

PONTIFÍCIA UNIVERSIDADE CATÓLICA
DO RIO DE JANEIRO



Saete Souza de Oliveira Buffoni

**Estudo da Flambagem de Armaduras Longitudinais em
Pilares de Concreto Armado**

Tese de Doutorado

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia Civil da PUC-Rio como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Engenharia Civil. Área de concentração: Estruturas.

Orientador: Raul Rosas e Silva

Rio de Janeiro, Abril de 2004



Salete Souza de Oliveira Buffoni

**Estudo da flambagem de armaduras longitudinais
em pilares de concreto armado**

Tese apresentada como requisito parcial para obtenção do título de Doutor pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil do Departamento de Engenharia Civil do Centro Técnico Científico da PUC-Rio. Aprovada pela Comissão Examinadora abaixo assinada.

Prof. Raul Rosas e Silva

Presidente/Orientador

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

Profa. Marta de Souza Lima Velasco

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

Prof. Paulo Batista Gonçalves

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

Prof. Giuseppe Barbosa Guimarães

Departamento de Engenharia Civil - PUC-Rio

Prof. Guilherme Sales Soares de Azevedo Melo

Universidade de Brasília

Profa. Claudia Ribeiro Eboli

Universidade Federal do Rio de Janeiro

Profa. Maria Elisabeth da Nóbrega Tavares

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Prof. José Eugênio Leal

Coordenador Setorial

do Centro Técnico Científico - PUC-Rio

Rio de Janeiro, 02 de abril de 2004

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, da autora e do orientador.

Salete Souza de Oliveira Buffoni

Graduou-se em Engenharia Civil pela Universidade Federal do Pará. Obteve o grau de Mestre em Engenharia Civil na PUC-Rio. Foi Professora colaboradora da UENF, ministrando as disciplinas Estruturas de Madeira, Análise de Estruturas e Engenharia Ambiental. Foi Professora Substituta da EEIMVR-UFF, ministrando as disciplinas Cálculo I, Cálculo Vetorial Aplicado e Métodos Numéricos. Foi Professora Adjunta do ITIC-USU e FIAA, ministrando as disciplinas Algoritmos, Estruturas de Dados, Computação Gráfica, Multimídia e Sistemas Distribuídos. Participou de 18 eventos no Brasil. Atua na área de Matemática Aplicada e Engenharia Civil. Em suas atividades profissionais interagiu com sete colaboradores em co-autorias de trabalhos científicos.

Ficha Catalográfica

Buffoni, Salete Souza de Oliveira

Estudo da flambagem de armaduras longitudinais em pilares de concreto armado / Salete Souza de Oliveira Buffoni ; orientador: Raul Rosas e Silva. Rio de Janeiro, PUC-Rio, Departamento de Engenharia Civil, 2004.

v., 249 f.: il. ; 29,7 cm

1. Tese (doutorado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil.

Inclui referências bibliográficas.

1. Engenharia Civil – Teses. 2. Flambagem. 3. Armaduras longitudinais e transversais. 4. Pilares. 5. Concreto armado. I. Silva, Raul Rosas e. II. Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Departamento de Engenharia Civil. III. Título.

CDD:624

Ao único Deus, nosso Salvador, mediante Jesus Cristo,
Senhor nosso, glória, majestade, império e soberania,
antes de todas as eras, e agora, e por todos os séculos.

Ao meu querido esposo Humberto Buffoni
com carinho e estima.

A uma guerreira chamada Maria de Jesus, minha mãe,
em agradecimento por tudo o que sou hoje e por
sempre estar ao meu lado em todos os anos
da minha vida e aos amados irmãos Suzy Souza,
Cíntia de Jesus e Daniel Berg.

A minha sogra Dilia Buffoni (In Memoriam)

Agradecimentos

Hoje tenho a oportunidade de expressar gratidão a algumas pessoas e instituições que ajudaram a tornar este doutorado uma realidade. Sou muito grata a todos aqui relacionados; em menor ou maior grau todos foram fundamentais para que esse trabalho fosse realizado.

Ao conspícuo Professor Raul Rosas e Silva cuja orientação permeou cada etapa da pesquisa desde a definição do tema até a interpretação dos resultados. O Professor Raul é um exemplo de competência e seriedade no que diz respeito a sua profissão e como ser humano é um grande amigo, pois mesmo nos momentos mais difíceis, o Professor Raul sempre me deu total apoio para que eu concluísse o presente trabalho.

Aos Professores do Departamento de Engenharia Civil da PUC-Rio, especialmente a querida Professora Marta Velasco que sempre me deu total apoio e incentivo desde o início da minha Pós-Graduação até a conclusão deste trabalho, ao Professor Paulo Batista pelas sugestões interessantes durante o desenvolvimento da tese, ao Professor Giuseppe Guimarães que nos ajudaram no início das nossas pesquisas e ao Professor Pedricto Rocha que foi o primeiro a me indicar para ministrar uma disciplina na UENF, iniciando assim minhas atividades como docente.

A banca examinadora.

A Ana Roxo, Fátima, Cristiano e Lenilson pelo apoio em questões burocráticas dentro da PUC-Rio.

