

4

Influência dos Apoios Laterais no Caminho Pós-Crítico da Coluna

4.1.

Introdução

Neste capítulo apresentam-se as curvas que relacionam o parâmetro da carga crítica e o parâmetro de rigidez dos estribos para o modelo matemático considerado no Capítulo 3 e os caminhos pós-críticos com a finalidade de verificar se existe alguma fragilidade no caminho inicial levando-se em consideração a influência do parâmetro de rigidez do estribo, o comprimento da coluna e a imperfeição geométrica inicial.

4.2.

Apoios Discretos

4.2.1.

Caso Linear

Apresenta-se na Figura 4.1 a curva que relaciona o parâmetro de carga, Γ , com o parâmetro de rigidez dos apoios laterais, η , considerando-se os estribos como apoios discretos e os campos de deslocamentos considerados nas expressões (3.28) e (3.29) com um grau de liberdade. Nota-se que quando não existem apoios laterais o parâmetro de carga crítica permanece constante e igual a $4\pi^2$, no mesmo gráfico estão plotadas as curvas considerando-se que o comprimento envolvido na flambagem é de até seis vezes o espaçamento entre estribos, ou seja, até cinco estribos estão envolvidos. Nota-se que um aumento na rigidez provoca aumento na carga crítica da armadura longitudinal como pode ser verificado através das expressões (3.38) à (3.42). Nesses casos a carga de flambagem varia linearmente com a rigidez dos estribos.

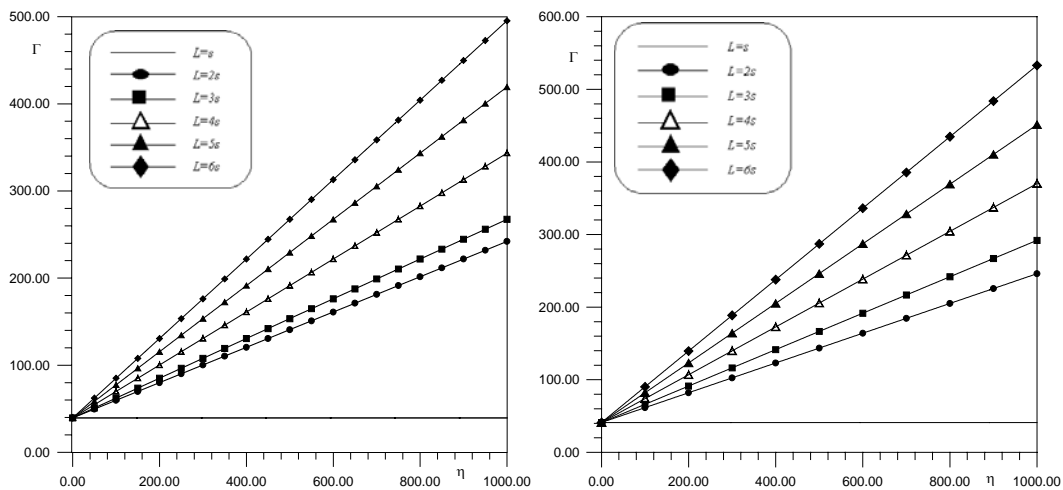
A Figura 4.2 apresenta a curva Γ vs. η para a coluna considerando-se três graus de liberdade e o campo de deslocamentos composto apenas por funções simétricas como na eq. (3.28).

Nota-se na Figura 4.2.a., quando a coluna possui apenas um apoio lateral, que a menor carga de flambagem acontece no primeiro modo se o parâmetro de rigidez obedece aproximadamente à restrição:

$$\eta < 600 \tag{4.1}$$

A partir do valor $\eta \cong 600$, a menor carga ocorre no segundo modo. Como a Figura 4.2.a abrange apenas três graus de liberdade, é difícil afirmar para este caso como será o comportamento para parâmetros de rigidezes maiores.

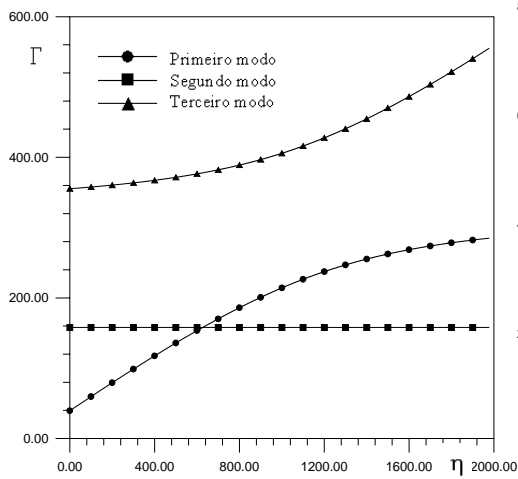
Quando se consideram mais de dois apoios laterais verifica-se que a carga de flambagem ocorrerá sempre no primeiro modo, isto porque o modo de deformação é simétrico. Muitos autores dentre os quais cita-se Bresler & Gilbert (1961), Papia *et al.* (1988) e Pantazopoulou (1998) têm considerado em seus trabalhos sobre flambagem das armaduras longitudinais apenas deformações do tipo simétrico, porém está comprovado de vários estudos experimentais como os ensaios de Sheikh & Uzumeri (1980) que a flambagem poderia acontecer em qualquer direção.



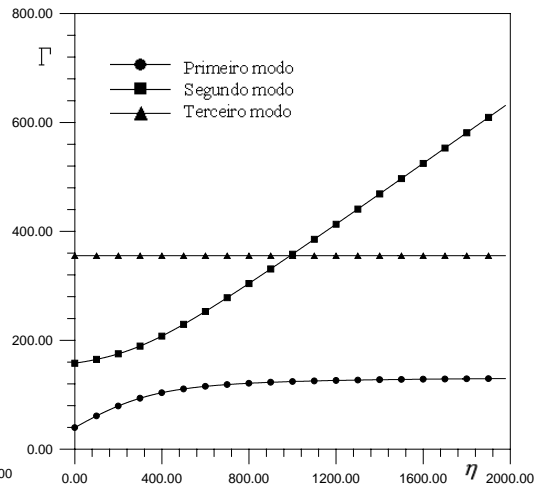
a) Modo de deformação simétrico

b) Modo de deformação geral

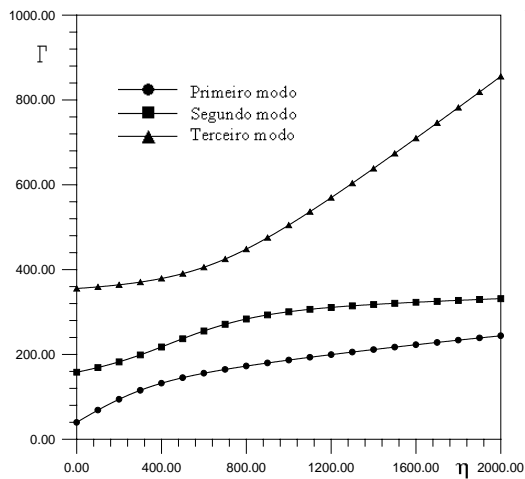
Figura 4.1- Parâmetro de carga vs. Parâmetro de rigidez dos estribos para o caso linear com um grau de liberdade.



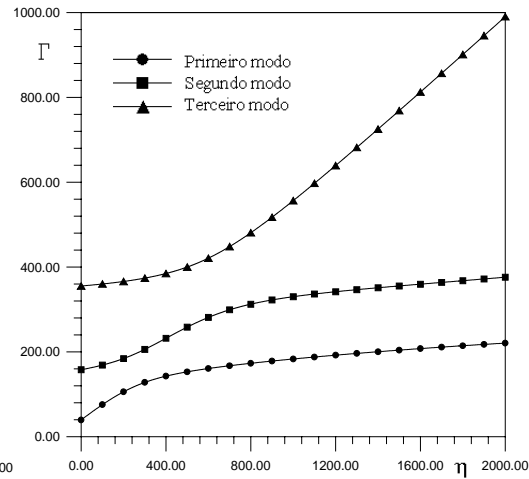
a) Um apoio lateral



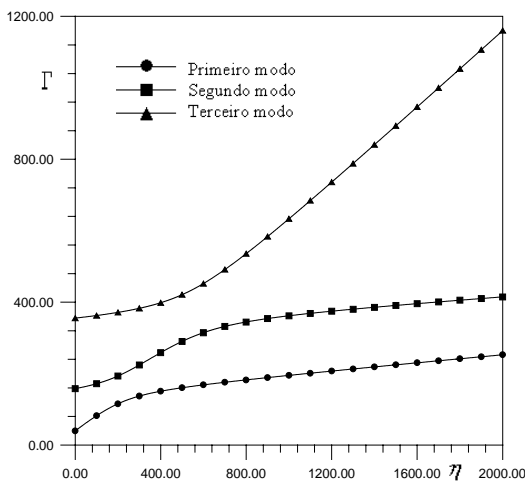
b) Dois apoios laterais



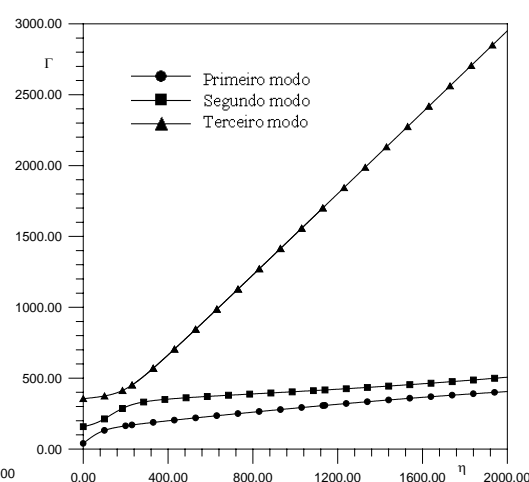
c) três apoios laterais



d) Quatro apoios laterais.



