Capítulo 7

CTL*

CTL*, também conhecida como full computation tree logic, pode ser vista como uma extensão de CTL, e como uma extensão de PLTL (propositional linear logic). Principalmente usada no desenvolvimento e na checagem de sistemas reativos complexos, sua semântica é baseada em caminhos sobre estruturas de Kripke, onde a relação de acessibilidade é total.

Em [Emerson1984] foi provado que CTL* é decidível. Dessa forma, sabia-se que CTL* era recursivamente axiomatizável, embora não houvesse nenhuma axiomatização explicita e simples para CTL*. Tal axiomatização foi apresentada em [Reynolds2001], em 2001, o que é muito útil para este trabalho, por permitir-nos verificar que o sistema aqui desenvolvido é completo.

7.1 Sintaxe

A sintaxe de CTL* é dada por:

$A := p|true|\neg A|A_1 \wedge A_2|XA|A_1 \cup A_2|EA$

onde p é uma letra proposicional.

7.2 Semântica

Notação

se $\rho =< s_0, s_1, s_2, ... >$ é uma seqüência infinita, então ρ_i designa o elemento s_i, e $\rho_{\geq i}$ a seqüência $< s_i, s_{i+1}, s_{i+2}, ... >$.

O conjunto de fórmulas atômicas da linguagem será designado L.

Definição

Um frame de Kripke é um par (S, R) onde S é um conjunto não vazio de

estados, e R é uma relação binária total sobre S.

Definição

Uma estrutura de Kripke M é uma tripla (S, R, g) onde (S, R) é um frame de Kripke e g é uma valoração dos estados. Mais precisamente, g é uma função de S em $\mathcal{P}(L)$ (conjunto das partes de L), onde L é o conjunto de fórmulas atômicas.

Definição

Um caminho em M é uma seqüência $s_0, s_1, ...$ onde $(s_n, s_{n+1}) \in R$, para todo n.

A veracidade de uma fórmula de CTL* é avaliada em um caminho. Ou seja, escrevemos $M, b \models \alpha$ para significar que a fórmula α é verdadeira em b (que representa um caminho) na estrutura (de Kripke) $M = (S, R, g)$. A definição formal é dada a seguir:

Definição

M representando uma estrutura (S, R, g), b um caminho e α uma fórmula, definimos $M, b \models \alpha$ recursivamente da seguinte maneira:

$M, b \models true$
$M, b \models p$ sse $p \in g(b_0)$, onde $p \in L$.
$M, b \models \neg\alpha$ sse $M, b \not\models \alpha$
$M, b \models \alpha \wedge \beta$ sse $M, b \models \alpha$ e $M, b \models \beta$
$M, b \models X\alpha$ sse $M, b_{\geq 1} \models \alpha$
$M, b \models \alpha \cup \beta$ sse existe $i \geq 0$ tal que $M, b_{\geq i} \models \beta$ e para todo j tal que $0 \leq j < i$, $M, b_{\geq j} \models \alpha$
$M, b \models E\alpha$ sse existe um caminho b' tal que $b_0 = b'_0$ e $M, b' \models \alpha$

Uma fórmula de CTL* é válida quando $M, b \models \alpha$ para todo par (M, b) onde M é uma estrutura e b um caminho em M.

7.3 Dedução natural

Para o sistema em dedução natural, preferimos usar a sintaxe seguinte:

$$A := p|\bot|A_1 \rightarrow A_2|A_1 \wedge A_2|A_1 \vee A_2|XA|A_1 \cup A_2|EA$$

tendo então as seguintes abreviações:

$true \equiv \bot \rightarrow \bot$
$\neg\alpha \equiv \alpha \rightarrow \bot$
$F\alpha \equiv true \cup \alpha$
$G\alpha \equiv \neg(true \cup (\neg\alpha))$
$A\alpha \equiv \neg E\neg\alpha$
$\alpha \leftrightarrow \beta \equiv (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha)$

A semântica definida para esta sintaxe é quase a mesma que a definida logo acima, com as diferenças obvias ocorrendo para as definições de $M, b \models \bot$; $M, b \models \alpha \rightarrow \beta$ e $M, b \models \alpha \vee \beta$, (e sendo que $true$ não tem mais uma definição semântica direta):

$M, b \not\models \bot$
$M, b \models p$ sse $p \in g(b_0)$, onde $p \in L$.
$M, b \models \alpha \rightarrow \beta$ sse ($M, b \models \alpha$ implica $M, b \models \beta$)
$M, b \models \alpha \wedge \beta$ sse $M, b \models \alpha$ e $M, b \models \beta$
$M, b \models \alpha \vee \beta$ sse $M, b \models \alpha$ ou $M, b \models \beta$
$M, b \models X\alpha$ sse $M, b_{\geq 1} \models \alpha$
$M, b \models \alpha \cup \beta$ sse existe $i \geq 0$ tal que $M, b_{\geq i} \models \beta$ e para todo j tal que $0 \leq j < i$, $M, b_{\geq j} \models \alpha$
$M, b \models E\alpha$ sse existe um caminho b' tal que $b_0 = b'_0$ e $M, b' \models \alpha$

7.4 Rótulos

Os rótulos têm a seguinte estrutura:

Definição
Um prefixo é definido recursivamente da seguinte forma:
a_i e x_i são prefixos, para qualquer $i \in N$.
Se p é um prefixo então p, a_i e p, x_i são prefixos.

Definição

Todo prefixo é um rótulo.

Se p é um prefixo então p, l_i é um rótulo, para qualquer $i \in N$.

Ou seja, temos três elementos diferentes na composição de um rótulo: identificadores do tipo a_i, do tipo x_i e do tipo l_i.

Intuitivamente, elementos da forma a_i representarão estados, elementos da forma x_i representarão seqüências finitas de estados, e do tipo l_i representarão seqüências infinitas de estados. Dessa forma, todo rótulo representará um caminho (infinito).

Usaremos $l, l', ...$ para representar rótulos, $a, b, ...$ para representar elementos do tipo a_i, e $x, y, ...$ para representar elementos do tipo x_i.