Aos Professores do Departamento de Engenharia Civil da UFPa em especial aos Professores Almir de Morisson Faria e José Perilo da Rosa Neto que foram os grandes responsáveis pelo meu desejo de ingressar na carreira acadêmica.

Aos bibliotecários da PUC-Rio, além de vocês, só a Internet, mas depois que a gente acha lá o que precisa, vocês entram em ação para materializar nossos

pedidos mais absurdos (Dá para conseguir uma cópia da tese dessa pesquisadora da Suécia, que trata exatamente de Pilares de Concreto?).

Ao CNPq e a CAPES pelos auxílios concedidos.

Ao meu amado esposo Humberto Buffoni pela paciência e compreensão durante o tempo de desenvolvimento dos trabalhos, pela colaboração na área de informática para a finalização da tese e pelo apoio dedicado.

A Minha mãe Maria de Jesus, que mesmo longe pude sentir a sua presença sempre me incentivando a lutar pelos meus ideais.

Aos meus queridos irmãos Suzy, Cíntia e Daniel, pelo apoio durante todos esses anos, a minha sogra Dilia Buffoni e a meus tios e primos, em especial ao tio Kim Kolstad, tia Luzia Santos e Prima Zezé Kolstad que me ajudaram financeiramente nos estudos até o término da graduação.

Aos grandes e ilustres amigos Aellington Freire, Marcelo Goulart, Zenon Guzman, Suzana Ávila e Sylvia Almeida que inúmeras vezes colaboraram comigo através dos conhecimentos compartilhados na área de Instabilidade Estrutural, Concreto Armado e Matemática.

A todos os meus amigos paraenses pelo apoio e intercâmbio de conhecimentos aqui no Rio em especial ao Carlos Vitor e Janaina Carvalho, Antonio e Marcia Nascimento, Ricardo Alexandre, Antonio Miranda e Carla.

Aos amigos Quenia Baptista, Ana Turetta, Luiz Otávio, Denise, Fábio Marangone e Walter pelo apoio e carinho em todos os momentos.

Agradeço a todos que foram e são meus alunos na FIAA, UENF e UFF que, por meio das exigências e anseios, cobraram um aprofundamento maior no meu universo de conhecimentos, especialmente aos alunos Antonio, Álvaro, Patrícia, Vanessa, Sandro, Carla, Raphael, Geice e Fred.

Finalmente a Deus, pois nas suas mãos estão as profundezas da terra e todo o conhecimento do universo. Cabe a Ele decidir a quem mostrará um infinitésimo do Seu conhecimento e dos Seus pensamentos.

Resumo

Buffoni, Salete Souza de Oliveira de; Silva, Raul Rosas e. **Estudo da Flambagem de Armaduras Longitudinais em Pilares de Concreto Armado**. Rio de Janeiro, 2004. 249p. Tese de Doutorado – Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

A flambagem das armaduras longitudinais em pilares de concreto armado pode ocorrer na região entre dois estribos consecutivos, ou pode envolver um certo número de estribos. As normas de projeto existentes não fornecem uma metodologia apropriada para o dimensionamento dos estribos em diferentes situações. O presente trabalho tem por objetivo desenvolver uma formulação que permita analisar a flambagem das armaduras longitudinais em pilares de concreto armado submetidos a carregamento axial levando em conta o espaçamento entre os estribos, o diâmetro e arranjo dos estribos na seção transversal e o diâmetro das armaduras longitudinais. Para este propósito um método analítico para a avaliação da flambagem da armadura longitudinal é proposto, considerando-se as barras longitudinais restringidas pela rigidez axial ou à flexão dos estribos. Admite-se que a armadura longitudinal funciona como uma coluna esbelta. Consideram-se duas formas de modelagem da atuação dos estribos: como apoios elásticos discretos e como base elástica contínua. O presente trabalho trata a coluna com um ou mais modos de deformação, incluindo certas não-linearidades. São fornecidos cargas críticas e caminhos pós-críticos para tais casos. Como resultado deste estudo, apresenta-se uma proposta para dimensionamento racional dos estribos que permite estudar diferentes alternativas em um ábaco de utilização simples para projeto. Apresentam-se comparações com resultados experimentais da literatura em pilares de concreto armado. Isto permite uma avaliação crítica dos desenvolvimentos teóricos realizados e da forma proposta de dimensionamento racional dos estribos.

Palavras-chave

Flambagem; armaduras longitudinais e transversais; pilares; concreto armado.

Abstract

Buffoni, Salete Souza de Oliveira, Silva, Raul Rosas e (Advisor). **Buckling Analysis of Longitudinal Reinforcement in Concrete Columns**. Rio de Janeiro, 2004. 249p. DSc. Thesis – Department of Civil Engineering, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.