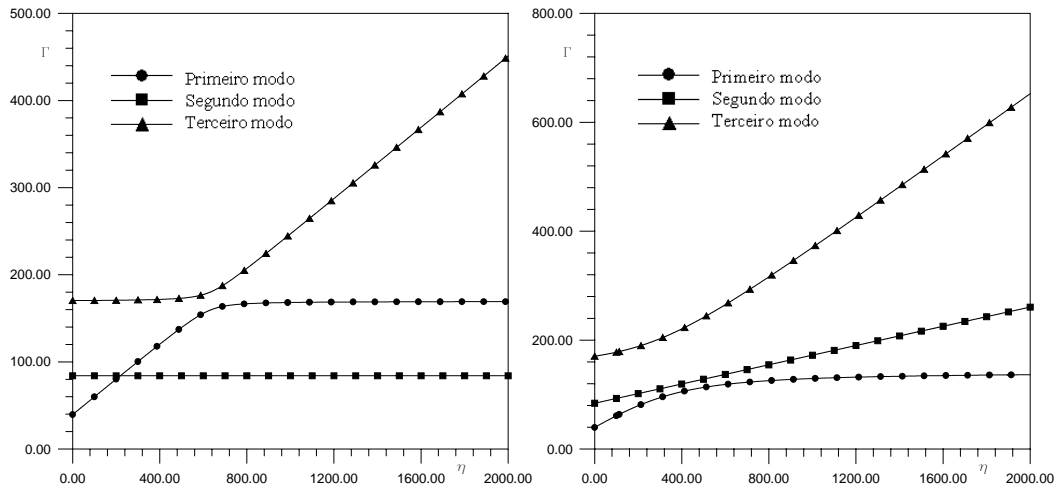
e) Cinco Apoios Laterais



f) Quinze apoios laterais

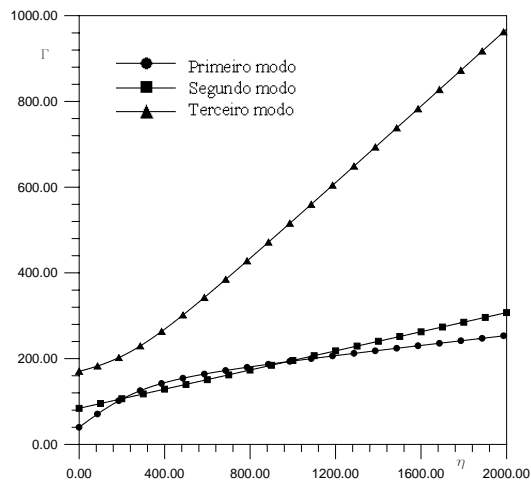
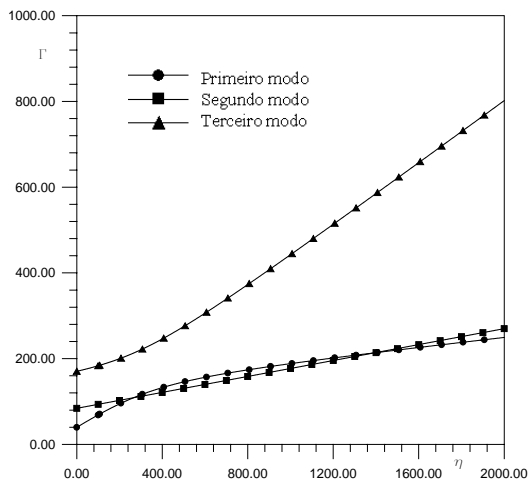
Figura 4.2- Parâmetro de carga vs. Parâmetro de rigidez dos estribos para o caso linear com três graus de liberdade sem imperfeição geométrica inicial considerando-se apenas deformações simétricas.

A Figura 4.3 apresenta a curva Γ vs. η para a coluna considerando-se três graus de liberdade e um modo de deformação geral como na eq. (3.29).



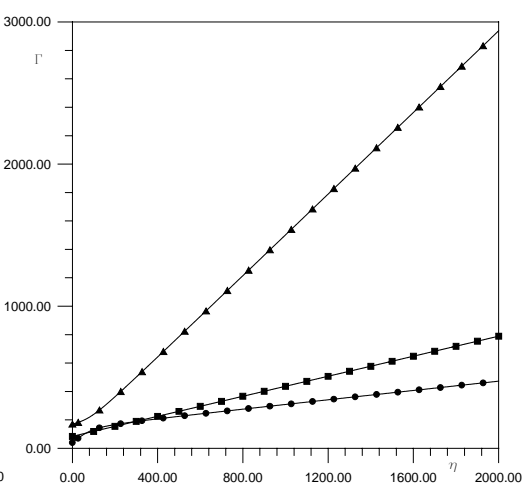
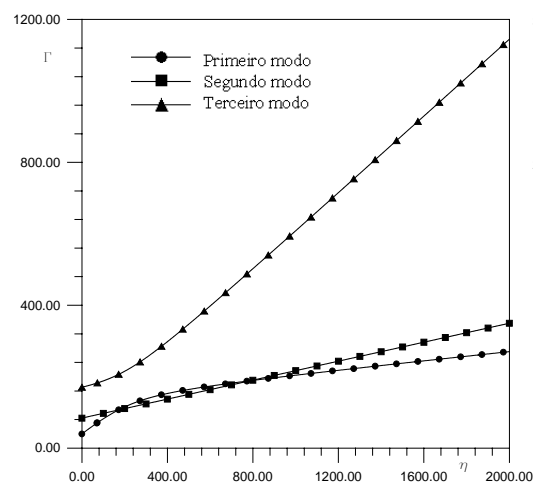
a) Um apoio lateral

b) Dois apoios laterais



c) Três apoios laterais

d) Quatro Apoios Laterais



e) Cinco apoios laterais

f) Quinze apoios laterais

Figura 4.3- Parâmetro de carga vs. Parâmetro de rigidez dos estribos para o caso linear com três graus de liberdade e um modo de deformação geral.

Verifica-se na Figura 4.3 um maior envolvimento dos modos na carga de flambagem, pois dependendo do parâmetro de rigidez, a carga de flambagem poderá acontecer em qualquer modo.

Na Figura 4.3.a, a coluna possui um apoio lateral e a menor carga de flambagem ocorre no primeiro modo quando o parâmetro de rigidez obedece aproximadamente à restrição:

$$\eta \leq 240 \quad (4.2)$$

A partir de $\eta \cong 240$, a menor carga ocorre no segundo modo de flambagem, assim, quanto maior o número de estribos mais modos podem estar envolvidos na flambagem da coluna.

A Figura 4.3.f apresenta o caso com quinze apoios laterais que será comparado com o caso da coluna sobre base elástica.

4.2.2.

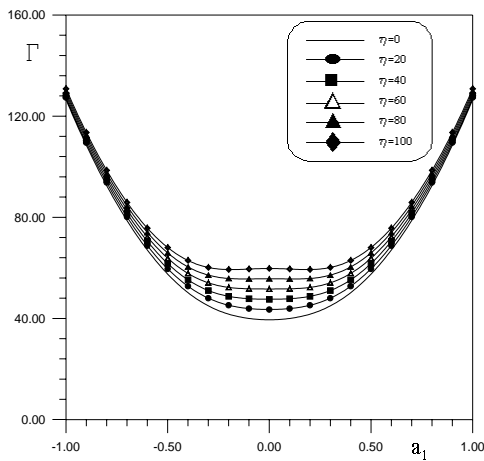
Caso Não-Linear

4.2.2.1

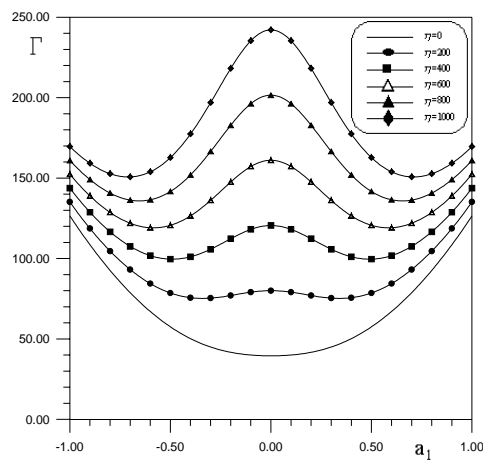
Caminho Pós-Crítico da Coluna

As Figuras 4.4 a 4.8 apresentam os caminhos pós-críticos da coluna para o caso não-linear com um grau de liberdade sem levar em consideração o efeito da imperfeição geométrica inicial, considerando-se a coluna com um a cinco apoios laterais e o modo de deformação do tipo simétrico. O objetivo destes gráficos foi avaliar o comportamento da coluna sobre apoios elásticos no caminho inicial.