7.5 Regras

Regras:

$$\frac{X\alpha^{a,l}}{\alpha^{l}}\,XE \qquad \frac{\alpha^{l}}{X\alpha^{a,l}}\,XI$$

$$\frac{E\alpha^{a,l'} \quad \begin{matrix}[\alpha^{a,l}]\\ \vdots \\ \gamma\end{matrix}}{\gamma}\,EE \qquad \frac{\alpha^{a,l}}{E\alpha^{a,l'}}\,EI$$

$$\frac{\beta^{l}}{\alpha\mathcal{U}\beta^{l}}\,\mathcal{U}I \qquad \frac{\alpha^{a,l} \quad \alpha\mathcal{U}\beta^{l}}{\alpha\mathcal{U}\beta^{a,l}}\,\mathcal{U}$$

$$\frac{\alpha\mathcal{U}\beta^{a,l} \quad \begin{matrix}[\alpha^{a,l}, \alpha\mathcal{U}\beta^{l}]\\ \vdots \\ \gamma\end{matrix} \quad \begin{matrix}[\beta^{a,l}]\\ \vdots \\ \gamma\end{matrix}}{\gamma}\,\mathcal{U}E \qquad \frac{\alpha\mathcal{U}\beta^{x,l} \quad \begin{matrix}[\beta^{l}]\\ \vdots \\ \gamma\end{matrix}}{\gamma}\,\mathcal{U}E'$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\alpha^{a,l}]\\ \vdots\\ \alpha^{x,l} \quad \alpha^{l}\end{array}}{\alpha^{l}}\, IndD \qquad \frac{\begin{array}{c}[\alpha^{l}]\\ \vdots\\ \alpha^{l} \quad \alpha^{a,l}\end{array}}{\alpha^{x,l}}\, IndR$$

$$\frac{\begin{array}{c}[\alpha^{l'}]\\ \vdots\\ EG\alpha^{l} \quad \beta^{l'}\end{array}}{EG\beta^{l}}\, KE \qquad \frac{\begin{array}{c}\alpha^{l}\\ \vdots\\ EX\alpha^{l}\end{array}}{EG\alpha^{l}}\, KI$$

$$\frac{p^{a,l}}{p^{a,l'}}\, p \qquad \frac{\bot^{l}}{\bot^{l'}}\, \bot \qquad \frac{\alpha^{l}}{\alpha^{l'}}\, *$$

com as seguintes condições:

XE: nenhuma condição.
XI: nenhuma condição.
EE: l não ocorre em γ (ou seja, no rótulo da fórmula contida em γ).
EI: nenhuma condição.
$\mathcal{U}I$: nenhuma condição.
$\mathcal{U}$: nenhuma condição.
$\mathcal{U}E$: nenhuma condição.
$\mathcal{U}E'$: l não ocorre em γ.
$IndD$: $\alpha^{a,l}$ é a única hipótese da qual α^{l} depende.
$IndR$: α^{l} é a única hipótese da qual $\alpha^{a,l}$ depende.
KE: $\alpha^{l'}$ é a única hipótese da qual $\beta^{l'}$ depende.
KI: existe uma subderivação terminando em $EX\alpha^{l}$ cuja única hipótese é α^{l}.
p: p é uma fórmula atômica.
$\bot$: nenhuma condição.
$*$: todas as hipóteses das quais α^{l} depende foram canceladas.

7.6 Completude

Para provar a completude fazemos referência ao artigo [Reynolds2001] no qual foi apresentada uma axiomatização correta e completa para CTL*. Essa axiomatização consiste em 16 axiomas e 3 regras, além das tautologias proposicionais.

Axiomas:

$F\neg\neg\alpha \leftrightarrow F\alpha$
$G(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (G\alpha \rightarrow G\beta)$
$G\alpha \rightarrow (\alpha \wedge X\alpha \wedge X(G\alpha))$
$X\neg \leftrightarrow \neg X\alpha$
$X(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (X\alpha \rightarrow X\beta)$
$G(\alpha \rightarrow X\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow G\alpha)$
$(\alpha \mathcal{U} \beta) \leftrightarrow (\beta \vee (\alpha \wedge X(\alpha \mathcal{U} \beta)))$
$(\alpha \mathcal{U} \beta) \rightarrow F\beta$
$A(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (A\alpha \rightarrow A\beta)$
$A\alpha \rightarrow AA\alpha$
$A\alpha \rightarrow \alpha$
$\alpha \rightarrow AE\alpha$
$A\neg\alpha \leftrightarrow \neg E\alpha$
$p \rightarrow Ap$
$AX\alpha \rightarrow XA\alpha$
$AG(E\alpha \rightarrow EX((E\beta)\mathcal{U}(E\alpha))) \rightarrow (E\alpha \rightarrow EG((E\beta)\mathcal{U}(E\alpha)))$

Regras:

$$\frac{\vdash \alpha}{\vdash G\alpha} \qquad \frac{\vdash \alpha}{\vdash A\alpha}$$

A prova da completude passa então pela prova de cada um desses axiomas e cada uma dessas regras. Não provamos aqui as tautologias proposicionais uma vez que podem ser obtidas sem dificuldade usando as regras associadas aos conectivos $\bot$, $\rightarrow$, $\wedge$ e $\vee$.

Embora sejam abreviações, usaremos *true* e $\neg$ constantemente em nossas provas, assim como regras derivadas para *true* e $\neg$. Faremos isso para obter provas menores.

Seguem então as provas de cada axioma e de cada regra da axiomatização

de CTL* apresentada em [Reynolds2001]. Para cada axioma é apresentada a forma na linguagem original seguida de uma forma menos abreviada em função da linguagem que escolhemos.

Para tornar as provas mais curtas, o uso da regra $\perp$ não será sempre explicitado.