Buckling of longitudinal reinforcement in reinforced concrete columns may occur in the region between two consecutive ties, or may involve a number of ties. The existing design code specifications do not provide an appropriate methodology for the design of the transversal reinforcement in different situations. The main objective of the present work is to develop a formulation to allow to analyze the buckling of longitudinal bars in reinforced concrete columns taking into account the tie spacing, the diameter and arrangement of the ties in the cross section and the longitudinal bar diameter. For this purpose an analytical method for the evaluation of the buckling load of longitudinal bars is described, as a function of the constraint imposed by the axial or flexural stiffness of the stirrups. The longitudinal bar is considered as a column deforming according to thin beam theory. The tie action is described either by a set discrete elastic supports or by a continuous elastic foundation. The theoretical analysis considers the column with one or more deformation modes, with some degree of nonlinearity, including the analysis of post-critical equilibrium paths. As a result of this study, rational criteria for spacing and sizing of transversal reinforcement are derived, allowing to study different alternatives in an abacus of simple use for design. Several comparisons with the results obtained experimentally by other authors in reinforced concrete columns are presented, allowing for an evaluation of the validity of the theoretical developments and the rational design methodology proposed herein.

Keywords

Buckling; longitudinal and transverse reinforcement; reinforced concrete columns, columns; reinforced concrete.

Sumário

| | |
|---|----|
| Lista de figuras | 13 |
| Lista de Tabelas | 21 |
| Lista de Símbolos | 23 |
| 1 Introdução | 28 |
| 1.1. Considerações Gerais | 28 |
| 1.2. Objetivo e Descrição do Trabalho | 34 |
| 2 Revisão Bibliográfica | 36 |
| 2.1. Introdução | 36 |
| 2.2. Pesquisa de Bresler e Gilbert (1961) | 36 |
| 2.2.1. Espaçamento entre Estribos | 37 |
| 2.2.2. Diâmetro dos Estribos | 39 |
| 2.2.3. Estudo Experimental | 43 |
| 2.3. Pesquisa de Pappas et al. (1988) | 45 |
| 2.3.1. Procedimento Analítico | 45 |
| 2.3.1.1. Relação entre a Carga Crítica (β) e o Parâmetro de Rigidez dos Estribos (γ) | 49 |
| 2.3.1.2. Flambagem Ocorrendo com Comprimento Não-Múltiplo do Espaçamento entre Estribos | 54 |
| 2.3.2. Comparação com Resultados Experimentais | 58 |
| 2.4. Pesquisa de Mau (1990) | 62 |
| 2.4.1. Curvas Carga vs. Deflexão | 63 |
| 2.5. Pesquisa de Pantazopoulou (1998) | 65 |
| 2.5.1. Equação de Equilíbrio da Armadura | 65 |
| 2.5.2. Efeito da Rigidez sobre o Comprimento Crítico | 67 |
| 2.5.3. Relação entre Eficiência dos Estribos, deformabilidade do Núcleo do Concreto e Flambagem da Armadura | 69 |

| | |
|--|-----|
| 2.5.4. Cálculo do Espaçamento entre os Estribos Utilizando o Modelo proposto por Pantazopoulou (1998) | 71 |
| 2.6. Ensaios Realizados em Pilares de Concreto de Alta Resistência por Queiroga & Giongo (2000) | 74 |
| 2.7. Comentários sobre os trabalhos de Bresler & Gilbert (1961), Papia <i>et al.</i> (1988), Mau (1990) e Pantazopoulou (1998) | 77 |
| 2.8. Prescrições Normativas | 77 |
| 2.8.1. NBR 6118/1978 | 78 |
| 2.8.1.1. Armadura Longitudinal | 78 |
| 2.8.1.2. Armadura Transversal | 79 |
| 2.9. NBR 6118-2003 | 81 |
| 2.9.1. Armadura Longitudinal | 81 |
| 2.9.2. Armadura Transversal | 82 |
| 2.10. CEB 95 | 85 |
| 2.10.1. Armadura Longitudinal | 85 |
| 2.10.2. Armadura Transversal | 85 |
| 2.11. EUROCODE 2 -2001 | 86 |
| 2.11.1. Armadura Longitudinal | 86 |
| 2.11.2. Armadura Transversal | 87 |
| 2.12. ACI 318 -2002 | 88 |
| 2.12.1. Armadura Longitudinal | 88 |
| 2.12.2. Armadura Transversal | 88 |
| 3 Formulação | 90 |
| 3.1. Introdução | 90 |
| 3.2. Modelo Adotado | 90 |
| 3.3. Energia Interna de Deformação e Energia Potencial | 91 |
| 3.4. Variáveis Adimensionais | 95 |
| 3.5. Campo de Deslocamentos | 96 |
| 3.6. Integração ao Longo da Barra para Obtenção das Matrizes de Rigidez Elástica (K_i) e Rigidez Geométrica (K_g) | 97 |
| 3.6.1. Solução do Problema de Autovalores | 98 |
| 3.6.1.1. Apoios Discretos | 98 |
| 3.6.1.2. Coluna sobre Base Elástica | 100 |

