

2 Revisão Bibliográfica

2.1. Introdução

Apresentam-se, resumidamente, os trabalhos de Bresler & Gilbert (1961), Papia *et al.* (1988), Mau (1990), Queiroga & Giongo (2000) e Pantazopoulou (1998). Apresentam-se também as prescrições normativas da NBR6118/1978 e NBR6118/2003, CEB 95, EUROCODE 2/2001 e ACI 318/2002, no que concerne ao detalhamento das armaduras longitudinais e transversais em pilares de concreto armado.

2.2. Pesquisa de Bresler & Gilbert (1961)

Um dos primeiros estudos sobre flambagem da armadura longitudinal em elementos de concreto armado foi efetuado por Bresler & Gilbert (1961), que empregaram critérios de análise elástica para encontrar relações entre a flambagem da armadura sob cargas monotônicas e parâmetros como espaçamento e rigidez dos estribos.

Bresler & Gilbert (1961) iniciaram seu estudo analítico a partir das seguintes conclusões obtidas de ensaios em pilares de concreto armado:

- 1- Com o aumento da carga axial aumenta, as deformações locais ou tensões no cobrimento do concreto aumentam até alcançar um valor limite.
- 2- Nesta tensão ou deformação limite, o cobrimento fissa-se ou pode mesmo lascarse.
- 3- Devido à perda da área da seção transversal do cobrimento, surgem tensões adicionais no centro do concreto e na armadura.
- 4- A armadura longitudinal sob estas tensões adicionais começa a escoar ou a flambar.

- 5- Ocorre perda de rigidez da armadura devido ao escoamento ou ao início da flambagem, causando uma deformação adicional na área de concreto.
- 6- O núcleo subdividido em pequenos prismas pelos estribos mantém sua integridade até que a resistência última seja alcançada e então entra em colapso repentinamente.
- 7- Neste instante o pilar entra em colapso e a capacidade de carga é perdida.

Os eventos acima ocorrem rapidamente e às vezes a ruptura é caracterizada como ocorrendo instantaneamente.

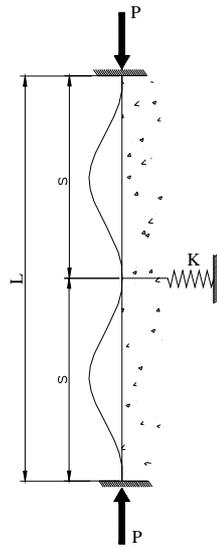


Figura 2.1- Idealização do Mecanismo de flambagem da armadura longitudinal por Bresler & Gilbert (1961).

2.2.1. Espaçamento entre Estribos

A partir da perda do cobrimento do concreto devido a cargas impostas ou devido a dano acidental, a armadura longitudinal pode começar a escoar ou flambar entre os estribos laterais. A tensão crítica de flambagem f_{cr} da barra longitudinal é determinada pelo diâmetro ϕ_l da barra, pelas propriedades mecânicas da armadura, pelo espaçamento entre estribos s e pelo modo de flambagem, como mostrado na Figura 2.1.

Bresler & Gilbert (1961) argumentam que, para se obter a eficiência máxima da armadura longitudinal, o espaçamento entre os estribos laterais deve ser de tal forma que a tensão crítica de flambagem seja igual à tensão de

escoamento, na ausência da restrição provida pelo cobrimento exterior do concreto.

O modo de flambagem da barra longitudinal depende em parte da extensão do destacamento do cobrimento e, em parte, do arranjo e comprimento das pernas dos estribos laterais.

O deslocamento lateral da armadura longitudinal no nível do estribo poderia reduzir apreciavelmente a magnitude das tensões críticas de flambagem e desta forma poderia reduzir a capacidade de carga do pilar. Dessa forma Bresler & Gilbert (1961), buscaram um arranjo tal que os estribos sejam suficientemente rígidos para impedir o deslocamento lateral das barras longitudinais no nível de cada estribo.

Com a variação da razão do espaçamento s para o diâmetro ϕ_l a flambagem elástica ou plástica podem governar a capacidade de carga da armadura, e a análise exata torna-se complexa. Um modelo simples foi proposto por Bresler & Gilbert (1961) para estabelecer um critério racional para seleção do espaçamento entre estribos.

A tensão crítica de flambagem f_{cr} pode ser definida como:

$$f_{cr} = \frac{C\pi^2 E_t}{\left(\frac{s}{r}\right)^2} \quad (2.1)$$

onde C é um coeficiente de restrição da extremidade da barra longitudinal, E_t é o módulo tangente de elasticidade correspondente a f_{cr} , s é o comprimento de flambagem e $r = \sqrt{I/A_s}$ é o raio de giração da barra.

Para se obter a máxima eficiência da armadura longitudinal, os estribos laterais poderiam ser espaçados em uma distância s de tal forma a permitir o desenvolvimento das tensões de escoamento f_y justamente antes da flambagem. Usando-se as condições $f_{cr} = f_y$ a razão s/r é encontrada da eq. (2.2).

$$\frac{s}{r} = \left(\frac{C\pi^2 E_t}{f_y} \right)^{1/2} \quad (2.2)$$

onde $r = \phi_l/4$, e ϕ_l é o diâmetro da armadura longitudinal, logo a eq. (2.2) torna-se:

$$\frac{s}{\phi_t} = B \left(\frac{E_t}{f_y} \right)^{1/2} \quad (2.3)$$

onde $B = \frac{1}{4} \pi C^{1/2}$.

Os valores de E_t e f_y podem ser tirados do diagrama tensão deformação para o aço usado.

Verifica-se na eq. (2.3) que a taxa s/ϕ_t não é constante e depende dos valores de E_t e f_y para os vários tipos de aços usados na armadura.

Portanto, para que a flambagem da armadura longitudinal não aconteça em uma tensão abaixo da tensão de escoamento, o espaçamento entre estribos não pode ultrapassar a distância s definida pela eq. (2.3).

2.2.2. Diâmetro dos Estribos

De acordo com Bresler & Gilbert (1961), para que não ocorra flambagem prematura das armaduras longitudinais devido à rigidez inadequada dos estribos, os mesmos devem ter um diâmetro superior a um valor mínimo.

O espaçamento entre os estribos pode ser determinado aproximadamente considerando-se um seguimento de armadura tendo comprimento $2s$, Figura 2.2, fixo nas extremidades com um apoio elástico intermediário na metade do comprimento e o cobrimento do pilar de concreto destacado.

A solução do problema requer a determinação do menor valor da constante da mola K do apoio intermediário que poderia impedir flambagem por deslocamento lateral na metade do comprimento. Este problema pode ser resolvido pelo método de Ritz. O campo de deslocamentos da barra pode ser aproximado pela soma de duas funções, definidas pelos dois primeiros modos de flambagem, como a expressão a seguir:

$$y = y_1 + y_2 = \frac{a_1}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{\pi x}{s} \right) \right) + \frac{a_2}{2} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi x}{s} \right) \right) \quad (2.4)$$

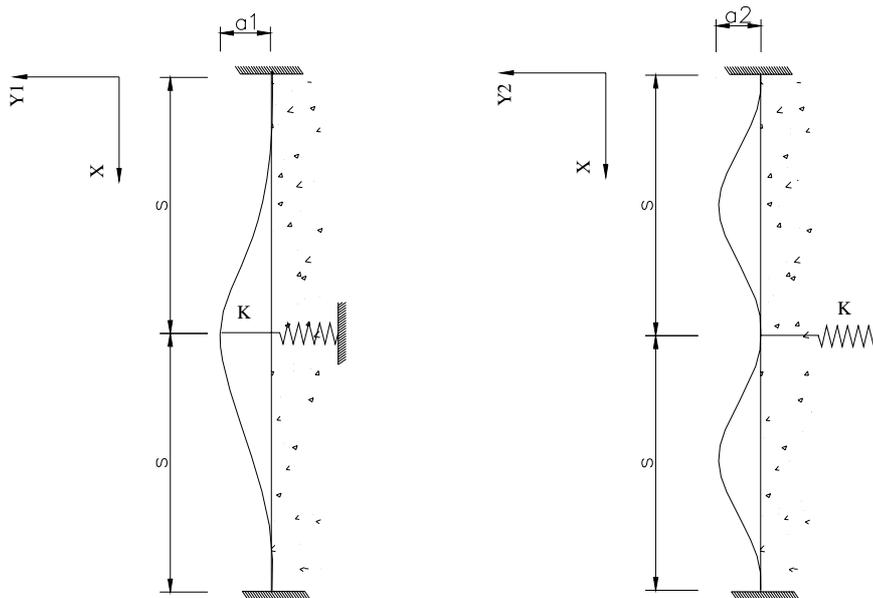


Figura 2.2- Formas idealizadas de flambagem.(a) Primeiro modo de flambagem. (b) Segundo modo de flambagem.

A energia potencial total U do sistema incluindo a energia armazenada no apoio elástico e a energia devida ao encurtamento da coluna pode ser expressa como uma função de a_1 , a_2 , K , P , s e EI a rigidez à flexão da armadura longitudinal, como:

$$U = \int_0^{2s} \frac{EI}{2} \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} K a_1^2 - \frac{P}{2} \int_0^{2s} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx \quad (2.5)$$

onde o momento de inércia da barra longitudinal é $I = \frac{\pi \phi_1^4}{64}$. Completando as operações indicadas na eq. (2.5) e fazendo-se uso da ortogonalidade dos modos de flexão, a seguinte equação é obtida:

$$U = \frac{EI\pi^4 a_1^2}{8s^3} + \frac{2EI\pi^4 a_2^2}{s^3} + \frac{1}{2} K a_1^2 - \frac{P a_1^2 \pi^2}{8s} - \frac{P a_2^2 \pi^2}{2s} \quad (2.6)$$

Minimizando-se a energia com relação a cada uma das amplitudes máximas, a carga de flambagem, P , e a rigidez da mola, K , são obtidas como segue:

$$\frac{\partial U}{\partial a_1} = 0 = \frac{EI\pi^4 a_1}{4s^3} + K a_1 - \frac{P\pi^2 a_1}{4s} \quad (2.7.a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial a_2} = 0 = \frac{4EI\pi^4 a_2}{s^3} - \frac{P\pi^2 a_2}{s} \quad (2.7.b)$$

Resolvendo-se para P e K tem-se

$$P = \frac{4\pi^2 EI}{s^2} \quad (2.8.a)$$

$$K = \frac{3\pi^4 EI}{4s^3} \quad (2.8.b)$$

Bresler & Gilbert (1961), consideraram em seu estudo dois tipos de apoios laterais. No primeiro caso todas as armaduras longitudinais são apoiadas diretamente sobre um estribo como na Figura 2.3 onde os estribos atuam como um tirante elástico, sendo a rigidez definida por:

$$K = A' E' / b' \quad (2.9)$$

onde A' é a área efetiva da seção transversal do estribo, E' é o módulo de elasticidade efetivo do estribo, b' é o comprimento efetivo do estribo. Igualando-se as expressões (2.8.b) e (2.9) para K tem-se:

$$K = \frac{3\pi^4 EI}{4s^3} = \frac{A' E'}{b'} \quad (2.10)$$

e

$$A' = \frac{3\pi^4 E b' I}{4E' s^3} \quad (2.11)$$

Para diferentes arranjos de estribos, a área efetiva A' e o comprimento efetivo b' podem ser relacionados à área da seção transversal do estribo A_t e a dimensão do centro b de acordo com:

$$\frac{A'}{b'} = m \left(\frac{A_t}{b} \right) \quad (2.12)$$

Substituindo-se (2.12) em (2.11), com $I = \pi\phi_l^4 / 64$ e considerando-se $E' = E$, a seguinte relação é obtida:

$$\frac{\phi_t}{\phi_l} = \frac{\phi_l}{s} \left(\frac{4,56b}{ms} \right)^{1/2} \quad (2.13)$$

Para arranjos comuns de estribos laterais, os valores de b' , A' e m são mostrados na Figura 2.3.

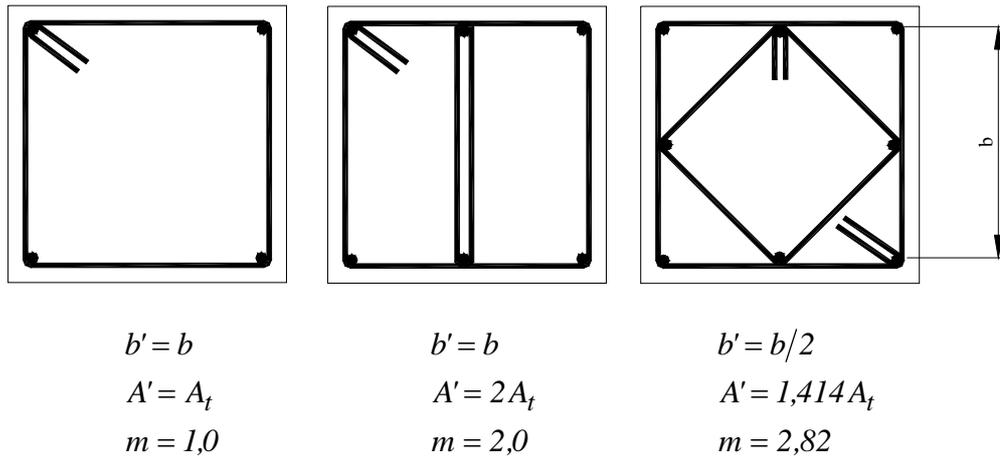


Figura 2.3- Definição de m para várias geometrias da seção transversal dos estribos por Bresler & Gilbert (1961).

Assim, para impedir a redução da resistência à flambagem da armadura longitudinal pela flexibilidade excessiva dos estribos, calcula-se a relação entre o diâmetro do estribo e o diâmetro da armadura longitudinal, a qual é definida pela geometria do arranjo dos estribos, pelo espaçamento entre estribos e pelo diâmetro da armadura longitudinal como está apresentada na eq. (2.13).

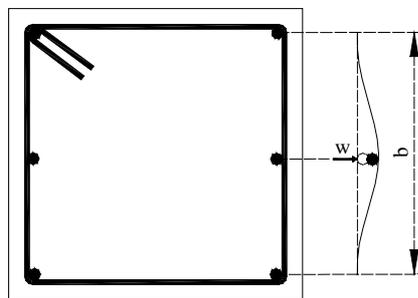


Figura 2.4- Armadura longitudinal restringida pela rigidez a flexão do estribo.

No segundo caso, o apoio lateral pode ser considerado quando a armadura longitudinal é restringida pela rigidez à flexão de um estribo. Um caso típico está mostrado na Figura 2.4. A deformação do estribo pode ser considerada aproximadamente equivalente a de uma viga fixa nas extremidades carregada por uma carga concentrada W no meio do vão, e assim pode-se definir a constante da mola por:

$$W = K\Delta \rightarrow K = \frac{W}{\Delta} = \frac{192E'I'}{b^3} \tag{2.14}$$

onde I' é o momento de inércia da seção transversal do estribo, igualando as expressões (2.8.b) e (2.14) para K tem-se:

$$\frac{3\pi^4 EI}{4s^3} = \frac{192E' I'}{b^3} \quad (2.15)$$

e fazendo-se $E'=E$ e $A'=A_t$ chega-se a

$$\frac{\phi_t}{\phi_l} = 0,785 \left(\frac{b}{s} \right)^{3/4} \quad (2.16)$$

2.2.3. Estudo Experimental

Bresler & Gilbert (1961), realizaram alguns estudos experimentais para verificar parcialmente a validade das hipóteses adotadas em seu trabalho, principalmente no que diz respeito à forma de flambagem adotada e a influência dos estribos na flambagem da armadura longitudinal e capacidade de carga da coluna. Os autores ensaiaram quatro pilares e as variáveis foram o tamanho e arranjo dos estribos, a quantidade e arranjo das armaduras longitudinais e a resistência do concreto. A Figura 2.5 mostra detalhes dos corpos de prova. Os modelos foram ensaiados à compressão axial e possuíam seção transversal quadrada (8"×8"), aproximadamente (20cm x 20 cm) e altura de aproximadamente 152,4 cm (60"). Os diagramas carga x deformação se apresentam na Figura 2.6. Os resultados indicaram que o diâmetro dos estribos interiores pode ser reduzido sem afetar a capacidade de carga do pilar.