A Figura 4.4 mostra o caminho pós-crítico da coluna com um grau de liberdade sem imperfeição inicial com um apoio lateral. Nota-se na Figura 4.4.a que para pequenos valores do parâmetro de rigidez, η , o caminho pós-crítico da coluna é estável, porém um aumento no parâmetro de rigidez dos estribos faz com que o caminho se torne instável em determinadas regiões do gráfico. O mesmo acontece com as Figuras de 4.5 a 4.8.

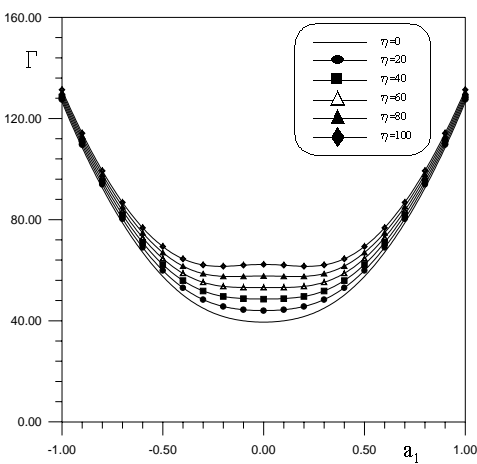


a) $\eta = 0..100$

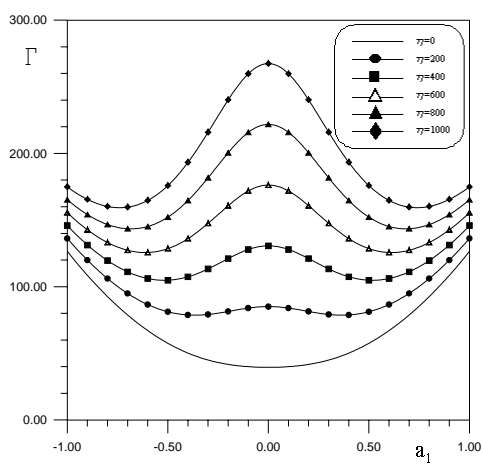


b) $\eta = 0..1000$

Figura 4.4 - Caminho pós-crítico da coluna com um grau de liberdade sem imperfeição inicial e um apoio lateral, $L=2S$, para um modo de deformação simétrico.

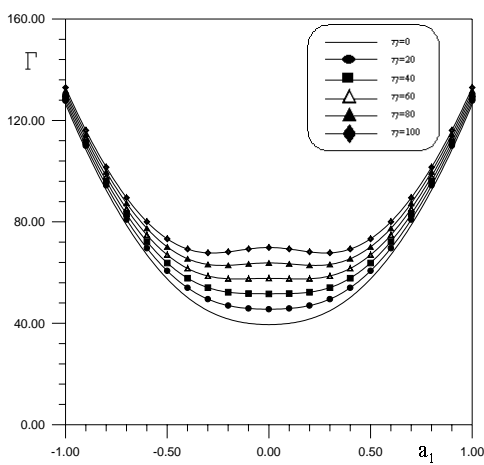


a) $\eta = 0..100$

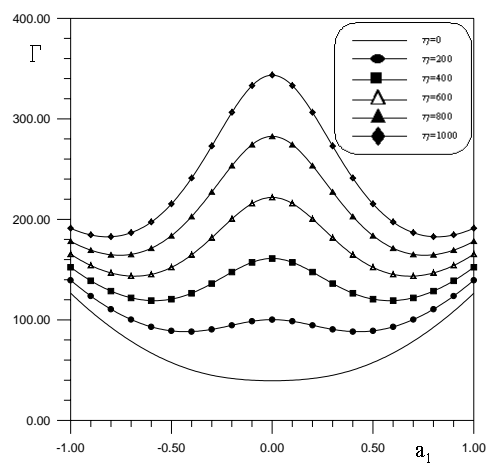


b) $\eta = 0..1000$

Figura 4.5 - Caminho pós-crítico da coluna com um grau de liberdade sem imperfeição inicial e dois apoios laterais, $L=3S$, para um modo de deformação simétrico.



a) $\eta = 0..100$



b) $\eta = 0..1000$

Figura 4.6 - Caminho pós-crítico da coluna com um grau de liberdade sem imperfeição inicial e três apoios laterais, $L=4S$, para um modo de deformação simétrico.

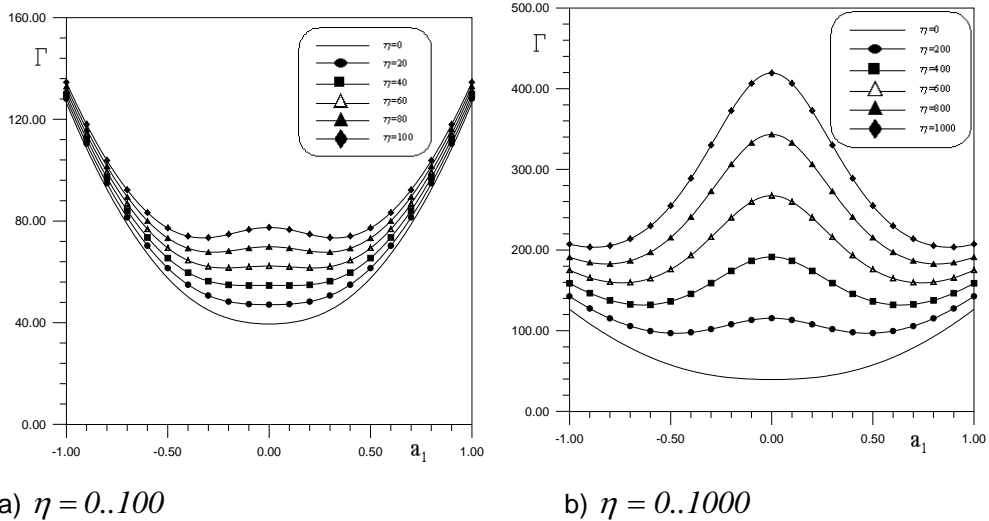


Figura 4.7 - Caminho pós-crítico da coluna com um grau de liberdade sem imperfeição inicial e quatro apoios laterais, $L=5S$, para um modo de deformação simétrico.

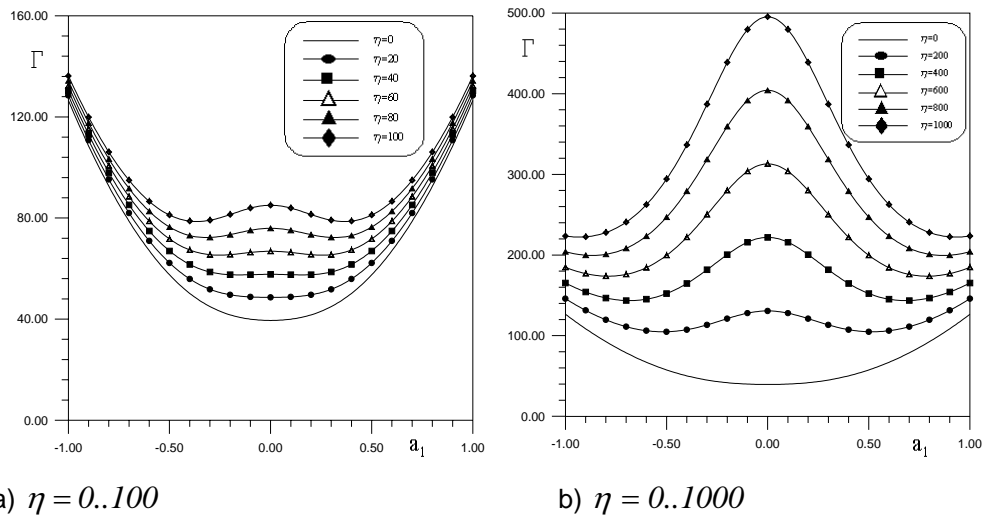
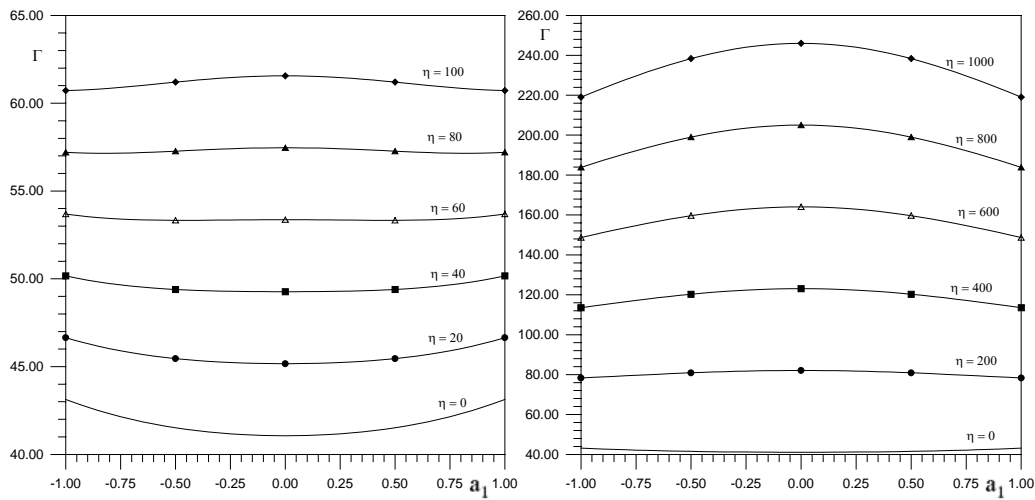


