C9:=solve(subs(x=4*a,eq9-eq7),C9):**

> **C10:=solve(subs(x=4*a,eq10-eq8),C10):**

Em x=5a

> **Ma:=solve(subs(x=5*a,eq10), Ma):**

va:=subs(x=a,eq2);v2a:=subs(x=2*a,eq4);v3a:=subs(x=3*a,eq6);v4a:=subs(x=4*a,eq8);v5a:=subs(x=5*a,eq10);

$$va := \frac{2}{3} P\, a^3$$

$$v2a := \frac{3}{2} P\, a^3$$

$$v3a := \frac{3}{2} P\, a^3$$

$$v4a := \frac{2}{3} P\, a^3$$

$$v5a := 0$$

> **v:=subs(a=b/5,v2a);**

$$v := \frac{3}{250} P\, b^3$$

d) Viga fixa nas extremidades com nove cargas concentradas como no caso 1

> **restart:**

> **M1:=9*P*x/2-Ma:**

> **M2:=M1-P*(x-a):**

> **M3:=M2-P*(x-2*a):**

> **M4:=M3-P*(x-3*a):**

> **M5:=M4-P*(x-4*a):**

> **M6:=M5-P*(x-5*a):**

> **M7:=M6-P*(x-6*a):**

> **M8:=M7-P*(x-7*a):**

> **M9:=M8-P*(x-8*a):**

> **M10:=M9-P*(x-9*a):**

> **eq1:=int(-M1,x)+C1:eq2:=int(eq1,x)+C2:**

> **eq3:=int(-M2,x)+C3:eq4:=int(eq3,x)+C4:**

> **eq5:=int(-M3,x)+C5:eq6:=int(eq5,x)+C6:**

> **eq7:=int(-M4,x)+C7:eq8:=int(eq7,x)+C8:**

> **eq9:=int(-M5,x)+C9:eq10:=int(eq9,x)+C10:**

> **eq11:=int(-M6,x)+C11:eq12:=int(eq11,x)+C12:**

> **eq13:=int(-M7,x)+C13:eq14:=int(eq13,x)+C14:**

> **eq15:=int(-M8,x)+C15:eq16:=int(eq15,x)+C16:**

> **eq17:=int(-M9,x)+C17:eq18:=int(eq17,x)+C18:**

> **eq19:=int(-M10,x)+C19:eq20:=int(eq19,x)+C20:**

Condições de contorno

> **subs(x=0,eq2):**

Logo C2=0

> **C2:=0:**

> **subs(x=0,eq1):**

Logo C1=0

> **C1:=0:**

em x=a

> **C3:=solve(subs(x=a,eq3-eq1),C3):**

> **C4:=solve(subs(x=a,eq4-eq2),C4):**

Em x=2a

> **C5:=solve(subs(x=2*a,eq5-eq3),C5):**

> **C6:=solve(subs(x=2*a,eq6-eq4),C6):**

Em x=3a

> **C7:=solve(subs(x=3*a,eq7-eq5),C7):**

> **C8:=solve(subs(x=3*a,eq8-eq6),C8):**

Em x=4a

> **C9:=solve(subs(x=4*a,eq9-eq7),C9):**

> **C10:=solve(subs(x=4*a,eq10-eq8),C10):**

Em x=5a

> **C11:=solve(subs(x=5*a,eq11-eq9),C11):**

> **C12:=solve(subs(x=5*a,eq12-eq10),C12):**

Em x=6a

> **C13:=solve(subs(x=6*a,eq13-eq11),C13):**

> **C14:=solve(subs(x=6*a,eq14-eq12),C14):**

Em x=7a

> **C15:=solve(subs(x=7*a,eq15-eq13),C15):**

> **C16:=solve(subs(x=7*a,eq16-eq14),C16):**

Em x=8a

> **C17:=solve(subs(x=8*a,eq17-eq15),C17):**

> **C18:=solve(subs(x=8*a,eq18-eq16),C18):**

Em x=9a

> **C19:=solve(subs(x=9*a,eq19-eq17),C19):**

> **C20:=solve(subs(x=9*a,eq20-eq18),C20):**

Em x=10*a V=0 V`=0

> **Ma:=solve(subs(x=10*a,eq20), Ma):**

va:=subs(x=a,eq2);v2a:=subs(x=2*a,eq4);v3a:=subs(x=3*a,eq6);v4a:=subs(x=4*a,eq8);v5a:=subs(x=5*a,eq10);v6a:=subs(x=6*a,eq12);v7a:=subs(x=7*a,eq14);v8a:=subs(x=8*a,eq16);v9a:=subs(x=9*a,eq18);v10a:=subs(x=10*a,eq20);