| | |
|--|-----|
| 3.6.2. Equações de Equilíbrio Não-Lineares | 101 |
| 3.6.2.1. Apoios Discretos | 101 |
| 3.6.2.2. Coluna sobre Base Elástica | 103 |
| 3.7. Efeito da Imperfeição Geométrica | 105 |
| 3.7.1. Matrizes de Rigidez Elástica (K_f) e Rigidez Geométrica (K_g) para a Coluna com Imperfeição Geométrica Inicial | 108 |
| 3.8. Consideração das Emendas das Barras da Armadura | 110 |
| 3.9. Cálculo do Parâmetro Adimensional de Rigidez, η | 112 |
| 3.9.1. Cálculo da Rigidez dos Estribos, K | 112 |
| 3.10. Consideração Conjunta das Armaduras Longitudinais e Transversais como Placa Ortotrópica | 114 |
| 3.10.1. Introdução | 114 |
| 3.10.2. Placas Ortotrópicas | 114 |
| 3.10.3. Flexão Pura de Placas Ortotrópicas | 114 |
| 3.10.4. Energia de Flexão de Placas Ortotrópicas | 116 |
| 3.10.5. Flexão de Placas Ortotrópicas por Carga Lateral Distribuída | 117 |
| 3.10.6. Energia Potencial das Cargas Externas N_x , N_y e N_{xy} | 119 |
| 3.10.7. Campo de Deslocamentos para Placas Retangulares com Arestas Bi-Apoiadas | 121 |
| 3.10.7.1. Placa Ortotrópica Retangular Bi-Apoiada com Carregamento ao Longo dos Lados $x=0$ e $x= a$ | 121 |
| 3.10.7.2. Placa Ortotrópica Retangular Bi-Apoiada com Carregamento ao Longo dos Lados $y=0$ e $y= a$ | 123 |
| 4 Influência dos Apoios Laterais no Caminho Pós-Crítico da Coluna | 126 |
| 4.1. Introdução | 126 |
| 4.2. Apoios Discretos | 126 |
| 4.2.1. Caso Linear | 126 |
| 4.2.2. Caso Não-Linear | 130 |
| 4.2.2.1 Caminho Pós-Crítico da Coluna | 130 |
| 4.3. Coluna sobre Base Elástica | 135 |
| 4.3.1. Caso Linear | 135 |
| 4.3.2. Caso Não-Linear | 137 |

| | |
|---|-----|
| 4.4. Curvas Γ vs. η para o Cálculo do Espaçamento e Diâmetro dos Estribos | 142 |
| 5 Cálculo do Diâmetro e Espaçamento entre Estribos Utilizando a Formulação Proposta | 144 |
| 5.1. Introdução | 144 |
| 5.2. Curvas Γ vs. η Modificadas | 144 |
| 5.3. Considerações sobre a Carga de Flambagem para Dimensionamento | 145 |
| 5.4. Sequência de Projeto com a Utilização das Curvas Γ vs. η | 147 |
| 5.5. Cálculo do Diâmetro e Espaçamento entre Estribos para os Pilares Descritos no Trabalho de Queiroga & Giongo (2000) | 147 |
| 5.6. Cálculo do Diâmetro e Espaçamento entre Estribos para os Pilares Descritos no Trabalho de Sheikh & Uzumeri (1980) | 152 |
| 5.7. Aplicações a Seções de Grandes Dimensões | 155 |
| 5.7.1. Pilar P1 | 155 |
| 5.7.2. Pilar P2 | 167 |
| 5.8. Considerações sobre o Conjunto das Armaduras Longitudinais e Transversais como Placa Ortotrópica | 172 |
| 6 Conclusões e Sugestões | 176 |
| 7 Referências Bibliográficas | 180 |
| 8 Apêndice | 187 |

Lista de Figuras

| | |
|--|----|
| Figura 1.1 - Deformação axial padrão registrada no concreto (LVDT) e armadura longitudinal (Strain Gauge) em ensaios de pilares circulares (Sheikh & Toklucu,1993) | 31 |
| Figura 1.2- Condições na flambagem durante os ensaios e a armadura longitudinal no elemento de concreto armado (Pantazopoulou, 1998) | 33 |
| Figura 2.1- Idealização do Mecanismo de flambagem da armadura longitudinal por Bresler & Gilbert (1961) | 37 |
| Figura 2.2- Formas idealizadas de flambagem.(a) Primeiro modo de flambagem. (b) Segundo modo de flambagem | 40 |
| Figura 2.3- Definição de m para várias geometrias da seção transversal dos estribos por Bresler & Gilbert (1961) | 42 |
| Figura 2.4- Armadura longitudinal restringida pela rigidez a flexão do estribo | 42 |
| Figura 2.5 - Detalhes dos corpos de prova ensaiados por Bresler & Gilbert (1961) | 43 |
| Figura 2.6 - Curva carga x deformação. (Bresler & Gilbert,1961) | 44 |
| Figura 2.7 - Detalhe da flambagem das barras da armadura longitudinal em ensaio realizado por Bresler & Gilbert (1961) | 44 |
| Figura 2.8- Modelo para análise da armadura longitudinal apresentado por Papia <i>et al.</i> (1988) | 45 |
| Figura 2.9- Modelo simplificado para análise da armadura longitudinal | 47 |
| Figura 2.10- Coeficientes do determinante D | 48 |
| Figura 2.11- Modelo para representar a armadura longitudinal: $L/S=6$ | 50 |