Figura 4.8 - Caminho pós-crítico da coluna com um grau de liberdade sem imperfeição inicial e cinco apoios laterais, $L=6S$, para um modo de deformação simétrico.

As Figuras 4.9 a 4.13 apresentam os caminhos pós-críticos da coluna para o caso não-linear com um grau de liberdade sem imperfeição inicial, considerando-se a coluna com um a cinco apoios laterais e um modo de deformação geral como em (3.29).

Nota-se na Figura 4.9.a que para pequenos valores do parâmetro de rigidez, o caminho pós-crítico da coluna é estável, porém um aumento no parâmetro de rigidez dos estribos faz com que o caminho se torne instável em determinadas regiões do gráfico, mas verifica-se também que a variação do parâmetro de carga

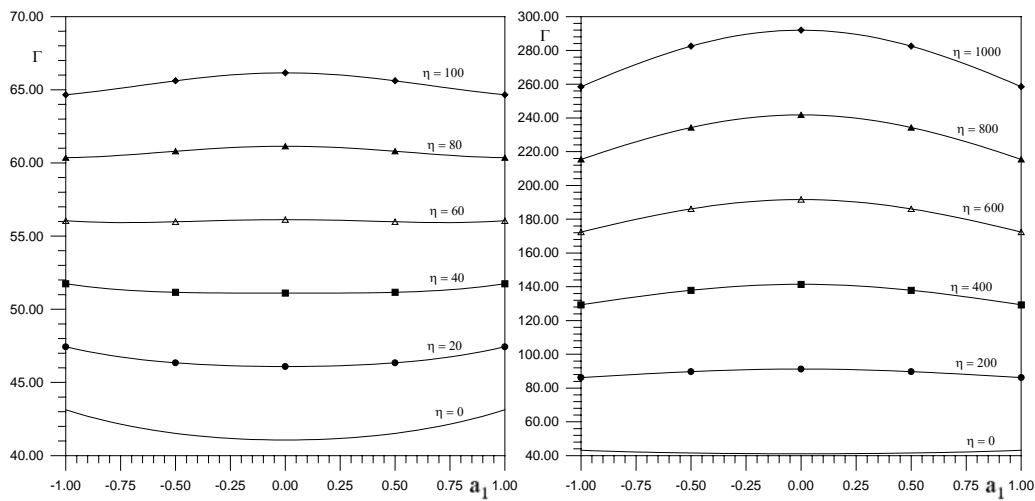
não é tão grande e, portanto, quando se considera um modo de deformação geral, o caso linear pode descrever o comportamento da coluna.



a) $\eta = 0..100$

b) $\eta = 0..1000$

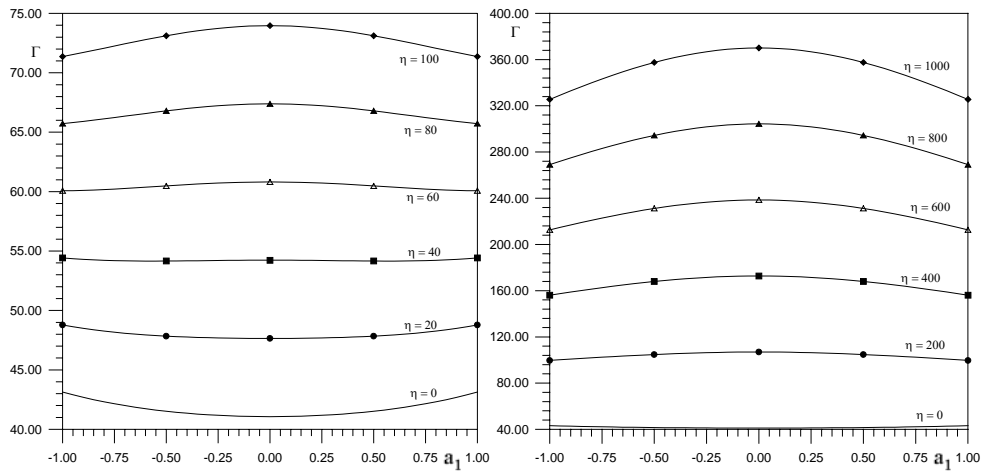
Figura 4.9 - Caminho pós-crítico da coluna com um grau de liberdade sem imperfeição inicial e um apoio lateral, $L=2S$, para um modo de deformação geral.



a) $\eta = 0..100$

b) $\eta = 0..1000$

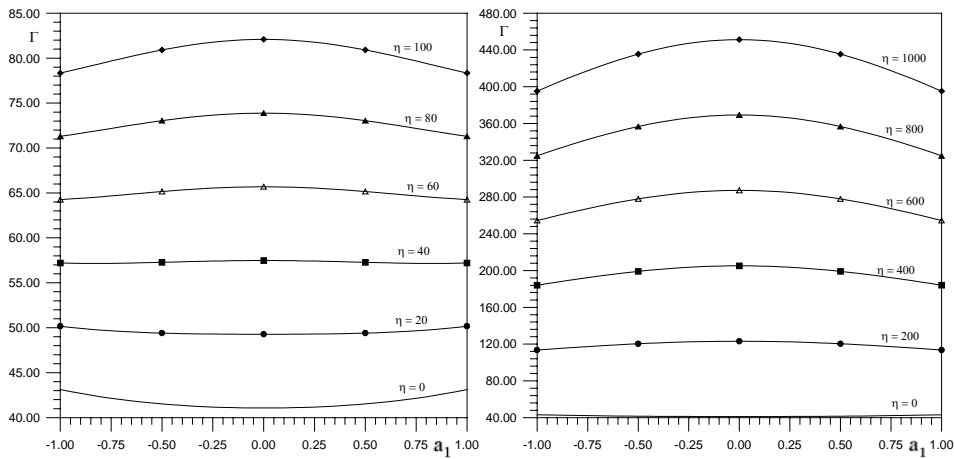
Figura 4.10 - Caminho pós-crítico da coluna com um grau de liberdade sem imperfeição inicial e dois apoios laterais, $L=3S$, para um modo de deformação geral.



a) $\eta = 0..100$

b) $\eta = 0..1000$

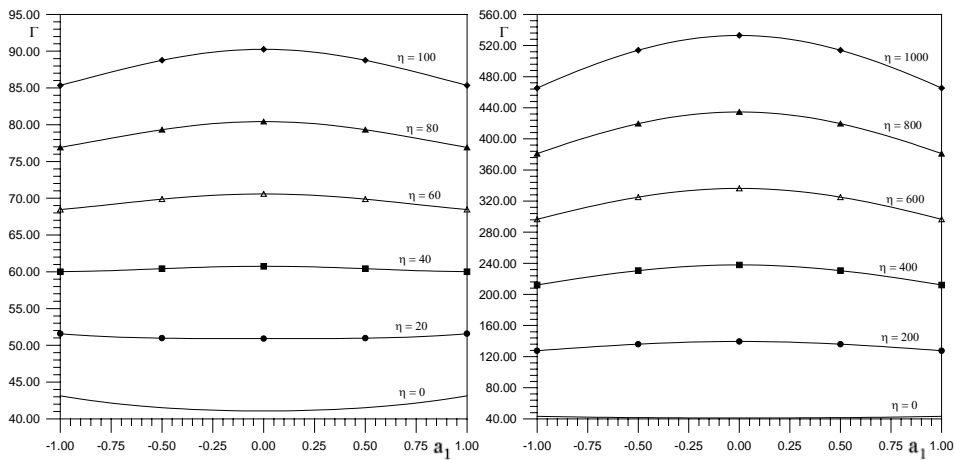
Figura 4.11- Caminho pós-crítico da coluna com um grau de liberdade sem imperfeição inicial e três apoios laterais, $L=4S$, para um modo de deformação geral.



a) $\eta = 0..100$

b) $\eta = 0..1000$

Figura 4.12- Caminho pós-crítico da coluna com um grau de liberdade sem imperfeição inicial e quatro apoios laterais, $L=5S$, para um modo de deformação geral.



a) $\eta = 0..100$

b) $\eta = 0..1000$

Figura 4.13- Caminho pós-crítico da coluna com um grau de liberdade sem imperfeição inicial e cinco apoios laterais, $L=6S$, para um modo de deformação geral.

