

3 Formulação

3.1. Introdução

Neste capítulo apresenta-se o modelo matemático adotado para representar a armadura longitudinal e os estribos em um pilar de concreto armado. Apresenta-se de forma detalhada o método de solução para obtenção das matrizes de rigidez da coluna, as expressões da carga crítica o cálculo da rigidez dos estribos. Em seguida uma introdução à consideração do conjunto de armaduras longitudinais e transversais como uma grelha é apresentada.

3.2. Modelo Adotado

Considera-se a armadura longitudinal como uma coluna onde os estribos são representados esquematicamente como apoios elásticos intermediários unilaterais, cuja rigidez K depende das características mecânicas e geométricas do aço. Considerando-se K constante, o modelo adotado para a determinação da carga crítica apresenta-se na Figura 3.1, onde L é o comprimento da armadura, s é o espaçamento entre estribos e F_j são as forças correspondentes aos apoios elásticos j e podem ser escritas da seguinte forma:

$$F_j = Kw_j \Rightarrow w_j = \frac{F_j}{K} \quad (3.1)$$

onde w_j é o deslocamento do apoio genérico.

No desenvolvimento a seguir, adotam-se as hipóteses usuais da resistência dos materiais para vigas considerando-se que a coluna e o carregamento estão num plano de simetria e que a seção permanece plana e perpendicular ao eixo, antes e após as deformações (hipóteses de Euler-Bernoulli para Flexão no plano).

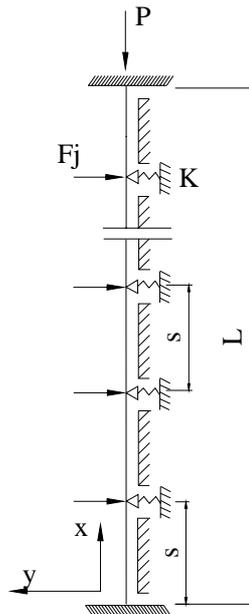


Figura 3.1- Modelo de análise para a armadura longitudinal e transversal.

3.3.

Energia Interna de Deformação e Energia Potencial da Viga-Coluna

As matrizes de rigidez elástica e geométrica da coluna são obtidas a partir das energias de deformação e potencial, respectivamente. Toda a formulação matemática é realizada a partir da coluna de Euler, que é biapoiada e submetida a carregamento axial. Depois de encontradas as expressões que definem as matrizes de rigidez, adota-se um campo de deslocamentos que satisfaça as condições de contorno do modelo apresentado na Figura 3.1.

Considerando-se o material elástico e linear, a energia de deformação específica da coluna é calculada pela expressão

$$U_o = \int_0^{\varepsilon} \sigma_o d\varepsilon = \frac{E\varepsilon^2}{2} \quad (3.2)$$

onde E é o módulo de elasticidade da coluna e ε a deformação específica.

A energia de deformação da coluna é dada por

$$U = \int_V U_o dV = \frac{1}{2} \int_V E\varepsilon^2 dV \quad (3.3)$$

A deformação na direção x é dada pela expressão

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{x0} + y\chi \quad (3.4)$$

onde ε_{x_0} é a deformação específica da linha neutra e χ , a mudança de curvatura. O deslocamento translacional na direção y é simplesmente $w(x)$. A coluna foi descrita pela formulação clássica de Navier-Euler-Bernoulli, e, assim, todos os outros componentes são desprezados no cálculo da energia interna de deformação.

Substituindo-se a eq. (3.4) em (3.3) e sabendo-se que o momento estático $\int_{A_s} y dA_s = 0$ e $\int_{A_s} y^2 dA_s = I$, tem-se que a energia interna de deformação fica representada pelo somatório da energia de membrana, U_m , proveniente das deformações da barra na direção axial, com a energia de flexão, U_f , proveniente das deformações devidas à flexão, podendo ser expressa como:

$$U = U_m + U_f = \frac{1}{2} \int_0^L EA_s \varepsilon_{x_0}^2 dx + \int_0^L \frac{1}{2} EI \chi^2 dx \quad (3.5)$$

Em geral, no problema da flambagem, as deformações devidas à flexão são bem mais importantes que as deformações axiais da barra e na formulação do problema não se leva em consideração a deformação axial, ε_{x_0} . Esta hipótese é adotada na teoria inextensional de vigas apresentada nos trabalhos de Bazant (1991) e Dym & Shames (1973), onde a única parcela da energia interna considerada é a energia de flexão da viga, a saber:

$$U \cong U_f = \int_0^L \frac{1}{2} EI \chi^2 dx \quad (3.6)$$

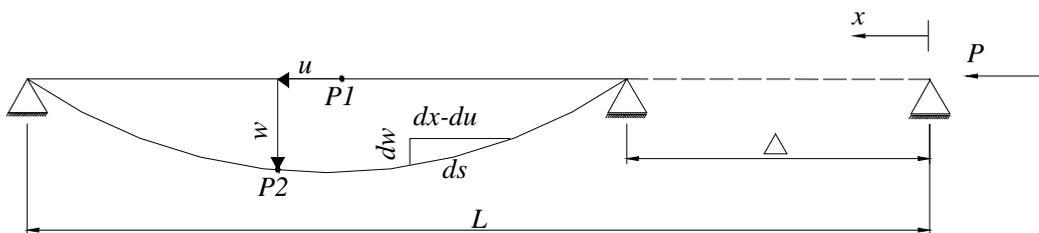
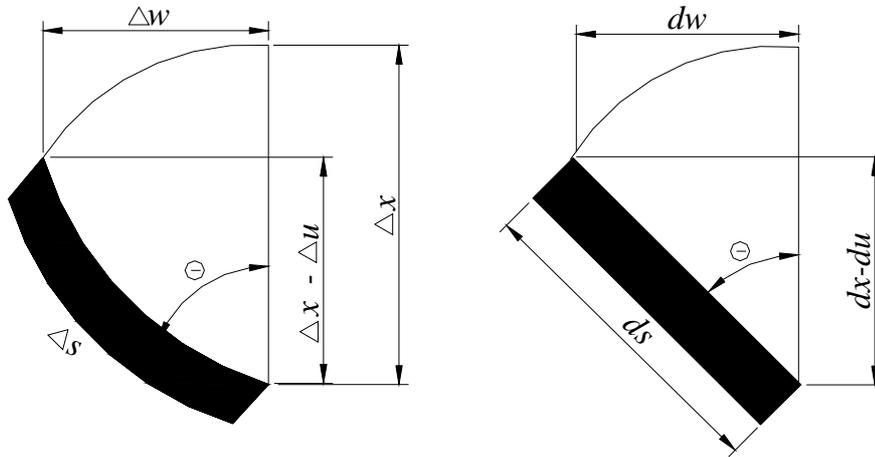


Figura 3.2- Coluna Deformada.

Considerando-se a viga-coluna mostrada na Figura 3.2, tem-se que o deslocamento de um ponto P_1 para um ponto P_2 pode ser representado por um vetor de deslocamentos que é decomposto em duas componentes, um deslocamento axial, u , e um deslocamento lateral, w . Considerando-se que a linha neutra da estrutura é inextensível, o comprimento L da estrutura indeformada é o

mesmo após a sua deformação. Assim, tem-se que o comprimento do elemento linear indeformado dx é igual ao elemento curvo ds .

Fazendo-se uso da geometria diferencial, pode-se dizer que o elemento da Figura 3.3.a é, no limite, idêntico ao elemento da Figura 3.3.b.



a) b)

Figura 3.3- Elemento infinitesimal indeformado.

Assim pode-se escrever as seguintes relações:

$$\text{sen } \Theta = \frac{dw}{ds} = \frac{dw}{dx} = w_{,x} \tag{3.7}$$

onde Θ é o ângulo formado entre o eixo x e o eixo da viga após a deformação. Portanto, $\Theta = \arcsen(w_{,x})$ e, de acordo com Dym & Shames (1973), a curvatura do eixo deformado é dada por

$$\frac{1}{\bar{R}} = \Theta_{,x} = \frac{w_{,xx}}{(1 - w_{,x}^2)^{3/2}} \tag{3.8}$$

onde \bar{R} é o raio de curvatura.

Sabe-se que o raio de curvatura da estrutura indeformada é

$$\frac{1}{R_o} = 0 \tag{3.9}$$

e assim tem-se que a variação de curvatura é

$$\chi = \frac{1}{\bar{R}} - \frac{1}{R_o} = \frac{w_{,xx}}{(1 - w_{,x}^2)^{3/2}} \tag{3.10}$$

Expandindo-se a eq. (3.10) em séries de Taylor, e retendo-se em w todos os termos até quarta ordem chega-se a

$$\chi = w_{,xx} \left[I + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right] \quad (3.11)$$

Substituindo-se (3.11) em (3.6) tem-se que a energia de flexão é dada por

$$U \cong \int_0^L \frac{1}{2} EI w_{,xx}^2 \left[I + \frac{1}{2} w_{,x}^2 \right]^2 dx \cong \int_0^L \frac{1}{2} EI \left(w_{,xx}^2 + w_{,xx}^2 w_{,x}^2 + \frac{1}{4} w_{,xx}^2 w_{,x}^4 \right) dx \quad (3.12)$$

De acordo com Dym & Shames (1973), a aproximação mostrada na eq. (3.12) é suficiente para descrever com exatidão o caminho pós - crítico da coluna, mesmo na região de grandes deslocamentos laterais.

No modelo adotado, os estribos são considerados como molas lineares sendo a energia de deformação é dada por:

$$U_i = \frac{1}{2} K \left[\sum_{i=1}^{i=n} w(x=is) \right]^2 \quad (3.13)$$

onde w é o valor do deslocamento calculado nos pontos onde existem estribos e n é o número de estribos envolvidos no modelo.

Considerando-se que o apoio elástico discreto pode ser substituído por uma base elástica distribuída continuamente $k=K/s$, tem-se que o termo correspondente à energia de deformação dos estribos em (3.13) pode ser avaliado como uma integral da seguinte forma:

$$\frac{1}{2} K \sum_{i=1}^{i=n} w(x=is)^2 \cong \frac{1}{2} \int_0^L k w(x)^2 dx \quad (3.14)$$

O potencial das cargas externas é dado pelo produto da carga, P , e o encurtamento na extremidade da coluna Δ , podendo ser expresso como

$$V_p = P\Delta \quad (3.15)$$

onde P é o carregamento axial.

O encurtamento da barra é a diferença entre o comprimento original e a projeção vertical da barra depois da deformação, o qual pode ser calculado em função do vetor deslocamento. Pela figura (3.3.b) e usando o teorema de Pitágoras chega-se a

$$(ds)^2 = (dx - du)^2 + (dw)^2 \quad (3.16)$$

Como $ds \cong dx$ e dividindo (3.16) por $(dx)^2$, obtém-se

$$1 = (1 - u_{,x})^2 + w_{,x}^2 \quad (3.17)$$

que resulta em

$$1 - u_{,x} = \sqrt{(1 - w_{,x})^2} \quad (3.18)$$

ou

$$du = \left[1 - (1 - w_{,x}^2)^{1/2} \right] dx \quad (3.19)$$

Integrando-se os dois lados da eq. (3.19), verifica-se que a variação de comprimento da coluna, Δ , é dado por

$$\Delta = \int_0^L du = \int_0^L \left[1 - (1 - w_{,x}^2)^{1/2} \right] dx \quad (3.20)$$

Expandindo-se o termo $(1 - w_{,x}^2)^{1/2}$ na eq. (3.20) até a quarta ordem em séries de Taylor, como se fez com a curvatura, tem-se que

$$\Delta = \int_0^L \left(\frac{1}{2} w_{,x}^2 + \frac{1}{8} w_{,x}^4 \right) dx \quad (3.21)$$

Substituindo-se o valor de Δ na fórmula (3.15) e verificando-se que o deslocamento é realizado no sentido contrário ao das forças, o potencial das cargas externas fica

$$V_p = -P \int_0^L \left(\frac{1}{2} w_{,x}^2 + \frac{1}{8} w_{,x}^4 \right) dx \quad (3.22)$$

3.4. Variáveis Adimensionais

- **Caso discreto**

Quando se quer realizar uma análise paramétrica, é importante que a mesma seja realizada com eficiência, para isto serão feitas as seguintes mudanças de variáveis e escolhidos os seguintes parâmetros adimensionais:

$$\xi = \frac{x}{L} \quad 0 \leq \xi \leq 1 \quad w_d = \frac{w}{L} \quad \Gamma = \frac{PL^2}{EI} \quad \eta = \frac{KL^3}{EI} \quad (3.23)$$

onde ξ é o parâmetro adimensional do deslocamento axial, w_d é o parâmetro adimensional do deslocamento lateral da coluna, Γ é o parâmetro adimensional do carregamento axial e η é o parâmetro adimensional da rigidez dos estribos.