7.6.1 Axiomas

Axioma 1: $F\neg\neg\alpha \leftrightarrow F\alpha$, ou seja
$true\mathcal{U}\neg\neg\alpha \leftrightarrow true\mathcal{U}\alpha$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[true\mathcal{U}\neg\neg\alpha^{x,l}]^1}{true\mathcal{U}\alpha^{x,l}}\,C1a}{true\mathcal{U}\neg\neg\alpha \rightarrow true\mathcal{U}\alpha^{x,l}}\rightarrow I_1 \quad \dfrac{\dfrac{[true\mathcal{U}\alpha^{x,l}]^2}{true\mathcal{U}\neg\neg\alpha^{x,l}}\,C1b}{true\mathcal{U}\alpha \rightarrow true\mathcal{U}\neg\neg\alpha^{x,l}}\rightarrow I_2}{true\mathcal{U}\neg\neg\alpha \leftrightarrow true\mathcal{U}\alpha^{x,l}}\wedge I$$

onde C1a e C1b representam as provas seguintes:

C1a

$$\dfrac{true\mathcal{U}\neg\neg\alpha^{x,l} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg\alpha^l]^2}{\alpha^l}}{true\mathcal{U}\alpha^l} \quad \dfrac{[true\mathcal{U}\alpha^l]^1}{true\mathcal{U}\alpha^{a,l}}}{true\mathcal{U}\alpha^{x,l}}\,IndR_1}{true\mathcal{U}\alpha^{x,l}}\,\mathcal{U}E_2'$$

C1b

$$\dfrac{true\mathcal{U}\alpha^{x,l} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha^l]^2}{\neg\neg\alpha^l}}{true\mathcal{U}\neg\neg\alpha^l} \quad \dfrac{[true\mathcal{U}\neg\neg\alpha^l]^1}{true\mathcal{U}\neg\neg\alpha^{a,l}}}{true\mathcal{U}\neg\neg\alpha^{x,l}}\,IndR_1}{true\mathcal{U}\neg\neg\alpha^{x,l}}\,\mathcal{U}E_2'$$

Axioma 2: $G(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (G\alpha \rightarrow G\beta)$, ou seja
$\neg(true\mathcal{U}\neg(\alpha \rightarrow \beta)) \rightarrow (\neg(true\mathcal{U}\neg\alpha) \rightarrow \neg(true\mathcal{U}\neg\beta))$

Axioma 3: $G\alpha \rightarrow (\alpha \wedge X\alpha \wedge X(G\alpha))$, ou seja
$\neg(true\mathcal{U}\neg\alpha) \rightarrow (\alpha \wedge X\alpha \wedge X(\neg(true\mathcal{U}\neg\alpha)))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg(true\mathcal{U}\neg\alpha)^l]^1}{\alpha^l}\,C3a \quad \dfrac{[\neg(true\mathcal{U}\neg\alpha)^l]^1}{X\alpha^{a,l}}\,C3b \quad \dfrac{[\neg(true\mathcal{U}\neg\alpha)^l]^1}{X\neg(true\mathcal{U}\neg\alpha)^{a,l}}\,C3c}{\alpha \wedge X\alpha \wedge X(\neg(true\mathcal{U}\neg\alpha))}}{\neg(true\mathcal{U}\neg\alpha) \rightarrow (\alpha \wedge X\alpha \wedge X(\neg(true\mathcal{U}\neg\alpha)))}\rightarrow I_1$$

onde C3a, C3b e C3c representam as provas seguintes:

C3a

$$\dfrac{\dfrac{[\neg\alpha^{a,l}]}{true\mathcal{U}\neg\alpha^{a,l}} \quad \neg(true\mathcal{U}\neg\alpha)^{a,l}}{\dfrac{\bot}{\alpha^{a,l}}}$$

C3b

$$\dfrac{\dfrac{\overline{true^{a,l}} \quad \dfrac{[\neg\alpha^l]}{true\mathcal{U}\neg\alpha^l}}{true\mathcal{U}\neg\alpha^{a,l}} \quad \neg(true\mathcal{U}\neg\alpha)^{a,l}}{\dfrac{\dfrac{\bot}{\alpha^l}}{X\alpha^{a,l}}}$$

C3c

$$\dfrac{\dfrac{\overline{true^{a,l}} \quad [true\mathcal{U}\neg\alpha^l]}{true\mathcal{U}\neg\alpha^{a,l}} \quad \neg(true\mathcal{U}\neg\alpha)^{a,l}}{\dfrac{\neg(true\mathcal{U}\neg\alpha)^l}{X\neg(true\mathcal{U}\neg\alpha)^{a,l}}}$$

Axioma 4: $X\neg \leftrightarrow \neg X\alpha$, ou seja
$X\neg \leftrightarrow \neg X\alpha$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[X\neg\alpha^{a,l}]}{\neg\alpha^{l}} \quad \dfrac{[X\alpha^{a,l}]}{\alpha^{l}}}{\dfrac{\bot}{\neg X\alpha^{a,l}}}}{X\neg\alpha \rightarrow \neg X\alpha^{a,l}}$$

Axioma 5: $X(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (X\alpha \rightarrow X\beta)$, ou seja
$X(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (X\alpha \rightarrow X\beta)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[X(\alpha \rightarrow \beta)^{a,l}]}{\alpha \rightarrow \beta^{l}} \quad \dfrac{[X(\alpha^{a,l})]}{\alpha^{l}}}{\beta^{l}}}{X\beta^{a,l}}}{X\alpha \rightarrow X\beta^{a,l}}}{X(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (X\alpha \rightarrow X\beta)^{a,l}}$$

Axioma 6: $G(\alpha \rightarrow X\alpha) \rightarrow (\alpha \rightarrow G\alpha)$, ou seja
$\neg(true\mathcal{U}\neg(\alpha \rightarrow X\alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg(true\mathcal{U}\neg\alpha))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha \wedge \neg(true\mathcal{U}\neg(\alpha \rightarrow X\alpha))^{a,l}]^{1}}{\alpha^{a,l}} \quad \dfrac{[\alpha \wedge \neg(true\mathcal{U}\neg(\alpha \rightarrow X\alpha))^{a,l}]^{1}}{\alpha \rightarrow X\alpha^{a,l}}\ \text{“}C3a\text{”}}{X\alpha^{a,l}}}{\alpha^{l}} \quad \dfrac{[\alpha \wedge \neg(true\mathcal{U}\neg(\alpha \rightarrow X\alpha))^{a,l}]^{1}}{\neg(true\mathcal{U}\neg(\alpha \rightarrow X\alpha))^{l}}\ \text{“}C3c\text{”}}{\alpha \wedge \neg(true\mathcal{U}\neg(\alpha \rightarrow X\alpha))^{l}}}{\alpha \wedge \neg(true\mathcal{U}\neg(\alpha \rightarrow X\alpha))^{l}}\ IndD}{\alpha^{l}} \quad [\neg\alpha^{l}]^{2}}{\dfrac{\bot^{l}}{\bot^{l'}}\bot}}{\dfrac{\bot^{l'}}{\bot^{l}}\bot}}{\neg(true\mathcal{U}\neg\alpha)^{x,l}} \rightarrow I_3}{\alpha \rightarrow \neg(true\mathcal{U}\neg\alpha)^{x,l}} \rightarrow I_4}{\neg(true\mathcal{U}\neg(\alpha \rightarrow X\alpha)) \rightarrow (\alpha \rightarrow \neg(true\mathcal{U}\neg\alpha))^{x,l}} \rightarrow_5$$