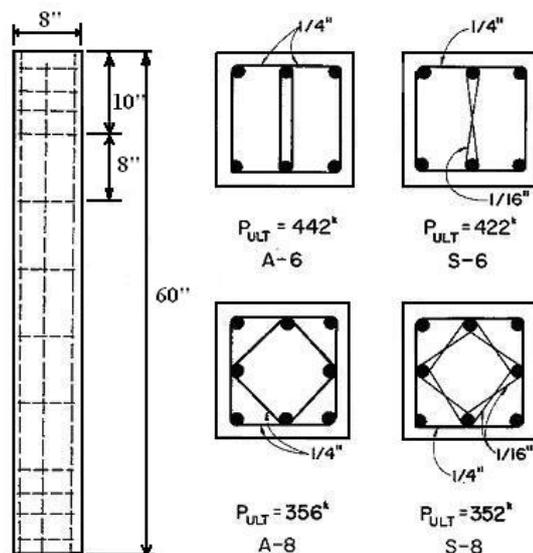
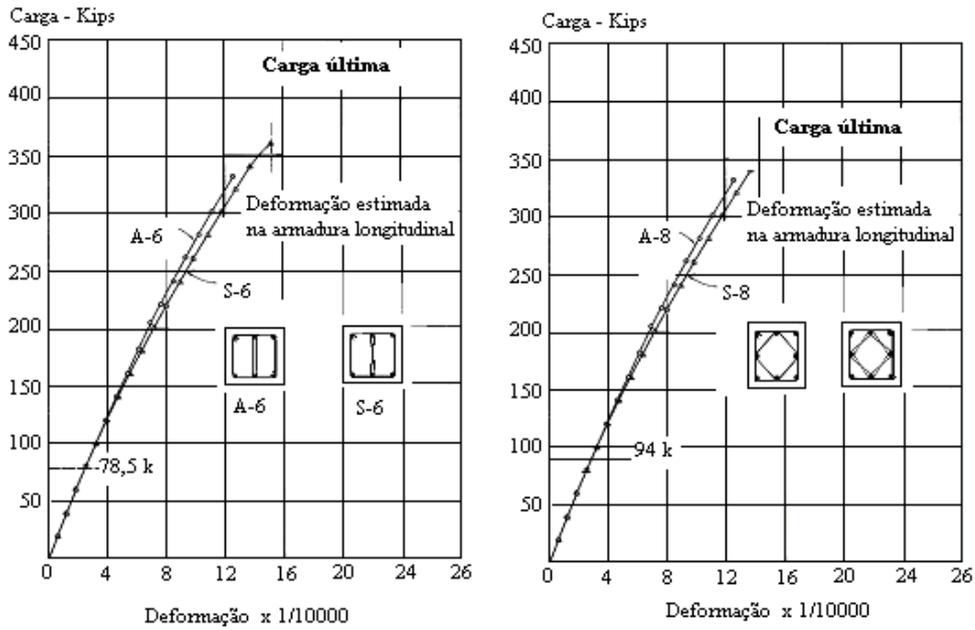


Figura 2.5 - Detalhes dos corpos de prova ensaiados por Bresler & Gilbert (1961).



a) Pilares A-6 e S-6

b) Pilares A-8 e S-8.

Figura 2.6 - Curva carga x deformação.(Bresler & Gilbert, 1961)

Dentro da gama de deflexões medidas, a relação entre carga e deformação foi aproximadamente linear com um pequeno aumento na deformação para altos valores de carga. Não apareceram fissuras até que o valor da carga última fosse alcançado. A partir deste ponto a coluna começou a escoar lentamente, porém se manteve intacta até que pequenas fissuras foram observadas e então a carga começou a cair, a casca de cobrimento entrou em colapso e a armadura flambou entre os estribos. A Figura 2.7 mostra a ruptura em um dos corpos de prova.

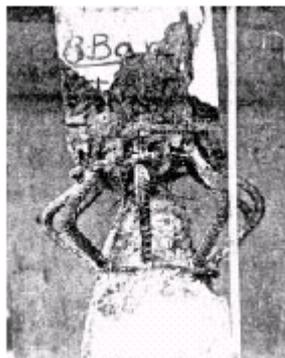


Figura 2.7 - Detalhe da flambagem das barras da armadura longitudinal em ensaio realizado por Bresler & Gilbert (1961).

2.3. Pesquisa de Papia *et al.* (1988)

Papia *et al.* (1988) apresentaram um critério para estipular o comprimento desconhecido da região da armadura longitudinal envolvida na flambagem. A carga crítica é então calculada considerando-se a configuração de uma barra reta comprimida com extremidades engastadas, limitadas sobre apoios elásticos unilaterais. Uma comparação com resultados obtidos experimentalmente por outros autores tornou possível avaliar o coeficiente de redução para aplicar os valores teóricos deduzidos, utilizou-se o Software Maple VII para se reproduzir os resultados de Papia *et al.* (1988).

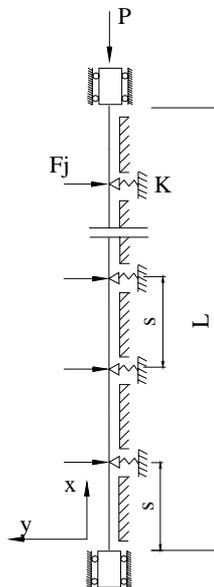


Figura 2.8- Modelo para análise da armadura longitudinal apresentado por Papia *et al.* (1988).

2.3.1. Procedimento Analítico

A presença do concreto está indicada na Figura 2.8 pela região hachurada. Consideram-se deformações apenas do tipo simétrico, onde L é o comprimento desconhecido da região envolvida na instabilidade. Devido à simetria do modelo, a tangente na metade do comprimento L é nula e assim pode-se afirmar que:

$$\frac{dw}{dx}(0,5L) = 0 \quad (2.17)$$

Para cada apoio intermediário j do modelo reduzido mostrado na Figura 2.8, tem-se a seguinte condição:

$$\delta_j = \frac{F_j}{K} \quad (2.18)$$

onde K é a rigidez dos apoios unilaterais e δ_j é deslocamento do apoio genérico.

A eq. (2.17) associada à eq. (2.18) formam um sistema homogêneo de $n+1$ incógnitas do problema. Para a solução existir, a seguinte condição deve ser imposta;

$$\text{determinante}(D)=0 \quad (2.19)$$

onde D é a matriz formada pelo sistema de equações (2.17) e (2.18), cujos coeficientes podem ser escritos de forma explícita como função das variáveis β e γ , que são dadas por:

$$\beta = s \left(\frac{P}{EI} \right)^{1/2} \quad (2.20)$$

e

$$\gamma = \frac{Ks^3}{EI} \quad (2.21)$$

onde, E é o módulo de elasticidade instantâneo do aço, I é o momento de inércia da barra longitudinal, P é a carga axial, β é o parâmetro adimensional da carga axial, γ é o parâmetro adimensional da rigidez dos estribos.

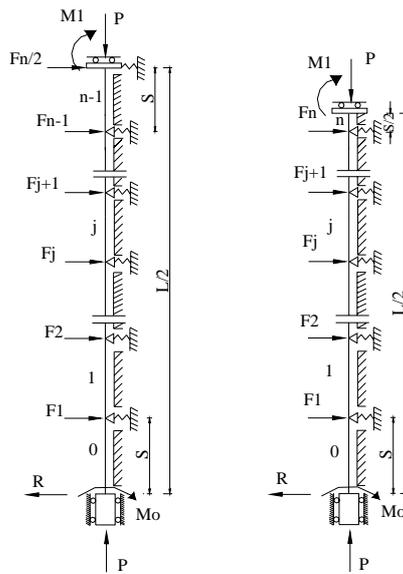
Para um determinado valor de γ , o valor de β correspondente é o menor daqueles que satisfaçam a eq. (2.19). Assim, a carga crítica P_{cr} é obtida da eq. (2.20). Chamando-se P_o a carga crítica da barra apoiada entre dois estribos consecutivos, tem-se

$$P_o = \frac{\pi^2 EI}{s^2} \quad (2.22)$$

Isolando-se π^2 em (2.22) e P em (2.20) tem-se o parâmetro de carga em relação a carga crítica da barra apoiada entre dois estribos consecutivos como mostra a eq. (2.23).

$$c_c = \frac{P_c}{P_o} = \left(\frac{\beta}{\pi} \right)^2 \quad (2.23)$$

O modelo para análise da barra longitudinal da Figura 2.8 é simplificado no modelo da Figura 2.9.a quando o número de estribos n é ímpar ou na Figura 2.9.b em que este número é par.



(a) n é ímpar. (b) n é par.

Figura 2.9- Modelo simplificado para análise da armadura longitudinal.

A Figura 2.9 mostra a numeração usada para as forças transmitidas pelos estribos e para as regiões da barra compreendida entre dois estribos consecutivos.

A direção positiva das forças e reações também é mostrada para a região genérica j , considerando o sistema de referência indicado na Figura 2.8, a equação diferencial para a curva de deflexão é escrita da seguinte forma:

$$EI \frac{d^2 w(x)_j}{dx^2} = -(Pw(x)_j - M_j) \tag{2.24}$$

onde M_j é o momento fletor devido as cargas laterais em uma determinada seção transversal. Portanto, a reação numa extremidade é

$$R_o = \sum_{i=1}^{n_{L/2}} F_i - s_1 F_{n_{L/2}} \text{ onde } s_1=0.5 \text{ se } n \text{ é ímpar e } s_1=0 \text{ se } n \text{ é par} \tag{2.25}$$

e o momento para uma região genérica fica

$$M_j = M_o + (js + x) \left(\sum_{i=j+1}^{n_{L/2}} F_i - s_1 F_{n_{L/2}} \right) + s \sum_{i=1}^j i F_i \tag{2.26}$$

A partir das condições de contorno da coluna, tem-se então como solução da eq. (2.24):

$$w(x)_j = A_j \sin \frac{\beta x}{s} + B_j \cos \frac{\beta x}{s} + \frac{M_j}{P} \tag{2.27}$$

Determinando-se os valores das constantes relativas à região $j=0$ das condições de contorno na extremidade, foram obtidas as expressões:

$$\begin{cases} A_j = -\frac{s}{\beta P} \left[\left(\sum_{i=1}^n F_i - s_1 F_n \right) \cos j\beta - \sum_{i=1}^j F_i \beta \cos(j-i) \right] + \frac{M_o}{P} \sin j\beta \\ B_j = -\frac{s}{\beta P} \left[\left(\sum_{i=1}^n F_i - s_1 F_n \right) \sin j\beta - \sum_{i=1}^j F_i \beta \sin(j-i) \right] - \frac{M_o}{P} \sin j\beta \end{cases} \quad (2.28)$$

para as constante A_j e B_j .

A eq. (2.17) associada à eq. (2.18) resulta em um sistema homogêneo nos valores desconhecidos F_j e M_o . A forma do determinante D do sistema está mostrada na Figura 2.10. Nas expressões dos $d_{j,i}$, $\delta_{j,i}$ e $\delta_{j,n}$ representam o delta de kronecker e $m=n+1/2-s_1$.

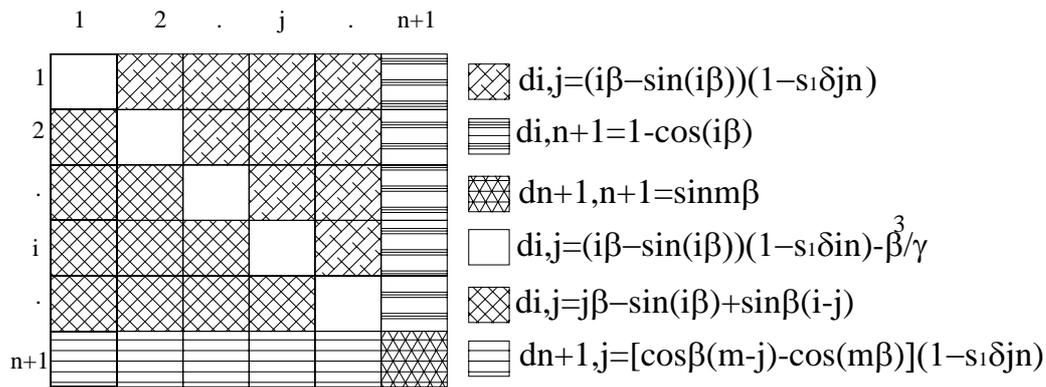


Figura 2.10- Coeficientes do determinante D .

A eq. (2.27) é particularizada para $j=0$ e se mostra da seguinte forma:

$$w_o(x) = \frac{s}{\beta P} \left(\sum_{i=1}^n F_i - s_1 F_n \right) \left(\beta \frac{x}{s} - \sin \beta \frac{x}{s} \right) + \frac{M_o}{P} \left(1 - \cos \beta \frac{x}{s} \right) \quad (2.29)$$

Na presença das curvas de deflexão admissíveis, as reações F_j e M_o tem o sinal positivo, de acordo com a convenção da Figura 2.8. A eq. (2.29) dá $w_o(x) > 0$ para todo o valor de x que atenda as seguintes condições:

$$\beta \frac{x}{s} > \sin \beta \frac{x}{s} \quad \text{e} \quad \cos \beta \frac{x}{s} < 1 \quad (2.30)$$

A curvatura na extremidade fixa em semelhantes casos é também positiva e é igual a:

$$\frac{d^2 w_o}{dx^2}(0) = \left(\frac{\beta}{s}\right)^2 \frac{M_o}{P} \quad (2.31)$$

Quando $M_o < 0$, a eq. (2.31) dá valores negativos para a curvatura, e para $x=0$, a eq. (2.29) poderia ter um máximo relativo. $M_o=0$ é a condição limite que leva a curva de deflexão admissível para o n_{L2} considerado.

Com $M_o=0$, as equações (2.17) e (2.18) produzem uma solução somente nas quantidades F_j . A equação

$$\text{determinante}(D_I)=0 \quad (2.32)$$

deve ser satisfeita, onde D_I é o menor de ordem n da matriz do sistema dado pelas equações (2.17) e (2.18) e é obtido pela eliminação da linha e coluna relativa aos coeficientes de M_o .

2.3.1.1.

Relação entre a Carga Crítica (β) e o Parâmetro de Rigidez dos Estribos (γ)

Para se obter a curva $c_c-\gamma$ adota-se um determinado número de estribos, n , e resolve-se o sistema composto pelas equações (2.19) e (2.32) identificando-se assim os pares de valores máximos para β_n e γ_n . Depois de obtido o primeiro valor, adota-se um novo valor para n , desta vez menor que o anterior e repete-se o mesmo procedimento para obter os valores máximos de β_n e γ_n . Pela redução progressiva do número de estribos envolvidos na flambagem, é possível identificar a curva procurada até o caso com $n=0$ e $L=s$, quando a instabilidade ocorre entre dois estribos consecutivos.

Caso 1- $L/s = 6$; $n=5$; $n_{L2}=3$.

O modelo a ser considerado está mostrado na Figura 2.11, considerando-se que $s_I=0,5$ e $m=3$, utilizando programas de álgebra simbólica, como o Maple VII, o determinante do sistema (2.17) e (2.18) torna-se;

$$D = \frac{\beta}{s} \begin{bmatrix} \beta - \sin\beta - \frac{\beta^3}{\gamma} & \beta - \sin\beta & \frac{1}{2}(\beta - \sin\beta) & 1 - \cos\beta \\ \beta - \sin 2\beta + \sin\beta & 2\beta - \sin 2\beta - \frac{\beta^3}{\gamma} & \frac{1}{2}(2\beta - \sin 2\beta) & 1 - \cos 2\beta \\ \beta - \sin 3\beta + \sin 2\beta & 2\beta - \sin 3\beta + \sin\beta & \frac{1}{2}(3\beta - \sin 3\beta) - \frac{\beta^3}{\gamma} & 1 - \cos 3\beta \\ \cos 2\beta - \cos 3\beta & \cos\beta - \cos 3\beta & \frac{1}{2}(1 - \cos 3\beta) & \sin 3\beta \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Para $\gamma = 0$, isto é, para rigidez dos estribos igual a zero, a equação característica que corresponde ao determinante da matriz D na matriz (2.33) igual a zero é

$$\det(D) = -\beta^9 \sin 3\beta = 0 \quad (2.34)$$

Portanto,

$$\beta = m\pi/3 \text{ com } m=1, 2, 3... \quad (2.35)$$

da eq. (2.20) tem-se

$$P = \frac{m^2 \pi^2 EI}{(3s)^2} \quad (2.36)$$

O valor da carga crítica é obtido para $m=1$ na eq. (2.36).

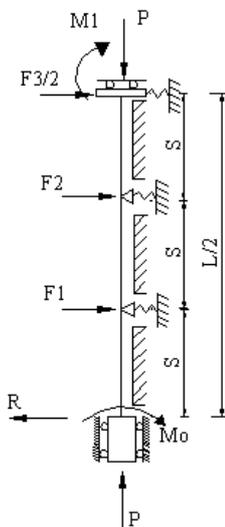


Figura 2.11- Modelo para representar a armadura longitudinal: $L/s=6$.