- **Coluna sobre base elástica**

As variáveis adimensionais são as mesmas consideradas em (3.23), com exceção do parâmetro adimensional da rigidez dos estribos que é dado por:

$$\eta = \frac{kL^4}{EI} \quad (3.24)$$

3.5. Campo de Deslocamentos

O campo de deslocamentos da coluna é aproximado por uma função do tipo

$$w(x) = \sum_{j=1}^{\infty} A_j y_j(x) \quad (3.25)$$

onde j é o número de graus de liberdade, A_j são as amplitudes e a função $y_j(x)$ deve satisfazer as condições de contorno da coluna, ou seja, as restrições de deslocamento e momento zero nas extremidades da coluna, a fim de que a solução do problema de autovalores resulte em uma solução aproximada do problema original. Observações experimentais mostram que a forma flambada da armadura longitudinal se parece muitas vezes com uma função senoidal, que pode envolver vários espaçamentos entre estribos.

A partir do modelo apresentado na Figura 3.1, sendo o concreto representado pela região hachurada, pode-se considerar para o campo de deslocamentos, uma solução que leva em consideração apenas deformações do tipo simétrico. Nesse caso as deflexões ocorreriam apenas para fora do centro do concreto. Uma suposição cinemática admissível para este caso consistente com as condições de contorno [$w(0) = w(L) = 0$ e $w(L/2) = A$] pode ser descrita pela seguinte série de funções ortogonais no intervalo de $[0, L]$:

$$w(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{A_m}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) \right) \quad (3.26)$$

onde m é o número de graus de liberdade considerado.

A consideração de deformações apenas do tipo simétrico, pode se tornar um pouco distante do que acontece na realidade, pois se verifica em muitos casos que a flambagem pode envolver modos não simétricos como apresenta a Figura 2.21 do trabalho de Sheikh & Uzumeri (1980). Dessa forma, considerou-se também uma função diferente da expressa em (3.26), para descrever o campo deslocamentos, a qual é da seguinte forma:

$$w(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \left(-\frac{m\pi x}{L} + \frac{m\pi x^2}{L^2} (2 + (-1)^m) - \frac{m\pi x^3}{L^3} (1 + (-1)^m) + \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \right) \quad (3.27)$$

Esse campo de deslocamentos descreve melhor o comportamento da coluna, pois combina as funções que descrevem um comportamento simétrico com funções antissimétricas.

Fazendo-se uso de variáveis adimensionais os campos de deslocamentos descritos nas expressões (3.26) e (3.27) tornam-se

$$w_d(\xi) = \sum_{m=1}^j \frac{a_m}{2} (1 - \cos(2\pi m \xi)) \quad (3.28)$$

$$w_d(\xi) = \sum_{m=1}^j a_m \left(-m\pi\xi + m\pi\xi^2 \left(2 + (-1)^m \right) - m\pi\xi^3 \left(1 + (-1)^m \right) + \sin(m\pi\xi) \right) \quad (3.29)$$

3.6.

Integração ao Longo da Barra para Obtenção das Matrizes de Rigidez Elástica (K_f) e Rigidez Geométrica (K_g)

A matriz de rigidez elástica representada por K_f é obtida da energia de deformação expressa em (3.12), a matriz de rigidez que leva em consideração os apoios laterais, K_m , é obtida da energia de deformação (3.13) e (3.14) e a matriz de rigidez geométrica, K_g é obtida a partir da energia da carga axial expressa em (3.22).

Dessa forma, as expressões que definem as matrizes de rigidez citadas considerando-se o campo de deslocamentos w_i e w_j para uma determinada condição de contorno são dadas a seguir.

- **Da energia de deformação**

$$K_{f,i,j} = \int_0^l \left(w_{d,\xi\xi i} w_{d,\xi\xi j} + w_{d,\xi\xi i} w_{d,\xi\xi j} w_{d,\xi i} w_{d,\xi j} + \frac{1}{2} w_{d,\xi\xi i} w_{d,\xi\xi j} w_{d,\xi i} w_{d,\xi j} w_{d,\xi i} w_{d,\xi j} \right) d\xi \quad (3.30)$$

- **Da energia de deformação da mola**

- Apoios distribuídos de forma discreta

$$K_{m,i,j} = \eta \sum_{\xi=0}^{\xi=1} w_{d,i} w_{d,j} \quad (3.31)$$

- Apoios distribuídos de forma contínua

$$K_{m,i,j} = \eta \int_0^l w_{d,i} w_{d,j} d\xi \quad (3.32)$$

- **Da energia da carga axial**

$$K_{g,i,j} = \int_0^l \left(w_{d,\xi i} w_{d,\xi j} + \frac{1}{4} w_{d,\xi i} w_{d,\xi j} w_{d,\xi i} w_{d,\xi j} \right) d\xi \quad (3.33)$$

3.6.1 Solução do Problema de Autovalores

Considerando-se apenas a parcela quadrática nas expressões (3.30) a (3.33) tem-se o problema de autovalor, dado na seguinte expressão:

$$K_f + K_m - \Gamma K_g = 0 \quad (3.34)$$

Resolvendo-se a eq. (3.34) chega-se aos valores da carga crítica como a seguir:

$$\Gamma = K_g^{-1}(K_f + K_m) \quad (3.35)$$

O programa computacional para o cálculo dos autovalores apresenta-se no Apêndice I.

3.6.1.1. Apoios Discretos

Considerando-se que a deformada da coluna pode ser descrita com boa precisão pelo primeiro termo da expansão modal e considerando-se que o comprimento da armadura varia de um a seis espaçamentos entre estribos e substituindo-se o campo de deslocamentos descrito em (3.28) e (3.29) com apenas um grau de liberdade nas expressões para obtenção das matrizes de rigidez e resolvendo-se o problema de autovalores expresso em (3.34) obtém-se os valores adimensionais para a carga de flambagem.

O número de espaçamentos envolvidos na flambagem é dado por

$$n = \frac{L}{s} - 1 \quad (3.36)$$

Os parâmetros de carga para o caso discreto considerando-se cada comprimento envolvido na flambagem e o campo de deslocamentos dado em (3.28) são dadas a seguir.

- $L=s$ (nenhum estribo envolvido na flambagem)

$$\Gamma = 4\pi^2 \quad (3.37)$$

- $L=2s$ (um estribo envolvido na flambagem)

$$\Gamma = 4\pi^2 + \frac{2\eta}{\pi^2} \quad (3.38)$$

- $L=3s$ (dois estribos envolvido na flambagem)

$$\Gamma = 4\pi^2 + \frac{9\eta}{4\pi^2} \quad (3.39)$$

- $L=4s$ (três estribos envolvidos na flambagem)

$$\Gamma = 4\pi^2 + \frac{3\eta}{\pi^2} \quad (3.40)$$

- $L=5s$ (quatro estribos envolvidos na flambagem)

$$\Gamma = 4\pi^2 + \frac{\eta(2 - 2\cos(2\pi/5) + \cos(2\pi/5)^2 + 2\cos(\pi/5) + \cos(\pi/5)^2)}{\pi^2} \quad (3.41)$$

- $L=6s$ (cinco estribos envolvidos na flambagem)

$$\Gamma = 4\pi^2 + \frac{9}{2\pi^2}\eta \quad (3.42)$$

Os parâmetros de carga para o caso discreto considerando-se o campo de deslocamentos dado na eq. (3.29) são dados pelas expressões de (3.43) a (3.48).

- $L=s$ (nenhum estribo envolvido na flambagem)

$$\Gamma = \frac{3\pi^2(\pi^2 - 8)}{5\pi^2 - 48} \quad (3.43)$$

- $L=2s$ (um estribo envolvido na flambagem)

$$\Gamma = \frac{3(8\pi^4 - 64\pi^2 + \eta\pi^2 - 8\eta\pi + 16\eta)}{8(5\pi^2 - 48)} \quad (3.44)$$

- $L=3s$ (dois estribos envolvidos na flambagem)

$$\Gamma = \frac{81\pi^4 - 648\pi^2 + 16\eta\pi^2 - 72\eta\pi\sqrt{3} + 243\eta}{27(5\pi^2 - 48)} \quad (3.45)$$

- $L=4s$ (três estribos envolvidos na flambagem)

$$\Gamma = \frac{3(64\pi^4 - 512\pi^2 + 17\eta\pi^2 - 48\eta\pi\sqrt{2} + 256\eta - 64\eta\pi)}{64(5\pi^2 - 48)} \quad (3.46)$$

- $L=5s$ (quatro estribos envolvidos na flambagem)

$$\Gamma = \frac{3\left(\pi^4 - 8\pi^2 + 0,33\eta\pi^2 + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)\eta\left(4\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1,28\pi\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right)\eta\left(4\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 1,92\pi\right)\right)}{64(5\pi^2 - 48)} \quad (3.47)$$

- $L=6s$ (cinco estribos envolvidos na flambagem)

$$\Gamma = \frac{648\pi^4 - 5184\pi^2 + 259\eta\pi^2 - 1008\eta\pi + 3888\eta - 576\eta\pi\sqrt{3}}{216(5\pi^2 - 48)} \quad (3.48)$$

Considerando-se três termos na expansão modal e o comprimento da coluna variando de um a seis espaçamentos entre estribos, substitui-se o campo de deslocamentos na eq. (3.28) com três graus de liberdade nas expressões para obtenção das matrizes de rigidez e resolve-se o problema de autovalores expresso

na eq. (3.34) obtendo-se assim os valores para os parâmetros de carga. Apresenta-se nas expressões (3.49) à (3.57) alguns valores obtidos na presente formulação.

- $L=s$ (nenhum estribo envolvido na flambagem)

$$\Gamma = 4\pi^2 \quad (3.49)$$

$$\Gamma = 16\pi^2 \quad (3.50)$$

$$\Gamma = 36\pi^2 \quad (3.51)$$

- $L=2s$ (um estribo envolvido na flambagem)

$$\Gamma = \frac{360\pi^4 + 20\eta + 4\sqrt{5184\pi^8 - 576\pi^4\eta + 25\eta^2}}{18\pi^2} \quad (3.52)$$

$$\Gamma = 16\pi^2 \quad (3.53)$$

$$\Gamma = \frac{360\pi^4 + 20\eta - 4\sqrt{5184\pi^8 - 576\pi^4\eta + 25\eta^2}}{18\pi^2} \quad (3.54)$$

- $L=3s$ (dois estribos envolvidos na flambagem)

$$\Gamma = \frac{320\pi^4 + 45\eta + 3\sqrt{4096\pi^8 - 1152\pi^4\eta + 225\eta^2}}{32\pi^2} \quad (3.55)$$

$$\Gamma = \frac{320\pi^4 + 45\eta - 3\sqrt{4096\pi^8 - 1152\pi^4\eta + 225\eta^2}}{32\pi^2} \quad (3.56)$$

$$\Gamma = 36\pi^2 \quad (3.57)$$

Quando se consideram mais estribos envolvidos na flambagem para o caso discreto, as expressões que definem a carga crítica se tornam bastante extensas, e por este motivo não estão apresentadas no presente texto. O programa para tal implementação apresenta-se no Apêndice I.