| | |
|--|----|
| Figura 2.12- Modelo para representar a armadura longitudinal: $L/S=5$ | 51 |
| Figura 2.13- Modelo para representar a armadura longitudinal: $L/S=4$ | 52 |
| Figura 2.14- Modelo para representar a armadura longitudinal: $L/S=3$ | 53 |
| Figura 2.15- Modelo para representar a armadura longitudinal: $L/S=2$ | 54 |
| Figura 2.16- Configuração intermediária para o modelo de flambagem: $L/s = (2\mu + 1)$ | 56 |
| Figura 2.17 - Curva $c_c - \gamma$ | 57 |
| Figura 2.18 - Curva $c_c - \gamma$ | 58 |
| Figura 2.19 - Detalhe dos corpos de prova do trabalho de Sheikh & Uzumeri (1980) | 59 |
| Figura 2.20 - Detalhe dos corpos de prova do trabalho de Scott <i>et al.</i> (1982) | 60 |
| Figura 2.21 - Aparência dos corpos de prova após os ensaios. (Sheikh & Usumeri, 1980) | 60 |
| Figura 2.22 - Modelo proposto por Mau (1990) | 62 |
| Figura 2.23 - Diagramas carga vs. deflexão por Mau (1990) | 63 |
| Figura 2.24 - Equilíbrio do segmento da barra flambado | 66 |
| Figura 2.25 - Curva tensão deformação para o concreto comprimido proposto por Mander <i>et al.</i> (1984, 1988a, 1988b) | 69 |
| Figura 2.26 - Tensões confinantes calculadas para diferentes arranjos de armadura transversal | 70 |
| Figura 2.27- Geometria da seção transversal do pilar (Pantazopoulou, 1998) | 72 |
| Figura 2.28- Modelo constitutivo tensão vs. deformação à compressão para o aço | 72 |
| Figura 2.29- Resultados baseados no modelo proposto por Pantazopoulou (1998): Deformação do concreto no pico das tensões x Parâmetro de espaçamento crítico entre estribos | 73 |

| | |
|--|-----|
| Figura 2.30- Resultados baseados no modelo proposto por Pantazopoulou (1998): Deformação do concreto no pico das tensões x Confinamento efetivo - $k_e \rho_s f_{yt} / f'_c$ | 73 |
| Figura 2.31 - Modelo proposto por Razvi & Saatcioglu (1999) para diagrama tensão vs. Deformação | 75 |
| Figura 2.32 - Diagramas tensão vs. deformação para pilares de seção quadrada ensaiados por Queiroga (1999) e diagramas teóricos proposto por Razvi & Saatcioglu (1999) | 76 |
| Figura 2.33 - Diagramas tensão vs. deformação para pilares de seção retangular ensaiados por Queiroga (1999) e diagramas teóricos proposto por Razvi & Saatcioglu (1999) | 76 |
| Figura 2.34- Espaçamento entre as barras longitudinais | 79 |
| Figura 2.35- Espaçamento entre as barras longitudinais na região de traspasse | 79 |
| Figura 2.36- Proteção contra a flambagem das barras longitudinais | 80 |
| Figura 2.37- Proteção contra a flambagem da armadura longitudinal | 84 |
| Figura 2.38 – Espaçamento reduzido da armadura transversal localizada acima abaixo de uma viga ou laje | 87 |
| Figura 2.39- Máximo de 5 barras próximas a cada canto podem estar protegidas contra a flambagem | 88 |
| Figura 2.40- Segurança com relação à flambagem local das barras longitudinais | 89 |
| Figura 3.1- Modelo de análise para a armadura longitudinal e transversal | 91 |
| Figura 3.2- Coluna Deformada | 92 |
| Figura 3.3- Elemento infinitesimal indeformado | 93 |
| Figura 3.4- Seção transversal do pilar mostrando a distorção da seção no nível do estribo | 106 |
| Figura 3.5- Coluna com imperfeição geométrica | 107 |
| Figura 3.6- Tipos usuais de detalhamento de armadura para pilares de edifício. Süssekind (1984) | 110 |

| | |
|---|-----|
| Figura 3.7- Armação típica de pilares | 111 |
| Figura 3.8- Modelo para consideração das emendas das barras da armadura | 111 |
| Figura 3.9 - Arranjos da armadura na seção transversal | 113 |
| Figura 3.10- Modelos simplificados para cálculo da rigidez K | 113 |
| Figura 3.11 - Flexão pura de placas | 115 |
| Figura 3.12- Consideração dos momentos de torção | 117 |
| Figura 3.13- Ângulo de torção | 118 |
| Figura 3.14- Elemento linear | 120 |
| Figura 3.15- Placa submetida a carregamento ao longo dos lados $x=0$ e $x=a$ | 121 |
| Figura 3.16- Variação do parâmetro k em relação à taxa a/b , para o cálculo da carga crítica da placa isotrópica. (Timoshenko & Gere, 1961). | 123 |
| Figura 3.17- Consideração das armaduras longitudinais e transversais como uma grelha | 124 |
| Figura 4.1- Parâmetro de carga vs. Parâmetro de rigidez dos estribos para o caso linear com um grau de liberdade | 127 |
| Figura 4.2- Parâmetro de carga vs. Parâmetro de rigidez dos estribos para o caso linear com três graus de liberdade sem imperfeição geométrica inicial Considerando-se apenas deformações simétricas. | 128 |
| Figura 4.3- Parâmetro de carga vs. Parâmetro de rigidez dos estribos para o caso linear com três graus de liberdade e um modo de deformação geral | 129 |
| Figura 4.4 - Caminho pós-crítico da coluna com um grau de liberdade sem imperfeição inicial e um apoio lateral, $L=2S$, para um modo de deformação simétrico | 131 |
| Figura 4.5 - Caminho pós-crítico da coluna com um grau de liberdade sem imperfeição inicial e dois apoios laterais, $L=3S$, para um modo de deformação simétrico | 131 |