Quando γ aumenta, os valores de β , aumentam e portanto de c_c . Para se calcular o valor máximo para a carga crítica e parâmetro de rigidez dos estribos, resolve-se o sistema composto pelas eq. (2.19) e (2.32), mas, para isso, vale

ressaltar que a matriz D_1 é expressa eliminando-se a linha e coluna da matriz (2.33) correspondente a $M_o=0$ e assim tem-se

$$D_1 = \frac{\beta}{s} \begin{bmatrix} \beta - \sin\beta - \frac{\beta^3}{\gamma} & \beta - \sin\beta & \frac{1}{2}(\beta - \sin\beta) \\ \beta - \sin 2\beta + \sin\beta & 2\beta - \sin 2\beta - \frac{\beta^3}{\gamma} & \frac{1}{2}(2\beta - \sin 2\beta) \\ \beta - \sin 3\beta + \sin 2\beta & 2\beta - \sin 3\beta + \sin\beta & \frac{1}{2}(3\beta - \sin 3\beta) - \frac{\beta^3}{\gamma} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Portanto resolvendo-se o sistema dado pelas equações (2.19) e (2.32), tem-se os valores limites, $\gamma_{n=5} = 0,68$, para o qual corresponde um valor de $\beta_{n=5} = 1,66 \Rightarrow c_c = 0,28$.

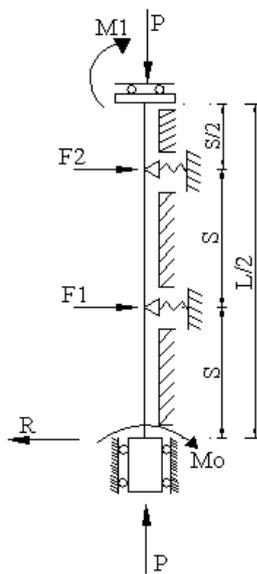


Figura 2.12- Modelo para representar a armadura longitudinal: $L/s=5$.

Caso 2- $L/s = 5 ; n=4 ; n_{L/2}=2$.

O modelo a ser considerado apresenta-se na Figura 2.12, considerando-se que $s_1=0$ e $m=2,5$. O determinante do sistema feito pelas equações (2.17) e (2.18) toma a forma:

$$D = \frac{\beta}{S} \begin{bmatrix} \beta - \sin\beta - \frac{\beta^3}{\gamma} & \beta - \sin\beta & 1 - \cos\beta \\ \beta - \sin 2\beta + \sin\beta & 2\beta - \sin 2\beta - \frac{\beta^3}{\gamma} & 1 - \cos 2\beta \\ \cos \frac{3}{2}\beta - \cos \frac{5}{2}\beta & \cos \frac{1}{2}\beta - \cos \frac{5}{2}\beta & \sin \frac{5}{2}\beta \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

A matriz D_1 torna-se

$$D_1 = \frac{\beta}{S} \begin{bmatrix} \beta - \sin\beta - \frac{\beta^3}{\gamma} & \beta - \sin\beta \\ \beta - \sin 2\beta + \sin\beta & 2\beta - \sin 2\beta - \frac{\beta^3}{\gamma} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

Resolvendo-se o sistema dado por (2.19) e (2.32), tem-se os valores limites, $\gamma_{n=4} = 1,41$, para o qual corresponde um valor de $\beta_{n=4} = 1,99 \Rightarrow c_c = 0,40$.

Quando se resolve a eq. (2.19) para o valor máximo encontrado no caso 1, $\gamma_{n=5} = 0,68$, encontra-se um valor de $c_c = 0,29$. Assim, o limite de validade do modelo analítico é portanto, $0,68 \leq \gamma_{n=4} \leq 1,41$ que corresponde à $0,29 \leq c_c \leq 0,40$.

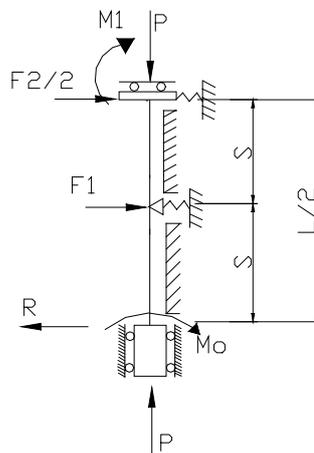


Figura 2.13- Modelo para representar a armadura longitudinal: $L/s=4$.

Caso 3- $L/s = 4$; $n=3$; $n_{L/2}=2$.

O modelo a ser considerado está mostrado na Figura 2.13, tem-se que $s_1=0,5$ e $m=2$, da mesma forma que nos casos anteriores, o determinante toma a forma:

$$D = \frac{\beta}{s} \begin{bmatrix} \beta - \sin\beta - \frac{\beta^3}{\eta} & \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\sin\beta & 1 - \cos\beta \\ \beta - \sin 2\beta + \sin\beta & \beta - \frac{1}{2}\sin 2\beta - \frac{\beta^3}{\gamma} & 1 - \cos 2\beta \\ \cos\beta - \cos 2\beta & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2\beta & \sin 2\beta \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

A matriz D_1 torna-se

$$D_1 = \frac{\beta}{s} \begin{bmatrix} \beta - \sin\beta - \frac{\beta^3}{\gamma} & \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\sin\beta \\ \beta - \sin 2\beta + \sin\beta & \beta - \frac{1}{2}\sin 2\beta - \frac{\beta^3}{\gamma} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

O valor limite é $\gamma_{n=3} = 3,44$ para o qual corresponde o valor $\beta_{n=3} = 2,48 \Rightarrow c_c = 0,62$. Ao resolver-se a eq. (2.19) para o valor máximo encontrado no caso 2, $\gamma_{n=4} = 1,41$, encontra-se um valor de $c_c = 0,42$. Assim, o limite de validade do modelo analítico é portanto, $1,41 \leq \gamma_{n=3} \leq 3,44$ que corresponde à $0,42 \leq c_c \leq 0,62$.

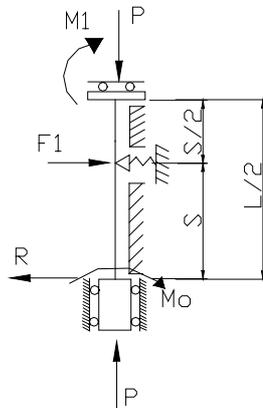


Figura 2.14- Modelo para representar a armadura longitudinal: $L/S=3$.

Caso 4- $L/s = 3$; $n=2$; $n_{L/2}=1$.

O modelo a ser considerado está mostrado na Figura 2.14. Tem-se que $s_1=0$ e $m=1,5$ da mesma forma que nos casos anteriores, o determinante toma a forma:

$$D = \frac{\beta}{s} \begin{bmatrix} \beta - \sin\beta - \frac{\beta^3}{\gamma} & 1 - \cos\beta \\ \cos\left(\frac{1}{2}\beta\right) - \cos\left(\frac{3}{2}\beta\right) & \sin\frac{3}{2}\beta \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

A matriz D_1 corresponde ao elemento $D[1,1]$ da matriz D sendo

$$D_1 = \frac{\beta}{s} \left[\beta - \sin\beta - \frac{\beta^3}{\gamma} \right] \quad (2.43)$$

O limite de validade é definido por $3,44 \leq \gamma_{n=2} \leq \pi^2$ com $0,67 \leq c_c \leq 1$.

Caso 5- $L/s = 2$; $n=1$; $n_{L/2}=1$.

O modelo a ser considerado está mostrado na Figura 2.15. Tem-se que $s_1=0,5$ e $m=1$, da mesma forma que nos casos anteriores, o determinante torna-se:

$$D = \frac{\beta}{s} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\sin\beta - \frac{\beta^3}{\gamma} & 1 - \cos\beta \\ \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos\beta & \sin\beta \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

A matriz D_1 corresponde ao elemento $D[1,1]$ da matriz D sendo

$$D_1 = \frac{\beta}{s} \left[\frac{1}{2}\beta - \frac{1}{2}\sin\beta - \frac{\beta^3}{\gamma} \right] \quad (2.45)$$

Os valores limites pertencem ao intervalo $\pi^2 \leq \gamma_{n=1} \leq 8\pi^2$ e $1,40 \leq c_c \leq 4$.

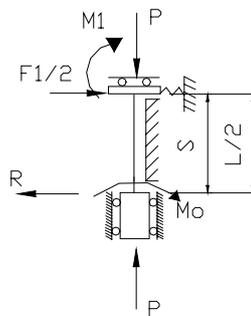


Figura 2.15- Modelo para representar a armadura longitudinal: $L/s=2$.

2.3.1.2. Flambagem Ocorrendo com Comprimento Não-Múltiplo do Espaçamento entre Estribos

Papia *et al.* (1988) estudaram um caso intermediário entre o caso 4 e o caso 5, introduzindo-se uma variável auxiliar, μ , pois a flambagem da armadura longitudinal pode ocorrer em uma região não coincidente com a posição do estribo e a variável μ auxiliará os cálculos quando o comprimento envolvido na flambagem, L , não coincidir com um número inteiro de espaçamento entre estribos.

Os valores obtidos para o coeficiente c_c nos vários sistemas considerados tem sempre dois valores diferentes para as extremidades do intervalo que define o limite de validade do modelo, ou seja, os valores de c_c são diferentes para a extremidade final do intervalo em uma determinada configuração e a extremidade

inicial de uma configuração posterior. Esta descontinuidade acontece porque a análise é feita em configurações consecutivas diferindo por um espaçamento S . Assim, considera-se configurações intermediárias onde a extremidade fixa poderia ou não coincidir com a posição dos estribos.

Portanto, o procedimento empregado pode ser considerado válido até o caso 4, onde as divergências na transição do modelo da Figura 2.13 para a Figura 2.14 são em torno de 7,5% do valor de c_c , ou seja, quando a taxa L/s diminui, as descontinuidades aumentam e como se verifica, as divergências do modelo da Figura 2.14 para o modelo da Figura 2.15 estão em torno de 28,6%.

Mostra-se na Figura 2.16 o modelo de uma configuração intermediária para a flambagem da armadura, onde a região envolvida pode ser menor que um espaçamento entre estribos, ou seja, $L = s(2\mu + 1)$. Na Figura 2.16 considera-se $0 \leq \mu \leq 1$. Tem-se que $n_{L/2} = 1$ e o valor de n varia de 2 à 1 e então se substituindo os valores de $n_{L/2} = 1$ e $j = 0$ nas constantes A_j e B_j expressas na eq. (2.28) tem-se para a região onde $j = 0$

$$\begin{cases} A_o = -\frac{sF_1}{\beta P} \\ B_o = -\frac{M_o}{P} \end{cases} \quad (2.46)$$

Substituindo-se (2.46) em (2.27) e utilizando-se a eq. (2.18) tem-se a equação que determina a primeira linha da matriz D

$$\frac{F_1}{\alpha} - \frac{s}{\beta P} F_1 (\beta\mu - \sin\mu\beta) - \frac{M_o}{P} (1 - \cos\mu\beta) = 0 \quad (2.47)$$

Para a região $j = 1$ tem-se

$$\begin{cases} A_1 = -\frac{s}{\beta P} (F_1 \cos\mu\beta - F_1) + \frac{M_o}{P} \sin\mu\beta \\ B_1 = -\frac{s}{\beta P} F_1 \sin\mu\beta - \frac{M_o}{P} \cos\mu\beta \end{cases} \quad (2.48)$$

para as constantes de integração. Fazendo-se uso das expressões (2.48), (2.27) e (2.17) tem-se a equação que determina a segunda linha da matriz D dada da seguinte forma:

$$\left(-\frac{s}{\beta P} (F_1 \cos\mu\beta - F_1) + \frac{M_o}{P} \sin\mu\beta \right) \beta \cos \frac{1}{2} \beta - \left(-\frac{s}{\beta P} F_1 \sin\mu\beta - \frac{M_o}{P} \cos\mu\beta \right) \beta \sin \frac{1}{2} \beta = 0 \quad (2.49)$$

Neste caso a matriz do sistema formado pelas expressões (2.47) e (2.49) toma a forma:

$$D = \frac{\beta}{s} \begin{bmatrix} \mu\beta - \sin\mu\beta - \frac{\beta^3}{\gamma} & 1 - \cos\mu\beta \\ \cos\frac{\beta}{2} - \cos\left(\frac{1}{2} + \mu\right)\beta & \sin\left(\frac{1}{2} + \mu\right)\beta \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

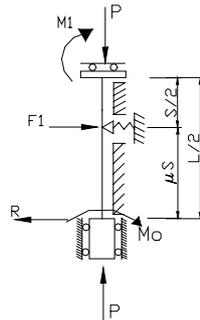


Figura 2.16- Configuração intermediária para o modelo de flambagem: $L/s = (2\mu + 1)$.

Para se calcular o valor máximo para a carga crítica e parâmetro de rigidez dos estribos, resolve-se o sistema feito pelas equações (2.19) e (2.32), onde a matriz D_1 é expressa eliminando-se a linha e coluna da matriz (2.50) correspondente a $Mo=0$, assim tem-se:

$$D_1 = \mu\beta - \sin\mu\beta - \frac{\beta^3}{\gamma} \quad (2.51)$$

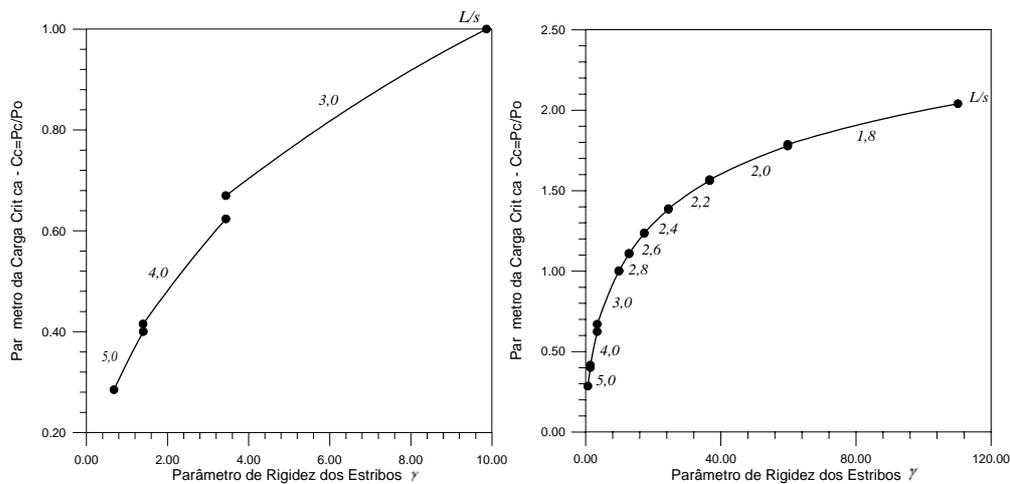
- $\mu = 0,9; L/s = 2,8$

Resolvendo-se o sistema feito pelas expressões (2.50) e (2.51) obtém-se os valores máximos do parâmetro de rigidez e carga crítica, $\{\gamma_{n=2} = 12,86, \beta_{n=2} = 3,31\}$, respectivamente. Substituindo-se o valor de $\gamma_{n=2} = \pi^2$ encontrado para o caso 4, em *determinante*($D=0$), na eq. (2.50), encontra-se $\beta_{n=2} = 3,143662509$, ou seja, $c_c=1,000658855$ e verifica-se uma divergência do caso 4 para o caso aqui considerado no parâmetro adimensional da carga crítica de 0.07 %. Repete-se o mesmo procedimento para os casos $0,8 \leq \mu \leq 0,1$ e obtém-se os valores máximos para γ e β , bem como o intervalo que define o limite de validade para cada modelo.

- $\mu = 0,8; \gamma_{n=2} = 17,36; \beta_{n=2} = 3,49; 12,86 \leq \gamma_{n=2} \leq 17,36; 1,11 \leq c_c \leq 1,24$
- $\mu = 0,7; \gamma_{n=2} = 24,50; \beta_{n=2} = 3,70; 17,36 \leq \gamma_{n=2} \leq 24,50; 1,24 \leq c_c \leq 1,18$
- $\mu = 0,6; \gamma_{n=2} = 36,72; \beta_{n=2} = 3,93; 24,50 \leq \gamma_{n=2} \leq 36,72; 1,39 \leq c_c \leq 1,56$
- $\mu = 0,5; \gamma_{n=1} = 59,83; \beta_{n=1} = 4,19; 36,72 \leq \gamma_{n=1} \leq 59,83; 1,25 \leq c_c \leq 1,57$
- $\mu = 0,4; \gamma_{n=1} = 110,21; \beta_{n=1} = 4,49; 59,83 \leq \gamma_{n=1} \leq 110,21; 1,33 \leq c_c \leq 1,43$
- $\mu = 0,3; \gamma_{n=1} = 246,92; \beta_{n=1} = 4,83; 110,21 \leq \gamma_{n=1} \leq 246,92; 2,06 \leq c_c \leq 2,37$
- $\mu = 0,2; \gamma_{n=1} = 792,33; \beta = 5,24; 246,92 \leq \gamma_{n=1} \leq 792,33; 2,41 \leq c_c \leq 2,78$
- $\mu = 0,1; \gamma_{n=1} = 6098,72; \beta = 5,71; 792,33 \leq \gamma_{n=1} \leq 6098,72; 2,92 \leq c_c \leq 3,31$

Os resultados para todos os casos examinados estão mostrados nas Figuras 2.17 e 2.18. Para o traçado da curva $c_c - \gamma$ para um determinado modelo considerado, fez-se um laço onde a rigidez varia de um limite inferior até o valor máximo encontrado para a mesma e resolve-se a eq. (2.19) para os vários valores de γ_n , calculando-se assim os β_n correspondentes.