$$\dfrac{[\alpha^{x,l}]^{4} \quad [\neg(true\mathcal{U}\neg(\alpha \rightarrow X\alpha))^{x,l}]^{5}}{\alpha \wedge \neg(true\mathcal{U}\neg(\alpha \rightarrow X\alpha))^{x,l}} \quad [true\mathcal{U}\neg\alpha^{x,l}]^{3}\ \mathcal{U}E_2'$$

Axioma 7: $(\alpha \mathcal{U} \beta) \leftrightarrow (\beta \vee (\alpha \wedge X(\alpha \mathcal{U} \beta)))$, ou seja
$(\alpha \mathcal{U} \beta) \leftrightarrow (\beta \vee (\alpha \wedge X(\alpha \mathcal{U} \beta)))$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha \mathcal{U} \beta^{a,l}]^1}{\beta \vee (\alpha \wedge X(\alpha \mathcal{U} \beta))^{a,l}}\, C7a}{\alpha \mathcal{U} \beta \rightarrow \beta \vee (\alpha \wedge X(\alpha \mathcal{U} \beta))^{a,l}} \rightarrow I_1 \quad \dfrac{\dfrac{[\beta \vee (\alpha \wedge X(\alpha \mathcal{U} \beta))^{a,l}]^2}{\alpha \mathcal{U} \beta^{a,l}}\, C7b}{\beta \vee (\alpha \wedge X(\alpha \mathcal{U} \beta)) \rightarrow \alpha \mathcal{U} \beta^{a,l}} \rightarrow I_2}{(\alpha \mathcal{U} \beta) \leftrightarrow (\beta \vee (\alpha \wedge X(\alpha \mathcal{U} \beta)))} \wedge I$$

onde C7a e C7b representam as provas seguintes:

C7a

$$\dfrac{\beta \vee (\alpha \wedge X(\alpha \mathcal{U} \beta))^{a,l} \quad \dfrac{[\alpha^{a,l}]^1 \quad \dfrac{[\alpha \mathcal{U} \beta^{l}]^2}{X(\alpha \mathcal{U} \beta)^{a,l}}}{\alpha \wedge X(\alpha \mathcal{U} \beta)^{a,l}}}{\beta \vee (\alpha \wedge X(\alpha \mathcal{U} \beta))^{a,l}} \quad \dfrac{[\beta^{a,l}]^3}{\beta \vee (\alpha \wedge X(\alpha \mathcal{U} \beta))^{a,l}}}{\alpha \mathcal{U} \beta^{a,l}}\, \mathcal{U}E_{1,2,3}$$

C7b

$$\dfrac{\beta \vee (\alpha \wedge X(\alpha \mathcal{U} \beta))^{a,l} \quad \dfrac{[\beta^{a,l}]^1}{\alpha \mathcal{U} \beta^{a,l}} \quad \dfrac{\dfrac{[\alpha \wedge X(\alpha \mathcal{U} \beta)^{a,l}]^2}{\alpha^{a,l}} \quad \dfrac{[\alpha \wedge X(\alpha \mathcal{U} \beta)^{a,l}]^2}{X(\alpha \mathcal{U} \beta)^{a,l}}}{\alpha \mathcal{U} \beta^{l}}}{\alpha \mathcal{U} \beta^{a,l}}\, \vee E_{1,2}$$

Axioma 8: $(\alpha \mathcal{U} \beta) \rightarrow F\beta$, ou seja
$(\alpha \mathcal{U} \beta) \rightarrow (true \mathcal{U} \beta)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha \mathcal{U} \beta^{x,l}]^2}{\beta^{l}}}{true \mathcal{U} \beta^{l}} \quad \dfrac{[true \mathcal{U} \beta^{l}]^1}{true \mathcal{U} \beta^{a,l}}}{true \mathcal{U} \beta^{x,l}}\, IndR_1}{(\alpha \mathcal{U} \beta) \rightarrow (true \mathcal{U} \beta)^{x,l}} \rightarrow I_2$$

Axioma 9: $A(\alpha \to \beta) \to (A\alpha \to A\beta)$, ou seja
$\neg E\neg(\alpha \to \beta) \to (\neg E\neg\alpha \to \neg E\neg\beta)$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\alpha^{a,l}]^1}{E\neg\alpha^{a,l'}} \quad [\neg E\neg\alpha^{a,l'}]^5}{\bot}}{\alpha^{a,l}}\,RAA_1 \quad \dfrac{[\alpha \to \beta^{a,l}]^3}{\beta^{a,l}} \quad [\neg\beta^{a,l}]^2}{\bot}}{[E\neg\beta^{a,l'}]^4 \quad \bot}\,EE_2}{\bot}}{\neg(\alpha \to \beta)^{a,l}}\to I_3}{E\neg(\alpha \to \beta)^{a,l'}}}{[\neg E\neg(\alpha \to \beta)^{a,l'}]^6 \quad \bot}}{\neg E\neg\beta^{a,l'}}\to I_4}{\neg E\neg\alpha \to \neg E\neg\beta^{a,l'}}\to I_5}{\neg E\neg(\alpha \to \beta) \to (\neg E\neg\alpha \to \neg E\neg\beta)}\to I_6$$