3.6.1.2. Coluna sobre Base Elástica

Considerando-se a armadura longitudinal como uma coluna sobre base elástica, onde a base elástica é composta pelos estribos e substituindo-se o campo de deslocamentos descrito em (3.28) e (3.29) com um grau de liberdade apenas na parcela quadrática das expressões (3.30), (3.32) e (3.33) para obtenção das matrizes de rigidez e resolvendo-se o problema de autovalores expresso em (3.34) obtém-se o seguinte valor para a carga crítica, considerando-se os campos de deslocamentos (3.28) e (3.29), respectivamente.

$$\Gamma = 4\pi^2 + \frac{3}{4\pi^2}\eta \quad (3.58)$$

$$\Gamma = \frac{15\pi^6 - 120\pi^4 + 15\pi^2\eta + \pi^4\eta - 240\eta}{5(5\pi^2 - 48)\pi^2} \quad (3.59)$$

Para a coluna com três graus de liberdade, as expressões que definem o parâmetro de carga considerando-se o campo de deslocamentos (3.29) são dadas por:

$$\begin{aligned} \Gamma = & (546750\pi^{10} - 5307120\pi^8 + 4374\pi^8\eta - 648000\pi^4\eta - 3686400\pi^2\eta + \\ & + 60750\pi^6\eta + 54(1990656000\pi^{10}\eta + 352058400\pi^{14}\eta + 71514900\pi^{20} - \\ & - 1478412000\pi^{18} - 656100\pi^{18}\eta - 7027560\pi^{16}\eta + 161894400\pi^8\eta^2 + \\ & + 882900\pi^{12}\eta^2 - 147456000\pi^6\eta^2 - 22809600\pi^{10}\eta^2 - 2361139200\pi^{12}\eta + \\ & + 8231284800\pi^{16} - 5971968000\pi^{14} + 6561\pi^{16}\eta^2 - 72900\pi^{14}\eta^2)^{(1/2)}) / (2 \\ & (-583200\pi^6 - 1658880\pi^4 + 76545\pi^8)) \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \Gamma = & (546750\pi^{10} - 5307120\pi^8 + 4374\pi^8\eta - 648000\pi^4\eta - 648000\pi^4\eta - \\ & - 3686400\pi^2\eta + 60750\pi^6\eta - 54(1990656000\pi^{10}\eta + 352058400\pi^{14}\eta + \\ & + 71514900\pi^{20} - 1478412000\pi^{18} - 656100\pi^{18}\eta - 7027560\pi^{16}\eta + \\ & + 161894400\pi^8\eta^2 + 882900\pi^{12}\eta^2 - 147456000\pi^6\eta^2 - 22809600\pi^{10}\eta^2 - \\ & - 2361139200\pi^{12}\eta + 8231284800\pi^{16} - 5971968000\pi^{14} + 6561\pi^{16}\eta^2 - \\ & - 72900\pi^{14}\eta^2)^{(1/2)}) / (2(-583200\pi^6 - 1658880\pi^4 + 76545\pi^8)) \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\Gamma = \frac{1680\pi^6 - 10080\pi^4 - 1260\eta + 4\eta\pi^4 + 105\pi^2\eta}{84(7\pi^2 - 60)\pi^2} \quad (3.62)$$

3.6.2. Equações Não-Lineares de Equilíbrio

3.6.2.1.

Apoios Discretos

A maior parte dos sistemas mecânicos é capaz de mobilizar não-linearidades. Se há interesse no estudo do comportamento pós-crítico, é preciso que se incorporem os termos de ordem superior nas energias de deformação e da carga axial.

Dessa forma, obtém-se as seguintes expressões adimensionais para a carga crítica a partir do campo de deslocamentos (3.28) com um grau de liberdade:

- $L=s$ (nenhum estribo envolvido na flambagem)

$$\Gamma = \frac{\pi^2(32 + 16a_1^2\pi^2 + 3a_1^4\pi^4)}{(8 + 3a_1^2\pi^2)} \quad (3.63)$$

- $L=2s$ (um estribo envolvido na flambagem)

$$\Gamma = \frac{32\pi^4 + 16a_1^2\pi^6 + 3a_1^4\pi^8 + 16\eta}{\pi^2(32 + 3a_1^2\pi^2)} \quad (3.64)$$

- $L=3s$ (dois estribos envolvidos na flambagem)

$$\Gamma = \frac{32\pi^4 + 16a_1^2\pi^6 + 3a_1^4\pi^8 + 18\eta}{\pi^2(8 + 3a_1^2\pi^2)} \quad (3.65)$$

- $L=4s$ (três estribos envolvidos na flambagem)

$$\Gamma = \frac{32\pi^4 + 16a_1^2\pi^6 + 3a_1^4\pi^8 + 24\eta}{\pi^2(8 + 3a_1^2\pi^2)} \quad (3.66)$$

- $L=5s$ (quatro estribos envolvidos na flambagem)

$$\Gamma = \frac{32\pi^4 + 16a_1^2\pi^6 + 3a_1^4\pi^8 + \eta \left(16 - 16 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + 8 \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)^2 + 16 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) + 8 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)^2 \right)}{\pi^2(8 + 3a_1^2\pi^2)} \quad (3.67)$$

- $L=6s$ (cinco estribos envolvidos na flambagem)

$$\Gamma = \frac{32\pi^4 + 16a_1^2\pi^6 + 3a_1^4\pi^8 + 36\eta}{\pi^2(8 + 3a_1^2\pi^2)} \quad (3.68)$$

Considerando-se o campo de deslocamentos (3.29) obtém-se os seguintes valores adimensionais para a carga crítica:

- $L=s$ (nenhum estribo envolvido na flambagem)

$$\Gamma = \frac{(7200\pi^4 - 57600\pi^2 + 921600a_1^2\pi^2 - 176000a_1^2\pi^4 + 8400a_1^2\pi^6 - 16588800a_1^4\pi^2 - 228858a_1^4\pi^6 + 3505600a_1^4\pi^4 + 4455a_1^4\pi^8 + 900\eta\pi^2 - 7200\eta\pi + 14400\eta) / (20(600\pi^2 - 5760 - 19600a_1^2\pi^2 + 138240a_1^2 + 567\pi^4a_1^2))}{(20(600\pi^2 - 5760 - 19600a_1^2\pi^2 + 138240a_1^2 + 567\pi^4a_1^2))} \quad (3.69)$$

- $L=2s$ (um estribo envolvido na flambagem)

$$\Gamma = \frac{(64800\pi^4 - 518400\pi^2 + 8294400a_1^2\pi^2 - 1584000a_1^2\pi^4 + 75600a_1^2\pi^6 - 149299200a_1^4\pi^2 - 2059722a_1^4\pi^6 + 31550400a_1^4\pi^4 + 40095a_1^4\pi^8 + 12800\eta\pi^2 - 99766\eta\pi + 194400\eta) / (180(600\pi^2 - 5760 - 19600a_1^2\pi^2 + 138240a_1^2 + 567\pi^4a_1^2))}{(180(600\pi^2 - 5760 - 19600a_1^2\pi^2 + 138240a_1^2 + 567\pi^4a_1^2))} \quad (3.70)$$

- $L=3s$ (dois estribos envolvidos na flambagem)

$$\Gamma = \frac{(14400\pi^4 - 115200\pi^2 + 1843200a_1^2\pi^2 - 352000a_1^2\pi^4 + 16800a_1^2\pi^6 - 33177600a_1^4\pi^2 - 457716a_1^4\pi^6 + 7011200a_1^4\pi^4 + 8910a_1^4\pi^8 + 3825\eta\pi^2 - 10800\eta\pi\sqrt{2} + 57600\eta - 14400\eta\pi) / (40(600\pi^2 - 5760 - 19600a_1^2\pi^2 + 138240a_1^2 + 567\pi^4a_1^2))}{(40(600\pi^2 - 5760 - 19600a_1^2\pi^2 + 138240a_1^2 + 567\pi^4a_1^2))} \quad (3.71)$$

- $L=4s$ (dois estribos envolvidos na flambagem)

$$\Gamma = \frac{1}{500} \left(180000\pi^4 - 1440000\pi^2 - 23040000a_1^2\pi^2 - 4400000a_1^2\pi^4 + 210000a_1^2\pi^6 - \right. \\ \left. - 414720000a_1^4\pi^2 - 5721450a_1^4\pi^6 + 87640000a_1^4\pi^4 + 111375a_1^4\pi^8 + 59904\eta\pi^2 - \right. \\ \left. - 345600\eta\pi\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) - 230400\eta\pi\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) + 720000\eta\left(\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)^2 + \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)^2\right) \right) / \left(\right. \\ \left. 600\pi^2 - 5760 - 19600a_1^2\pi^2 + 138240a_1^2 + 567\pi^4a_1^2 \right) \quad (3.72)$$

- $L=5s$ (três estribos envolvidos na flambagem)

$$\Gamma = \left(64800\pi^4 - 518400\pi^2 + 8294400a_1^2\pi^2 - 1584000a_1^2\pi^4 + 75600a_1^2\pi^6 - \right. \\ \left. - 149299200a_1^4\pi^2 + 2059722a_1^4\pi^6 + 31550400a_1^4\pi^4 + 40095a_1^4\pi^8 + \right. \\ \left. + 25900\eta\pi^2 - 100800\eta\pi - 57600\sqrt{3}\eta\pi + 388800\eta \right) / \left(600\pi^2 - \right. \\ \left. - 5760 - 19600a_1^2\pi^2 + 138240a_1^2 + 567\pi^4a_1^2 \right) \quad (3.73)$$

Para o caso não-linear considerando-se mais graus de liberdade, calcula-se os autovetores da estrutura considerando-se o caso linear e substituem-se as relações encontradas para os autovetores do caso linear nas equações de equilíbrio dos casos não-lineares. Os programas com o método de solução destas equações encontram-se no Apêndice I.

3.6.2.2.

Coluna sobre Base Elástica

A fórmula (3.74) e (3.75) apresenta as expressões para a carga crítica adimensional considerando-se os estribos como uma base elástica e os campos de deslocamento (3.28) e (3.29), respectivamente.

$$\Gamma = \frac{32\pi^4 + 6\eta + 16a_1^2\pi^6 + 3\pi^8a_1^4}{\pi^2(8 + 3a_1^2\pi^2)} \quad (3.74)$$

$$\Gamma = \left(7200\pi^6 - 57600\pi^4 + 7200\eta\pi^2 + 480\eta\pi^4 - 115200\eta + 921600\pi^4a_1^2 - \right. \\ \left. - 228858a_1^4\pi^8 + 3505600a_1^4\pi^6 - 176000a_1^2\pi^6 + 4455a_1^4\pi^{10} + 8400a_1^2\pi^8 - \right. \\ \left. - 16588800a_1^4\pi^4 \right) \frac{1}{20\pi^2(600\pi^2 - 5760 + 567\pi^4a_1^2 - 19600a_1^2\pi^2 + 138240a_1^2)} \quad (3.75)$$

Considerando-se três graus de liberdade têm-se as seguintes equações não-lineares de equilíbrio para o campo de deslocamentos (3.28)

$$2a_1\pi^4 + \frac{3\eta a_1}{8} + a_1^3\pi^6 + \frac{3a_1^5\pi^8}{16} - \Gamma \left(\frac{1}{2}a_1\pi^2 + \frac{3}{16}a_1^3\pi^4 \right) + \frac{\eta a_2}{8} - \frac{\Gamma a_1 a_2^2 \pi^4}{4} + \\ + \frac{\eta a_3}{8} - \frac{243a_1^2\pi^8 a_3^3}{64} - \frac{9\Gamma a_1\pi^4 a_3^2}{16} = 0 \quad (3.76)$$

$$32a_2\pi^4 + \frac{\eta a_1}{8} + 64a_3^2\pi^6 + 48a_2^5\pi^8 - \Gamma(2a_2\pi^2 + 3a_3^2\pi^4) + \frac{\eta a_3}{8} - \frac{\Gamma a_1^2 a_2 \pi^4}{4} + \frac{3\eta a_2}{8} - \frac{9\Gamma a_2 \pi^4 a_3^2}{4} = 0 \quad (3.77)$$

$$162a_3\pi^4 + \frac{\eta a_1}{8} + 729a_3^3\pi^6 + \frac{19683a_3^5\pi^8}{16} - \Gamma\left(\frac{9}{2}a_3\pi^2 + \frac{243}{16}a_3^3\pi^4\right) + \frac{\eta a_2}{8} - \frac{9\Gamma a_1^2 a_3 \pi^4}{16} + \frac{3\eta a_3}{8} - \frac{9\Gamma a_2^2 \pi^4 a_3}{4} - \frac{243\Gamma a_1^3 \pi^8 a_3^2}{64} = 0 \quad (3.78)$$