A Figura 2.17.a mostra a curva $c_c - \gamma$ até o caso 4, onde $L/s=3$. A Figura 2.17.b mostra a curva até o caso onde $L/s=1,6$ e a Figura 2.18 mostra a curva até o caso onde $L/s=1,2$ e verifica-se que quando L/s vai se aproximando de 1 a curva é assintótica ao valor de $c_c=4$ para um valor de $\gamma \rightarrow \infty$ correspondente ao esquema com apoios rígidos intermediários, ou seja, $c_{c-\gamma \rightarrow \infty} = 4$ e $\mu = 0$. Dessa forma, reproduziram-se exatamente os resultados obtidos por Papia *et al.* (1988).



(a) – $L/s=5,0; 4,0; 3,0$

(b) – $L/s=5,0; 4,0; 3,0; 2,8; 2,6...; 1,8$

Figura 2.17 - Curva $c_c - \gamma$.

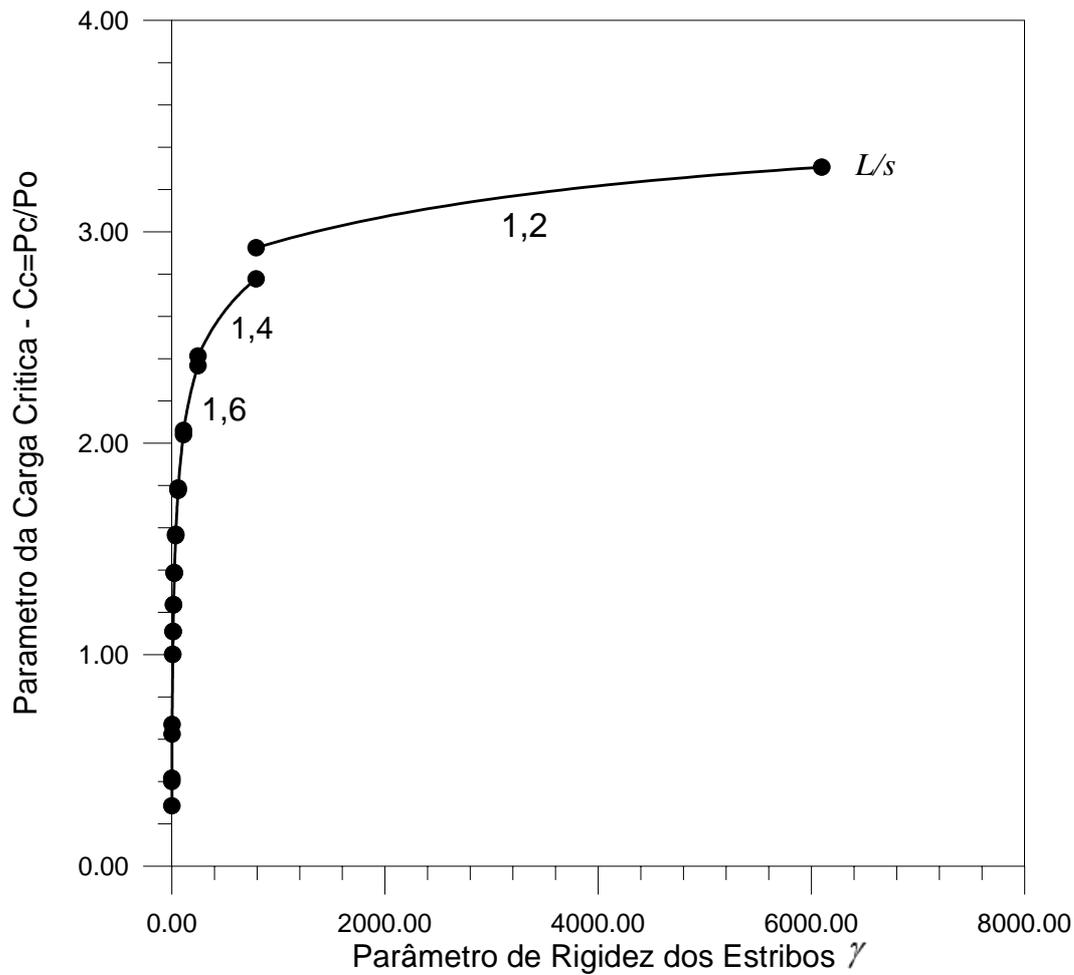


Figura 2.18 - Curva $c_c - \gamma$.

2.3.2. Comparação com Resultados Experimentais

Papia *et al.* (1988) realizaram uma comparação entre os valores obtidos utilizando o diagrama da Figura 2.17 e 2.18 e os valores obtidos de ensaios experimentais mostrados no trabalho de Scott *et al.* (1982) e Sheikh & Uzumeri (1980). As informações relacionadas aos corpos de prova examinados, juntamente com os resultados teóricos e experimentais são apresentadas na Tabela 2.1.

Detalhes dos corpos de prova utilizados no trabalho de Sheikh & Uzumeri (1980) estão mostrados na Figura 2.19. Os caracteres alfanuméricos apresentados na Tabela 2.1 para os nomes dos corpos de prova têm o seguinte significado: o primeiro número representa a percentagem da armadura longitudinal em relação à área total da seção transversal (2% ou 4%), a letra após o primeiro número indica a configuração da armadura na seção da coluna como mostra a Figura 2.19, o

segundo número se refere à taxa volumétrica da armadura transversal, onde o número 1 representa 0,8 %, o número 4 representa 1,6 % e os números 5 e 6 representam 2,4 %, o último número representa o número dos corpos de prova.

Detalhe dos corpos de prova utilizados no trabalho de Scott et al. (1982) estão mostrados na Figura 2.20. Os corpos de prova 12, 13, 14 e 15 são da forma mostrada na Figura 2.20.b e os corpos de prova 17, 18, 19 e 20 são da forma mostrada na Figura 2.20.a.

A Figura 2.21, mostra a aparência dos corpos de prova do trabalho de Sheikh & Usumeri (1980) após os ensaios.

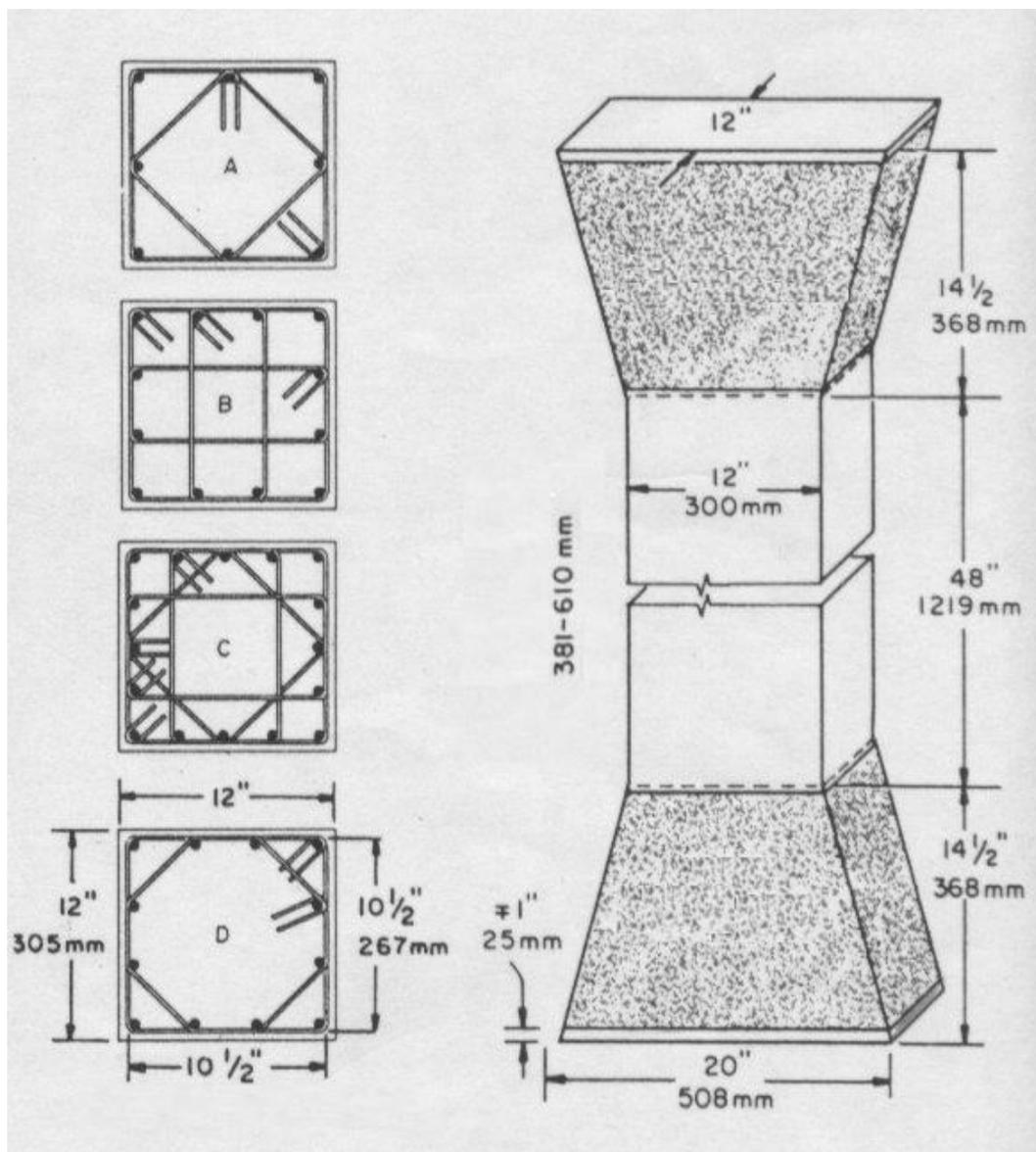


Figura 2.19 - Detalhe dos corpos de prova do trabalho de Sheikh & Uzumeri (1980).

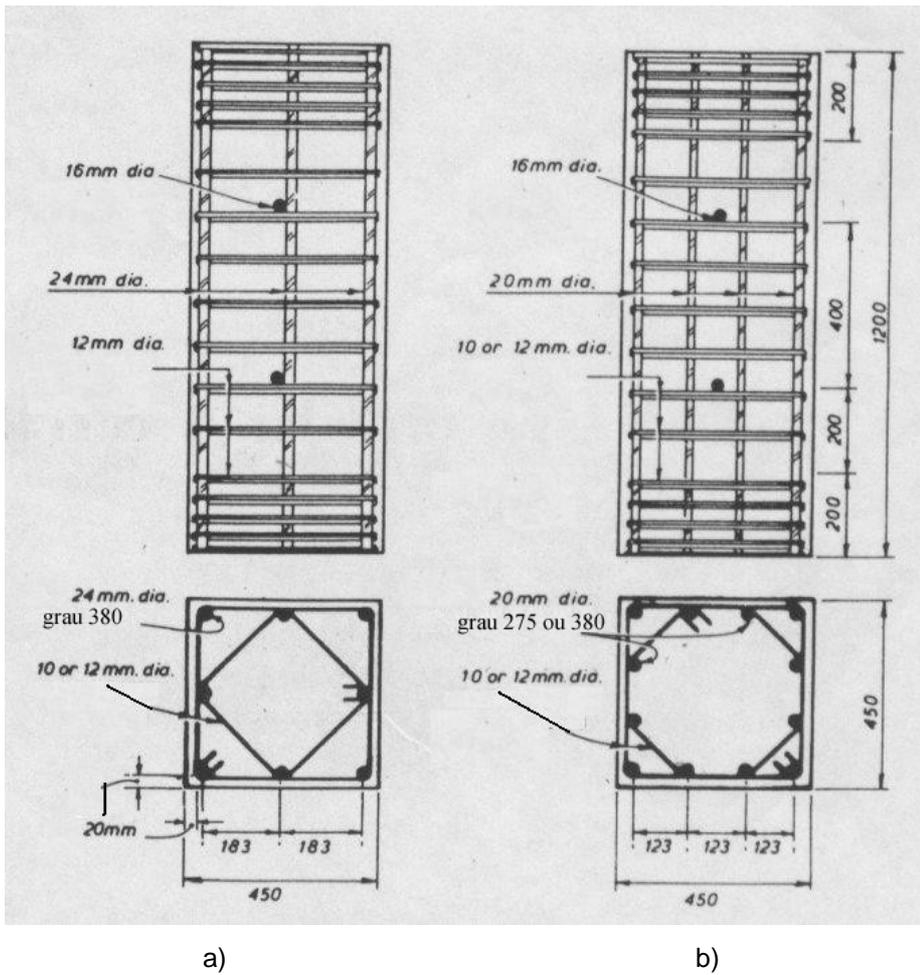


Figura 2.20 - Detalhe dos corpos de prova do trabalho de Scott *et al.* (1982).

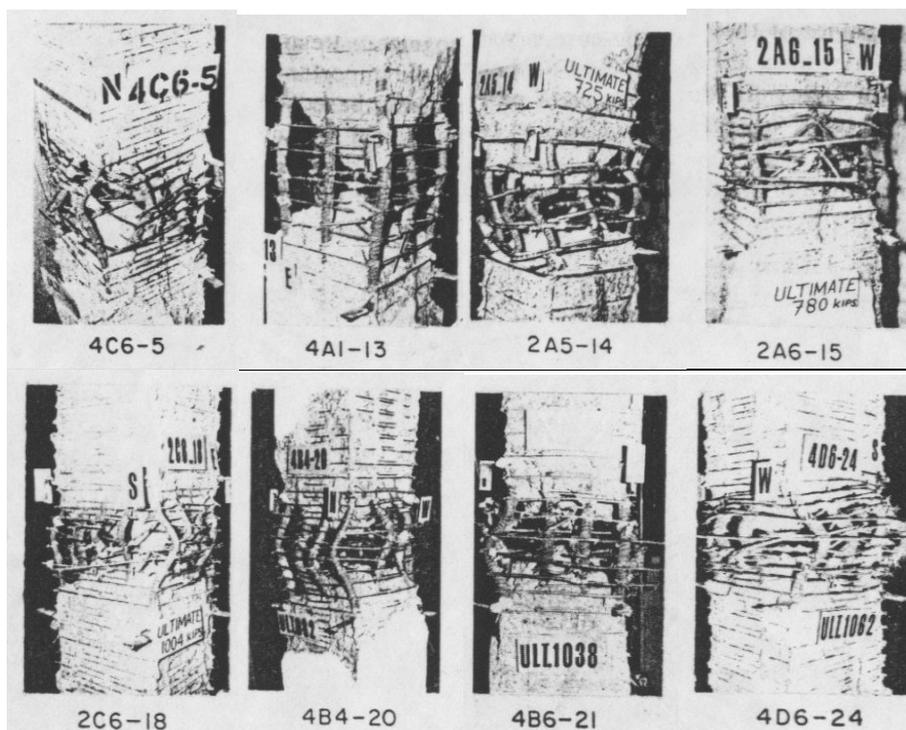


Figura 2.21 - Aparência dos corpos de prova após os ensaios. (Sheikh & Usumeri, 1980)

Tabela 2.1- Comparação entre resultados teóricos e experimentais. Papia *et al.* (1988)

Corpo de Prova	Características Mecânicas e Geométricas							Resultados						
	Armadura Longitudinal				Armadura transversal			Experimental		Teórico				
	ϕ_t mm	f_y MPa	E_t MPa	E_r MPa	ϕ_t mm	s mm	E_t MPa	ϵ_u	P_s KN	η	c_c	L/s	P_c KN	$\frac{\Delta P}{P}$ x100
(a) Núcleo confinado: 267 mm x 267 mm (Sheikh & Uzumeri, 1980)														
4C6-5	15,87	372	9240	26500	4,76	38,1	5000	0,0183	94	0,44	a	6	123	31
4A1-13	22,22	438	9670	27400	4,76	57,1	5000	0,0130	187	0,38	a	7	195	4
2A5-14	15,87	404	8100	23900	9,52	76,2	5000	0,0210	106	15,8	1,16	2,6	147	38
2A6-15	15,87	404	8100	23900	6,35	35	5000	0,0273	120	0,67	a	6	157	31
2C6-18	12,70	414	8970	25900	4,76	38,1	5000	0,0253	70	1,1	0,34	5	76	9
4B4-20	19,05	392	6250	19300	4,76	38,1	5000	0,0250	143	0,29	a	7	153	7
4B6-21	19,05	392	6250	19300	6,35	47,7	5000	0,0223	141	1	0,33	5	176	25
4D6-24	19,05	392	6250	19300	6,35	38,1	5000	0,0265	145	0,37	0,20	7	169	17
(b) Núcleo confinado: 400 mm x 400 mm (Scott et al. , 1982)														
12	20	434	8500	24700	10	98	4500	0,0167	157	6,1	0,82	3	163	4
13	20	434	8500	24700	10	72	4500	0,0203	167	2,4	0,52	4	192	15
14	20	434	8500	24700	12	88	4000	0,0289	180	5,6	0,80	3	197	10
15	20	434	8500	24700	12	64	4000	0,0304	190	2,2	0,50	4	233	23
17	24	394	6000	18800	10	98	4500	0,0214	220	5,4	0,79	3	248	13
18	24	394	6000	18800	10	72	4500	0,0287	240	2,1	0,49	4	284	19
19	24	394	6000	18800	12	88	4000	0,0359	250	5,0	0,76	3	296	18
20	24	394	6000	18800	12	64	4000	0,0382	255	1,9	0,46	4	338	33
^a Determinado por procedimento analítico														

2.4. Pesquisa de Mau (1990)

Mau (1990) desenvolveu um elemento finito para verificar o comportamento da flambagem da armadura e o propósito do seu trabalho foi mostrar um estudo paramétrico sobre os efeitos do espaçamento entre os estribos e suas implicações sobre a capacidade de carga da armadura. A simulação de Mau (1990) mostra que existe um espaçamento crítico que depende da curva tensão *vs.* deformação uniaxial do aço, sendo que a capacidade de carga difere grandemente para espaçamentos entre estribos abaixo e acima do valor crítico.