| | |
|---|-----|
| Figura 4.6 - Caminho pós-crítico da coluna com um grau de liberdade sem imperfeição inicial e três apoios laterais, $L=4S$, para um modo de deformação simétrico | 131 |
| Figura 4.7 - Caminho pós-crítico da coluna com um grau de liberdade sem imperfeição inicial e quatro apoios laterais, $L=5S$, para um modo de deformação simétrico | 132 |
| Figura 4.8 - Caminho pós-crítico da coluna com um grau de liberdade sem imperfeição inicial e cinco apoios laterais, $L=6S$, para um modo de deformação simétrico | 132 |
| Figura 4.9 - Caminho pós-crítico da coluna com um grau de liberdade sem imperfeição inicial e um apoio lateral, $L=2S$, para um modo de deformação geral | 133 |
| Figura 4.10 - Caminho pós-crítico da coluna com um grau de liberdade sem imperfeição inicial e dois apoios laterais, $L=3S$, para um modo de deformação geral | 133 |
| Figura 4.11 - Caminho pós-crítico da coluna com um grau de liberdade sem imperfeição inicial e três apoios laterais, $L=4S$, para um modo de deformação geral | 134 |
| Figura 4.12 - Caminho pós-crítico da coluna com um grau de liberdade sem imperfeição inicial e quatro apoios laterais, $L=5S$, para um modo de deformação geral | 134 |
| Figura 4.13 - Caminho pós-crítico da coluna com um grau de liberdade sem imperfeição inicial e cinco apoios laterais, $L=6S$, para um modo de deformação geral | 134 |
| Figura 4.14- Parâmetro de carga vs. Parâmetro de rigidez dos estribos para a coluna sobre base elástica com três graus de liberdade sem imperfeição inicial | 135 |
| Figura 4.15- Parâmetro de carga vs. Parâmetro de rigidez dos estribos para a coluna com apoios discretos e três graus de liberdade sem imperfeição inicial. | 136 |
| Figura 4.16- Parâmetro de carga vs. Parâmetro de rigidez dos estribos para a coluna sobre base elástica com seis graus de liberdade sem imperfeição inicial | 137 |

| | |
|--|-----|
| Figura 4.17- Parâmetro de carga vs. Parâmetro de rigidez dos estribos para a coluna sobre base elástica com quinze graus de liberdade sem imperfeição inicial | 137 |
| Figura 4.18- Caminho pós-crítico da coluna sobre base elástica com um grau de liberdade sem imperfeição inicial, considerando-se um modo de deformação simétrico | 138 |
| Figura 4.19 - Caminho pós-crítico da coluna sobre base elástica com um grau de liberdade sem imperfeição inicial, considerando-se um modo de deformação geral | 139 |
| Figura 4.20 - Caminho pós-crítico da coluna sobre base elástica com três graus de liberdade sem imperfeição inicial, considerando-se um modo de deformação simétrico | 139 |
| Figura 4.21 - Caminho pós-crítico da coluna sobre base elástica com três graus de liberdade sem imperfeição inicial, considerando-se um modo de deformação geral | 140 |
| Figura 4.22- Caminho pós-crítico da coluna sobre base elástica com um grau de liberdade sem imperfeição inicial, considerando-se um modo de deformação simétrico | 140 |
| Figura 4.23- Caminho pós-crítico da coluna sobre base elástica com um grau de liberdade sem imperfeição inicial, considerando-se um modo de deformação geral | 141 |
| Figura 4.24- Parâmetro de carga vs. Parâmetro de rigidez da coluna com seis graus de liberdade | 143 |
| Figura 5.1- Seção transversal do pilar | 145 |
| Figura 5.2- Parâmetro de carga vs. Parâmetro de rigidez da coluna com seis graus de liberdade | 146 |
| Figura 5.3- Parâmetro de carga vs. Parâmetro de rigidez da coluna com seis graus de liberdade, no trecho inicial do gráfico da Figura 5.2 | 146 |
| Figura 5.4- Seção e Arranjos da armadura considerados nos ensaios realizados por Queiroga (1999) | 148 |
| Figura 5.5- Seção transversal dos pilares de Sheikh & Uzumeri (1980) | 152 |