Para o campo de deslocamentos (3.29) tem-se as seguintes equações

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^4 a_1}{2} - 4a_1\pi^2 + \frac{\eta a_1(15\pi^2 + \pi^4 - 240)}{30\pi^2} + \frac{7a_1^3\pi^6}{12} - \frac{110a_1^3\pi^4}{9} + \frac{2191a_1^5\pi^4}{9} - \\ & - \frac{38143a_1^5\pi^6}{2400} + 64a_1^3\pi^2 + \frac{99a_1^5\pi^8}{320} - 1152a_1^5\pi^2 + \frac{2143a_1 a_2^2 \pi^4}{150} - \frac{17636a_1 a_2^2 \pi^2}{9} - \\ & - \Gamma\left(\frac{5}{6}a_1\pi^2 - 8a_1 + \frac{63}{80}a_1^3\pi^4 - \frac{245}{9}a_1^3\pi^2 + 192a_1^3\right) - 20736a_1 a_2^2 - 6a_3\pi^2 + 160a_1 a_3^2 \pi^2 - \\ & - \frac{\Gamma a_1 a_2^2(7830\pi^6 - 439383\pi^4 + 47696600\pi^2 - 435456000)}{12600\pi^2} + \frac{\eta a_3(27\pi^4 - 3280)}{540\pi^2} + \\ & + \frac{55963225783a_1^2 a_3^3 \pi^4}{28812000} - \frac{13971a_1 a_3^2 \pi^4}{980} - \frac{10477103817a_1^2 a_3^3 \pi^6}{75891200} + \frac{567a_1^2 a_3^3 \pi^8}{256} - \\ & - 7872a_1^2 a_3^3 \pi^2 - \Gamma\left(-\frac{20}{3}a_3 + \frac{1}{2}a_3\pi^2 + \frac{141}{80}a_1 a_3^2 \pi^4 + \frac{1312}{3}a_1 a_3^2 - \frac{299889}{4900}a_1 a_3^2 \pi^2\right) = 0 \end{aligned} \quad (3.79)$$

$$\begin{aligned} & \frac{2143a_1^2 a_2 \pi^4}{150} + \frac{17636a_1^2 a_2 \pi^2}{9} - 20736a_1^2 a_2 + 8\pi^4 a_2 - 48a_2\pi^2 + \frac{\eta a_2(4\pi^4 + 105\pi^2 - 1260)}{210\pi^2} - \\ & - \frac{\Gamma a_1^2 a_2(7830\pi^6 - 439383\pi^4 + 47696600\pi^2 - 435456000)}{12600\pi^2} + a_2^3(665280\pi^8 + 364240800\pi^4 - \\ & - 13720960\pi^6 - 2874009600\pi^2 - 18106260480000a_2^2 + 2671313337000a_2^2\pi^2 + 755040a_2^2\pi^{10} - \\ & - 108367028000\pi^4 a_2^2 - 47591216a_2^2\pi^8 + 2786050575a_2^2\pi^6) \frac{1}{23100\pi^2} + a_2^4(1510080a_2\pi^{10} - \\ & - 36212520960000a_2 + 5342626674000a_2\pi^2 - 216734056000\pi^4 a_2 - 95182432a_2\pi^8 + \\ & + 5572101150a_2\pi^6) \frac{1}{92400\pi^2} - \Gamma\left(\frac{a_2^3(1080135\pi^2 - 34300\pi^4 + 891\pi^6 - 8164800)}{105\pi^2} - 24a_2 + \right. \\ & \left. \frac{14a_2\pi^2}{5}\right) + \frac{\Gamma a_2 a_3^2(-4419252768\pi^2 + 309240675\pi^4 - 1254400000 + 16443000\pi^6)}{2940000\pi^2} + \\ & + \frac{14711049a_2 a_3^2 \pi^4}{9800} - \frac{9574908a_2 a_3^2 \pi^2}{625} - 2304a_2 a_3^2 = 0 \end{aligned} \quad (3.80)$$

$$\begin{aligned}
& \frac{55963225783a_1^3a_3^2\pi^4}{28812000} - \frac{13971a_1^2a_3\pi^4}{980} + 160a_1^2a_3\pi^2 - 6\pi^2a_1 + \frac{\eta a_1(27\pi^4 - 3280)}{540\pi^2} - \\
& - \frac{10477103817a_1^3a_3^2\pi^6}{75891200} + \frac{567a_1^3a_3^2\pi^8}{256} - 7872a_1^3a_3^2\pi^2 + \frac{14711049a_2^2a_3\pi^4}{9800} - 36a_3\pi^2 - \\
& - \Gamma\left(-\frac{20}{3}a_1 + \frac{1}{2}a_1\pi^2 + \frac{141}{80}a_1^2a_3\pi^4 + \frac{1312}{3}a_1^2a_3 - \frac{299889}{4900}a_1^2a_3\pi^2\right) - \frac{9574908a_2^2a_3\pi^2}{625} - \\
& 2304a_2^2a_3 - \frac{\Gamma a_2^2a_3(-4419252768\pi^2 + 309240675\pi^4 - 1254400000 + 16443000\pi^6)}{2940000\pi^2} + \\
& + \frac{81\pi^4a_3}{2} + \frac{\eta a_3(45\pi^2 - 80 + 27\pi^4)}{90\pi^2} + \frac{1701a_3^3\pi^6}{4} + 576a_3^3\pi^2 - 990a_3^3\pi^4 + 19719a_3^5\pi^4 - \\
& - \frac{9268749a_3^5\pi^6}{800} - \Gamma\left(\frac{15}{2}a_3\pi^2 - 8a_3 + \frac{5103}{80}a_3^3\pi^4 - 245a_3^3\pi^2 + 192a_3^3\right) - 10368a_3^5\pi^2 + \\
& + \frac{649539a_3^5\pi^8}{320} = 0
\end{aligned} \tag{3.81}$$

As equações (3.79), (3.80) e (3.81), são resolvidas encontrando-se as expressões para os autovetores do caso linear com três graus de liberdade e substituindo-se essas expressões nas equações de equilíbrio dos casos não-lineares, dessa forma pode-se estudar os caminhos pós-críticos da coluna para o caso com vários graus de liberdade.

3.7. Efeito da Imperfeição Geométrica

Uma das principais razões da fratura e lascamento do cobrimento do concreto é a concentração de tensões que aparece na interface entre estribos e o concreto. A natureza das tensões locais e deformações no cobrimento devido à presença dos estribos pode ser vista na Figura 3.4.

A compressão longitudinal produz expansão lateral do concreto devido o efeito de Poisson. Caso não existissem os estribos, uma expansão lateral semelhante poderia ocorrer livremente e uniformemente ao longo do comprimento de uma coluna axialmente carregada.

Para se levar em conta o efeito de Poisson e imperfeições devido ao processo de construção, considerou-se o efeito da imperfeição geométrica na formulação.

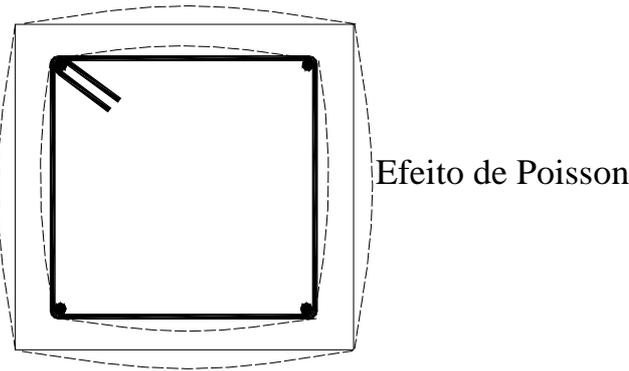


Figura 3.4- Seção transversal da coluna mostrando a distorção da seção no nível do estribo.

Seja agora a coluna de Euler da Figura 3.5 com uma imperfeição geométrica inicial descrita por uma função $w_o(x)$. O deslocamento total com relação à configuração de uma coluna perfeita e indeformada é dado por:

$$w_t(x) = w_o(x) + w(x) \tag{3.82}$$

onde, como mostra a Figura 3.5, w é o deslocamento gerado pelo carregamento axial. As imperfeições geométricas são consideradas como de pequena magnitude e podem ser consideradas matematicamente como uma perturbação na solução da estrutura perfeita. A curvatura da coluna com imperfeição geométrica é dada por:

$$\frac{1}{R_o} = \frac{w_{o,xx}}{(1 - w_{o,x}^2)^{3/2}} \tag{3.83}$$

Da mesma forma, a curvatura total fica dada por:

$$\frac{1}{R_t} = \frac{w_{,xx} + w_{o,xx}}{(1 - (w_{,x} + w_{o,x})^2)^{3/2}} \tag{3.84}$$

Expandindo-se o denominador (3.83) e (3.84) e restando-se em w os termos até a quarta ordem, obtém-se

$$\chi_o = w_{o,xx} \left[1 + \frac{1}{2} w_{o,x}^2 \right] \tag{3.85}$$

$$\chi_t = (w_{,xx} + w_{o,xx}) \left[1 + \frac{1}{2} (w_{,x} + w_{o,x})^2 \right] \tag{3.86}$$

Tem-se que a variação da curvatura é dada por:

$$\chi = \chi_t - \chi_o = w_{,xx} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 w_{,xx} + w_{,x} w_{o,x} w_{,xx} + \frac{1}{2} w_{o,x}^2 w_{,xx} + \frac{1}{2} w_{,x}^2 w_{o,xx} + w_{,x} w_{o,x} w_{o,xx} \tag{3.87}$$

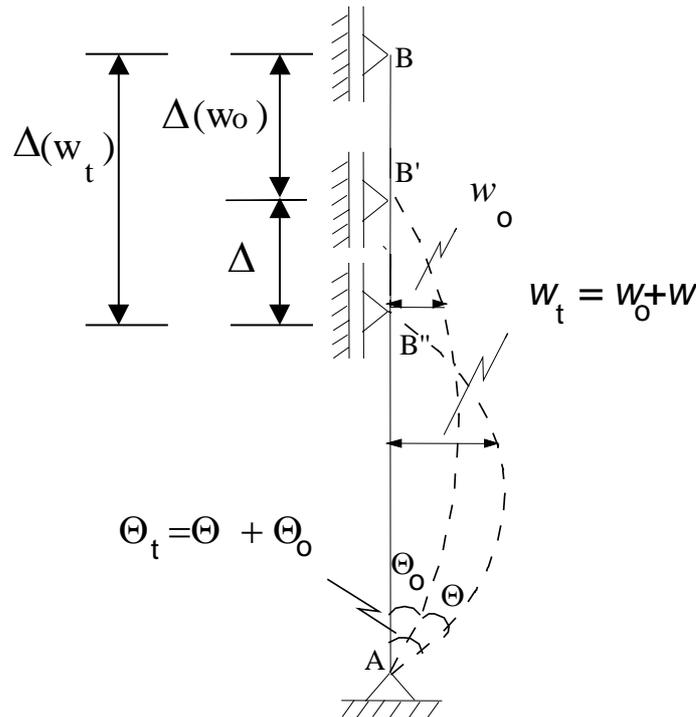


Figura 3.5- Coluna com imperfeição geométrica.