Axioma 10: $A\alpha \to AA\alpha$, ou seja
$\neg E\neg\alpha \to \neg E\neg\neg E\neg\alpha$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\neg E\neg\alpha^{a,l}]^2}{E\neg\alpha^{a,l}} \quad \dfrac{[\neg\alpha^{a,l}]^1}{E\neg\alpha^{a,l'}}\,EI}{E\neg\alpha^{a,l'}}\,EE_1 \quad [E\neg\neg E\neg\alpha^{a,l}]^4}{E\neg\alpha^{a,l'}}\,EE_2 \quad \dfrac{[\neg\alpha^{a,l'}]^3}{E\neg\alpha^{a,l}}}{E\neg\alpha^{a,l}}\,EE_3 \quad [\neg E\neg\alpha^{a,l}]^5}{\bot}}{\neg E\neg\neg E\neg\alpha^{a,l}}\to I_4}{\neg E\neg\alpha \to \neg E\neg\neg E\neg\alpha^{a,l}}\to I_5$$

Axioma 11: $A\alpha \to \alpha$, ou seja
$\neg E\neg\alpha \to \alpha$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg\alpha^{a,l}]}{E\neg\alpha} \quad \dfrac{}{[\neg E\neg\alpha^{a,l}]}}{\dfrac{\bot}{\alpha^{a,l}}}}{\neg E\neg\alpha \rightarrow \alpha^{a,l}}$$

Axioma 12: $\alpha \rightarrow AE\alpha$, ou seja
$\alpha \rightarrow \neg E\neg E\alpha$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\alpha^{a,l}]^5}{E\alpha^{a,l}} \quad \dfrac{\dfrac{[E\neg E\alpha^{a,l}]^4 \qquad \dfrac{\dfrac{[E\alpha^{a,l'}]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[\neg E\alpha^{a,l}]^3 \quad \dfrac{[\alpha^{a,l}]^1}{E\alpha^{a,l}}}{\bot} EE_1}{\bot}}{\neg E\alpha^{a,l'}} \rightarrow I_2}{\neg E\alpha^{a,l'}} EE_3}{\bot}}{\neg E\neg E\alpha^{a,l}} \rightarrow I_4}{\alpha \rightarrow \neg E\neg E\alpha^{a,l}} \rightarrow I_5$$

Axioma 13: $A\neg\alpha \leftrightarrow \neg E\alpha$, ou seja
$\neg E\neg\neg\alpha \leftrightarrow \neg E\alpha$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg E\neg\neg\alpha^{a,l'}]^1}{\neg E\alpha^{a,l'}}\, C13a}{\neg E\neg\neg\alpha \rightarrow \neg E\alpha^{a,l'}} \rightarrow I_1 \quad \dfrac{\dfrac{[\neg E\alpha^{a,l'}]^2}{\neg E\neg\neg\alpha^{a,l'}}\, C13b}{\neg E\alpha \rightarrow \neg E\neg\neg\alpha^{a,l'}} \rightarrow I_2}{\neg E\neg\neg\alpha \leftrightarrow \neg E\alpha} \wedge I$$

onde C13a e C13b representam as provas seguintes:

C13a

$$\dfrac{\dfrac{[E\alpha^{a,l'}] \quad \dfrac{\dfrac{[\alpha^{a,l}]}{\neg\neg\alpha^{a,l}}}{E\neg\neg\alpha^{a,l'}}}{E\neg\neg\alpha^{a,l'}} \qquad \neg E\neg\neg\alpha^{a,l'}}{\dfrac{\bot}{\neg E\alpha^{a,l'}}}$$

C13b

$$\dfrac{\dfrac{[E\neg\neg\alpha^{a,l'}] \quad \dfrac{\dfrac{[\neg\neg\alpha^{a,l}]}{\alpha^{a,l}}}{E\alpha^{a,l'}}}{E\alpha^{a,l'}} \qquad \neg E\alpha^{a,l'}}{\dfrac{\bot}{\neg E\neg\neg\alpha^{a,l'}}}$$

Axioma 14: $p \rightarrow Ap$, ou seja
$p \rightarrow \neg E\neg p$

$$\dfrac{\dfrac{[E\neg p^{a,l}]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[p^{a,l}]^3}{p^{a,l'}} \quad [\neg p^{a,l'}]^1}{\bot}}{\bot}\, EE_1}{\dfrac{\neg E\neg p^{a,l}}{p \rightarrow \neg E\neg p^{a,l}} \rightarrow I_3}\, \rightarrow I_2$$

Axioma 15: $AX\alpha \rightarrow XA\alpha$, ou seja
$\neg E\neg X\alpha \rightarrow X\neg E\neg\alpha$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[E\neg\alpha^{b,l}]^3 \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[\neg E\neg X\alpha^{a,b,l}]^4 \quad \dfrac{[\neg X\alpha^{a,b,l'}]^1}{E\neg X\alpha^{a,b,l}}}{\bot}}{X\alpha^{a,b,l'}}\,RAA_1}{\alpha^{b,l'}} \quad [\neg\alpha^{b,l'}]^2}{\bot}}{\bot}\,EE_2}{\neg E\neg\alpha^{b,l}}\rightarrow I_3}{X\neg E\neg\alpha^{a,b,l}}}{\neg E\neg X\alpha \rightarrow X\neg E\neg\alpha^{a,b,l}}\rightarrow I_4$$

Axioma 16: $AG(E\alpha \rightarrow EX((E\beta)\mathcal{U}(E\alpha))) \rightarrow (E\alpha \rightarrow EG((E\beta)\mathcal{U}(E\alpha)))$, ou seja
$\neg E\neg\neg(true\mathcal{U}\neg(E\alpha \rightarrow EX((E\beta)\mathcal{U}(E\alpha)))) \rightarrow (E\alpha \rightarrow E\neg(true\mathcal{U}\neg((E\beta)\mathcal{U}(E\alpha))))$