| | |
|--|-----|
| Figura 5.6– Caso 1: Arranjo das armaduras na seção transversal do pilar P1 | 157 |
| Figura 5.7- Posições de cargas para cálculo da rigidez K referente ao caso 1 | 157 |
| Figura 5.8– Caso 2: Arranjo das armaduras na seção transversal do pilar P1 | 158 |
| Figura 5.9- Posições de cargas para cálculo da rigidez K referente ao caso 2 | 159 |
| Figura 5.10– Caso 3: Arranjo das armaduras na seção transversal do pilar P1 | 160 |
| Figura 5.11- Posições de cargas para cálculo da rigidez K referente ao caso 3 | 160 |
| Figura 5.12– Caso 4: Arranjo das armaduras na seção transversal do pilar P1 | 161 |
| Figura 5.13- Posição da carga para cálculo da rigidez K referente ao caso 4 | 161 |
| Figura 5.14– Caso 5: Arranjo das armaduras na seção transversal do pilar P1 | 162 |
| Figura 5.15- Posições de cargas para cálculo da rigidez K referente ao caso 5 | 162 |
| Figura 5.16– Caso 6: Arranjo das armaduras na seção transversal do pilar P1 | 163 |
| Figura 5.17- Posições de cargas para cálculo da rigidez K referente ao caso 6 | 163 |
| Figura 5.18– Caso 7: Arranjo das armaduras na seção transversal do pilar P1 | 164 |
| Figura 5.19- Posições de cargas para cálculo da rigidez K referente ao caso 7 | 164 |
| Figura 5.20– Caso 8: Arranjo das armaduras na seção transversal do pilar P1 | 166 |
| Figura 5.21- Posições de cargas para cálculo da rigidez K referente ao caso 8 sem estribos suplementares | 167 |

| | |
|--|-----|
| Figura 5.22- Caso 1: Arranjo das armaduras na seção transversal do pilar P2 | 168 |
| Figura 5.23- Caso 1: Posições de cargas para cálculo da rigidez K no pilar P2 | 168 |
| Figura 5.24- Caso 2: Arranjo das armaduras na seção transversal do pilar P2 | 170 |
| Figura 5.25- Caso 2: Posições de cargas para cálculo da rigidez K no pilar P2 | 170 |
| Figura 5.26- Caso 3: Arranjo das armaduras na seção transversal do pilar P2 | 171 |
| Figura 5.27- Caso 4: Arranjo das armaduras na seção transversal do pilar P2 | 171 |
| Figura 5.28- Caso 5: Arranjo das armaduras na seção transversal do pilar P2 | 172 |

Lista de Tabelas

| | |
|--|-----|
| Tabela 2.1- Comparação entre resultados teóricos e experimentais. Papia <i>et al.</i> (1988) | 61 |
| Tabela 2.2 - Resumo dos resultados dos ensaios e verificação da seção resistente de concreto. Queiroga (1999) | 75 |
| Tabela 5.1 - Resumo das características dos pilares ensaiadas por Queiroga (1999). | 148 |
| Tabela 5.2 – Cálculo do diâmetro e espaçamento entre estribos para os pilares de Queiroga (1999) a partir da formulação proposta. Armadura fixa nas extremidades. | 151 |
| Tabela 5.3 – Cálculo do diâmetro e espaçamento entre estribos para os pilares de Queiroga (1999) a partir da formulação proposta. Consideração das emendas. | 151 |
| Tabela 5.4 – Valores limites para o espaçamento e diâmetro dos estribos para os pilares de Queiroga (1999) obtidos de normas de projeto de estruturas de concreto. | 152 |
| Tabela 5.5- Resumo das características dos pilares ensaiadas por Sheikh & Uzumeri (1980). | 153 |
| Tabela 5.6 – Cálculo do diâmetro e espaçamento entre estribos para os pilares de Sheikh & Uzumeri (1980) a partir da formulação proposta. Armadura fixa nas extremidades | 155 |
| Tabela 5.7 – Diâmetro e espaçamento entre estribos para os pilares de Sheikh & Uzumeri (1980) a partir da formulação proposta. Armadura livre em uma das extremidades. | 155 |
| Tabela 5.8 - Resumo das Características do Pilar | 156 |
| Tabela 5.9 – Dimensionamento dos estribos para o caso 1 | 157 |
| Tabela 5.10 – Dimensionamento dos estribos para o caso 2 | 159 |
| Tabela 5.11 – Dimensionamento dos estribos para o caso 3 | 160 |
| Tabela 5.12 – Dimensionamento dos estribos para o caso 4 | 161 |

| | |
|---|-----|
| Tabela 5.13 – Dimensionamento dos estribos para o caso 5 | 162 |
| Tabela 5.14 – Dimensionamento dos estribos para o caso 6 | 163 |
| Tabela 5.15 – Dimensionamento dos estribos para o caso 7 | 165 |
| Tabela 5.16 – Dimensionamento dos estribos para o caso 7 | 165 |
| Tabela 5.17 – Dimensionamento dos estribos para o caso 8 | 166 |
| Tabela 5.18 – Dimensionamento dos estribos para o caso 8 | 166 |
| Tabela 5.19 – Dimensionamento dos estribos para o caso 8 considerando espaçamento duplo | 167 |
| Tabela 5.20 – Dimensionamento dos estribos para o caso 8 considerando espaçamento duplo | 167 |
| Tabela 5.21 - Resumo das características do pilar P2 | 167 |
| Tabela 5.22 – Caso 1: Dimensionamento dos estribos para o pilar P2 | 169 |
| Tabela 5.23 – Caso 2: Dimensionamento dos estribos para o pilar P2 | 170 |
| Tabela 5.24 – Caso 3: Dimensionamento dos estribos para o pilar P2 | 171 |
| Tabela 5.25 – Caso 4: Dimensionamento dos estribos para o pilar P2 | 171 |
| Tabela 5.26 – Caso 5: Dimensionamento dos estribos para o pilar P2 | 172 |