Substituindo-se a eq. (3.87) em (3.6) tem-se para a energia de flexão a expressão

$$\begin{aligned}
 U \cong \int_0^L \frac{1}{2} EI \chi^2 dx \cong \int_0^L \frac{1}{2} EI \left(w_{,xx}^2 + w_{,xx}^2 w_{,x}^2 + \frac{1}{4} w_{,xx}^2 w_{,x}^4 + w_{,ox}^2 w_{,xx}^2 + \frac{1}{4} w_{,ox}^4 w_{,xx}^2 + \right. \\
 \left. + \frac{1}{4} w_{,x}^4 w_{,ox}^2 + w_{,x}^3 w_{,xx}^2 w_{,ox} + w_{,x}^3 w_{,ox}^2 w_{,xx} + 2w_{,x} w_{,xx}^2 w_{,ox} + w_{,x} w_{,ox}^3 w_{,xx}^2 + \right. \\
 \left. + \frac{3}{2} w_{,x}^2 w_{,xx}^2 w_{,ox}^2 + \frac{1}{2} w_{,x}^4 w_{,xx} w_{,ox} + w_{,x}^2 w_{,ox}^2 w_{,xx}^2 + w_{,xx} w_{,x}^2 w_{,ox}^2 + \right. \\
 \left. + 2w_{,x}^3 w_{,xx} w_{,ox} w_{,xx} + 2w_{,xx} w_{,x} w_{,ox} w_{,xx} + \frac{5}{2} w_{,x}^2 w_{,xx} w_{,ox}^2 w_{,xx} + \right. \\
 \left. + w_{,x} w_{,ox}^3 w_{,xx} w_{,xx} \right) dx \tag{3.88}
 \end{aligned}$$

Da Figura 3.5 o encurtamento, Δ , da coluna fica dado por:

$$\Delta = \Delta(w_t) - \Delta(w_0) \tag{3.89}$$

onde

$$\Delta(w_0) = \int_0^L \left(\frac{1}{2} w_{,ox}^2 + \frac{1}{8} w_{,ox}^4 \right) dx \tag{3.90}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta(w_t) = \int_0^L \left(\frac{1}{2} w_{,x}^2 + w_{,x} w_{,ox} + \frac{1}{2} w_{,ox}^2 + \frac{1}{8} w_{,x}^4 + \frac{1}{2} w_{,x}^3 w_{,ox} + \frac{3}{4} w_{,x}^2 w_{,ox}^2 \right. \\
 \left. + \frac{1}{2} w_{,x} w_{,ox}^3 + \frac{1}{8} w_{,ox}^4 \right) dx \tag{3.91}
 \end{aligned}$$

Substituindo-se então (3.90) e (3.91) em (3.89) tem-se de (3.15) que o potencial das cargas externas fica dado por:

$$V_p = -P \int_0^L \left(\frac{1}{2} w_{,x}^2 + w_{,x} w_{o,x} + \frac{1}{8} w_{,x}^4 + \frac{1}{2} w_{,x}^3 w_{o,x} + \frac{3}{4} w_{,x}^2 w_{o,x}^2 + \frac{1}{2} w_{,x} w_{o,x}^3 \right) dx \quad (3.92)$$

De forma similar, a energia de deformação da mola é dada por:

$$U_i = \frac{1}{2} K \left[\sum_{i=0}^{i=n} w_i(x=is) \right]^2 \quad (3.93)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L k w_i(x)^2 dx \quad (3.94)$$

Para os apoios laterais distribuídos de forma discreta e contínua, respectivamente.

A imperfeição geométrica inicial pode ser descrita pelas mesmas séries de Fourier que descrevem o campo de deslocamentos da coluna nas expressões (3.28) e (3.29) como a seguir:

$$w_{od}(\xi) = \sum_{k=1}^p \frac{a_{ok}}{2} (1 - \cos(2\pi k \xi)) \quad (3.95)$$

$$w_{od}(\xi) = \sum_{k=1}^p a_{ok} \left(-k\pi\xi + k\pi\xi^2 (2 + (-1)^k) - k\pi\xi^3 (1 + (-1)^k) + \sin(k\pi\xi) \right) \quad (3.96)$$

sendo p o número de termos necessários para descrever as imperfeições da coluna e $a_{ok} = \frac{a_o}{L}$ são as amplitudes parametrizadas em relação ao comprimento da coluna.

3.7.1

Matrizes de Rigidez Elástica (K_f) e Rigidez Geométrica (K_g) para a Coluna com Imperfeição Geométrica Inicial

As expressões que definem as matrizes de rigidez considerando-se o campo de deslocamentos w_i e w_j e a coluna com uma certa imperfeição inicial são dadas a seguir.

- **Da energia de deformação**

$$K_{f_{i,j}} = \int_0^1 \left(w_{d,\xi\xi_i} w_{d,\xi\xi_j} + w_{d,\xi\xi_i} w_{d,\xi\xi_j} w_{d,\xi_i} w_{d,\xi_j} + \frac{1}{4} w_{d,\xi\xi_i} w_{d,\xi\xi_j} w_{d,\xi_i} w_{d,\xi_j} w_{d,\xi_i} w_{d,\xi_j} + w_{od,\xi_i} w_{od,\xi_j} w_{d,\xi\xi_i} w_{d,\xi\xi_j} + 2w_{d,\xi_i} w_{d,\xi\xi_j} w_{d,\xi\xi_i} w_{od,\xi_j} + w_{d,\xi\xi_i} w_{d,\xi_j} w_{d,\xi_i} w_{od,\xi\xi_j} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{4} w_{od,\xi_i} w_{od,\xi_j} w_{od,\xi_i} w_{od,\xi_j} w_{d,\xi\xi_i} w_{d,\xi\xi_j} + 2 w_{d,\xi\xi_i} w_{d,\xi_j} w_{od,\xi_i} w_{od,\xi\xi_j} + \\
 & + \frac{1}{4} w_{d,\xi_i} w_{d,\xi_j} w_{d,\xi_i} w_{d,\xi_j} w_{od,\xi\xi_i} w_{od,\xi\xi_j} + w_{d,\xi_i} w_{d,\xi_j} w_{d,\xi_i} w_{d,\xi\xi_j} w_{d,\xi\xi_i} w_{od,\xi_j} + \\
 & + w_{d,\xi_i} w_{d,\xi_j} w_{d,\xi_i} w_{od,\xi\xi_j} w_{od,\xi\xi_i} w_{od,\xi_j} + 2 w_{d,\xi_i} w_{d,\xi_j} w_{d,\xi_i} w_{d,\xi\xi_j} w_{od,\xi_i} w_{od,\xi\xi_j} + \\
 & + w_{d,\xi_i} w_{od,\xi_j} w_{od,\xi_i} w_{od,\xi_j} w_{d,\xi\xi_i} w_{d,\xi\xi_j} + \frac{3}{2} w_{d,\xi_i} w_{d,\xi_j} w_{d,\xi\xi_i} w_{d,\xi\xi_j} w_{od,\xi_i} w_{od,\xi_j} + \\
 & + w_{d,\xi_i} w_{d,\xi_j} w_{od,\xi_i} w_{od,\xi_j} w_{od,\xi\xi_i} w_{od,\xi\xi_j} + \frac{1}{2} w_{d,\xi_i} w_{d,\xi_j} w_{d,\xi_i} w_{d,\xi_j} w_{d,\xi\xi_i} w_{od,\xi\xi_j} + \\
 & + \frac{5}{2} w_{d,\xi_i} w_{d,\xi_j} w_{d,\xi\xi_i} w_{od,\xi_j} w_{od,\xi_i} w_{od,\xi\xi_j} + w_{d,\xi_i} w_{od,\xi_j} w_{od,\xi_i} w_{od,\xi_j} w_{d,\xi\xi_i} w_{od,\xi\xi_j} \Big) d\xi \quad (3.97)
 \end{aligned}$$

• **Da energia de deformação da mola**

Apoios distribuídos de forma discreta

$$K_{mi,j} = \eta \sum_{\xi=0}^{\xi=1} (w_{od_i} w_{od_j} + 2 w_{od_i} w_{d_j} + w_{d_i} w_{d_j}) \quad (3.98)$$

Apoios distribuídos de forma contínua

$$K_{mi,j} = \eta_b \int_0^1 (w_{od_i} w_{od_j} + 2 w_{od_i} w_{d_j} + w_{d_i} w_{d_j}) d\xi \quad (3.99)$$

• **Da energia da carga axial**

$$\begin{aligned}
 K_{gi,j} = \int_0^1 & \left(w_{d,\xi_i} w_{d,\xi_j} + w_{d,\xi_i} w_{od,\xi_j} + \frac{1}{4} w_{d,\xi_i} w_{d,\xi_j} w_{d,\xi_i} w_{d,\xi_j} + w_{d,\xi_i} w_{d,\xi_j} w_{d,\xi_i} w_{od,\xi_j} + \right. \\
 & \left. + \frac{3}{2} w_{d,\xi_i} w_{d,\xi_j} w_{od,\xi_i} w_{od,\xi_j} + w_{d,\xi_i} w_{od,\xi_j} w_{od,\xi_i} w_{od,\xi_j} \right) d\xi \quad (3.100)
 \end{aligned}$$

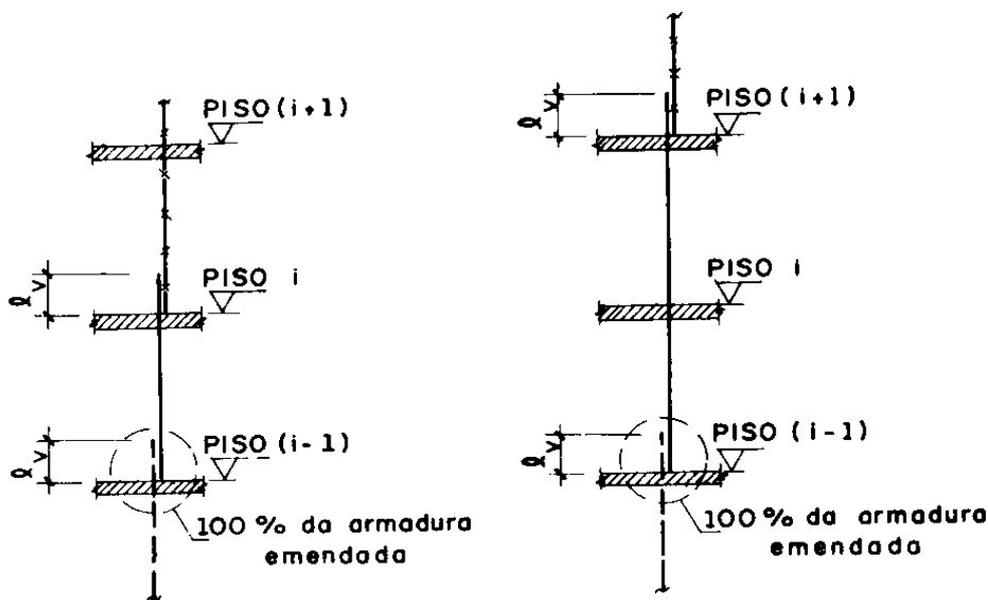
onde $w_{od} = \frac{w_o}{L}$.

Para se encontrar as equações lineares de equilíbrio considerando-se a coluna com imperfeição inicial, procedeu-se da mesma forma que no caso perfeito, porém nos casos não-lineares substituiu-se nas equações não-lineares os autovetores do sistema perfeito e recalcularam-se as cargas críticas para os valores crescentes da magnitude das imperfeições. Este procedimento é talvez a aproximação mais usual em que se tem uma idéia do comportamento pós-crítico (carga vs. deslocamento) admitindo-se que os primeiros modos da coluna teriam uma função preponderante.

3.8.

Consideração das Emendas das Barras da Armadura

De acordo com Süssekind (1984), para os edifícios usuais, a armadura longitudinal dos pilares é normalmente mantida constante ao longo de cada andar, o detalhamento corrente sendo um daqueles indicados na elevação da Figura 3.6. O esquema da Figura 3.6.a significa o máximo gasto em armadura, já que a cada andar emenda-se a totalidade das barras. O esquema da Figura 3.6.b busca a eliminação do desperdício trazido por excesso de emendas. A Figura 3.7 mostra uma armação típica de pilares.



a) Armadura emendendo (100 %) em todos os andares.

b) Armadura emendendo (100 %) a cada 2 andares.

Figura 3.6- Tipos usuais de detalhamento de armadura para pilares de edifício. Süssekind (1984)

Para se considerar o caso de emendas das barras na presente formulação, considerou-se um modelo onde a armadura é engastada em uma das extremidades e livre na outra como o modelo apresentado na Figura 3.8.