$$va := \frac{27}{8} P\, a^3$$

$$v2a := \frac{32}{3} P\, a^3$$

$$v3a := \frac{147}{8} P\, a^3$$

$$v4a := 24\, P\, a^3$$

$$v5a := \frac{625}{24} P\, a^3$$

$$v6a := 24\, P\, a^3$$

$$v7a := \frac{147}{8} P\, a^3$$

$$v8a := \frac{32}{3} P\, a^3$$

$$v9a := \frac{27}{8} P\, a^3$$

$$v10a := 0$$

> **v:=subs(a=b/10,v5a);**

$$v := \frac{5}{192} P\, b^3$$

e) Viga fixa nas extremidades com duas cargas no vão como no caso 3

> **restart:**

> **M1:=P*x-Ma:**

> **M2:=M1-P*(x-a):**

> **M3:=M2-P*(x-2*a):**

> **eq1:=int(-M1,x)+C1:eq2:=int(eq1,x)+C2:**

> **eq3:=int(-M2,x)+C3:eq4:=int(eq3,x)+C4:**

> **eq5:=int(-M3,x)+C5:eq6:=int(eq5,x)+C6:**

Condições de contorno

> **subs(x=0,eq2):**

Logo C2=0

> **C2:=0:**

> **subs(x=0,eq1):**

Logo C1=0

> **C1:=0:**

em x=a

> **C3:=solve(subs(x=a,eq3-eq1),C3):**

> **C4:=solve(subs(x=a,eq4-eq2),C4):**

Em x=2a

> **C5:=solve(subs(x=2*a,eq5-eq3),C5):**

> **C6:=solve(subs(x=2*a,eq6-eq4),C6):**

> **Ma:=solve(subs(x=3*a,eq6), Ma):**

> **va:=subs(x=a,eq2);v2a:=subs(x=2*a,eq4);v3a:=subs(x=3*a,eq6);**

$$va := \frac{1}{6} P\, a^3$$

$$v2a := \frac{1}{6} P\, a^3$$

$$v3a := 0$$

> **subs(a=b/3,va);**

$$\frac{1}{162} P\, b^3$$

f) Viga fixa nas extremidades com quatro cargas no vão

> **restart: with(linalg):**

> **M1:=2*P*x-Ma:**

> **M2:=M1-P*(x-a):**

> **M3:=M2-P*(x-2*a):**

> **M4:=M3-P*(x-3*a):**

> **M5:=M4-P*(x-4*a):**

> **eq1:=int(-M1,x)+C1:eq2:=int(eq1,x)+C2:**

> **eq3:=int(-M2,x)+C3:eq4:=int(eq3,x)+C4:**

> **eq5:=int(-M3,x)+C5:eq6:=int(eq5,x)+C6:**

> **eq7:=int(-M4,x)+C7:eq8:=int(eq7,x)+C8:**

> **eq9:=int(-M5,x)+C9:eq10:=int(eq9,x)+C10:**

Condições de contorno

> **subs(x=0,eq2):**

Logo C2=0

> **C2:=0:**

> **subs(x=0,eq1):**

Logo C1=0

> **C1:=0:**

em x=a

> **C3:=solve(subs(x=a,eq3-eq1),C3):**

> **C4:=solve(subs(x=a,eq4-eq2),C4):**

> **C5:=solve(subs(x=2*a,eq5-eq3),C5):**

> **C6:=solve(subs(x=2*a,eq6-eq4),C6):**

> **C7:=solve(subs(x=3*a,eq7-eq5),C7):**

> **C8:=solve(subs(x=3*a,eq8-eq6),C8):**

> **C9:=solve(subs(x=4*a,eq9-eq7),C9):**

> **C10:=solve(subs(x=4*a,eq10-eq8),C10):**

> **Ma:=solve(subs(x=5*a,eq10), Ma):**

va:=subs(x=a,eq2);v2a:=subs(x=2*a,eq4);v3a:=subs(x=3*a,eq6);v4a:=subs(x=4*a,eq8);v5a:=subs(x=5*a,eq10);