Lista de Símbolos

Letras Romanas Maiúsculas

| | |
|------------|---|
| A_c | Área da seção transversal geométrica da peça |
| A_s | Área da seção transversal da armadura longitudinal tracionada |
| A_t | Área da seção transversal do estribo |
| A' | Área efetiva da seção transversal do estribo |
| C | Coefficiente de restrição |
| E_r | Módulo reduzido ou Módulo duplo |
| E | Módulo de elasticidade da armadura longitudinal |
| E_t | Módulo tangente |
| E' | Módulo efetivo do estribo |
| F_j | Forças correspondentes aos apoios elásticos |
| I | Momento de inércia da armadura longitudinal |
| I_t | Momento de inércia da seção transversal estribo |
| K | Rigidez dos estribos |
| K_f | Matriz de rigidez elástica |
| K_g | Matriz de rigidez geométrica |
| L | Comprimento de flambagem |
| M_1, M_2 | Momentos internos |
| M_j | Momento fletor devido as cargas laterais em uma determinada seção transversal |
| N_{sd} | Esforço normal aplicado |
| P | Carga axial |
| P_{cr} | Carga crítica |
| P_o | Carga crítica da barra apoiada entre dois estribos consecutivos |
| R_o | Reação horizontal na extremidade da coluna |
| \bar{R} | Raio de curvatura |

| | |
|-------------|---|
| \bar{R}_o | Raio de curvatura da estrutura indeformada |
| U | Energia interna de deformação |
| U_f | Energia de flexão |
| U_k | Energia de deformação dos estribos |
| U_m | Energia de membrana |
| U_o | Energia de deformação específica da coluna |
| V_p | Potencial das cargas externas |
| W | Carga aplicada sobre o estribo pela armadura longitudinal |

Letras Romanas Minúsculas

| | |
|--------------------|---|
| b | menor dimensão da seção transversal do pilar(NBR 6118/1978) |
| b | Dimensão do centro |
| b' | Comprimento efetivo do estribo |
| c_c | Parâmetro de carga em relação a P_o |
| f'_{cc} | Tensão máxima no concreto |
| f_{cr} | Tensão crítica de flambagem |
| f_{cd} | Resistência de cálculo do concreto à compressão |
| f_s | Tensão no aço |
| f_u | Tensão na região de deformação com encruamento |
| f_y | Tensão de escoamento do aço |
| f_{yd} | Resistência de cálculo do aço à tração |
| h | Maior dimensão da seção transversal |
| k | Rigidez dos estribos distribuída continuamente |
| m | Coefficiente numérico |
| n | Número de estribos envolvidos no modelo |
| $n_{L/2}$ | Número de estribos envolvidos na metade do sistema estrutural |
| $r = \sqrt{I/A_s}$ | Raio de giração |
| q_i | coordenadas generalizadas de um sistema contínuo discretizado |
| s | Espaçamento entre estribos |
| s_l | Espaçamento entre as barras longitudinais (NBR 6118) |
| u | Deslocamento axial |

| | |
|--------|--|
| x | Coordenada axial |
| $y(x)$ | Função que deve satisfazer as condições de contorno da coluna. |
| $w(x)$ | Campo de deslocamentos da coluna |

Letras Gregas Maiúsculas

| | |
|----------|---|
| χ | Variação da curvatura |
| Δ | Encurtamento na extremidade da coluna |
| Γ | Parâmetro adimensional da carga axial |
| Θ | Ângulo formado entre o eixo x e o eixo da viga-coluna após a deformação |

Letras Gregas Minúsculas

| | |
|-----------------|--|
| β | Variável auxiliar para a carga de flambagem obtida no trabalho de Papia <i>et al.</i> (1988) |
| δ | Deslocamento do apoio genérico |
| $\delta_{j,i}$ | Delta de Kronecker |
| ϵ_o | Deformação específica |
| ϵ_c | Deformação longitudinal do concreto |
| ϵ_{cr} | Deformação crítica que produz flambagem |
| ϵ_{sh} | Deformação do aço associada ao início da zona de deformação com encruamento |
| ϵ_{su} | Deformação última correspondente a tensão máxima |
| ϵ_u | Deformação última no concreto |
| ϵ_{xo} | Deformação específica da linha neutra |
| ϵ_{xx} | Deformação na direção x |
| ϵ_y | Deformação no aço associada a tensão de escoamento |
| ϕ_l | Diâmetro da armadura longitudinal |
| ϕ_t | Diâmetro dos estribos |

| | |
|------------|---|
| h_b, h_d | Parâmetro adimensional da rigidez dos estribos distribuídos ao longo da coluna de forma contínua e discreta, respectivamente. |
| λ | Índice de esbeltez |
| ρ | Peso específico da coluna por unidade de comprimento |
| ρ | Taxa geométrica da armadura |
| x | Parâmetro adimensional do deslocamento axial |

*“A casa fundar-se-á com a sabedoria
e fortificar-se-á com a prudência.”*

Provérbios 24,3