A prova desse axioma é grande demais para ser apresentada de uma só vez, na linguagem na qual o sistema natural foi desenvolvido. Por isso, além de separar a prova em partes, usamos diversas abreviações: usamos as abreviações usuais G e A, como também introduzimos os símbolos θ e ψ para abreviarem as fórmulas $E\alpha \rightarrow EX(E\beta\mathcal{U}E\alpha)$ e $AG\theta \wedge (E\beta\mathcal{U}E\alpha)$, respectivamente, sendo que ao escrevermos $E\beta\mathcal{U}E\alpha$ estamos nos referindo a $(E\beta)\mathcal{U}(E\alpha)$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[AG\theta^{a,l}]^4 \quad \dfrac{[E\alpha^{a,l}]^3}{E\beta\mathcal{U}E\alpha^{a,l}}}{AG\theta\wedge(E\beta\mathcal{U}E\alpha)^{a,l}}}{(E\beta\mathcal{U}E\alpha)^{a,l}} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{[AG\theta^{a,l}]^4 \quad \dfrac{[E\alpha^{a,l}]^3}{E\beta\mathcal{U}E\alpha^{a,l}}}{AG\theta\wedge(E\beta\mathcal{U}E\alpha)^{a,l}}}{AG\theta^{a,l}}}{AG\theta^{l}}\,\pi 1 \quad [E\beta\mathcal{U}E\alpha^{l}]^1}{AG\theta\wedge E\beta\mathcal{U}E\alpha^{l}}}{X\psi^{a,l}}}{EX\psi^{a,l}} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{[AG\theta^{a,l}]^4 \quad \dfrac{[E\alpha^{a,l}]^3}{E\beta\mathcal{U}E\alpha^{a,l}}}{AG\theta\wedge(E\beta\mathcal{U}E\alpha)^{a,l}}}{AG\theta^{a,l}} \quad [E\alpha^{a,l}]^2}{EX\psi^{a,l}}\,\pi 2}{EX\psi^{a,l}}\,{}_{1,2}}{EG\psi^{a,l}}\,KI \quad \dfrac{[\psi^{a,l}]^5}{E\beta\mathcal{U}E\alpha^{a,l}}}{EG(E\beta\mathcal{U}E\alpha)^{a,l}}\,KE_5}{E\alpha\rightarrow EG(E\beta\mathcal{U}E\alpha)^{a,l}}\rightarrow I_3}{AG\theta\rightarrow(E\alpha\rightarrow EG(E\beta\mathcal{U}E\alpha))^{a,l}}\rightarrow I_4$$

Onde $\pi 1$ e $\pi 2$ se referem às seguintes provas:

$\pi 1$

$$\dfrac{\neg E(true\mathcal{U}\neg\theta)^{a,b,l} \quad \dfrac{[E(true\mathcal{U}\neg\theta)^{b,l}]^2 \qquad \dfrac{\dfrac{[true\mathcal{U}\neg\theta^{b,l'}]^1 \quad \overline{true^{a,b,l'}}}{true\mathcal{U}\neg\theta^{a,b,l'}}}{E(true\mathcal{U}\neg\theta)^{a,b,l}}}{E(true\mathcal{U}\neg\theta)^{a,b,l}} EE_1}{\dfrac{\bot}{\neg E(true\mathcal{U}\neg\theta)^{b,l}} \to I_2}$$

$\pi 2$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg E\neg\neg(true\mathcal{U}\neg(E\alpha \to EX((E\beta)\mathcal{U}(E\alpha))))^{a,l}}{\neg(true\mathcal{U}\neg(E\alpha \to EX((E\beta)\mathcal{U}(E\alpha))))^{a,l}}\ \text{“}C11''}{E\alpha \to EX((E\beta)\mathcal{U}(E\alpha))^{a,l}}\ \text{“}C3a'' \qquad E\alpha^{a,l}}{EX((E\beta)\mathcal{U}(E\alpha))^{a,l}}$$

7.6.2 Regras

Regra 1:

$$\dfrac{\vdash \alpha}{\vdash G\alpha} \quad \text{ou seja} \quad \dfrac{\vdash \alpha}{\vdash \neg(true\mathcal{U}\neg\alpha)}$$

$$\dfrac{\dfrac{[true\mathcal{U}\neg\alpha^{x,l}]^2 \qquad \dfrac{[\neg\alpha^l]^1 \quad \overline{\alpha^l}\ \vdash}{\bot}}{\bot}\ \mathcal{U}E_1'}{\dfrac{\neg(true\mathcal{U}\neg\alpha)^{x,l}}{\neg(true\mathcal{U}\neg\alpha)^l}\ *} \to I_2$$

Regra 2:

$$\frac{\vdash \alpha}{\vdash A\alpha} \quad \text{ou seja} \quad \frac{\vdash \alpha}{\vdash \neg E \neg \alpha}$$

$$\dfrac{\dfrac{[E\neg\alpha^l]^2 \qquad \dfrac{[\neg\alpha^l]^1 \quad \overline{\alpha^l}^{\,\vdash}}{\bot}}{\bot} EE_1}{\neg E\neg\alpha^l} \to I_2$$

7.7 Correção

Para a prova de correção, precisamos apresentar uma definição semântica que abranja as fórmulas rotuladas. Damos essa definição a seguir.

Como vimos mais acima, temos quatro conjuntos envolvidos na estrutura dos rótulos: $X = l_0, l_1, ...$, $Y = a_0, a_1, ...$, $Z = x_0, x_1, ...$ e K, o conjunto de rótulos propriamente dito, e que podemos enumerar como $K = k_0, k_1, ...$ (K é enumerável pois é formado de seqüências finitas de elementos de conjuntos enumeráveis).

Seja então $U = X \cup Y \cup Z \cup K$

Definição

Dado um conjunto de estados S, uma valoração para os rótulos é uma função v de U em S^ω (conjunto das seqüências infinitas enumeráveis de S) tal que:
$v(l_i) \in S^\omega$,
$v(a_i) \in S$,
$v(x_i) \in S^{<\omega}$ (seqüências finitas de S),
se $v(a_i) = s$ e $v(a_j) = d$, então $v(a, b) =< s, d >$,
se $v(a) = s$ e $v(x) =< d_0, ..., d_i >$, então $v(a, x) =< s, d_0, ..., d_i >$ e $v(x, a) =< d_0, ..., d_i, s >$
se, q sendo um prefixo, $v(q) =< s_0, ..., s_i >$ e $v(k) =< d_0, d_1, ... >$ então $v(q, k) =< s_0, ..., s_i, d_0, d_1, ... >$
(basicamente o que está sendo dito nessas propriedades é que v é um homomorfismo em relação à operação de concatenação).