$$va := \frac{2}{3} P\, a^3$$

$$v2a := \frac{3}{2} P\, a^3$$

$$v3a := \frac{3}{2} P\, a^3$$

$$v4a := \frac{2}{3} P\, a^3$$

$$v5a := 0$$

*g) V*iga fixa nas extremidades com cinco cargas no vão

```
> restart:
> M1:=5/2*P*x-Ma:
> M2:=M1-P*(x-a):
> M3:=M2-P*(x-2*a):
> M4:=M3-P*(x-3*a):
> M5:=M4-P*(x-4*a):
> M6:=M5-P*(x-5*a):
> eq1:=int(-M1,x)+C1:eq2:=int(eq1,x)+C2:
> eq3:=int(-M2,x)+C3:eq4:=int(eq3,x)+C4:
> eq5:=int(-M3,x)+C5:eq6:=int(eq5,x)+C6:
> eq7:=int(-M4,x)+C7:eq8:=int(eq7,x)+C8:
> eq9:=int(-M5,x)+C9:eq10:=int(eq9,x)+C10:
> eq11:=int(-M6,x)+C11:eq12:=int(eq11,x)+C12:
```

Condições de contorno

```
> subs(x=0,eq2):
```

Logo C2=0

```
> C2:=0:
> subs(x=0,eq1):
```

Logo C1=0

```
> C1:=0:
```

em x=a

```
> C3:=solve(subs(x=a,eq3-eq1),C3):
> C4:=solve(subs(x=a,eq4-eq2),C4):
```

Em x=2a

```
> C5:=solve(subs(x=2*a,eq5-eq3),C5):
> C6:=solve(subs(x=2*a,eq6-eq4),C6):
```

Em x=3a

```
> C7:=solve(subs(x=3*a,eq7-eq5),C7):
> C8:=solve(subs(x=3*a,eq8-eq6),C8):
```

Em x=4a

```
> C9:=solve(subs(x=4*a,eq9-eq7),C9):
> C10:=solve(subs(x=4*a,eq10-eq8),C10):
```

Em x=5a

```
> C11:=solve(subs(x=5*a,eq11-eq9),C11):
> C12:=solve(subs(x=5*a,eq12-eq10),C12):
```

Em x=6*a V=0 V`=0

```
> Ma:=solve(subs(x=6*a,eq12), Ma):
```

va:=subs(x=a,eq2);v2a:=subs(x=2*a,eq4);v3a:=subs(x=3*a,eq6);v4a:=subs(x=4*a,eq8);v5a:=subs(x=5*a,eq10);v6a:=subs(x=6*a,eq12);

$$va := \frac{25}{24} P\, a^3$$

$$v2a := \frac{8}{3} P\, a^3$$

$$v3a := \frac{27}{8} P\, a^3$$

$$v4a := \frac{8}{3} P\, a^3$$

$$v5a := \frac{25}{24} P\, a^3$$

$$v6a := 0$$

h) Viga Fixa nas extremidades com uma carga em qualquer posição

```
> restart:
> Ma:=P*alpha*beta^2/(b)^2:
> Mb:=-P*alpha^2*beta/(b)^2:
```

Reações

```
> Vb:=simplify((-Ma-Mb+P*alpha)/(b)):
> Va:=P-Vb:
```

Contribuição da Primeira Carga

x<alpha

```
> M1:=subs([alpha=a,beta=b-a],Va*x-Ma):
```

x>alpha

```
> M2:=M1-P*(x-a):
> eq1A:=int(-M1,x)+C1:eq2A:=int(eq1A,x)+C2:
> eq3A:=int(-M2,x)+C3:eq4A:=int(eq3A,x)+C4:
```

Condições de contorno

```
> subs(x=0,eq2A):
```

Logo C2=0

```
> C2:=0:
> subs(x=0,eq1A):
```

Logo C1=0

```
> C1:=0:
```

Em x=a

```
> C3:=solve(subs(x=a,eq3A-eq1A),C3):
> C4:=solve(subs(x=a,eq4A-eq2A),C4):
> va:=subs(x=a,eq2A);v2a:=subs(x=b-a,eq4A);
>
```

$$va := -\frac{\left(P - \frac{P\,a\,(-(b-a)^2 + a\,(b-a) + b^2)}{b^3}\right) a^3}{6} + \frac{P\,a^3\,(b-a)^2}{2\,b^2}$$

$$v2a := -\frac{\left(P - \frac{P\,a\,(-(b-a)^2 + a\,(b-a) + b^2)}{b^3}\right) (b-a)^3}{6} + \frac{P\,a\,(b-a)^4}{2\,b^2} + P\left(\frac{(b-a)^3}{6} - \frac{a\,(b-a)^2}{2}\right) + \frac{P\,a^2\,(b-a)}{2} - \frac{P\,a^3}{6}$$