O problema considerado está mostrado na Figura 2.22. Somente a porção da armadura entre dois estribos consecutivos foi adotada no modelo de Mau (1990), onde as duas extremidades foram restringidas contra a rotação.

A curva tensão *vs.* deformação utilizada por Mau (1990) para análise de seus resultados, foi selecionada de ensaios em aços de alta resistência no trabalho de Aktan *et al.* (1973) e possui os seguintes valores para tração e compressão:

$E=29000ksi$ (2000000 MPa), $\varepsilon_y = 0,00238$, $\varepsilon_h = 4,7\varepsilon_y$, $\varepsilon_u = 25,2\varepsilon_y$,
 $\sigma_y = 69ksi$ (475,86 MPa), $\sigma_u = 120ksi$ (827,59 MPa) e $E_t = 2200ksi$ (15172,41 MPa), onde E é o módulo de elasticidade, E_t é o módulo tangente inicial no ramo com encruamento, ε_y é a deformação no escoamento, ε_h é a deformação no encruamento, ε_u é a deformação no pico das tensões, σ_y é a tensão de escoamento e σ_u é a tensão máxima.

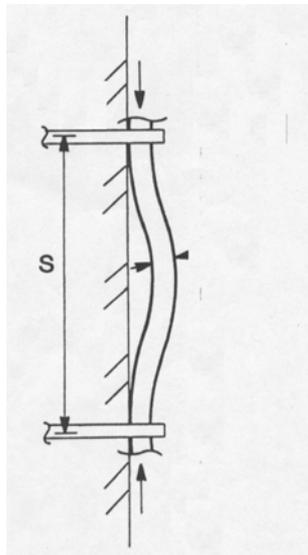
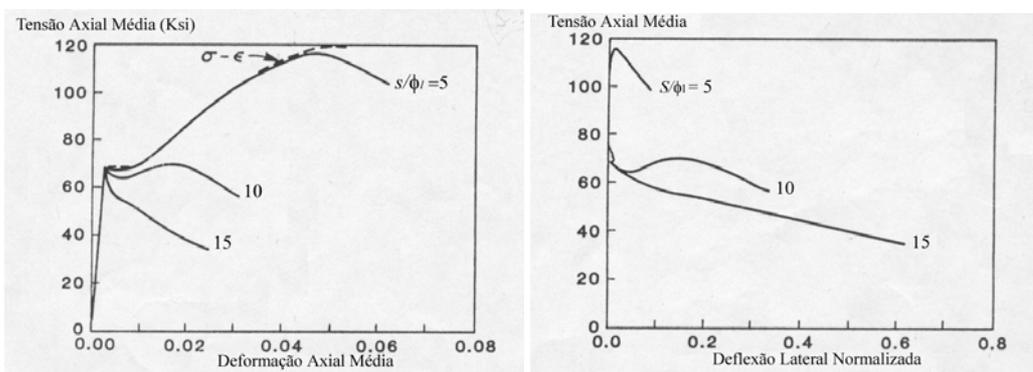


Figura 2.22 - Modelo proposto por Mau (1990).

2.4.1. Curvas Carga Deformação e Deflexão Lateral

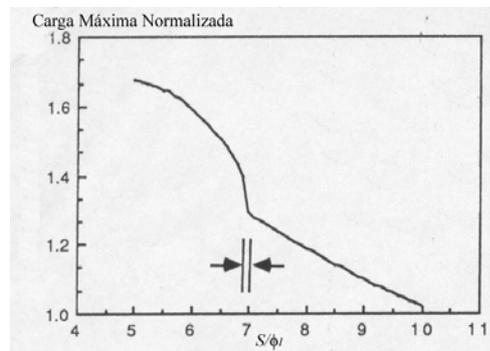
As curvas das Figuras 2.23.a e 2.23.b foram traçadas para armaduras longitudinais com diferentes espaçamentos entre estribos, tomando como variável a relação entre o espaçamento entre estribos s e o diâmetro da armadura longitudinal ϕ_l . Tomou-se os valores de 5 a 15 com incremento 1 para o parâmetro s/ϕ_l .

A Figura 2.23.a apresenta a curva tensão axial média vs. deformação média para $s/\phi_l = 5, 10$ e 15 .



a) Tensão axial vs. Deformação axial.

b) Tensão axial vs. deflexão lateral



c) Tensão crítica vs. Espaçamento entre estribos normalizado.

Figura 2.23 - Diagramas carga vs. deflexão por Mau (1990).

A deflexão lateral normalizada é definida pela relação entre deflexão lateral w no centro do vão entre dois estribos consecutivos e o diâmetro da armadura longitudinal ϕ_l . Mau (1990) chegou às seguintes conclusões a partir da observação da Figura 2.23.

- Para um pequeno valor de $s/\phi_l = 5$, a curva tensão média vs. deformação média segue a curva tensão vs. deformação do material. Antes que o

pico de carga seja alcançado, a capacidade de carga da armadura pode ser estimada da curva tensão vs. deformação do aço.

- Para um valor alto de $s/\phi_l = 15$ a armadura flamba na tensão de escoamento $\sigma_y = 69 \text{ ksi} (475,86 \text{ MPa})$ e o caminho pós crítico é claramente instável, perdendo assim a sua capacidade de carga.
- Para um valor intermediário de s/ϕ_l igual a 10 o aço flamba na tensão de escoamento, porém recupera resistência e o pico de resistência é um valor ligeiramente acima da tensão de escoamento.

A capacidade de carga da armadura é determinada pelo comportamento pós-crítico, o qual depende do espaçamento entre os estribos. Para melhor entendimento, analisa-se a Figura 2.23.b. Para o caso em que $s/\phi_l = 5$, nota-se uma pequena deflexão lateral no escoamento, sem aumento de carga. A deflexão passa a crescer com a carga e, ao chegar no pico, a carga cai abruptamente. Para os outros dois casos a deflexão aumenta com redução de carga a partir da tensão de escoamento.

Nota-se que há dois eventos de flambagem. A primeira flambagem sempre ocorre na tensão de escoamento para todos os valores de s/ϕ_l . De acordo com Mau & El-Mabsout (1989), caso o material seja perfeitamente dúctil, isto é, com o nível de escoamento se estendendo indefinidamente sem um ramo de encruamento, o caminho pós - crítico com início na carga de escoamento seria instável.

A Figura 2.23.c mostra a tensão crítica como uma função do espaçamento entre estribos. Nota-se uma região restrita de s/ϕ_l em torno de 7 dentro da qual a capacidade de carga cai drasticamente. Uma análise minuciosa desta região revela que esta mudança repentina coincide com o desaparecimento do fenômeno de endireitamento após o escoamento, quando s/ϕ_l atinge um valor próximo de 7.

2.5. Pesquisa de Pantazopoulou (1998)

O objetivo do trabalho de Pantazopoulou (1998) foi desenvolver alternativas para a estabilidade da armadura longitudinal em pilares de concreto armado onde levou-se em consideração a eficiência do estribo, a deformação limite do concreto, o tamanho da barra da armadura e o espaçamento entre estribos.

Para quantificar a relação entre as variáveis de estudo citadas, um extenso banco de dados consistindo de aproximadamente 300 ensaios em pilares relatados na literatura internacional foram estudados. Os ensaios foram classificados em dois grupos. No primeiro grupo, 140 pilares foram ensaiados sob compressão axial concêntrica aumentando monotonicamente até a ruptura do centro do concreto (Scott, 1980; Sheikh & Uzumeri, 1980; Moehle & Cavanagh, 1985; Zahn, 1986; Mander *et al.*, 1988a; Sheikh & Toklucu, 1993; Cusson & Paultre, 1994; Razvi & Saatcioglu, 1995).

No segundo grupo, 200 pilares selecionados da literatura foram ensaiados sob combinações de carga axial e lateral com um histórico de carga cíclica reversa (Saatcioglu & Ozcebe, 1989; Sheikh *et al.*, 1990, Sheikh *et al.* 1994; French & Schultz, 1991; Saatcioglu, 1991; Sheikh & Khoury, 1993; Azizinamini *et al.*, 1994; Razvi & Saatcioglu, 1994; Thomsen & Wallace, 1994).

O banco de dados descrito anteriormente foi analisado detalhadamente por Pantazopoulou (1998) para identificar, através de evidências experimentais, a condição crítica de estabilidade da armadura e sua relação com a deformação média do concreto e a geometria dos estribos.

2.5.1. Equação de Equilíbrio da Armadura

O comprimento de flambagem e a deformação à compressão axial máxima que pode ser alcançada na barra antes da flambagem, ε_s^{cr} , são variáveis que dependem da rigidez da armadura transversal.

Pantazopoulou (1998) avaliou esta interação pela consideração do equilíbrio da armadura, como mostra o diagrama de corpo livre da Figura 2.24. As tensões nos estribos são consideradas proporcionais à deflexão no nível no qual os estribos são localizados, isto é, antes do escoamento dos estribos.

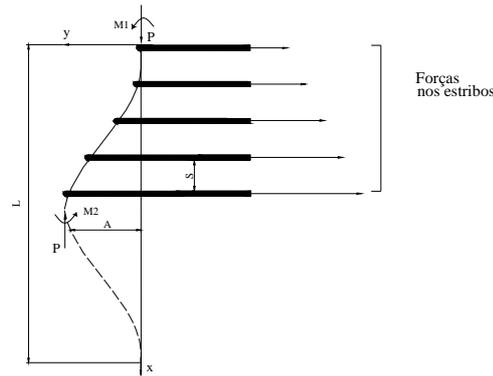


Figura 2.24 - Equilíbrio do segmento da barra flambado.

Os momentos internos M_1 e M_2 são calculados de $EI\Phi$, onde E é o módulo de elasticidade longitudinal da barra, I é o momento de inércia da armadura longitudinal e Φ é a curvatura. Desta forma o equilíbrio de momentos sobre uma seção transversal da barra produz

$$EI\Phi_{x=0} - EI\Phi_{x=L/2} = Pw - k'w \quad (2.52)$$

onde w é o campo de deslocamentos da coluna e k' é a rigidez dos estribos. Pantazopoulou (1998) considerou um campo de deslocamentos consistente com as condições de contorno da forma:

$$w(x) = \frac{A}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right) \quad (2.53)$$

que, substituindo na eq. (2.52), transforma-se em

$$4EIA \frac{\pi^2}{L^2} = P \frac{A}{2} \left(1 - \cos\frac{2\pi x}{L} \right) - \sum_{n=0}^{n=N} K \frac{A}{2} \left(1 - \cos\frac{2\pi ns}{L} \right) x_n \quad (2.54)$$

onde P é a carga axial, L é o comprimento, N é o número total de estribos envolvidos na metade do comprimento crítico ($L/2$), s é o espaçamento entre os estribos e K é a rigidez do estribo à tração na direção lateral. Na eq. (2.54), o apoio elástico discreto foi aproximado por uma rigidez elástica distribuída continuamente k , e, portanto este termo na eq. (2.54) resultou na expressão

$$\sum_{n=0}^{n=N} K \frac{A}{2} \left(1 - \cos\frac{2\pi ns}{L} \right) x_n \cong \int_0^{L/2} k \frac{A}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) x \right) dx = \left(\frac{\pi^2 + 4}{16\pi^2} \right) kL^2 \quad (2.55)$$

que, ao substituir na eq. (2.54), encontra-se a carga crítica dada por:

$$P_{cr} = A_s f_{cr} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2} + \beta kL^2 \quad (2.56)$$

onde $\beta = (\pi^2 + 4)/16\pi^2 = 0,0875$.

Considerando-se que a resistência à compressão da barra é limitada pela força de escoamento, $P_{cr} \leq A_s f_y$, mostra-se que o escoamento com flambagem simultânea sobre um espaçamento de estribo poderia ocorrer se estribos muito rígidos são espaçados na distância expressa na eq. (2.57) definida por Watson *et al.* (1994).

$$L_{cr}/\phi_l = 1,5 \left(\frac{E}{f_y} \right)^{1/2} \quad (2.57)$$

A partir da eq. (2.56) é possível estudar o comportamento pós-crítico da armadura como uma função do comportamento do concreto, pois as variáveis EI e f_{cr} que entram na expressão para P_{cr} são funções do estado do material.

2.5.2. Efeito da Rigidez sobre o Comprimento Crítico

Sabe-se que na presença de confinamento efetivo, grandes deformações axiais são alcançadas antes da flambagem, ao passo que o comprimento crítico da barra envolvida na flambagem pode ser maior do que um simples espaçamento entre estribos. De acordo com o modelo proposto por Engesser para flambagem de vigas sobre fundação elástica, como resumido no trabalho de Bleich (1952), a barra flamba entre os apoios da extremidade, onde as meias-ondas têm comprimento L de forma periódica. Assim a eq. (2.56) representa o equilíbrio sobre comprimentos de ondas semelhantes. A minimização de P na eq. (2.56) com relação a L leva ao valor

$$-8\pi^2 E_t I L^{-3} + 2\beta k L = 0; L = \left(\frac{4\pi^2 E_t I}{\beta k} \right)^{1/4} \quad (2.58)$$

o qual fornece o comprimento de uma barra flambada em um meio - período. Experimentos têm mostrado que geralmente a barra flamba por uma onda simples na região crítica, onde o cobrimento tenha lascado, embora esta distância possa ser de vários vãos de espaçamento entre estribos.

Utilizando-se o resultado de (2.58) em (2.56) com $f_{cr} = f_u$, onde f_u é a tensão na região de deformação com encruamento, a rigidez distribuída da mola,

k , necessária para suportar a capacidade de carga da barra é estimada através da eq. (2.59):

$$k = \frac{f_u^2}{4\pi\beta E_t} \quad (2.59)$$

Sabe-se que $k = K/s$, e assim tem-se através da eq. (2.59) o máximo espaçamento s para os estribos dado por:

$$s = \frac{(\pi^2 + 4)E_t K}{4\pi f_u^2} \quad (2.60)$$

Assim, de acordo com Pantazopoulou (1998), dependendo da rigidez do sistema de estribos na seção transversal, e do estado de deformação da barra longitudinal sob consideração, duas equações controlam as condições críticas para flambagem da armadura:

- Quando a flambagem ocorre dentro de um espaçamento entre estribos, então o comprimento crítico entre os estribos é expresso pela eq. 2.57, com $f_{cr} = f_u$, onde f_u é a tensão na região de deformação com encruamento correspondente ao valor do módulo tangente E_t , valores estes retirados da curva tensão vs. deformação para o aço usado.
- Caso o espaçamento entre estribos seja menor do que o espaçamento definido na eq. (2.60), então a flambagem poderia ocorrer para altos níveis de deformação em um comprimento que poderia envolver vários espaçamentos entre estribos.

Pantazopoulou (1998) utilizou o procedimento proposto por Bresler & Gilbert (1961) para o cálculo da rigidez axial K dos estribos como mostrado no item 2.1.2.

No pico de tensões a deformação superficial específica $= \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ é aproximadamente igual em magnitude a deformação axial aplicada ε_{cc} , onde ε_2 e ε_3 são as deformações laterais em dois eixos ortogonais da seção transversal de concreto (Cusson & Paultre, 1995; Pantazopoulou & Mills, 1995). Para seções simétricas isto implica que, próximo ao pico de carga a deformação de alongamento das pernas dos estribos é aproximadamente metade da deformação axial aplicada no concreto.