Dessa forma, todos os passos realizados para a coluna engastada nas extremidades foram feitos para o caso da presença de emendas com a finalidade de se conhecer o comportamento das armaduras quando uma das extremidades está livre.

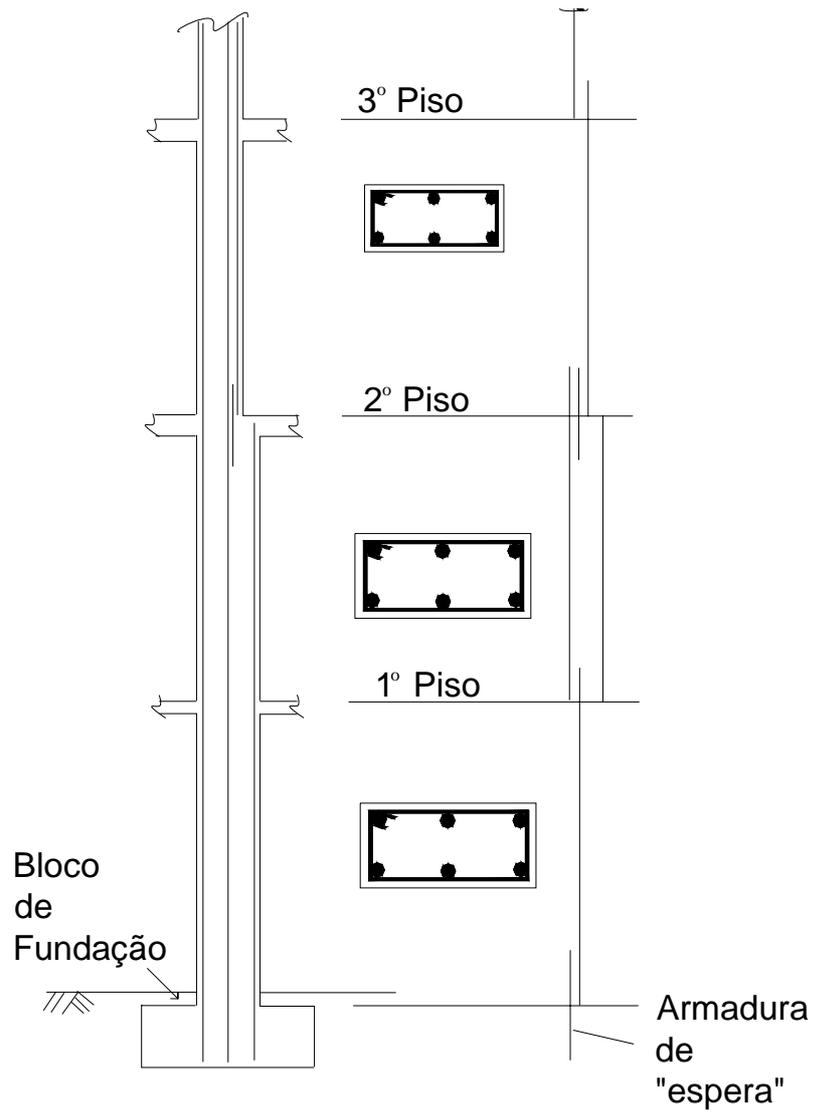


Figura 3.7- Armadura típica de pilares

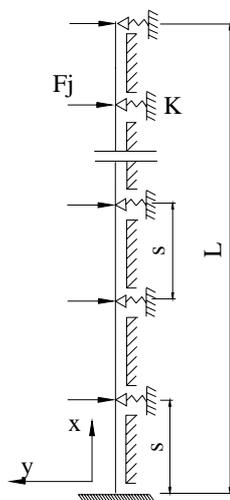


Figura 3.8- Modelo para consideração das emendas das barras da armadura.

3.9.

Cálculo do Parâmetro Adimensional de Rigidez, η

O valor numérico do parâmetro adimensional de rigidez depende da rigidez dos estribos, K , do módulo de elasticidade da armadura longitudinal, E , do momento de inércia da armadura longitudinal, I e do espaçamento entre estribos, s quando os estribos são considerados distribuídos continuamente ao longo da armadura.

3.9.1.

Cálculo da Rigidez dos Estribos, K

O valor de K é função das características mecânicas e da geometria do estribo. Nesta formulação consideram-se os arranjos mostrados na Figura 3.9. Neste trabalho considera-se a carga axial concêntrica existindo condições de perfeita simetria, assim K é calculada considerando-se os modelos simplificados mostrados na Figura 3.10.

O modelo da Figura 3.10.a está relacionado à barra localizada no centro de uma perna de estribos, as Figuras 3.10.b, 3.10.c, 3.10.d e 3.10.e estão relacionados às barras de canto, a Figura 3.10.f está relacionada à barra envolvida pelo estribo interior como mostra a Figura 3.9.c. A Figura 3.10 mostra também a força exercida pela barra longitudinal sobre o estribo na direção em que a flambagem pode ocorrer.

Para o modelo da Figura 3.10.a, a armadura longitudinal pode ser considerada como impondo uma carga concentrada no meio do vão de uma viga fixa nas extremidades e a expressão para a rigidez do estribo é

$$K = \frac{192EI_t}{b^3} \quad (3.101)$$

Para o modelo da Figura 3.10.b a expressão para a rigidez do estribo fica

$$K = \frac{EA_t}{b} \quad (3.102)$$

onde E é o módulo de elasticidade da armadura longitudinal e A_t é a área do estribo. Um resultado análogo é obtido para o modelo da Figura 3.10.c. Para os modelos das Figuras 3.10.d e 3.10.e, obtém-se um valor similar, porém o valor de b seria $b/2$. Quando o arranjo das armaduras na seção é semelhante a Figura 3.9.b, as barras localizadas no centro de uma perna de estribos são as primeiras a

flambarem, se o arranjo for do tipo mostrado na Figura 3.9.c, as primeiras barras a flambarem são as barras do vértice, pois as barras do centro de uma perna envolvidas por um outro estribo possuem uma rigidez muito maior do que a rigidez das barras de canto, como o valor apresentado na Figura 2.3, oriunda dos trabalhos de Bresler & Gilbert (1961).

Nota-se que a armadura transversal pode oferecer diferentes contribuições para a resistência à flambagem das barras longitudinais. As barras longitudinais localizadas no canto dos estribos são restringidas pela rigidez extensional e aquelas barras localizadas na perna de um estribo são restringidas apenas pela rigidez à flexão.

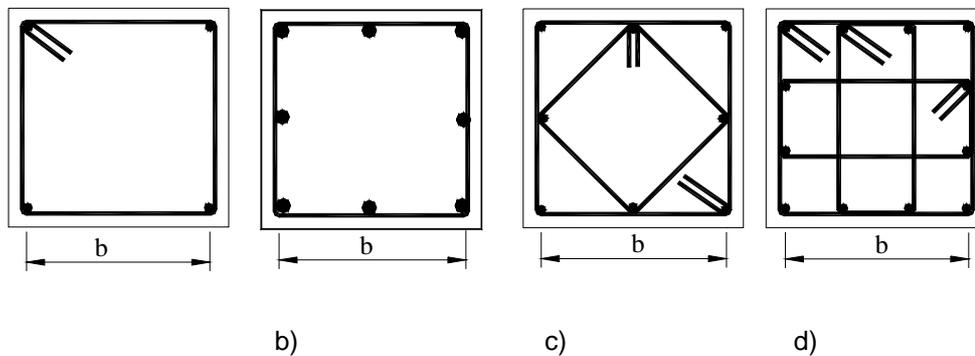


Figura 3.9 - Arranjos da armadura na seção transversal.

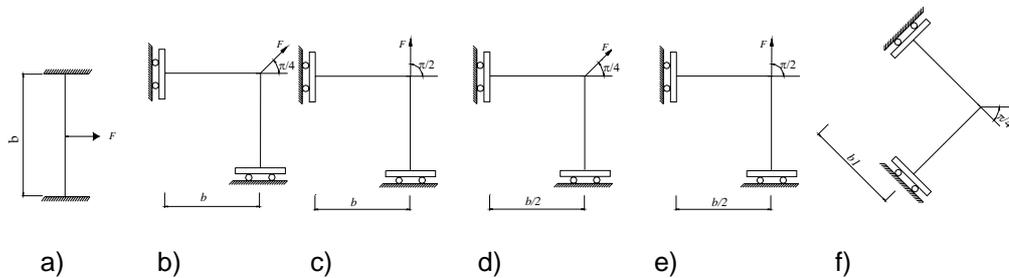


Figura 3.10- Modelos simplificados para cálculo da rigidez K .

O módulo de elasticidade longitudinal a ser considerado é o módulo de elasticidade instantâneo, porém pode-se utilizar o módulo de elasticidade reduzido quando o mesmo é conhecido.

3.10. Consideração Conjunta das Armaduras Longitudinais e Transversais como Placa Ortotrópica

3.10.1. Introdução

Um possível aperfeiçoamento, no caso de grande número de barras longitudinais seria a consideração do conjunto de armaduras longitudinais e transversais como uma grelha. Apresenta-se nesta seção a formulação adotada e expressões para a carga crítica.

3.10.2 Placas Ortotrópicas

Para a consideração de grelha utilizou-se a formulação de placas ortotrópicas onde as propriedades elásticas do material são diferentes em todas as direções. Considerando-se que as direções principais de ortotropia coincidem com os eixos coordenados x e y , tem-se quatro constantes elásticas (E_x, E_y, ν_x, ν_y) que são requeridas para o desenvolvimento das relações tensão-deformação ortotrópicas, como o desenvolvimento a seguir.

3.10.3 Flexão Pura de Placas Ortotrópicas

No caso de flexão pura de uma barra prismática, uma solução para a distribuição de tensões é obtida considerando-se que a seção transversal da barra permanece plana durante a flexão e rotaciona somente em relação ao seu eixo neutro. Uma combinação semelhante de flexão em duas direções perpendiculares corresponde a flexão pura de placas.

A flexão pura de uma placa retangular é composta por momentos que são uniformemente distribuídos ao longo dos lados da placa como apresenta a Figura 3.11.

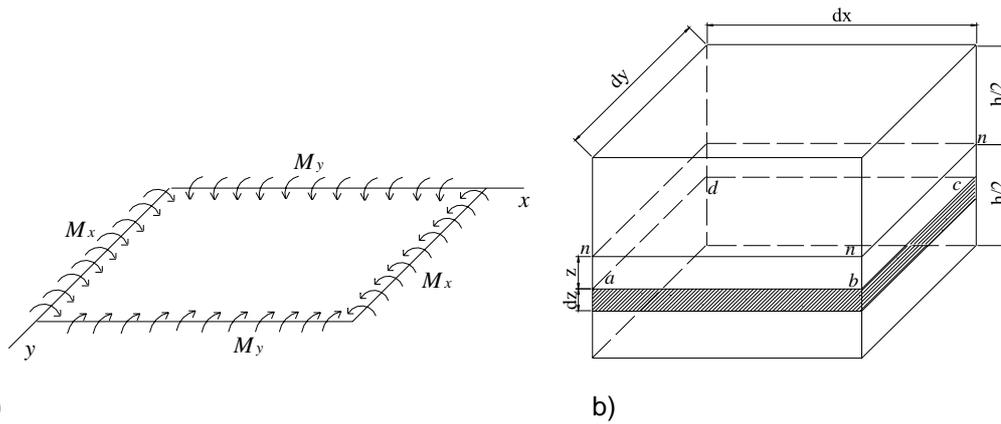


Figura 3.11 - Flexão pura de placas.

O momento fletor por unidade de comprimento das arestas paralelas ao eixo y é chamado de M_x e o momento fletor por unidade de comprimento das arestas paralelas ao eixo x é chamado de M_y . Esses momentos são considerados positivos quando eles produzem compressão na parte superior da placa e tração na parte de inferior.