Teste para b/2

> **v1:= subs(a=b/2,v2a);**

$$v1 := \frac{P\,b^3}{192}$$

i) Viga Fixa nas extremidades com duas cargas como no caso 8

> **restart:**

> **Ma:=P*alpha*beta^2/(b)^2:**

> **Mb:=-P*alpha^2*beta/(b)^2:**

Reações

> **Vb:=simplify((-Ma-Mb+P*alpha)/(b)):**

> **Va:=P-Vb:**

Contribuição da Primeira Carga

x<alpha

> **M1:=subs([alpha=a,beta=b-a],Va*x-Ma):**

x>alpha

> **M2:=M1-P*(x-a):**

> **eq1A:=int(-M1,x)+C1:eq2A:=int(eq1A,x)+C2:**

> **eq3A:=int(-M2,x)+C3:eq4A:=int(eq3A,x)+C4:**

Condições de contorno

> **subs(x=0,eq2A):**

Logo C2=0

> **C2:=0:**

> **subs(x=0,eq1A):**

Logo C1=0

> **C1:=0:**

eq3=eq1 em x=a

> **C3:=solve(subs(x=a,eq3A-eq1A),C3):**

> **C4:=solve(subs(x=a,eq4A-eq2A),C4):**

> **va:=subs(x=a,eq2A):v2a:=evalf(expand(subs(x=b-a,eq4A))):**

> **subs(a=b/2,va):**

Contribuição da segunda carga

```
> M3:=subs([alpha=b-a,beta=a],Va*x-Ma):
> M4:=M3-P*(x-b+a):
> eq1B:=int(-M3,x)+C5:eq2B:=int(eq1B,x)+C6:
> eq3B:=int(-M4,x)+C7:eq4B:=int(eq3B,x)+C8:
```

Condições de contorno

```
> subs(x=0,eq2B):
```

Logo C6=0

```
> C6:=0:
> subs(x=0,eq1B):
```

Logo C1=0

```
> C5:=0:
```

Em x=2a

```
> C7:=solve(subs(x=b-a,eq3B-eq1B),C7):
> C8:=solve(subs(x=b-a,eq4B-eq2B),C8):
> va:=subs(x=a,eq2B):v2a:=evalf(expand(subs(x=b-a,eq4A))):
```

Deslocamentos

```
> y1:=simplify(subs(x=a,eq2A)+subs(x=a,eq2B));
```

$$y1 := \frac{P\,a^3\,(2\,b-3\,a)}{6\,b}$$

```
> y2:=simplify(subs(x=b-a,eq4A)+subs(x=b-a,eq2B));
```

$$y2 := \frac{P\,a^3\,(2\,b-3\,a)}{6\,b}$$

j) Viga Fixa nas extremidades com três cargas fixas em qualquer posição

```
> restart:
> Ma:=P*alpha*beta^2/(b)^2:
> Mb:=-P*alpha^2*beta/(b)^2:
```

Reações

```
> Vb:=simplify((-Ma-Mb+P*alpha)/(b)):
> Va:=P-Vb:
```

Contribuição da Primeira Carga

x<alpha

```
> M1:=subs([alpha=a,beta=b-a],Va*x-Ma):
```

x>alpha

```
> M2:=M1-P*(x-a):
> eq1A:=int(-M1,x)+C1:eq2A:=int(eq1A,x)+C2:
> eq3A:=int(-M2,x)+C3:eq4A:=int(eq3A,x)+C4:
```