Teorema: O sistema dedutivo descrito é correto.

Dizer que o sistema é correto significa que se tivermos uma prova de $\Gamma \vdash \alpha$ então para todo modelo M e toda valoração v temos que se $(M, v) \models \Gamma$ então $(M, v) \models \alpha$.

A prova é feita por indução no tamanho da prova, ou seja, percorrendo as regras uma a uma e mostrando que são corretas.

Observe que nas provas a seguir estaremos alternando constantemente entre as formulações $M, v \models \alpha^l$ onde v é uma valoração, e $M, b \models \alpha$ onde b é um caminho. Essas alternâncias serão feitas sem aviso uma vez que observando o tipo de estrutura que se encontra à direita de M não haverá ambigüidade possível.

Regra XE:

$$\frac{X\alpha^{a,l}}{\alpha^l}\, XE$$

$M, v \models X\alpha^{a,l} \;\Rightarrow\; M, v(a,l) \models X\alpha \;\Rightarrow\; M, v(l) \models \alpha \;\Rightarrow\; M, v \models \alpha^l$

Regra XI:

$$\frac{\alpha^l}{X\alpha^{a,l}}\, XI$$

$M, v \models \alpha^l \;\Rightarrow\; M, v(l) \models \alpha \;\Rightarrow\; M, < v(a), v(l) > \models X\alpha \;\Rightarrow\; M, < v(a,l) > \models X\alpha \;\Rightarrow\; M, v \models X\alpha^{a,l}$

Regra EE:

$$\frac{E\alpha^{a,l'} \quad \begin{array}{c}\alpha^{a,l}\\ \vdots \\ \gamma\end{array}}{\gamma}\, EE$$

onde l não ocorre em γ ou outra hipótese da qual γ dependa.

Seja H_1 a conjunção das hipóteses das quais $E\alpha^{a,l'}$ depende, e H_2 aquelas das quais γ depende (excluindo $\alpha^{a,l}$).

$M, v \models H_1 \wedge H_2 \;\Rightarrow\; M, v \models E\alpha^{a,l'} \;\Rightarrow\; M, v(a,l') \models E\alpha \;\Rightarrow\;$ existe

v' tal que $v'(a) = v(a)$ e $M, v'(a, l') \models \alpha$, ou seja, $M, < v(a), v(l') > \models E\alpha$. Logo existe $< s_0, s_1, ... >$ tal que $M, < v(a), s_0, s_1, ... > \models \alpha$. Tomando então v' tal que $v'(l) =< s_0, s_1, ... >$ e tal que $v'(y) = v(y)$ para todo outro elemento que não depende de l, temos que $M, v' \models \alpha$. Por outro lado, como nem l nem seus componentes ocorrem em γ ou H_2, temos que $M, v' \models H_2$. Podemos dizer também que $M, v' \models H_1$ (embora uma pequena explicação seja necessária: como l não ocorre em γ ou H_2, poderíamos substituir l e seus componentes por outros que não interfiram com H_1, e ainda assim termos uma prova de $H_2, \alpha^{a,l''} \vdash \gamma$). Logo por hipótese de indução, $M, v' \models \gamma$. Logo $M, v \models \gamma$, pois l não ocorre em γ.

Regra EI:

$$\frac{\alpha^{a,l}}{E\alpha^{a,l'}}\, EI$$

$M, v \models \alpha^{a,l} \Rightarrow M, v(a, l) \models \alpha \Rightarrow M, < v(a), s_0, s_1, ... > \models \alpha \Rightarrow M, < v(a), s'_0, s'_1, ... > \models E\alpha$ para qualquer seqüência $< s'_0, s'_1, ... >, \Rightarrow M, < v(a), v(l') > \models E\alpha \Rightarrow M, v(a, l') \models E\alpha \Rightarrow M, v \models E\alpha^{a,l'}$

Regra $\mathcal{U}I$:

$$\frac{\beta^l}{\alpha\mathcal{U}\beta^l}\, \mathcal{U}I$$

trivial

Regra $\mathcal{U}$:

$$\frac{\alpha^{a,l} \quad \alpha\mathcal{U}\beta^l}{\alpha\mathcal{U}\beta^{a,l}}\, \mathcal{U}$$

trivial

Regra $\mathcal{U}E$:

$$\dfrac{\alpha\mathcal{U}\beta^{a,l} \qquad \begin{array}{c}[\alpha^{a,l},\alpha\mathcal{U}\beta^{l}]\\ \vdots\\ \gamma\end{array} \qquad \begin{array}{c}[\beta^{a,l}]\\ \vdots\\ \gamma\end{array}}{\gamma}\,\mathcal{U}E$$

A prova decorre diretamente do fato que se $M, v \models \alpha\mathcal{U}\beta^{a,l}$ então ($M, v \models \alpha^{a,l}$ e $M, v \models \alpha\mathcal{U}\beta^{l}$) ou $M, v \models \beta^{a,l}$

Regra $IndD$:

$$\dfrac{\alpha^{x,l} \qquad \begin{array}{c}[\alpha^{a,l}]\\ \vdots\\ \alpha^{l}\end{array}}{\alpha^{l}}\,IndD$$

onde $\alpha^{a,l}$ é a única hipótese da qual α^{l} depende.