Considerando-se o elemento hachurado da placa na Figura 3.11.b e supondo que durante a flexão da placa, as faces laterais deste elemento permanecem planas e rotacionam em torno do eixo neutro $n-n$, permanecendo normal a superfície deformada, conclui-se que o plano médio da placa não sofre deformação durante a flexão e é, portanto, uma superfície neutra. As curvaturas da superfície neutra são dadas por:

$$\frac{1}{\rho_x} \text{ e } \frac{1}{\rho_y} \tag{3.103}$$

Dessa forma, as deformações unitárias nas direções x e y de um elemento de lâmina $abcd$ na Figura 3.11.b podem ser descritas como no caso de vigas e são dadas por:

$$\varepsilon_x = \frac{z}{\rho_x} \text{ e } \varepsilon_y = \frac{z}{\rho_y} \tag{3.104}$$

Da lei de Hooke tem-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_x} - \nu_y \frac{\sigma_y}{E_y} \\ \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y}{E_y} - \nu_x \frac{\sigma_x}{E_x} \end{aligned} \tag{3.105}$$

onde ν_x e ν_y são os coeficientes de Poisson. Resolvendo-se (3.105) para σ_x e σ_y chega-se a:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \frac{E_x}{1 - \nu_x \nu_y} (\varepsilon_x + \nu_y \varepsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E_y}{1 - \nu_x \nu_y} (\varepsilon_y + \nu_x \varepsilon_x)\end{aligned}\quad (3.106)$$

As expressões dos momentos externos são dadas por:

$$\begin{aligned}M_x &= D_x \left(\frac{1}{\rho_x} + \nu_y \frac{1}{\rho_y} \right) \\ M_y &= D_y \left(\frac{1}{\rho_y} + \nu_x \frac{1}{\rho_x} \right)\end{aligned}\quad (3.107)$$

onde D_x e D_y são as rigidezes à flexão da placa.

A deflexão da placa é denotada por w e as expressões para a curvatura da placa são análogas às fórmulas conhecidas da curvatura da viga e são dadas por:

$$\frac{1}{\rho_x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{e} \quad \frac{1}{\rho_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\quad (3.108)$$

Substituindo-se a eq. (3.108) nos momentos externos da eq. (3.107) tem-se:

$$\begin{aligned}M_x &= -D_x \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ M_y &= -D_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)\end{aligned}\quad (3.109)$$

3.10.4.

Energia de Flexão de Placas Ortotrópicas

Na flexão pura quando uma placa é fletida por momentos de flexão distribuídos uniformemente, M_x e M_y como na Figura 3.11.a, A energia de deformação é obtida calculando-se o trabalho realizado pelos momentos $M_x dy$ e $M_y dx$ sobre o elemento durante a flexão da placa.

Desde que os lados do elemento permaneçam planos, o trabalho realizado pelo momento $M_x dy$ é obtido tomando-se a metade do produto do momento e o ângulo entre os lados do elemento após a flexão. $-\partial^2 w / \partial x^2$ representa

aproximadamente, a curvatura da placa no plano xz . O ângulo correspondente aos momentos $M_x dy$ é $(-\partial^2 w / \partial x^2) dx$ e o trabalho realizado por esse momento é:

$$-\frac{1}{2} M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy \quad (3.110)$$

Para o momento $M_y dx$ tem-se:

$$-\frac{1}{2} M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy \quad (3.111)$$

O trabalho total é a energia potencial do elemento e é dado por:

$$dU_f = -\frac{1}{2} \left(M_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) dx dy \quad (3.112)$$

Substituindo-se (3.109) em (3.112) chega-se a:

$$dU_f = \frac{1}{2} \left[D_x \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + D_y \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] dx dy \quad (3.113)$$

A energia de deformação da placa pode ser obtida por integração da eq. (3.113).

$$U_f = \iint \frac{1}{2} \left[D_x \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + D_y \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] dx dy \quad (3.114)$$

3.10.5

Flexão de Placas Ortotrópicas por Carga Lateral Distribuída

Considerando-se um elemento de placa semelhante à Figura 3.12 e negligenciando-se as deformações devidas ao esforço cortante, tem-se que a energia de deformação do elemento é igual ao trabalho realizado pelos momentos fletores $M_x dy$ e $M_y dx$ e pelos momentos torção $M_{xy} dy$ e $M_{yx} dx$. Negligencia-se o efeito das forças cortantes verticais.

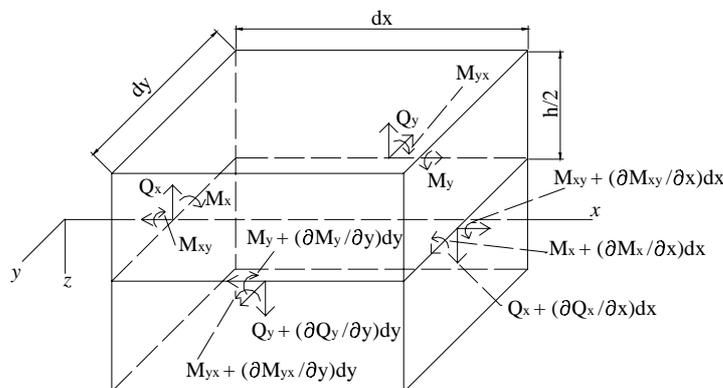


Figura 3.12- Consideração dos momentos de torção.

O momento torçor é dado pela expressão:

$$M_{xy} = -2D_t \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.115)$$

onde $-2D_t = (1 - \nu_x \nu_y) \sqrt{D_x D_y}$ que representa a rigidez a torção.

Nota-se que o ângulo correspondente a torção na Figura 3.13 é $(\partial^2 w / \partial x \partial y) dx$ e as energias de deformação devidas a $M_{xy} dy$ e $M_{yx} dx$ são respectivamente:

$$\frac{1}{2} M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy = \frac{1}{2} (1 - \nu_x \nu_y) \sqrt{D_x D_y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \quad (3.116)$$

$$\frac{1}{2} M_{yx} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy = \frac{1}{2} (1 - \nu_x \nu_y) \sqrt{D_x D_y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \quad (3.117)$$

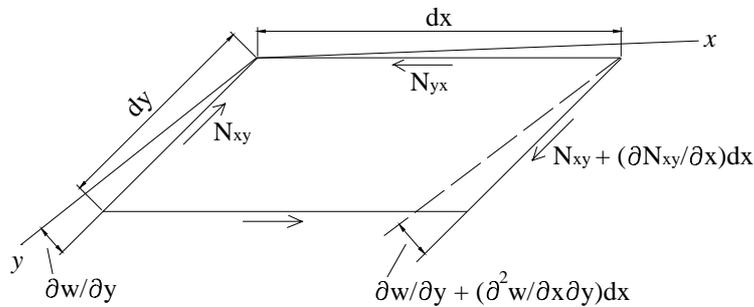


Figura 3.13- Ângulo de torção.

A energia de torção é dada pela soma das expressões (3.116) e (3.117) como a seguir:

$$dU_t = (1 - \nu_x \nu_y) \sqrt{D_x D_y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \quad (3.118)$$

Integrando-se (3.118) chega-se a:

$$U_t = \iint (1 - \nu_x \nu_y) \sqrt{D_x D_y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \quad (3.119)$$

A energia de deformação total de um elemento de placa é obtida somando-se a energia de flexão na eq. (3.114) e a energia de torção na eq. (3.119) obtendo-se a seguinte expressão:

$$U = \iint \frac{1}{2} \left[D_x \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + D_y \left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right] dx dy + \iint (1 - \nu_x \nu_y) \sqrt{D_x D_y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \quad (3.120)$$

Expandindo-se a eq. (3.120) tem-se:

$$U = \frac{1}{2} \iint \left[\left(\sqrt{D_x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sqrt{D_y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2\sqrt{D_x} \sqrt{D_y} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_x \nu_y \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + D_y \nu_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] dx dy + \iint \left(1 - \sqrt{\nu_x \nu_y} \right) \sqrt{D_x D_y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy \quad (3.121)$$

De (3.121) chega-se a:

$$U = \frac{1}{2} \iint \left\{ \left(\sqrt{D_x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sqrt{D_y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \left(D_x \nu_y + D_y \nu_x - 2\sqrt{D_x D_y} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \left(1 - \sqrt{\nu_x \nu_y} \right) \sqrt{D_x D_y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (3.122)$$

Se $D_x = D_y$ chega-se ao caso isotrópico como descrito no trabalho de Timoshenko & Gere (1961).

3.10.6.

Energia Potencial das Cargas Externas N_x , N_y e N_{xy}

A energia U_o devida à deformação no plano médio da placa que ocorre por causa das forças aplicadas neste plano, N_x , N_y e N_{xy} é:

$$U_o = \frac{1}{2} \iint (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \gamma_{xy}) dx dy \quad (3.123)$$

Na discussão de pequenas deflexões de placas, considera-se N_x , N_y e N_{xy} como constantes. Aplicando-se alguma carga lateral que produza flexão na placa, tem-se que os três componentes nas direções x , y e z do deslocamento de algum ponto da superfície média da placa durante a flexão são u, v e w , respectivamente.

Considerando-se um elemento linear AB do plano como na Figura 3.14, nota-se que a deformação do elemento devido o deslocamento u na direção x é igual a $(\partial u / \partial x) dx$. A deformação do mesmo elemento devida ao deslocamento w é $\frac{1}{2} (\partial w / \partial x)^2 dx$. Dessa forma a deformação unitária nas direções x e y de um elemento do plano médio da placa são, respectivamente:

$$\varepsilon'_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{I}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (3.124)$$

$$\varepsilon'_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{I}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (3.125)$$

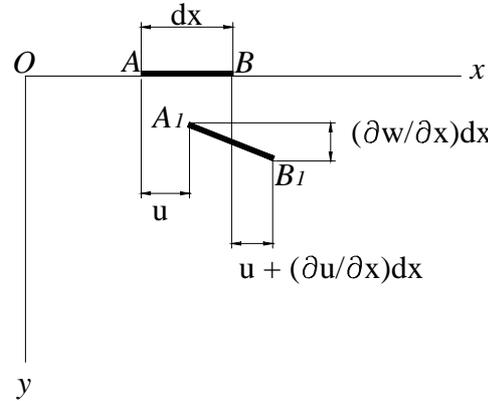


Figura 3.14- Elemento linear.

Desprezando a deformação que leva em conta o esforço cortante, a energia de deformação do carregamento externo torna-se:

$$U_o = \iint \left[N_x \frac{\partial u}{\partial x} + N_y \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy + \frac{I}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (3.126)$$

Se na discussão sobre flexão de placas forem negligenciadas as deformações u e v no plano médio, tem-se que o potencial das cargas externas torna-se:

$$U_o = -\frac{I}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (3.127)$$

A energia potencial total é dada por:

$$\Pi = U_f + U_o \quad (3.128)$$

Então se tem a seguinte expressão para a energia potencial total:

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{I}{2} \iint & \left\{ \left(\sqrt{D_x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sqrt{D_y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + (D_x v_y + D_y v_x - 2\sqrt{D_x D_y}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ & \left. + 2(I - \sqrt{v_x v_y}) \sqrt{D_x D_y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy - \frac{I}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \end{aligned} \quad (3.129)$$

3.10.7.

Campo de Deslocamentos para Placas Retangulares com Arestas Bi-Apoiadas

No caso de uma placa retangular com arestas simplesmente apoiadas, a superfície de deflexão pode ser representada por uma série trigonométrica dupla.

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b} \tag{3.130}$$

Cada termo da série desaparece para $x=0$, $x=a$ e também para $y=0$ e $y=b$ e assim a deflexão é zero ao longo do contorno.

3.10.7.1.

Placa Ortotrópica Retangular Bi-Apoiada com Carregamento ao Longo dos Lados $x=0$ e $x=a$

Seja uma placa retangular comprimida no plano médio por forças uniformemente distribuídas ao longo dos lados $x=0$ e $x=a$ como na Figura 3.15. A magnitude da força por unidade de comprimento é dada por N_x .

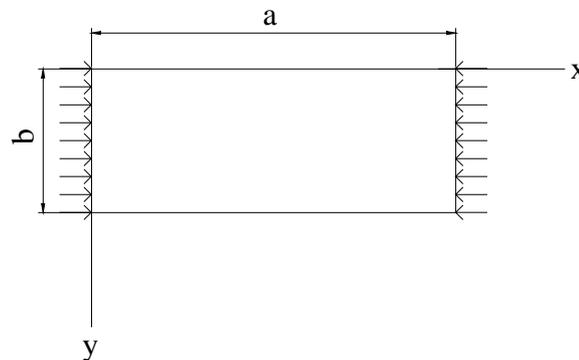


Figura 3.15- Placa submetida a carregamento ao longo dos lados $x=0$ e $x=a$.