4.3.

Coluna Sobre Base Elástica

4.3.1.

Caso Linear

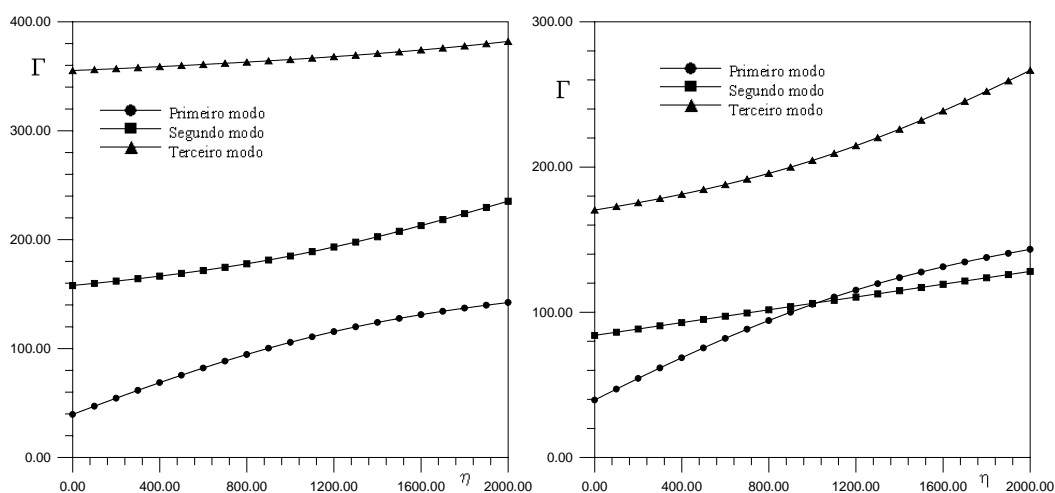
Dependendo do número de apoios laterais a consideração de apoios discretos ao longo da coluna se torna dispendiosa computacionalmente. De acordo com Timoshenko & Gere (1961), a consideração de apoios flexíveis distribuídos ao longo da coluna pode ser realizada quando existem muitos apoios laterais espaçados igualmente e com mesma rigidez.

Assim, a ação dos apoios laterais sobre a barra flambada pode ser substituída pela ação de um meio elástico. A reação do meio elástico em alguma seção transversal da barra é proporcional à deflexão nesta seção. Se K é a rigidez constante dos apoios individuais e s a distância entre os apoios, a rigidez do meio elástico equivalente é expressa por

$$k = \frac{K}{s} \quad (4.3)$$

como já havia sido apresentado na eq. (3.14).

As Figuras 4.14.a e 4.14.b apresentam as curvas que relacionam o parâmetro adimensional da carga, Γ , e o parâmetro da rigidez dos estribos, η , considerando-se três graus de liberdade sem imperfeição inicial.



a) Modo de deformação simétrico

b) Modo de deformação geral

Figura 4.14- Parâmetro de carga vs. Parâmetro de rigidez dos estribos para a coluna sobre base elástica com três graus de liberdade sem imperfeição inicial.

As Figuras 4.3.f e 4.14.b são comparadas com a finalidade de se verificar a validade da utilização da base elástica quando existem muitos apoios laterais como é o caso dos pilares de concreto usuais. Para realizar a comparação entre os gráficos colocou-se o gráfico da Figura 4.3.f em escala com o gráfico da Figura 4.14.b. O valor de η para o caso da coluna sobre base elástica pode ser colocado em função do valor de η para o caso discreto através da expressão a seguir:

$$\eta_{(base\ elástica)} = \frac{kL^4}{EI} = \frac{KL^3(15s)}{sEI} = \frac{15KL^3}{EI} = 15\eta_{(apoios\ discretos)} \quad (4.4)$$

Dessa forma, multiplicando-se a abscissa da Figura 4.3.f por quinze obtém-se o gráfico do parâmetro de carga em relação ao parâmetro de rigidez da base para o caso discreto na mesma faixa de rigidez do caso da coluna sobre base elástica como apresenta a Figura 4.15.

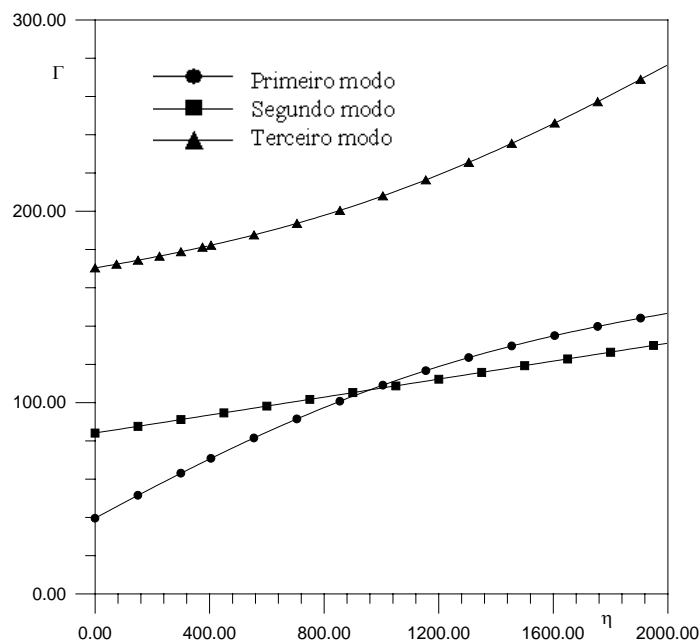


Figura 4.15- Parâmetro de carga vs. Parâmetro de rigidez dos estribos para a coluna com apoios discretos, três graus de liberdade sem imperfeição inicial.

As Figuras 4.16 e 4.17 apresentam as curvas que relacionam o parâmetro adimensional da carga, Γ , e o parâmetro da rigidez dos estribos, η , considerando-se seis e quinze graus de liberdade, respectivamente.

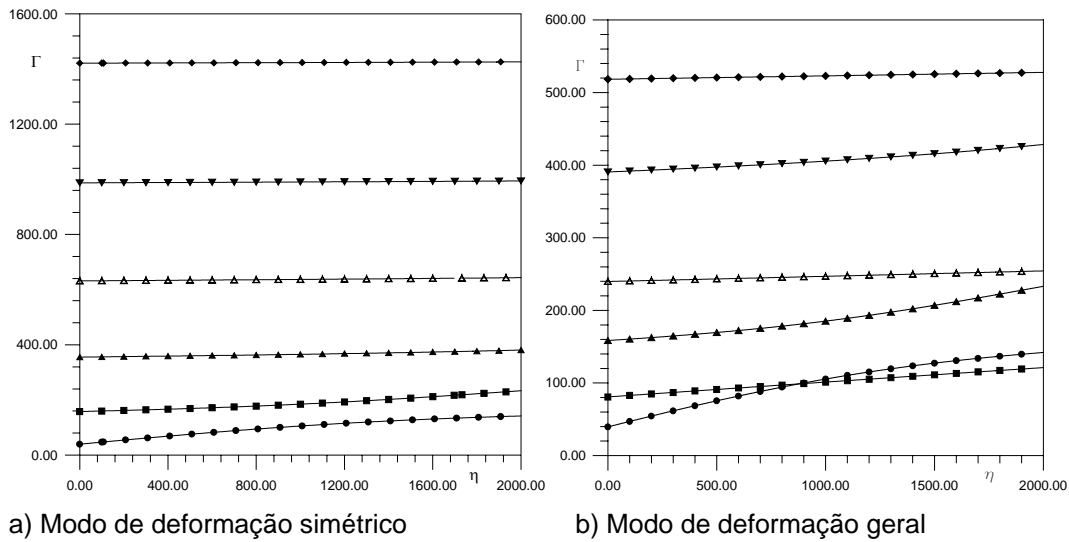


Figura 4.16- Parâmetro de carga vs. Parâmetro de rigidez dos estribos para a coluna sobre base elástica com seis graus de liberdade sem imperfeição inicial.