2.5.3.

Relação entre Eficiência dos Estribos, Deformabilidade do Núcleo do Concreto e Flambagem da Armadura

Foi dito anteriormente que o problema da flambagem da armadura e o confinamento do centro do concreto são acoplados. A magnitude da deformação axial ε_{cc} correspondente ao pico de tensões do centro do concreto confinado pode ser calculada de modelos de confinamento existentes na literatura (Sheikh & Uzumeri, 1982; Mander et al., 1988b; Cusson & Pautre, 1995).

Mander *et al.* (1984,1988a,1988b) desenvolveram um modelo para a curva tensão vs. deformação do concreto confinado baseado em resultados experimentais, comparando assim, a curva tensão vs. deformação do concreto bem confinado com a curva tensão vs. deformação para o concreto não confinado como mostra a Figura 2.25.

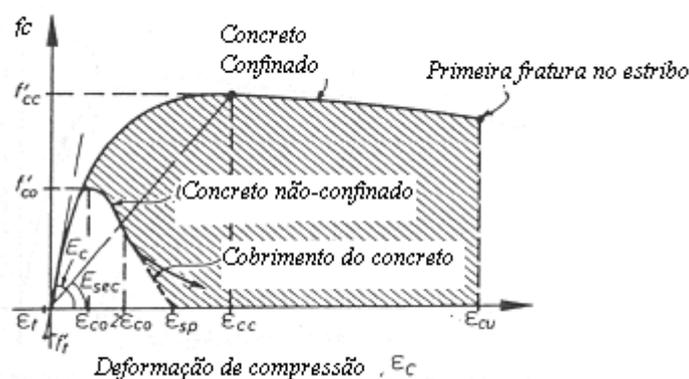


Figura 2.25 - Curva tensão deformação para o concreto comprimido proposto por Mander *et al.* (1984, 1988a, 1988b).

Mander *et al.* (1984, 1988a, 1988b) analisaram os resultados de ensaios em pilares carregados concentricamente confinados por armaduras em espirais, circulares ou retangulares. A pressão lateral de confinamento exercida pela armadura transversal sobre o núcleo do concreto, quando as deformações transversais no concreto tornam-se significantes, submete o concreto a um estado triaxial de tensões, aumentando desta forma a resistência à compressão e causando um comportamento pós-pico mais dúctil no diagrama tensão vs. deformação.

Em baixos níveis de tensões no concreto, a armadura transversal quase não é tensionada e, portanto o concreto não é confinado. O concreto torna-se confinado

quando as tensões aproximam-se da resistência uniaxial e as deformações transversais tornam-se muito altas. Devido à fissuração progressiva interna o concreto reage contra a armadura a qual aplica uma reação confinante para o concreto. No modelo proposto por Mander *et al.* (1984, 1988a, 1988b), a tensão de confinamento lateral em cada direção, exercida sobre o centro do concreto pela armadura transversal na resistência de escoamento é

$$f_l' = k_e f_l \quad (2.61)$$

onde f_l é a tensão de confinamento e k_e é o coeficiente de eficiência de confinamento, o coeficiente k_e foi definido por Mander *et al.* (1984, 1988^a, 1988b) como a relação entre a área do centro do concreto efetivamente confinado e a área do centro entre os estribos.

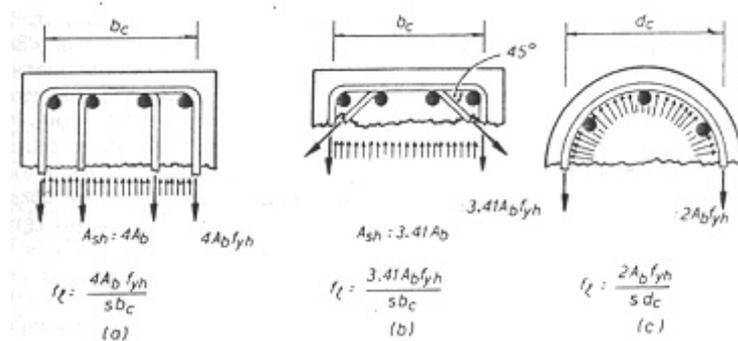


Figura 2.26 - Tensões confinantes calculadas para diferentes arranjos de armadura transversal.

Richard *et al.* (1928) deduziram uma expressão para a deformação correspondente a resistência máxima do concreto confinado, f_{cc} , que mais tarde foi modificada por InRam & Pantazopoulou (1996), com base em um amplo estudo experimental.

$$\varepsilon_{cc} = 6\varepsilon_o \left(\frac{f_{cc}}{f_c'} - 0,83 \right) = \varepsilon_o \left(1 + \frac{24,6k_e \rho_s f_{yt}}{f_c'} \right) \quad (2.62)$$

onde ε_o é a deformação no pico de tensões do concreto não confinado, ρ_s é a taxa volumétrica do estribo, f_{yt} é a tensão na armadura transversal correspondente à resistência máxima do concreto confinado f_{cc} a qual é dada por:

$$f_{cc} = f_c' + 4,1f_l' \quad (2.63)$$

onde f_c' é a resistência à compressão do concreto não confinado. Embora ε_{cc} tenha sido investigada extensivamente em ensaios de pilares, a relação entre a

deformação axial do concreto ε_c e a deformação lateral resultante ε_2 só tem recebido atenção recentemente. Uma expressão simples tem sido proposta por Imran & Pantazopoulou (1996) a qual está mostrada na eq. (2.64).

$$\varepsilon_2 = -\nu\varepsilon_c + (1 - 2\nu) \frac{k_e \rho_s f_{yt}}{E_c} - \varepsilon_{cc} \frac{(1 - 2\nu)}{2} \left(\frac{\varepsilon_c - 0,00015/\nu}{\varepsilon_{cc} - 0,00015/\nu} \right)^2 \quad (2.64)$$

onde as variáveis E_c e ν são o módulo de elasticidade do concreto e o coeficiente de Poisson ($\approx 0,2$), respectivamente. A constante 0,00015 representa a deformação de fissuração por tração.

Com base nas discussões de Pantazopoulou (1998), considera-se que o problema do espaçamento entre estribos é definido pelos seguintes passos;

1- Dado um arranjo específico e espaçamento entre estribos calcula-se o coeficiente de eficiência do confinamento, k_e deduzido por Mander *et al.* (1988a), e a deformação correspondente ao pico de tensões da eq. (2.62).

2- Usando-se a fórmula (2.64), calcula-se a deformação de expansão lateral ε_2 em algum nível de deformação axial ε_c , e considerando-se a compatibilidade de deformações entre o concreto e a armadura ($\varepsilon_s = \varepsilon_c$), calcula-se a rigidez da armadura longitudinal E_t , e a tensão f_u da curva tensão vs. deformação do material da barra longitudinal.

3- Avalia-se o módulo de elasticidade efetivo E' do estribo utilizando-se a deformação ε_2 no estribo e o modelo tensão vs. deformação do estribo. Utilizando-se o valor de E' e a geometria do estribo, calcula-se o valor da rigidez do estribo K .

4- Calcula-se o espaçamento crítico dos estribos s , necessário para apoiar a armadura longitudinal em um dado nível de deformação do centro do concreto, ε_c , utilizando-se $s = \min \left\{ (\pi^2 + 4) E_t K / 4 \pi f_u^2, 1,5 \phi_l (E_t / f_u)^{1/2} \right\}$.

2.5.4.

Cálculo do Espaçamento entre os Estribos Utilizando o Modelo Proposto por Pantazopoulou (1998)

Para se analisar o modelo proposto por Pantazopoulou (1998), tomou-se como exemplo a geometria da seção transversal mostrada na Figura 2.27. As barras longitudinais têm diâmetro $\phi_l = 20 \text{ mm}$, o pilar tem $400 \text{ mm} \times 400 \text{ mm}$ de

seção transversal, considerou-se um cobrimento de 20 mm . Para o diâmetro dos estribos consideram-se os valores, $\phi_t = 7,9\text{ mm}$ ou $9,5\text{ mm}$. Tomou-se para a resistência do concreto não confinado, $f'_c = 25\text{ MPa}$, com deformação $\varepsilon_o = 0,002$. A armadura tem $f_y = 400\text{ MPa}$ e a curva tensão deformação mostrada na Figura 2.28.

O espaçamento entre estribos foi considerado como uma variável neste exemplo. Nos gráficos das Figuras 2.29 e 2.30, o eixo y representa a deformação axial do concreto no pico das tensões. Verifica-se na Figura 2.29 que quanto maior o parâmetro do espaçamento entre estribos, s/ϕ_t , menor será a capacidade de deformação. Já na Figura 2.30 nota-se que quanto maior o confinamento efetivo, $k_e \rho_s f_{yt} / f'_c$, mais dútil o comportamento do pilar.

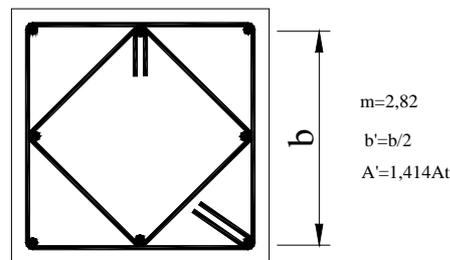


Figura 2.27- Geometria da seção transversal do pilar (Pantazopoulou, 1998).

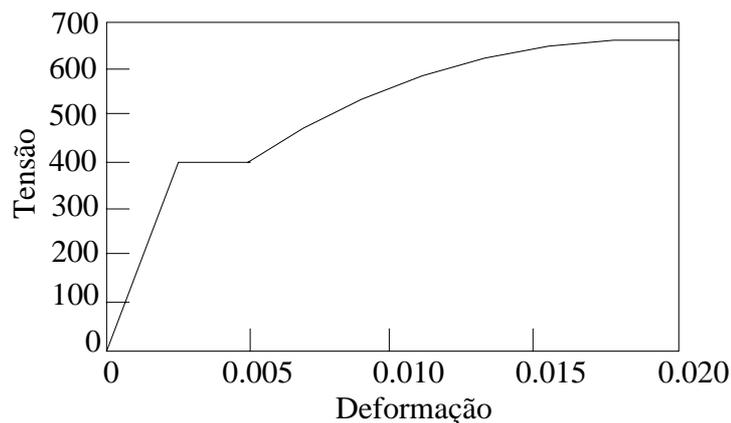


Figura 2.28- Modelo constitutivo tensão vs. deformação à compressão para o aço.

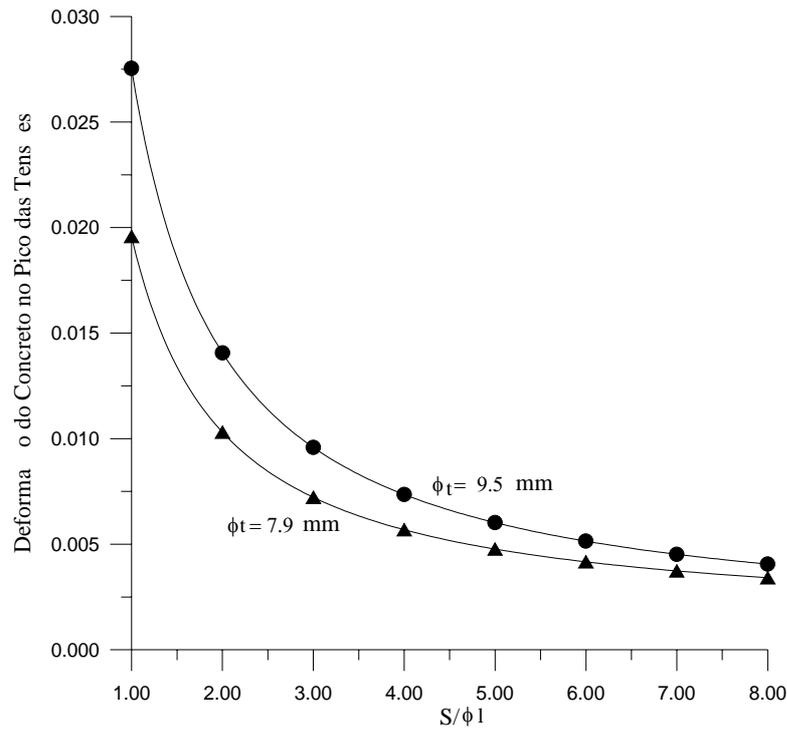


Figura 2.29- Resultados baseados no modelo proposto por Pantazopoulou (1998): Deformação do concreto no pico das tensões x Parâmetro de espaçamento crítico entre estribos $\frac{s}{\phi_l}$.

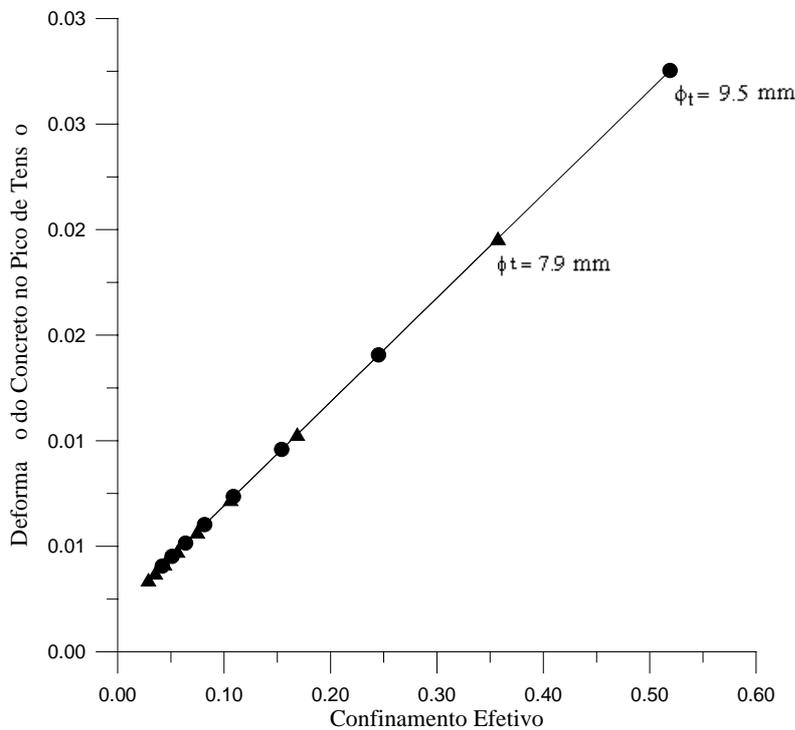


Figura 2.30- Resultados baseados no modelo proposto por Pantazopoulou (1998): Deformação do concreto no pico das tensões x Confinamento efetivo - $k_e \rho_s f_{yt} / f'_c$

2.6.

Ensaio Realizados em Pilares de Concreto de Alta Resistência por Queiroga & Giongo (2000)

O trabalho de Queiroga & Giongo (2000) teve como ponto de partida os resultados da pesquisa experimental desenvolvida por Queiroga (1999) em pilares de concreto de alta resistência, submetidos à compressão simples, moldados com concreto de resistência média à compressão aos 15 dias de 60 MPa. Ao todo foram ensaiados doze modelos, sendo seis com seção transversal quadrada (20 cm x 20 cm) e seis com seção retangular (15 cm x 30 cm). A altura dos modelos correspondeu a seis vezes a menor dimensão da seção transversal do pilar: 120cm e 90cm, respectivamente. Em todos os modelos estipulou-se espaçamentos entre estribos, s , de 5 cm, 10 cm e 15 cm, proporcionando diferentes taxas volumétricas de armadura transversal, ρ_w .

Os ensaios foram realizados com controle de deformação, obtendo-se o trecho descendente do diagrama tensão *vs.* deformação. Os resultados da pesquisa também comprovaram as conclusões de diversos pesquisadores sobre a existência do núcleo confinado de concreto definido pelos eixos dos estribos e sua participação isolada como seção resistente de concreto.

Queiroga (1999) compara resultados experimentais obtidos em seu trabalho com o modelo teórico proposto por Razvi & Saatcioglu (1999), onde os mesmos propuseram um diagrama tensão *vs.* deformação para pilares com armadura de confinamento o qual consiste de um trecho ascendente não-linear até a tensão máxima, f'_{cc} , e um trecho descendente linear até o valor $0,20 f'_{cc}$ como mostra a Figura 2.31. No diagrama para concreto confinado dois pontos se distinguem: $(\varepsilon_{cc}, f'_{cc})$, $(\varepsilon_{85}, 0,85 f'_{cc})$ onde ε_{cc} é a deformação correspondente à tensão máxima f'_{cc} e ε_{85} é a deformação correspondente à $0,85 f'_{cc}$.

O resumo dos resultados obtidos por Queiroga (1999) apresenta-se na Tabela 2.2.