O funcional de energia é dado pela eq. (3.131), que é obtido a partir da eq. (3.129) sem a consideração de N_y .

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \iint \left\{ \left(\sqrt{D_x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sqrt{D_y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + (D_x \nu_y + D_y \nu_x - 2\sqrt{D_x D_y}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\ \left. + 2(1 - \sqrt{\nu_x \nu_y}) \sqrt{D_x D_y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy - \frac{1}{2} \iint N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \end{aligned} \tag{3.131}$$

Substituindo-se (3.130) em (3.131) e integrando-se no domínio, obtém-se uma forma quadrática em termos dos deslocamentos de onde se obtém as equações de equilíbrio e conseqüentemente a carga crítica que é dada pela expressão a seguir:

$$N_x = \frac{\pi^2 (m^4 b^4 D_x + 2m^2 n^2 a^2 b^2 \sqrt{D_x} \sqrt{D_y} + n^4 a^4 D_y)}{m^2 a^2 b^4} \quad (3.132)$$

O menor valor de N_x é obtido para $n=1$, nesse caso a placa flamba em uma onda na direção perpendicular ao carregamento, a carga para $n=1$ é apresentada na eq. (3.133).

$$N_x = \frac{\pi^2 (m^4 b^4 D_x + 2m^2 a^2 b^2 \sqrt{D_x} \sqrt{D_y} + a^4 D_y)}{m^2 a^2 b^4} \quad (3.133)$$

Simplificando a eq. (3.133) tem-se:

$$N_x = \frac{\pi^2}{b^2} \left(\sqrt{D_x} \frac{b}{a} m + \sqrt{D_y} \frac{a}{bm} \right)^2 \quad (3.134)$$

A placa pode flambar em várias meias ondas na direção de compressão. Se $D_x = D_y$, a placa é isotrópica e sua equação é dada por:

$$N_x = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{b}{a} m + \frac{a}{bm} \right)^2 \quad (3.135)$$

Que é a mesma equação descrita no trabalho de Timoshenko & Gere (1961).

Para o caso isotrópico se for mantido o valor de b constante, então o fator antes dos parênteses na eq. (3.135) permanece constante e o fator dentro dos parênteses muda com a variação da taxa a/b . O valor dentro dos parênteses tem seu valor mínimo quando $a=b$, ou seja, se a placa for quadrada, a sua carga crítica é:

$$N_{x(cr)} = \frac{4\pi^2 D}{b^2} \quad (3.136)$$

Para outras proporções de placa tem-se:

$$N_{x(cr)} = \frac{k\pi^2 D}{b^2} \quad (3.137)$$

onde,

$$k = \left(\frac{b}{a} m + \frac{a}{bm} \right)^2 \quad (3.138)$$

O gráfico $k \times a/b$ apresenta-se na Figura 3.16, que é o mesmo gráfico descrito em Timoshenko & Gere (1961).

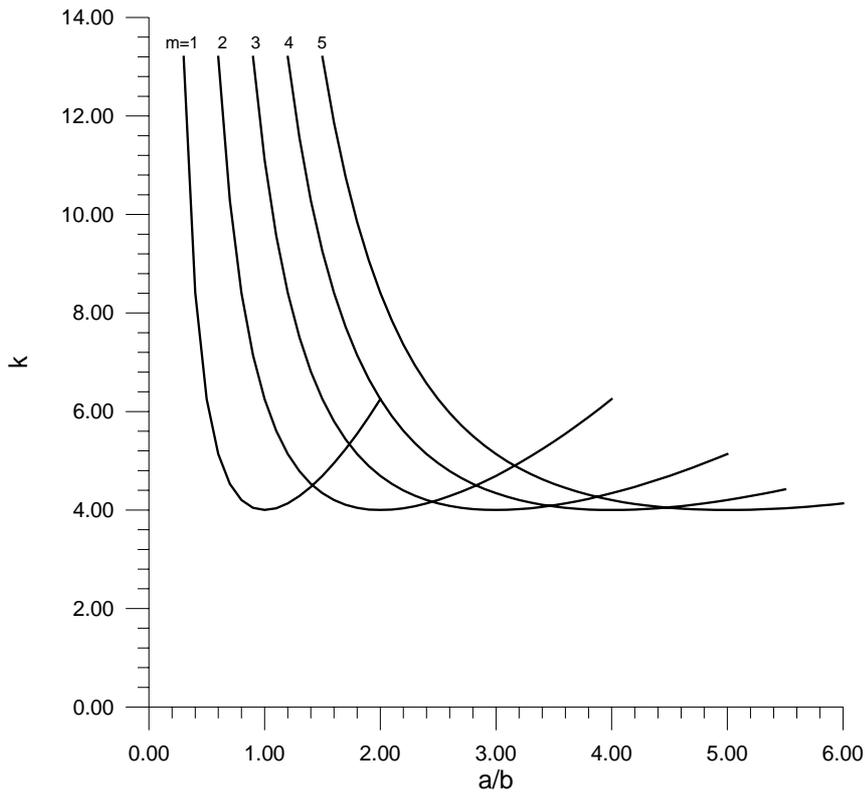


Figura 3.16- Variação do parâmetro k em relação à taxa a/b , para o cálculo da carga crítica da placa isotrópica. (Timoshenko & Gere, 1961).

3.10.7.2.

Placa Ortotrópica Retangular Bi-Apoiada com Carregamento ao Longo dos Lados $y=0$ e $y=b$

O caso apresentado na Figura 3.17 representa o modelo de uma face da coluna de concreto armado composta apenas pelas armaduras longitudinais e transversais, portanto, sem a consideração do concreto. Na Figura 3.17, as armaduras longitudinais e transversais são consideradas como uma grelha que foi aproximada por uma placa ortotrópica equivalente.

Partindo-se da eq. (3.129), a energia potencial total para esse caso é dada por:

$$\begin{aligned}
 \Pi = \frac{I}{2} \iint \left\{ \left(\sqrt{D_x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sqrt{D_y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + (D_x \nu_y + D_y \nu_x - 2\sqrt{D_x D_y}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \right. \\
 \left. + 2(I - \sqrt{\nu_x \nu_y}) \sqrt{D_x D_y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} dx dy - \frac{1}{2} \iint N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dx dy
 \end{aligned}
 \tag{3.139}$$

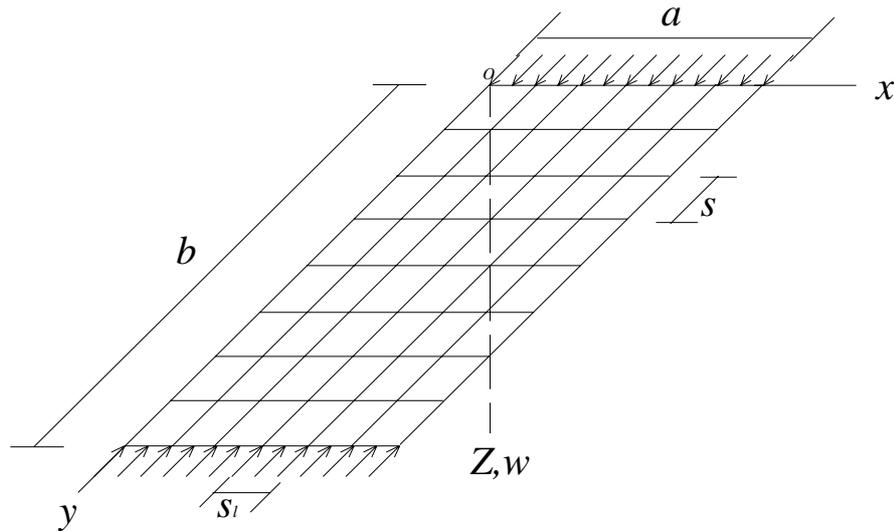


Figura 3.17- Consideração das armaduras longitudinais e transversais como uma grelha.

Substituindo-se (3.130) em (3.139) e integrando-se no domínio, obtém-se uma forma quadrática em termos dos deslocamentos de onde se obtém as equações de equilíbrio e a carga crítica que é dada pela expressão a seguir:

$$N_y = \frac{\pi^2 (m^4 b^4 D_x + 2m^2 n^2 a^2 b^2 \sqrt{D_x} \sqrt{D_y} + n^4 a^4 D_y)}{n^2 a^4 b^2} \quad (3.140)$$

O menor valor de N_y é obtido para $m=1$, nesse caso a placa flamba com somente uma onda na direção perpendicular ao carregamento. A expressão para esse caso é:

$$N_y = \frac{\pi^2 (b^4 D_x + 2n^2 a^2 b^2 \sqrt{D_x} \sqrt{D_y} + n^4 a^4 D_y)}{n^2 a^4 b^2} \quad (3.141)$$

Simplificando a eq. (3.141) tem-se:

$$N_y = \frac{\pi^2}{a^2} \left(\frac{\sqrt{D_x} b}{n} + \sqrt{D_y} \frac{a}{b} n \right)^2 \quad (3.142)$$

O valor mínimo de N_y é obtido calculando-se $\partial N_y / \partial \bar{b} = 0$, sendo $\bar{b} = b/n$,

obtendo-se então $\frac{\bar{b}}{a} = \sqrt{\frac{D_y}{D_x}}$. A carga crítica mínima é dada por:

$$N_y = \frac{4\pi^2}{a^2} \sqrt{D_x D_y} \quad (3.143)$$

Considerando-se que a grelha da Figura 3.17 seja aproximada por uma placa ortotrópica equivalente que é constituída por vigas paralelas com mesmo espaçamento, pode-se usar as seguintes propriedades:

$$D_x = \frac{EI_t}{s} = \frac{E\pi\phi_t^4}{64s} \quad (3.144)$$

$$D_y = \frac{EI_s}{s_l} = \frac{E\pi\phi_l^4}{64s_l} \quad (3.145)$$

D_x é a rigidez na direção x que leva em conta os estribos, onde I_t é o momento de inércia dos estribos e s o espaçamento entre estribos, já D_y é a rigidez na direção y que leva em conta a armadura longitudinal, onde I_s é o momento de inércia da armadura longitudinal e s_l o espaçamento entre as armaduras longitudinais.

Considerando-se que a placa da Figura 3.17 seja submetida apenas à flexão tem-se que o funcional é dado pela eq. (3.114). Substituindo-se (3.130) em (3.114) e integrando-se no domínio, obtém-se uma forma quadrática em termos dos deslocamentos de onde se obtém as equações de equilíbrio e a carga crítica é dada pela seguinte expressão:

$$N_y = \frac{\pi^2 (m^4 b^4 D_x + n^4 a^4 D_y)}{n^2 a^4 b^2} \quad (3.146)$$

O menor valor de N_y é obtido para $m=1$ como apresenta a eq. (3.147), nesse caso a placa flamba em uma onda na direção perpendicular ao carregamento.

$$N_y = \frac{\pi^2}{a^2} \left(D_x \frac{b^2}{n^2 a^2} + D_y \frac{n^2 a^2}{b^2} \right) \quad (3.147)$$

Substituindo-se $\frac{b}{n} = \bar{b}$ na eq. (3.147) tem-se:

$$N_y = \frac{\pi^2}{a^2} \left(D_x \frac{\bar{b}^2}{a^2} + D_y \frac{a^2}{\bar{b}^2} \right) \quad (3.148)$$

O menor valor para a carga crítica é obtido quando $\frac{\partial N_y}{\partial \bar{b}} = 0$ e assim obtém-se:

$$\frac{\bar{b}}{a} = \sqrt[4]{\frac{D_y}{D_x}} \quad (3.149)$$

Substituindo-se (3.149) em (3.148) o valor da carga crítica fica:

$$N_y = \frac{\pi^2}{a^2} \left(2\sqrt{D_x D_y} \right) \quad (3.150)$$