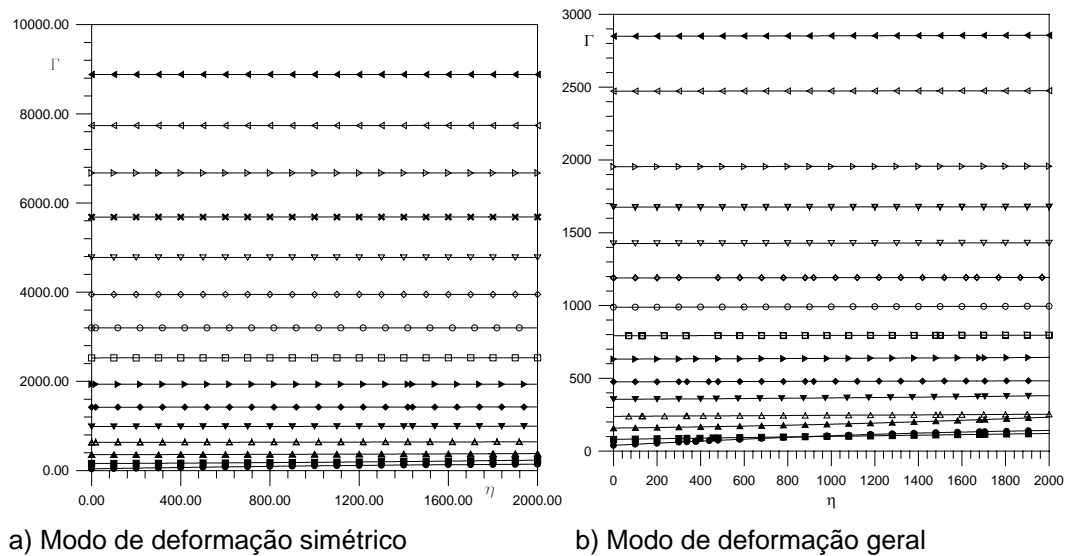
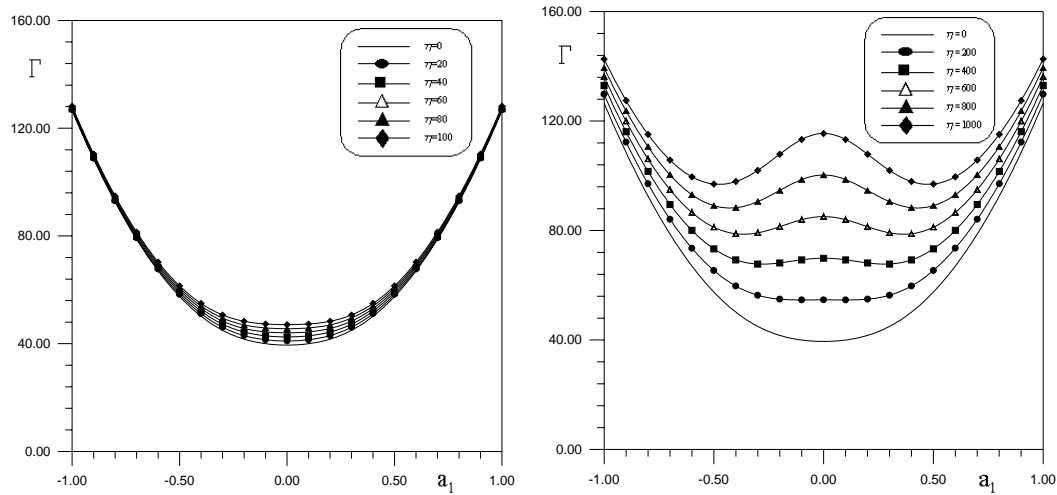


Figura 4.17- Parâmetro de carga vs. Parâmetro de rigidez dos estribos para a coluna sobre base elástica com quinze graus de liberdade sem imperfeição inicial.

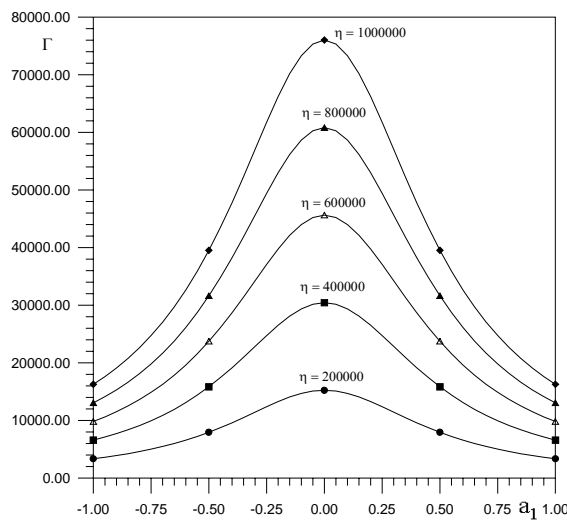
4.3.2. Caso Não-Linear

As Figuras 4.18 e 4.19 apresentam os caminhos pós-críticos para a coluna sobre base elástica com um grau de liberdade e não-linearidades sem imperfeição inicial. O caminho pós-crítico da Figura 4.18.a é simétrico estável. Verifica-se que dependendo do valor do parâmetro de rigidez dos estribos, η , o caminho pós-crítico pode se tornar instável como mostra a Figura 4.18.b e 4.18.c.



a)

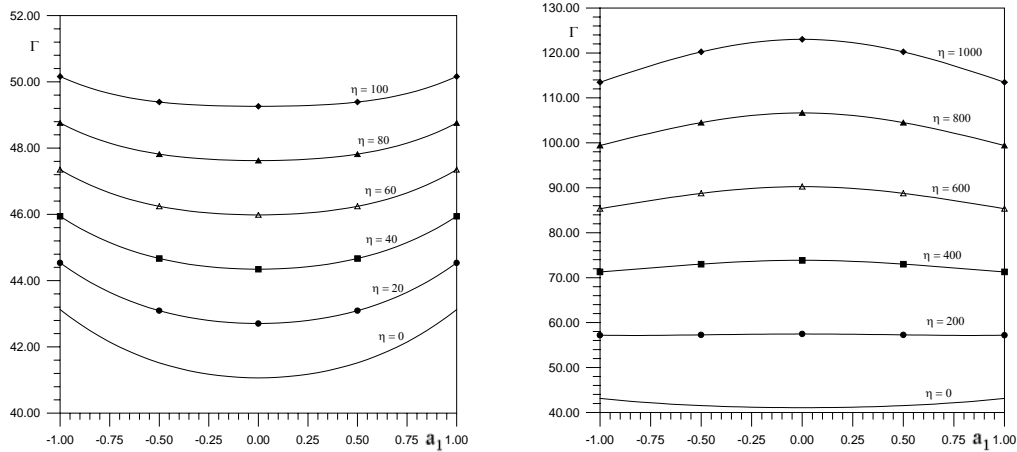
b)



c)

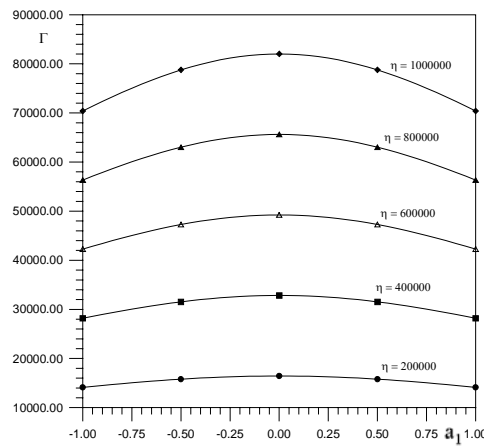
Figura 4.18- Caminho pós-crítico da coluna sobre base elástica com um grau de liberdade sem imperfeição inicial, considerando-se um modo de deformação simétrico.