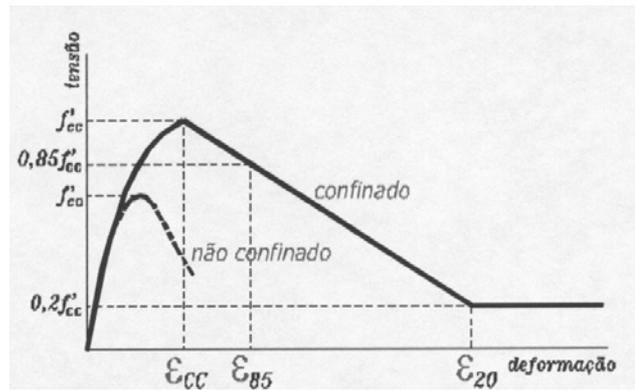


Figura 2.31 - Modelo proposto por Razvi & Saatcioglu (1999) para diagrama tensão vs. deformação.

Tabela 2.2 - Resumo dos resultados dos ensaios e verificação da seção resistente de concreto. A armadura longitudinal, em todos os modelos, era composta por 8 barras de 12,5 mm de diâmetro nominal.

Pilar	b (cm)	h (cm)	L (cm)	As (cm ²)	Ast (cm ²)	ρw (%)	f _c (MPa)	f _y (MPa)	f _{yt} (MPa)	P _{exp} (kN)
P1	20	20	120	9,82	φ6,3c/15	0,34	59,60	502	596	2278
P2	20	20	120	9,82	φ6,3c/15	0,34	64,35	502	596	2292
P3	20	20	120	9,82	φ6,3c/10	0,51	53,40	502	596	1835
P4	20	20	120	9,82	φ6,3c/10	0,51	53,40	502	596	1864
P5	20	20	120	9,82	φ6,3c/5	1,03	55,90	502	596	2158
P6	20	20	120	9,82	φ6,3c/5	1,03	55,90	502	596	2312
P7	15	30	90	9,82	φ6,3c/15	0,34	66,90	502	596	2373
P8	15	30	90	9,82	φ6,3c/15	0,34	66,90	502	596	2496
P9	15	30	90	9,82	φ6,3c/10	0,51	63,88	502	596	2446
P10	15	30	90	9,82	φ6,3c/10	0,51	63,88	502	596	2440
P11	15	30	90	9,82	φ6,3c/5	1,03	65,47	502	596	2288
P12	15	30	90	9,82	φ6,3c/5	1,03	65,47	502	596	2497

O modelo para o diagrama tensão vs. deformação proposto por Razvi & Saatcioglu (1999) é comparado com os resultados experimentais de Queiroga (1999) como mostram as Figuras 2.32 e 2.33. Como nos ensaios foi utilizado controle de deformação, foi possível obter-se o trecho descendente do diagrama, excetuando-se os casos em que o confinamento lateral não foi suficiente para prover ductilidade ao pilar. Verificou-se também a linearidade do trecho ascendente do diagrama.

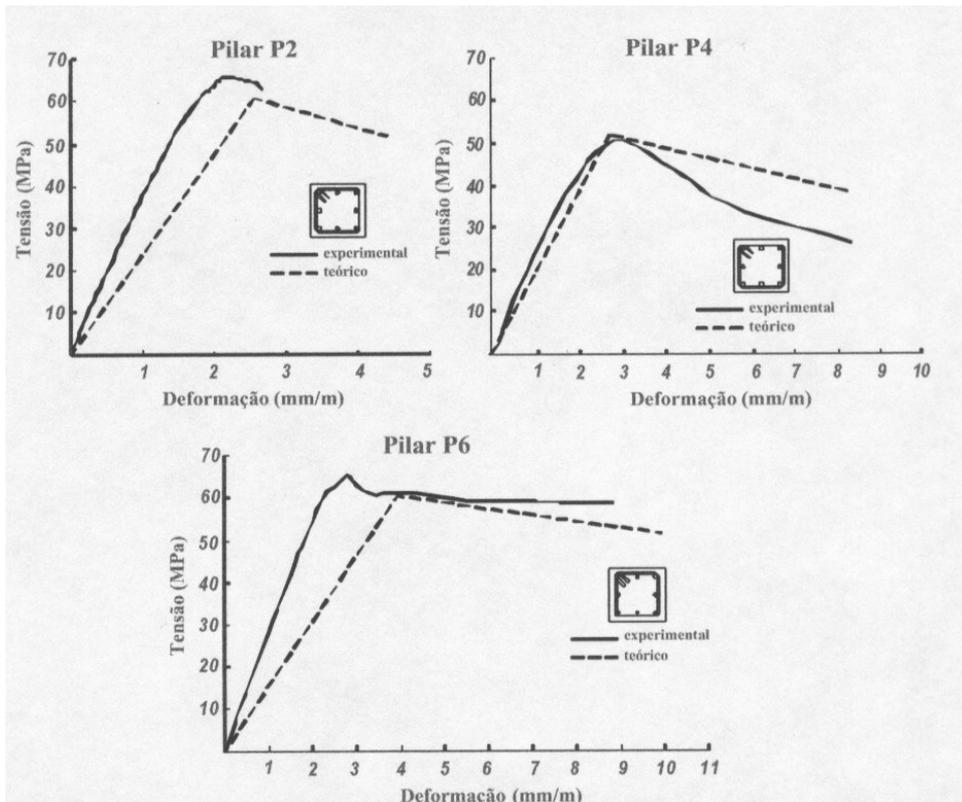


Figura 2.32 - Diagramas tensão vs. deformação para pilares de seção quadrada ensaiados por Queiroga (1999) e diagramas teóricos propostos por Razvi & Saatcioglu (1999).

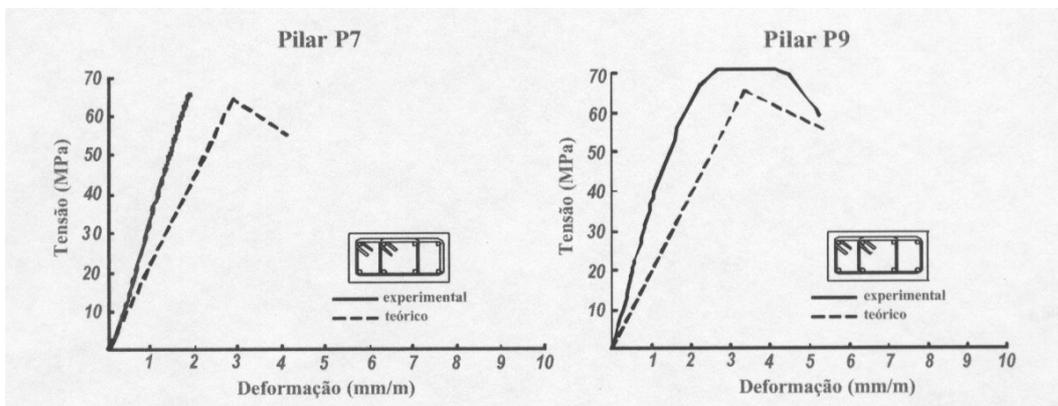


Figura 2.33 - Diagramas tensão vs. deformação para pilares de seção retangular ensaiados por Queiroga (1999) e diagramas teóricos propostos por Razvi & Saatcioglu (1999).

2.7.

Críticas sobre os Trabalhos de Bresler & Gilbert (1961), Papia *et al.* (1988), Mau (1990), Pantazopoulou (1998)

Bresler & Gilbert (1961), ao proporem um critério de projeto onde a tensão crítica é igual a tensão de escoamento da armadura longitudinal, consideram em suas pesquisas que os estribos são suficientemente rígidos e que a flambagem ocorreria apenas num espaçamento entre estribos. Tal exigência pode ser excessivamente limitante ao projeto, além disso, em vários experimentos e observações de campo como apresentam os trabalhos de Sheikh & Uzumeri (1980), nota-se que esta flambagem poderia envolver os próprios estribos. Na formulação apresentada no Capítulo 3 propõe-se que a flambagem poderá ocorrer num limite onde os próprios estribos são envolvidos.

Os trabalhos de Papia *et al.* (1988), Mau (1990) e Pantazopoulou (1998) consideram em seus modelos que a flambagem poderia ocorrer apenas para fora do centro e por este motivo apenas foram consideradas deformações do tipo simétrico, por um lado, isto também pode levar a uma limitação excessiva e por outro lado, pode ser contra a segurança, já que os modelos simétricos podem ocorrer com pequenos deslocamentos para dentro, mas com apreciável redução da rigidez longitudinal e da capacidade de carga. No modelo proposto no Capítulo 3 adota-se um campo de deslocamentos que combina funções simétricas com funções assimétricas.

2.8.

Prescrições Normativas

O presente item tem como objetivo apresentar as prescrições normativas da norma brasileira de Projeto de Estruturas de Concreto, NBR6118/1978 e NBR6118/2003, CEB 95, EUROCODE 2/2001 e ACI 318/2002 no que concerne ao detalhamento das armaduras longitudinais e transversais em pilares de concreto armado.

2.8.1. NBR 6118/1978

2.8.1.1. Armadura Longitudinal

As exigências que seguem referem-se a pilares cuja maior dimensão da seção transversal não exceda cinco vezes a menor dimensão, e não são válidas para as regiões especiais. Quando a primeira condição não for satisfeita, o pilar deve ser tratado como pilar parede, aplicando-se o disposto no item 18.5 da NBR 6118/1978.

- **Taxa de armadura e diâmetro mínimos**

A taxa geométrica da armadura longitudinal deve ter o valor mínimo expresso a seguir:

$$\rho_{min} = \frac{A_s}{A_c} = 0,15 \cdot \frac{f_{cd}}{f_{yd}} \cdot \nu \geq 0,80\% \quad \lambda > 30 \quad (2.65)$$

sendo $\nu = N_d / (A_c f_{cd})$ o valor da força normal em termos adimensionais f_{cd} é a resistência de cálculo do concreto à compressão e f_{yd} é a resistência de cálculo do aço à tração.

$$\rho_{min} = 0,50\% \quad \text{quando} \quad \lambda \leq 30 \quad (2.66)$$

onde λ é o índice de esbeltez. (0,8 e 0,5 %) são referidos à seção calculada.

A maior armadura possível em pilares deve ser 6 % da seção real, considerando-se inclusive a sobreposição de armadura existente em regiões de emenda, ou seja,

$$\rho_{max} = 6,0\%, \text{ inclusive em regiões de emenda por traspasse.} \quad (2.67)$$

A prescrição (2.67) é de ordem basicamente construtiva, visando evitar ninhos de concretagem, absolutamente inaceitáveis em pilares.

No caso de seção superabundante de concreto, a NB-1 tolera que as percentagens indicadas anteriormente se apliquem sobre áreas de concreto necessárias, face à atuação exclusivamente do esforço normal de compressão, impondo, no entanto, a condição suplementar de que a armadura longitudinal totalize, em qualquer caso 0,5 % da área de concreto existente.

$$\lambda > 30 \text{ e } A_c > (A_c)_{nec} \quad (A_s)_{min} \geq \begin{cases} 0,005 A_c \\ 0,008 (A_c)_{nec} \end{cases} \quad (2.68)$$

$$\lambda > 30 \text{ e } A_c \leq (A_c)_{nec} \quad (A_s)_{min} = 0,008 A_c \quad (2.69)$$

$$\lambda \leq 30 \qquad (A_s)_{min} = 0,005 A_c \qquad (2.70)$$

A Bitola das barras longitudinais deve obedecer à condição expressa pela eq. (2.71)

$$\phi_l \geq 10 mm \qquad (2.71)$$

• **Espaçamento entre as barras longitudinais**

$$\begin{aligned} \phi_l \\ 2 \text{ cm} \leq s_l \leq 40 \text{ cm} \\ 1,2\phi_{max,agregado} \end{aligned} \qquad (2.72)$$

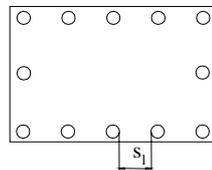


Figura 2.34- Espaçamento entre as barras longitudinais.

No caso de emendas o espaçamento está mostrado na Figura 2.35.

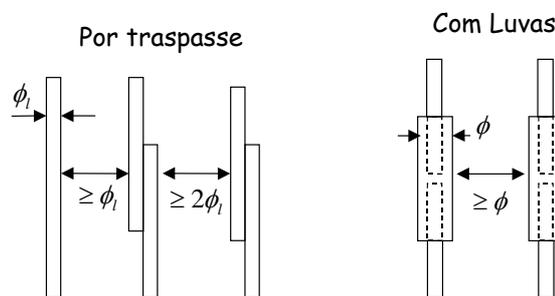


Figura 2.35- Espaçamento entre as barras longitudinais na região de traspasse.

2.8.1.2. Armadura Transversal

Tem a função de impedir a flambagem das barras longitudinais.

• **Bitola do estribo**

$$\phi_t \geq 5 mm \qquad (2.73)$$

• **Espaçamento**

Estabelece a NB-1 que em toda a extensão da peça comprimida (pilar) devem ser colocados estribos, com aço da mesma categoria daquele da armadura

longitudinal e o espaçamento entre estribos não deve ser maior do que qualquer dos valores expressos na relação (2.74).

$$s < \begin{cases} 30 \text{ cm} \\ \text{menor dimensão externa da seção da peça} \\ 21\phi_t \text{ e } 340 \cdot \phi_t^2 / \phi_l \text{ para os aços CA - 25 e CA - 32} \\ 12\phi_t \text{ e } 190 \phi_t^2 / \phi_l \text{ para os aços CA - 40, CA - 50 e CA - 60} \end{cases} \quad (2.74)$$

onde ϕ_t é o diâmetro do estribo e ϕ_l é diâmetro da armadura longitudinal.

Os dois primeiros limites correspondem a disposições meramente construtivas e os dois últimos são encontrados a partir da condição $f_{cr} = f_y$, ou seja, o espaçamento entre os estribos laterais deve permitir o desenvolvimento da tensão crítica de flambagem igual a tensão de escoamento, admitindo-se o modo de flambagem como uma meia onda entre estribos consecutivos.

- **Proteção contra a flambagem das barras longitudinais**

Os estribos poligonais garantem contra a flambagem as barras longitudinais situadas em suas quinas e as por elas abrangidas e situadas no máximo à distância de $20\phi_t$ da quina, se nesse trecho de comprimento $20\phi_t$ não houver mais de duas barras, não contando a da quina, como mostra a Figura 2.36.a.

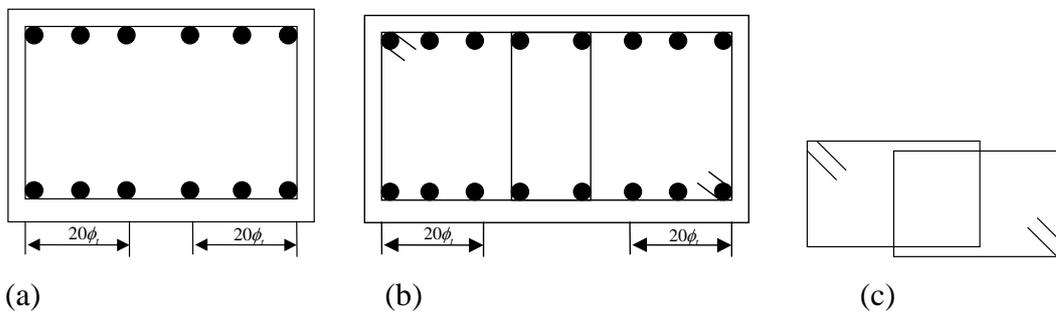


Figura 2.36- Proteção contra a flambagem das barras longitudinais.

Quando houver mais de duas barras nesse trecho ou barra fora dele, deverá haver estribos suplementares, com espaçamento e diâmetro de acordo com os itens anteriores, Figura 2.36.b e 2.36.c. Se o estribo suplementar for constituído por uma barra reta, terminada em ganchos, deverá ele atravessar a seção da peça e o seu gancho envolverá a barra longitudinal. Se houver mais de uma barra longitudinal junto à mesma extremidade do estribo, o gancho deste envolverá um estribo principal em ponto junto a uma das barras, o que deverá ser indicado no projeto de modo destacado; ele garantirá contra a flambagem uma barra e mais duas para cada lado num trecho de $20\phi_t$ onde ϕ_t é o estribo do diâmetro principal.

2.9. NBR 6118–2003

2.9.1. Armadura Longitudinal

São apresentadas as regras para o detalhamento de pilares que possuem a maior dimensão da seção transversal menor que cinco vezes a menor dimensão.