$M, v \models \alpha^{x,l} \Rightarrow M, < v(x), v(l) > \models \alpha$. Seja $< s_0, ..., s_n >= v(x)$. Logo $M, < s_0, ..., s_n, v(l) > \models \alpha$. Considere v_1 tal que $v_1(a) = s_0$ e $v_1(l) =< s_1, ..., s_n, v(l) >$. Da mesma forma defina $v_2(a) = s_1$ e $v_2(l) =< s_2, ..., s_n, v(l) >$, e assim por diante até definir $v_{n+1}(a) = s_n$ e $v_{n+1}(l) = v(l)$. (Nos componentes que não estão ligados a l, mantenha $v_i(y) = v(y)$). Dessa forma temos $M, < s_0, ..., s_n, v(l) > \models \alpha \Rightarrow M, < v_1(a), v_1(l) > \models \alpha \Rightarrow M, v_1 \models \alpha^{a,l} \Rightarrow M, v_1 \models \alpha^{l}$ (por hipótese de indução), $\Rightarrow M, v_1(l) \models \alpha \Rightarrow M, < s_1, ..., s_n, v(l) > \models \alpha \Rightarrow M, < v_2(a), v_2(l) > \models \alpha \Rightarrow M, v_2 \models \alpha^{a,l} \Rightarrow M, v_2 \models \alpha^{l}$ (hipótese de indução). E assim por diante até obtermos $M, v_n \models \alpha^{l}$, que leva a $M, v_n(l) \models \alpha \Rightarrow M, v(l) \models \alpha \Rightarrow M, v \models \alpha^{l}$

Regra $IndR$:

$$\dfrac{\begin{array}{c}[\alpha^{l}]\\ \vdots\\ \alpha^{l}\end{array} \qquad \alpha^{a,l}}{\alpha^{x,l}}\,IndR$$

onde α^{l} é a única hipótese da qual $\alpha^{a,l}$ depende.

A prova é semelhante à prova da regra $IndD$.

Regra $\mathcal{U}E'$:

$$\frac{\alpha\mathcal{U}\beta^{x,l} \quad \begin{matrix}[\beta^l]\\ \vdots \\ \gamma\end{matrix}}{\gamma}\,\mathcal{U}E$$

onde l não ocorre em γ.

$M, v \models \alpha\mathcal{U}\beta^{x,l} \Rightarrow M, < v(x)v(l) > \models \alpha\mathcal{U}\beta \Rightarrow M, < s_0, ..., s_n, v(l) > \models \alpha\mathcal{U}\beta$ que notaremos temporariamente $M, < d_0, d_1, ... > \models \alpha\mathcal{U}\beta$. Logo para algum i, $M, < d_i, d_{i+1}, ... > \models \beta$. Logo tomando $v'(l) =< d_i, d_{i+1}, ... >$ e $v'(y) = v(y)$ para os componentes que não dependem de l, temos $M, v' \models \beta^l$, que por hipótese de indução leva a $M, v' \models \gamma$. Como l não ocorre em γ temos $M, v \models \gamma$.

Regra p:

$$\frac{p^{a,l}}{p^{a,l'}}\,p$$

Trivial, pois a verdade de uma fórmula atômica só depende do estado inicial do caminho considerado.

Regra $\perp$:

$$\frac{\perp^l}{\perp^{l'}}\,\perp$$

Trivial

Regra $*$:

$$\frac{\alpha^l}{\alpha^{l'}}\,*$$

Se todas as hipóteses de α^l foram canceladas.

Pela condição imposta na regra, temos que $M, v \models \alpha^l$ para todo v. Assim, se não fosse $M, v \models \alpha^{l'}$ para todo v, teríamos v' tal que $M, v' \not\models \alpha^{l'}$. Tomando então v'' tal que $v''(l) = v'(l')$ teríamos $M, v'' \not\models \alpha^l$.

7.8 Normalização

Na tentativa de normalizar as provas de CTL*, procuramos reduções para cada tipo de fórmula máxima. Porém, não foi possível encontrar reduções para todos os casos. Abaixo tentamos ilustrar essa situação mostrando alguns exemplos de fórmulas máximas para as quais temos reduções, e mostrando uma situação que pensamos ser problemática.

Alguns exemplos de reduções para eliminar fórmulas máximas:

$$\dfrac{\dfrac{\beta^{a,l}}{\alpha \mathcal{U} \beta^{a,l}}\,\mathcal{U}I \qquad \begin{matrix}[\alpha^{a,l}, \alpha \mathcal{U} \beta^{l}] \\ \vdots \\ \gamma\end{matrix} \qquad \begin{matrix}[\beta^{a,l}] \\ \vdots \\ \gamma\end{matrix}}{\gamma}\,\mathcal{U}E \qquad \text{se reduz a} \qquad \begin{matrix}\beta^{a,l} \\ \vdots \\ \gamma\end{matrix}$$

$$\dfrac{\dfrac{\beta^{x,l}}{\alpha \mathcal{U} \beta^{x,l}}\,\mathcal{U}I \qquad \begin{matrix}[\beta^{l}] \\ \vdots \\ \gamma\end{matrix}}{\gamma}\,\mathcal{U}E' \qquad \text{se reduz a} \qquad \begin{matrix}\beta^{l}[l \leftarrow x, l] \\ \vdots \\ \gamma\end{matrix}$$

pois l não ocorre em γ.

$$\dfrac{\dfrac{\alpha^l}{X\alpha^{a,l}}\,XI}{\alpha^l}\,XE \qquad \text{se reduz a} \qquad \alpha^l$$

$$\dfrac{\dfrac{\alpha^{a,l_1}}{E\alpha^{a,l'}}\,EI \qquad \begin{matrix}[\alpha^{a,l_2}]\\ \vdots\\ \gamma\end{matrix}}{\gamma} \qquad \text{se reduz a} \qquad \begin{matrix}\alpha^{a,l_2}[l_2 \leftarrow l_1]\\ \vdots\\ \gamma\end{matrix}$$

pois l_2 não ocorre em γ.

Para o caso abaixo não temos solução:

$$\dfrac{\dfrac{\begin{matrix}\alpha^{a,l'}\\ \vdots\\ EX\alpha^{a,l'}\end{matrix}}{EG\alpha^{a,l'}}\,KI \qquad \begin{matrix}[\alpha^{a,l}]\\ \vdots\\ \beta^{a,l}\end{matrix}}{EG\beta^{a,l'}}\,KE$$

Esse problema é semelhante ao encontrado em CTL, e tem provavelmente a mesma explicação; citamos novamente o comentário de Prawitz [Prawitz1971]: "Isso confirma a situação bem conhecida onde sentimos que devemos provar um teorema bem mais forte do que aquele que nos interessa, para podermos provar o passo indutivo".