Condições de contorno

```
> subs(x=0,eq2A):
```

Logo C2=0

> **C2:=0:**

> **subs(x=0,eq1A):**

Logo C1=0

> **C1:=0:**

Em x=a

> **C3:=solve(subs(x=a,eq3A-eq1A),C3):**

> **C4:=solve(subs(x=a,eq4A-eq2A),C4):**

> **va:=subs(x=a,eq2A):v2a:=evalf(expand(subs(x=b-a,eq4A))):**

> **subs(a=b/2,va):**

Contribuição da segunda carga

> **M3:=subs([alpha=2*a,beta=b-2*a],Va*x-Ma):**

x>alpha

> **M4:=M3-P*(x-2*a):**

> **eq1B:=int(-M3,x)+C5:eq2B:=int(eq1B,x)+C6:**

> **eq3B:=int(-M4,x)+C7:eq4B:=int(eq3B,x)+C8:**

Condições de contorno

> **subs(x=0,eq2B):**

Logo C6=0

> **C6:=0:**

> **subs(x=0,eq1B):**

Logo C1=0

> **C5:=0:**

em x=2a

> **C7:=solve(subs(x=2*a,eq3B-eq1B),C7):**

> **C8:=solve(subs(x=2*a,eq4B-eq2B),C8):**

> **va:=subs(x=2*a,eq2B):v2a:=evalf(expand(subs(x=b,eq4A))):**

Contribuição da terceira carga

> **M5:=subs([alpha=3*a,beta=b-3*a],Va*x-Ma):**

> **M6:=M5-P*(x-3*a):**

> **eq1C:=int(-M5,x)+C9:eq2C:=int(eq1C,x)+C10:**

> **eq3C:=int(-M6,x)+C11:eq4C:=int(eq3C,x)+C12:**

Condições de contorno

> **subs(x=0,eq2C):**

Logo C6=0

> **C10:=0:**

> **subs(x=0,eq1C):**

Logo C9=0

> **C9:=0:**

Em x=3a

> **C11:=solve(subs(x=3*a,eq3C-eq1C),C11):**

```
> C12:=solve(subs(x=3*a,eq4C-eq2C),C12):
> va:=subs(x=3*a,eq2C):v2a:=evalf(expand(subs(x=b,eq4C))):
```

k) Viga fixa nas extremidades com quatro cargas concentradas como apresenta o modelo 5

```
> restart:
> Ma:=P*alpha*beta^2/b^2:
> Mb:=-P*alpha^2*beta/b^2:
```

Reações

```
> Vb:=simplify((-Ma-Mb+P*alpha)/b):
> Va:=P-Vb:
```

x<alpha

```
> M1:=subs([alpha=a,beta=b-a],Va*x-Ma):
```

x>alpha

```
> M2:=M1-P*(x-a):
> eq1A:=int(-M1,x)+C1:eq2A:=int(eq1A,x)+C2:
> eq3A:=int(-M2,x)+C3:eq4A:=int(eq3A,x)+C4:
```

Condições de contorno

```
> subs(x=0,eq2A):
```

Logo C2=0

```
> C2:=0:
> subs(x=0,eq1A):
```

Logo C1=0

```
> C1:=0:
```

Em x=a

```
> C3:=solve(subs(x=a,eq3A-eq1A),C3):
> C4:=solve(subs(x=a,eq4A-eq2A),C4):
> va:=subs(x=a,eq2A):v2a:=evalf(expand(subs(x=b,eq4A))):
> subs(a=b/2,va):
```

Contribuição da segunda carga

```
> M3:=subs([alpha=2*a,beta=b-2*a],Va*x-Ma):
> M4:=M3-P*(x-2*a):
> eq1B:=int(-M3,x)+C5:eq2B:=int(eq1B,x)+C6:
> eq3B:=int(-M4,x)+C7:eq4B:=int(eq3B,x)+C8:
```