- **Taxa de armadura e diâmetro mínimos**

A taxa geométrica de armadura $\rho = A_s/A_c$ deverá respeitar os valores máximo e mínimo especificados na eq. (2.75).

$$\begin{aligned} \rho_{min} &= 0,15 \cdot \frac{N_d}{f_{yd}} \geq 0,40\% \\ \rho_{max} &= 8,0\% \end{aligned} \quad (2.75)$$

A maior armadura em pilares deve ser 8% da seção real, considerando-se inclusive a sobreposição de armadura existente em regiões de emenda.

As Bitolas mínima e máxima das barras de armadura são

$$\begin{cases} \phi_{l,min} = 10 \text{ mm} \\ \phi_{l,max} = b / 8 \end{cases} \quad (2.76)$$

onde b é a menor dimensão da seção transversal.

- **Distribuição Transversal**

As armaduras longitudinais devem ser dispostas na seção transversal de forma a garantir a adequada resistência do elemento estrutural. Em seções poligonais, deve existir pelo menos uma barra em cada vértice; em seções circulares, no mínimo seis barras distribuídas ao longo do perímetro.

O espaçamento mínimo livre entre as faces das barras longitudinais, medido no plano da seção transversal fora da região de emendas entre as barras longitudinais deverá respeitar os seguintes valores:

$$s_l \geq \begin{cases} 2 \text{ cm} \\ \phi_l \\ 1,2\phi_{max,agregado} \end{cases} \quad (2.77)$$

onde ϕ_l é o diâmetro da armadura longitudinal e $\phi_{max,agregado}$ é o diâmetro máximo do agregado. Quando estiver previsto no plano de concretagem o adensamento através de abertura lateral na face da forma, o espaçamento das armaduras deve ser suficiente para permitir a passagem do vibrador. O

espaçamento máximo entre eixos das barras, ou de centros de feixes de barras, deve ser:

$$s_{leixo} \leq \begin{cases} 2b \\ 40 \text{ cm} \end{cases} \quad (2.78)$$

onde b é a menor dimensão da seção transversal.

2.9.2. Armadura Transversal

A armadura transversal de pilares, constituída por estribos e, quando for o caso, por grampos suplementares, deve ser colocada em toda a altura do pilar, sendo obrigatória sua colocação na região de cruzamento com vigas e lajes. Essa armadura deve ser calculada para:

- a) garantir o posicionamento e impedir a flambagem das barras longitudinais;
- b) garantir a costura das emendas de barras longitudinais;
- c) resistir aos esforços de tração;
- d) confinar o concreto e obter uma peça mais resistente ou dútil.

- **Diâmetro e espaçamento entre os estribos**

O diâmetro dos estribos deve ser:

$$\phi_t \geq \begin{cases} 5mm \\ \phi_l / 4 \end{cases} \quad (2.79)$$

O espaçamento entre estribos deve obedecer à eq. (2.80).

$$s \leq \begin{cases} 20 \text{ cm} \\ b, \text{ menor dimensão da seção} \\ 24\phi_l \text{ para CA-25, } 12\phi_l \text{ para CA-50} \end{cases} \quad (2.80)$$

Os dois primeiros limites da eq. (2.80) correspondem a disposições meramente construtivas e os dois últimos são encontrados a partir da condição $f_{cr} = f_y$, ou seja, o espaçamento entre os estribos laterais deve permitir o desenvolvimento da tensão crítica de flambagem igual a tensão de escoamento.

Para as barras de aço CA-25, a partir das fórmulas da resistência dos materiais (diagrama tensão-deformação linear), tem-se:

$$f_{cr} = \frac{P_{cr}}{A_s} = \frac{E \cdot I \cdot \pi^2}{s^2 \cdot A_s} = \frac{E \cdot \pi^2}{\lambda_{cr}^2} \quad (2.81)$$

onde $\lambda_{cr}^2 = s^2/r^2$, s é o espaçamento entre estribos e r é o raio de giração dado por

$$r = \sqrt{\frac{I}{A_s}} \quad (2.82)$$

O valor da tensão crítica fica,

$$f_{cr} = \frac{250}{1,15} = 217,4 \text{ N/mm}^2 \quad (2.83)$$

Dessa forma encontra-se os seguintes valores para o espaçamento entre estribos, cujos valores médios estão prescritos em norma:

$$\lambda_{cr} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 210000}{217,40}} \Rightarrow \lambda_{cr} \cdot r = s \Rightarrow s = 97,64 \cdot \frac{\phi_l}{4} = 24,41\phi_l \quad (2.84)$$

Tendo a NBR 6118/2003 englobado o valor $24\phi_l$ para o aço CA-25. No caso do aço CA 50, a tensão crítica de flambagem é dada pela fórmula de Tetmajer.

$$f_{cr} = 480(1 - 0,0035\lambda_{cr}) \quad (2.85)$$

Fazendo-se $f_{cr} = 400 \text{ N/mm}^2$ chega-se a

$$\lambda_{cr} \cong 47,6 \Rightarrow s = \lambda_{cr} \cdot r = 47,6 \frac{\phi_l}{4} = 12\phi_l \quad (2.86)$$

Permite-se adotar $\phi_t < \phi_l/4$ desde que o espaçamento respeite também a limitação

$$90000 \left(\frac{\phi_t^2}{\phi_l} \right) \frac{1}{f_{yk}} \quad (2.87)$$

onde ϕ_l e ϕ_t são respectivamente os diâmetros da armadura longitudinal e dos estribos; f_{yk} é a tensão de escoamento da armadura longitudinal, em MPa. Esses critérios supõem que ambas as armaduras são constituídas pelo mesmo tipo de aço.

A eq. (2.87) visa garantir no caso de adoção de $\phi_t < \phi_l/4$, a existência de uma percentagem volumétrica de estribos idêntica aquela que teríamos com $\phi_t = \phi_l/4$ e espaçamentos $24\phi_l$ (CA 25) e $12\phi_l$ (CA 50).

Considerando-se o espaçamento entre estribos $s = 24\phi_l$ (CA 25) tem-se uma percentagem ρ_v de volume de estribos (comprimento $2p$) por volume de pilar igual a

$$\rho_v = \frac{\frac{\pi}{4} \left(\frac{\phi_l}{4} \right)^2 \cdot 2p}{24\phi_l \cdot A_c} = \frac{\pi\phi_l \cdot 2p}{1536 A_c} \quad (2.88)$$

Caso se adote $\phi_t < \phi_l/4$, para a manutenção do mesmo valor de ρ_v , deve-se ter um espaçamento s' entre estribos definido por

$$\frac{\pi\phi_t^2 \cdot 2p}{4s' \cdot A_c} = \frac{\pi\phi_l \cdot 2p}{1536A_c}, \quad s' = 384 \frac{\phi_t^2}{\phi_l} \quad (2.89)$$

Por idêntico raciocínio, chegaríamos ao limite $192 \frac{\phi_t^2}{\phi_l}$ para o aço CA 50.

Nota-se que o aparecimento do valor 384 na eq. (2.89) para o aço CA 25 corresponde ao termo $90000/f_{yk}$ na eq. (2.87), ou seja,

$$90000/250 \approx 360 \text{ para CA 25 e } 90000/500 \approx 180 \text{ para CA 50} \quad (2.90)$$

Com a finalidade de proteger as barras da armadura longitudinal contra a flambagem é estabelecido que os estribos poligonais garantem contra a flambagem local as barras situadas em seus cantos e as por ele abrangidas situadas no máximo à distância de $20\phi_t$ do canto, onde ϕ_t é o diâmetro do estribo, se nesse trecho não houver mais de duas barras, excetuando-se a de canto, Figura 2.37. Quando houver mais de duas barras nesse trecho ou barra fora dele, deve haver estribos suplementares.

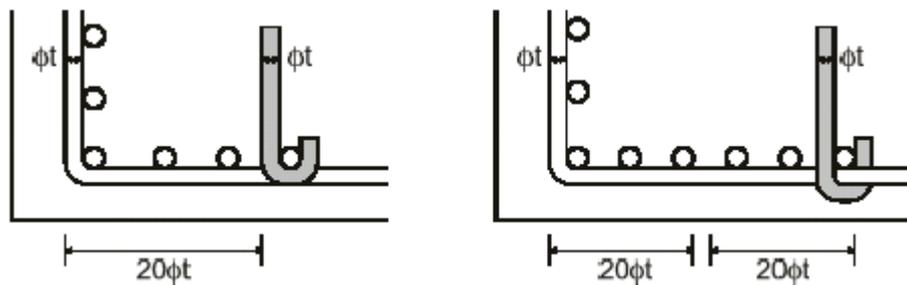


Figura 2.37- Proteção contra a flambagem da armadura longitudinal.

Se o estribo suplementar for constituído por uma barra reta, terminada em ganchos, ele deve atravessar a seção da peça e os seus ganchos devem envolver a barra longitudinal. Se houver mais de uma barra longitudinal a ser protegida junto à mesma extremidade do estribo suplementar, seu gancho deve envolver um estribo principal em ponto junto a uma das barras, o que deve ser indicado no projeto de modo bem destacado (ver Figura 2.37). No caso de estribos curvilíneos cuja concavidade esteja voltada para o interior do concreto, não há necessidade de estribos suplementares. Se as seções das barras longitudinais se situarem em uma curva de concavidade voltada para fora do concreto, cada barra longitudinal deve

ser ancorada pelo gancho de um estribo reto ou pelo canto de um estribo poligonal.

2.10.

CEB 95

2.10.1.

Armadura Longitudinal

Na ausência de estudos mais específicos, a área da armadura longitudinal obedece à eq. (2.91).

$$A_s \leq 0,04A_c \quad (2.91)$$

onde A_c é a área da seção transversal geométrica da peça, com exceção das regiões de traspasse onde a área de armadura longitudinal é

$$A_s \leq 0,08A_c \quad (2.92)$$

O diâmetro da armadura longitudinal não deve ser menor que 12 mm .

2.10.2.

Armadura Transversal

O diâmetro dos estribos deve ser:

$$\phi_t \geq \begin{cases} 5 \text{ mm} \\ 1/4 \phi_l \end{cases} \quad (2.93)$$

onde ϕ_l é o diâmetro da armadura longitudinal.

Caso um estudo mais específico não seja levado em consideração, os seguintes valores devem ser usados para o espaçamento entre os estribos:

$$s \leq \begin{cases} 12\phi_t \\ \min\{b, 300 \text{ mm}\} \end{cases} \quad (2.94)$$

onde b é a menor dimensão lateral do pilar.

2.11.**EUROCODE 2 – 2001****2.11.1.****Armadura Longitudinal**

Com relação ao detalhamento de pilares, o EUROCODE 2 prevê algumas regras aplicáveis aos pilares que possuem a maior dimensão h menor que 4 vezes a menor dimensão b . Os objetivos destas regras são:

- Evitar o colapso local (por exemplo, flambagem local da armadura longitudinal) antes da obtenção da carga de ruptura do pilar como um todo;
- Garantir a transferência de carga dos membros adjacentes ao pilar sem que haja colapso local do concreto;
- Admitir adequado lançamento e adequada compactação do concreto fresco.

As regras são as seguintes:

- O diâmetro mínimo das barras longitudinais ϕ_l é dado da seguinte forma:

$$\phi_l \geq 12 \text{ mm} \quad (2.95)$$

A armadura longitudinal mínima deverá satisfazer a condição:

$$A_{s,min} = \frac{0,15 \cdot N_{sd}}{f_{yd}} \geq 0,003 \cdot A_c \quad (2.96)$$

onde A_c é a área da seção transversal geométrica da peça.

Inclusive em emendas por traspasse, esta mesma armadura não deverá exceder o limite superior de $0,08 \cdot A_c$.

O espaçamento mínimo entre as barras da armadura longitudinal é dado pela eq. (2.97).

$$s_l \geq \begin{cases} \phi_l \\ 2,0 \text{ cm} \\ d_g + 5 \end{cases} \quad (2.97)$$

onde o último requisito referente ao diâmetro máximo do agregado e somente para $d_g > 32 \text{ mm}$.

2.11.2.

Armadura Transversal

O diâmetro mínimo dos estribos, ϕ_t , é dado por:

$$\phi_t \geq \begin{cases} 6 \text{ mm} (5 \text{ mm}) \\ \phi_l / 4 \end{cases} \quad (2.98)$$

O espaçamento máximo entre estribos, S_w , fora das regiões de descontinuidade é regido pela seguinte expressão:

$$s_w \leq \begin{cases} 12\phi_t \\ b \\ 30 \text{ cm} \end{cases} \quad (2.99)$$

O espaçamento máximo da armadura transversal, dentro e fora das regiões de descontinuidade está mostrado na Figura 2.38 e o máximo de cinco barras próximas a cada canto podem estar protegidas contra a flambagem como mostra a Figura 2.39.

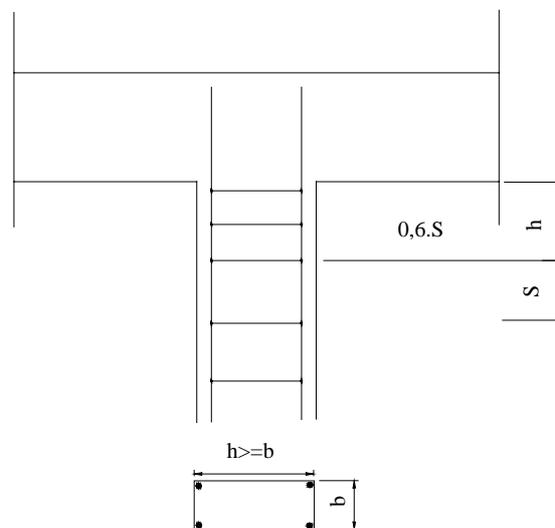


Figura 2.38 – Espaçamento reduzido da armadura transversal localizada acima abaixo de uma viga ou laje.

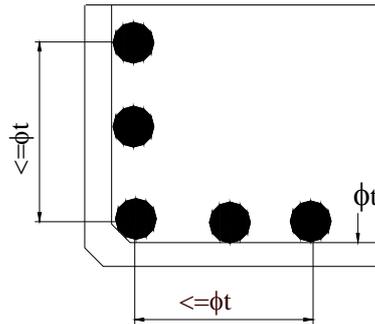


Figura 2.39- Máximo de cinco barras próximas a cada canto podem estar protegidas contra a flambagem.

2.12.

ACI 318-2002

2.12.1.

Armadura Longitudinal

A taxa geométrica da armadura obedece a seguinte expressão:

$$1\% \leq \frac{A_{st}}{A_g} \leq 8\% \tag{2.100}$$

onde A_{st} é a área de aço da armadura longitudinal e A_g é a área bruta da seção transversal. A armadura mínima, no caso de seção transversal existente maior do que a necessária, poderá ser baseada numa área efetiva $A_{g,eff} \geq \frac{1}{2} A_{g,exist}$.

O espaçamento mínimo entre as barras será:

$$s_{l,min} = \begin{cases} 1,5\phi_l \\ 1,5'' (\approx 3,8 \text{ cm}) \end{cases} \tag{2.101}$$

Esta limitação é válida inclusive nas regiões de emenda

2.12.2.

Armadura Transversal

- A bitola mínima deverá obedecer ao quadro apresentado a seguir:

ϕ_l	$\phi_{l,min}$
$\leq 5/4'' (\approx 32 \text{ mm})$	$3/8'' (\approx 10 \text{ mm})$
$> 5/4''$	$1/2'' (\approx 12,5 \text{ mm})$

- O espaçamento máximo entre estribos deverá ser:

$$s_w \leq \begin{cases} 16\phi_l \\ 48\phi_t \\ b \end{cases} \quad (2.102)$$

Para evitar a flambagem local das barras longitudinais devem ser respeitados os limites mostrados na Figura 2.40.

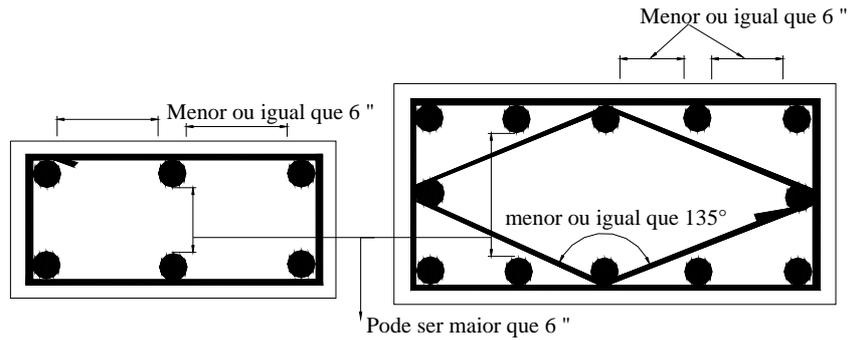


Figura 2.40- Segurança com relação a flambagem local das barras longitudinais.

Consideram-se protegidas as barras localizadas em cantos de estribos fechados desde que o ângulo interno seja inferior a 135° . Também está protegida a barra (somente uma) que dista não mais do que $6''$ ($\approx 15\text{ cm}$) em relação às barras protegidas adjacentes.