Na Figura 4.19 nota-se uma pequena variação no valor do parâmetro de carga em cada caso considerado e assim conclui-se que, para a consideração do campo de deslocamentos (3.29), o modelo linear pode descrever com boa precisão o comportamento da coluna no caminho inicial.



a)

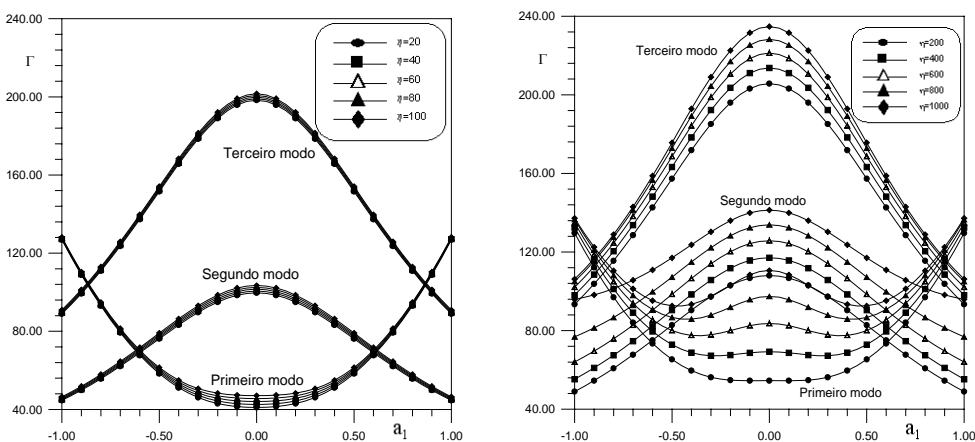
b)



c)

Figura 4.19 - Caminho pós-crítico da coluna sobre base elástica com um grau de liberdade sem imperfeição inicial considerando-se um modo de deformação geral.

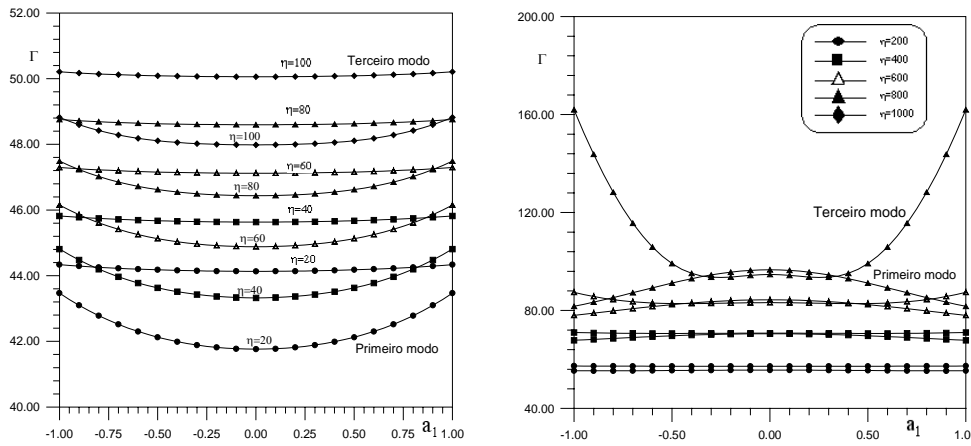
As Figuras 4.21 e 4.22 apresentam os caminhos pós-críticos para a coluna sobre base elástica com três graus de liberdade e não-linearidades sem imperfeição inicial, para modos de deformação simétrico e geral, respectivamente.



a) Valores baixos do parâmetro de rigidez

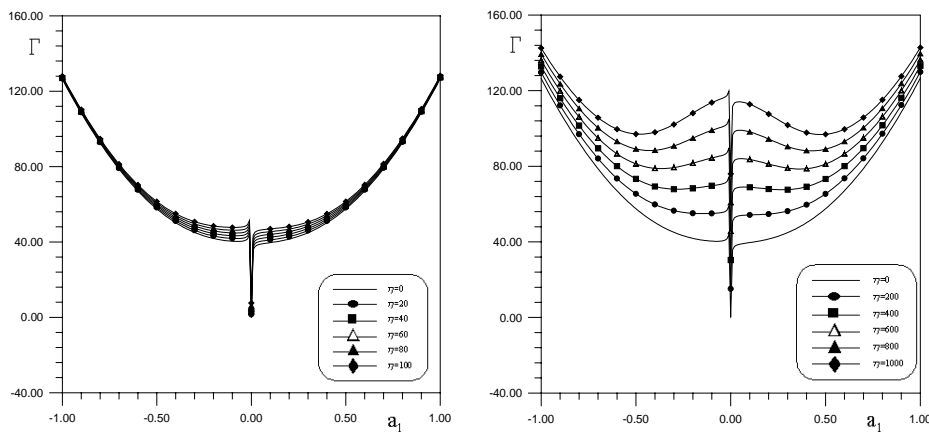
b) Valores altos do parâmetro de rigidez

Figura 4.20 - Caminho pós-crítico da coluna sobre base elástica com três graus de liberdade sem imperfeição inicial, considerando-se um modo de deformação simétrico.

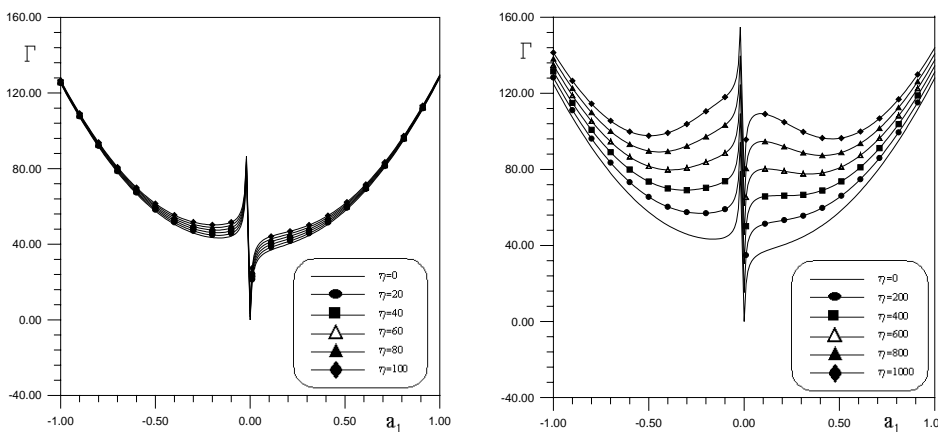


a) Valores baixos do parâmetro de rigidez b) Valores altos do parâmetro de rigidez
 Figura 4.21- Caminho pós-crítico da coluna sobre base elástica com três graus de liberdade sem imperfeição inicial considerando-se um modo de deformação geral.

As Figuras 4.22 e 4.23 apresentam os caminhos pós-críticos para a coluna sobre base elástica com um grau de liberdade e não-linearidades com imperfeição inicial, para os modos de deformação simétrico e geral, respectivamente.

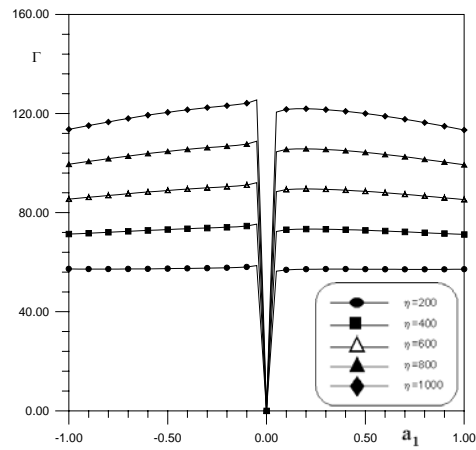
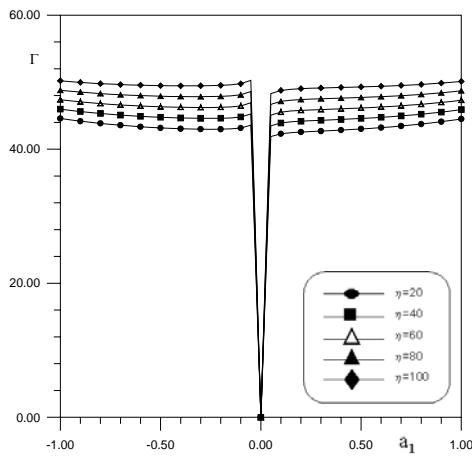


a) $a_{01}=0,001$.

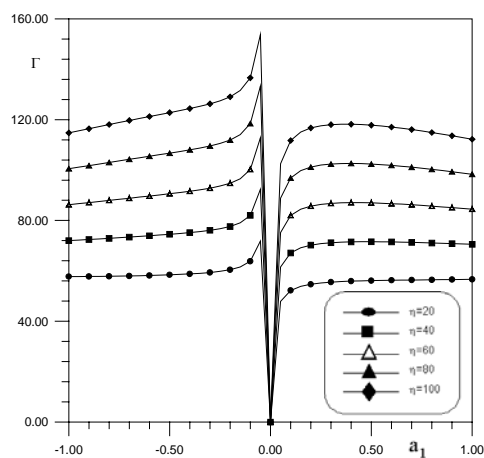
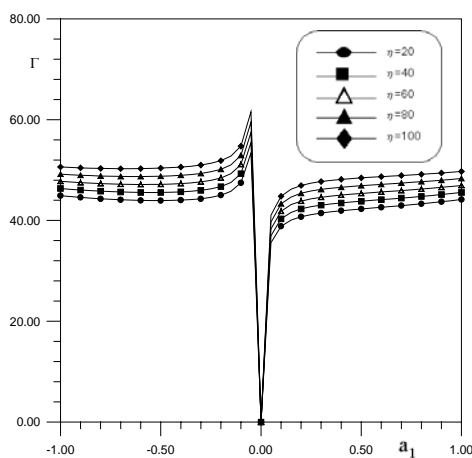


b) $a_{01}=0,01$.