Condições de contorno

```
> subs(x=0,eq2B):
```

Logo C6=0

```
> C6:=0:
> subs(x=0,eq1B):
```

Logo C1=0

```
> C5:=0:
```

Em x=2a

> **C7:=solve(subs(x=2*a,eq3B-eq1B),C7):**

> **C8:=solve(subs(x=2*a,eq4B-eq2B),C8):**

> **va:=subs(x=2*a,eq2B):v2a:=evalf(expand(subs(x=b,eq4A))):**

> **subs(a=b/4,va):**

Contribuição da terceira carga

> **M5:=subs([alpha=3*a,beta=b-3*a],Va*x-Ma):**

> **M6:=M5-P*(x-3*a):**

> **eq1C:=int(-M5,x)+C9:eq2C:=int(eq1C,x)+C10:**

> **eq3C:=int(-M6,x)+C11:eq4C:=int(eq3C,x)+C12:**

Condições de contorno

> **subs(x=0,eq2C):**

Logo C6=0

> **C10:=0:**

> **subs(x=0,eq1C):**

Logo C9=0

> **C9:=0:**

Em x=3a

> **C11:=solve(subs(x=3*a,eq3C-eq1C),C11):**

> **C12:=solve(subs(x=3*a,eq4C-eq2C),C12):**

> **va:=subs(x=3*a,eq2C):v2a:=evalf(expand(subs(x=b,eq4C))):**

> **subs(a=b/6,va):**

Contribuição da quarta carga

> **M7:=subs([alpha=4*a,beta=b-4*a],Va*x-Ma):**

> **M8:=M6-P*(x-4*a):**

> **eq1D:=int(-M7,x)+C13:eq2D:=int(eq1D,x)+C14:**

> **eq3D:=int(-M8,x)+C15:eq4D:=int(eq3D,x)+C16:**

Condições de contorno

> **subs(x=0,eq2D):**

Logo C14=0

> **C14:=0:**

> **subs(x=0,eq1D):**

Logo C13=0

> **C13:=0:**

Em x=3a

> **C15:=solve(subs(x=4*a,eq3D-eq1D),C15):**

> **C16:=solve(subs(x=4*a,eq4D-eq2D),C16):**

> **va:=subs(x=4*a,eq2D):v2a:=evalf(expand(subs(x=b,eq4D))):**

l) Cálculo dos deslocamentos para uma viga fixa nas extremidades com oito cargas para cálculo da menor rigidez para o caso sem estribos suplementares

> **restart:**

> **Ma:=P*alpha*beta^2/b^2:**

> **Mb:=-P*alpha^2*beta/b^2:**

Reações

> **Vb:=simplify((-Ma-Mb+P*alpha)/b):**

> **Va:=P-Vb:**

> **Ma1:=subs([alpha=a,beta=b-a],Ma):Ma2:=subs([alpha=b/3-a,beta=2*b/3+a],Ma):Ma3:=subs([alpha=b/3,beta=2*b/3],Ma):Ma4:=subs([alpha=b/3+a,beta=2*b/3-a],Ma):Ma5:=subs([alpha=2*b/3-a,beta=b/3+a],Ma):Ma6:=subs([alpha=2*b/3,beta=b/3],Ma):Ma7:=subs([alpha=2*b/3+a,beta=b/3-a],Ma):Ma8:=subs([alpha=b-a,beta=a],Ma):**

> **Mb1:=subs([alpha=a,beta=b-a],Mb):Mb2:=subs([alpha=b/3-a,beta=2*b/3+a],Mb):Mb3:=subs([alpha=b/3,beta=2*b/3],Mb):Mb4:=subs([alpha=b/3+a,beta=2*b/3-a],Mb):Mb5:=subs([alpha=2*b/3-a,beta=b/3+a],Mb):Mb6:=subs([alpha=2*b/3,beta=b/3],Mb):Mb7:=subs([alpha=2*b/3+a,beta=b/3-a],Mb):Mb8:=subs([alpha=b-a,beta=a],Mb):**

> **Vb1:=simplify((-Ma1-Mb1+P*a)/b):**

> **Va1:=P-Vb1:**

> **Vb2:=simplify((-Ma2-Mb2+P*(b/3-a))/b):**

> **Va2:=P-Vb2:**

> **Vb3:=simplify((-Ma3-Mb3+P*b/3)/b):**

> **Va3:=P-Vb3:**

> **Vb4:=simplify((-Ma4-Mb4+P*(b/3+a))/b):**

> **Va4:=P-Vb4:**

> **Vb5:=simplify((-Ma5-Mb5+P*(2*b/3-a))/b):**

> **Va5:=P-Vb5:**

> **Vb6:=simplify((-Ma6-Mb6+P*(2*b/3))/b):**

> **Va6:=P-Vb6:**

> **Vb7:=simplify((-Ma7-Mb7+P*(2*b/3+a))/b):**

> **Va7:=P-Vb7:**

> **Vb8:=simplify((-Ma8-Mb8+P*(b-a))/b):**

> **Va8:=P-Vb8:**

> **Va:=simplify(Va1+Va2+Va3+Va4+Va5+Va6+Va7+Va8):**

> **Vb:=simplify(Vb1+Vb2+Vb3+Vb4+Vb5+Vb6+Vb7+Vb8):**

> **Ma:='Ma':**

> **M1:=4*P*x-Ma:**

> **M2:=M1-P*(x-a):**

> **M3:=M2-P*(x-b/3+a):**

> **M4:=M3-P*(x-b/3):**

> **M5:=M4-P*(x-b/3-a):**

> **M6:=M5-P*(x-2*b/3+a):**

> **M7:=M6-P*(x-2*b/3):**

> **M8:=M7-P*(x-2*b/3-a):**

> **M9:=M8-P*(x-b+a):**

> **eq1:=int(-M1,x)+C1:eq2:=int(eq1,x)+C2:**

> **eq3:=int(-M2,x)+C3:eq4:=int(eq3,x)+C4:**

> **eq5:=int(-M3,x)+C5:eq6:=int(eq5,x)+C6:**

> **eq7:=int(-M4,x)+C7:eq8:=int(eq7,x)+C8:**

> **eq9:=int(-M5,x)+C9:eq10:=int(eq9,x)+C10:**

> **eq11:=int(-M6,x)+C11:eq12:=int(eq11,x)+C12:**

> **eq13:=int(-M7,x)+C13:eq14:=int(eq13,x)+C14:**

> **eq15:=int(-M8,x)+C15:eq16:=int(eq15,x)+C16:**

> **eq17:=int(-M9,x)+C17:eq18:=int(eq17,x)+C18:**

Condições de contorno

> **subs(x=0,eq2):**

Logo C2=0

> **C2:=0:**

> **subs(x=0,eq1):**

Logo C1=0

> **C1:=0:**

Em x=a

> **C3:=solve(subs(x=a,eq3-eq1),C3):**

> **C4:=solve(subs(x=a,eq4-eq2),C4):**

Em x=b/3-a

> **C5:=solve(subs(x=b/3-a,eq5-eq3),C5):**

> **C6:=solve(subs(x=b/3-a,eq6-eq4),C6):**

Em x=b/3

> **C7:=solve(subs(x=b/3,eq7-eq5),C7):**

> **C8:=solve(subs(x=b/3,eq8-eq6),C8):**

Em x=b/3+a

> **C9:=solve(subs(x=b/3+a,eq9-eq7),C9):**

> **C10:=solve(subs(x=b/3+a,eq10-eq8),C10):**

Em x=2*b/3-a

> **C11:=solve(subs(x=2*b/3-a,eq11-eq9),C11):**

> **C12:=solve(subs(x=2*b/3-a,eq12-eq10),C12):**

Em x=2*b/3

> **C13:=solve(subs(x=2*b/3,eq11-eq13),C13):**

> **C14:=solve(subs(x=2*b/3,eq12-eq14),C14):**

> **C15:=solve(subs(x=2*b/3+a,eq15-eq13),C15):**

> **C16:=solve(subs(x=2*b/3+a,eq16-eq14),C16):**

> **C17:=solve(subs(x=b-a,eq15-eq17),C17):**

> **C18:=solve(subs(x=b-a,eq16-eq18),C18):**

Em x=b V=0 V`=0

> **Ma:=solve(subs(x=b,eq18), Ma):**

> **va:=simplify(subs(x=a,eq2));v2a:=simplify(subs(x=b/3-a,eq4));v3a:=simplify(subs(x=b/3,eq6));v4a:=simplify(subs(x=b/3+a,eq8));v5a:=simplify(subs(x=2*b/3-a,eq10));v6:=simplify(subs(x=b,eq18));**

$$va := \frac{P\, a^2\, (-b\, a + 2\, b^2 - 9\, a^2)}{6\, b}$$

$$v2a := \frac{P\, (b^4 - 3\, b^3\, a - 9\, a^2\, b^2 + 45\, a^3\, b - 81\, a^4)}{54\, b}$$

$$v3a := \frac{P\, b^3}{54}$$

$$v4a := \frac{P\, (b^4 + 3\, b^3\, a - 9\, a^2\, b^2 + 18\, a^3\, b - 81\, a^4)}{54\, b}$$

$$v5a := \frac{P\, (b^4 + 3\, b^3\, a - 9\, a^2\, b^2 + 18\, a^3\, b - 81\, a^4)}{54\, b}$$

$$v6 := 0$$