Figura 4.22- Caminho pós-crítico da coluna sobre base elástica com um grau de liberdade e imperfeição inicial considerando-se deformações simétricas.



a) $a_{01}=0,001$.



b) $a_{01}=0,01$.

Figura 4.23- Caminho pós-crítico da coluna sobre base elástica com um grau de liberdade e imperfeição inicial considerando-se um modo de deformação geral.

Nota-se uma descontinuidade nos gráficos com imperfeição inicial, pois na expressão da equação não-linear com imperfeição, quando a amplitude a_1 se aproxima de $-a_{01}$ o denominador da equação não-linear se aproxima de zero, o que causa as descontinuidades dos gráficos das Figuras 4.22 e 4.23.

A equação não-linear da coluna sobre base elástica com um grau de liberdade sem imperfeição é dada pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned}
\Gamma = & (94651200\pi^6 aI^2 aoI^3 - 497664000\pi^4 aI^3 aoI^2 - 49766400\pi^4 aI^5 + 10516800\pi^6 aI^5 - 686574\pi^8 aI^5 \\
& + 2764800\pi^4 aI^3 - 528000aI^3 \pi^6 - 6179166\pi^8 aI^2 aoI^3 - 6865740\pi^8 aI^3 aoI^2 + 6220800\pi^4 aI^2 aoI \\
& + 4147200\pi^4 aI aoI^2 - 792000aI aoI^2 \pi^6 - 1188000aI^2 aoI \pi^6 - 82944000\pi^4 aI^4 aoI \\
& - 2059722\pi^8 aI aoI^4 - 149299200\pi^4 aI aoI^4 + 31550400\pi^6 aI aoI^4 - 1144290\pi^8 aI^4 aoI \\
& - 447897600\pi^4 aI^2 aoI^3 + 17528000\pi^6 aI^4 aoI + 105168000\pi^6 aI^3 aoI^2 - 345600\eta aI - 345600\eta aoI \\
& + 13365\pi^{10} aI^5 + 25200aI^3 \pi^8 + 21600\pi^6 aI + 40095\pi^{10} aI aoI^4 + 120285\pi^{10} aI^2 aoI^3 \\
& + 133650\pi^{10} aI^3 aoI^2 + 37800aI aoI^2 \pi^8 + 56700aI^2 aoI \pi^8 + 22275\pi^{10} aI^4 aoI + 1440\eta \pi^4 aI \\
& + 1440\eta aoI \pi^4 + 21600\eta \pi^2 aI + 21600\eta \pi^2 aoI - 172800\pi^4 aI) / (60 \pi^2 (600 \pi^2 aI + 600 \pi^2 aoI \\
& - 5760 aI - 5760 aoI - 19600 \pi^2 aI^3 - 58800 \pi^2 aI^2 aoI - 58800 \pi^2 aI aoI^2 - 19600 \pi^2 aoI^3 \\
& + 138240aI^3 + 414720aI^2 aoI + 414720aI aoI^2 + 138240aoI^3 + 567 \pi^4 aI^3 + 1701 \pi^4 aI^2 aoI \\
& + 1701 \pi^4 aI aoI^2 + 567 \pi^4 aoI^3))
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Substituindo-se na eq. (4.5) o valor $a_{oI} = 0,01$ tem-se a seguinte expressão para a equação não-linear de equilíbrio da coluna sobre base elástica

$$\begin{aligned}
\Gamma = & 0.001688686394 1092.4aI^4 + 814207.9aI^3 + 18318.78841aI^2 + 65546.aI^5 + 7852.5463\eta aI \\
& + 0.393383778010^7 aI + 78.525463\eta) / (161.770655aI + 1.617653135+ 26.7083aI^3 + 0.801249aI^2)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Nota-se, que substituindo $a_I = -0.01$ na eq. (4.6) o valor do denominador fica próximo de zero e conseqüentemente o valor de Γ é alto, nesta região. Até aqui, foi apresentado um breve estudo sobre o comportamento da coluna quando se consideram deformações simétricas e quando há uma combinação de funções simétricas e antissimétricas, porém, como foi dito anteriormente, a consideração de deformações tanto simétricas como não simétricas pode descrever melhor o comportamento da armadura longitudinal na flambagem e, portanto, considerou-se o campo de deslocamentos (3.29) em todo o estudo numérico que será realizado a partir do item 4.4.

4.4.

Curvas Γ vs. η para o Cálculo do Espaçamento e Diâmetro dos Estribos

A Figura 4.24 apresenta a curva que relaciona o parâmetro de carga, Γ e o parâmetro de rigidez dos estribos que foi obtida a partir das curvas mostradas nas Figuras 4.16, quando se consideram seis graus de liberdade. A Figura 4.24 apresenta as contribuições de vários modos para a carga de flambagem e como se verifica, este gráfico apresenta o caso onde a armadura está fixa nas extremidades e o caso onde uma das extremidades está livre para simular a presença de emendas das barras da armadura.

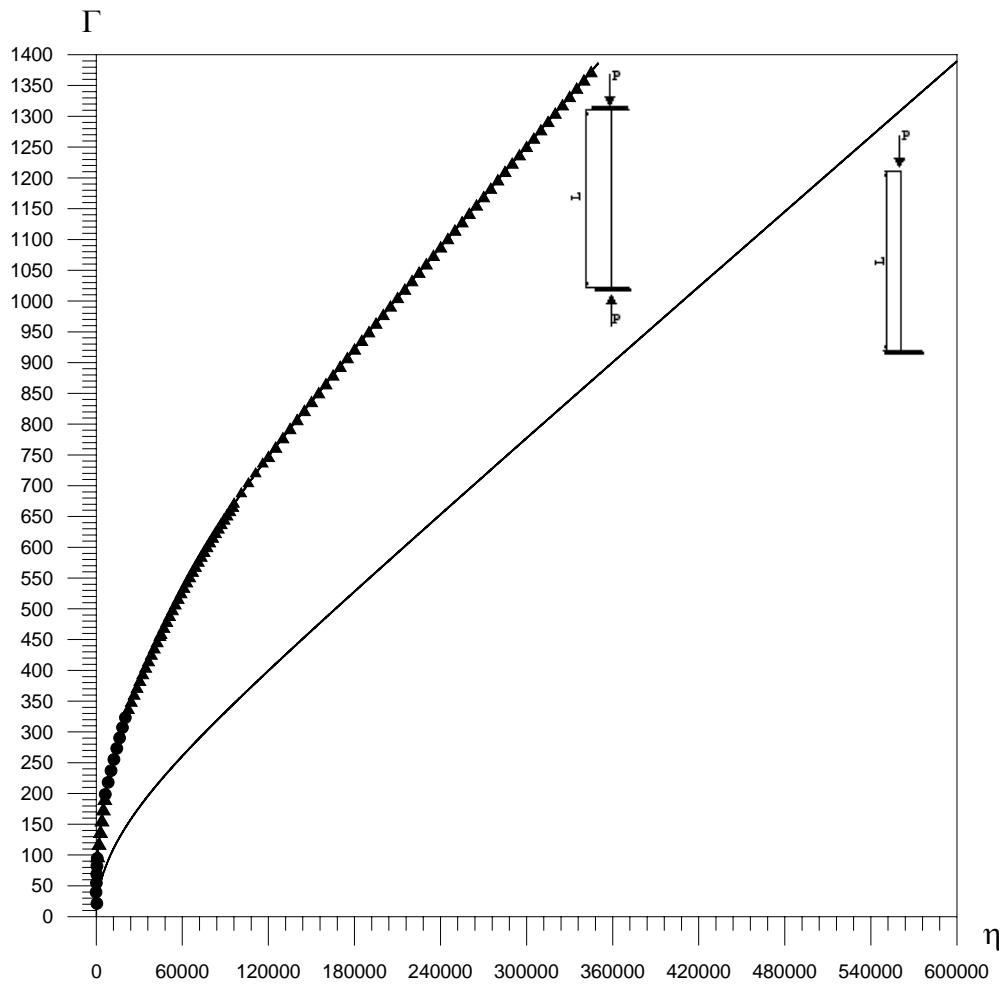


Figura 4.24- Parâmetro de carga vs. Parâmetro de rigidez da coluna com seis graus de liberdade.

Verifica-se que, a partir de um alto nível de rigidez, a carga de flambagem cresce quase que linearmente com o aumento da rigidez dos estribos. A partir deste gráfico será apresentado um método para o cálculo do espaçamento e rigidez dos estribos em um pilar de concreto armado.